POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Dalla Delta di Dirac alla Funzione d'Onda: Guida Intuitiva e Formale alle Funzioni di Green e ai Propagatori

Original
Dalla Delta di Dirac alla Funzione d'Onda: Guida Intuitiva e Formale alle Funzioni di Green e ai Propagatori / Sparavigna, A.C.. - (2026). [10.5281/zenodo.22055560]

Availability:
This version is available at: 11583/3014748 since: 2026-08-22T09:22:58Z

Publisher:

Published
DOI:10.5281/zenodo.22055560

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

11 October 2026

Dalla Delta di Dirac alla Funzione d'Onda: Guida Intuitiva e Formale alle Funzioni di Green e ai Propagatori

Amelia Carolina Sparavigna[1] e **Gemini (Modello Linguistico di Google)**[2]

[1] DISAT, Politecnico di Torino, [2] Gemini AI

DOI:

Il presente lavoro offre una trattazione didattica, concettuale e formale del legame tra le funzioni di Green e i propagatori quantistici, evidenziando il loro ruolo comune quali risposte impulsive fondamentali nei sistemi differenziali fisici. Partendo dalla definizione matematica di base fondata sulla distribuzione delta di Dirac e dal principio di sovrapposizione lineare, il testo esplora il concetto attraverso un gradiente di complessità applicativa: dall'elettrostatica classica al potenziale di Laplace-Beltrami su varietà curvilinee compatte (S^2), fino all'elettrodinamica quantistica e alla meccanica analitica. Mediante la formalizzazione dell'integrale di cammino di Feynman, viene derivato in dettaglio il propagatore esatto dell'oscillatore armonico unidimensionale, risolvendo esplicitamente le sottigliezze dimensionali e la separazione tra traiettoria classica e fluttuazioni quantistiche. Attraverso una analogie fisiche (come la diffusione termica), l'opera getta infine un ponte verso la fisica della materia condensata e la spettroscopia, mostrando come la parte immaginaria della funzione di Green ritardata origini i profili di riga lorentziani e determini la densità degli stati del sistema.

Se dovessimo spiegare le **funzioni di Green** usando una metafora, quella culinaria potrebbe andar bene. Potremmo dire che la funzione di Green è la **"ricetta base"** (o la risposta impulsiva) che dice come reagisce un sistema quando gli viene dato un singolo "pizzico" puntiforme di ingrediente (una sorgente concentrata, ovvero una delta di Dirac δ). Una volta che si sa come reagisce il piatto a quell'unico pizzico, si può ricostruire il sapore dell'intera pietanza semplicemente sommando — o meglio, *integrando* — l'effetto di tutti i pizzichi distribuiti nello spazio o nel tempo.

La Definizione Matematica

In termini matematici, consideriamo un operatore differenziale lineare $\mathcal{L}$ (come il Laplaciano ∇^2, l'operatore delle onde, o l'operatore di Schrödinger) agente su una funzione $u(r)$ con una sorgente $f(r)$:

$$\mathcal{L}\,u(r) = f(r)$$

La **funzione di Green** $G(r, r')$ è la soluzione dell'equazione differenziale quando la sorgente $f(r)$ è una **distribuzione delta di Dirac** centrata nel punto r':

$$\mathcal{L}\,G(r, r') = \delta(r - r')$$

La Proprietà di Sovrapposizione

Poiché l'operatore $\mathcal{L}$ è lineare, possiamo applicare il principio di sovrapposizione. La soluzione generale $u(r)$ per una generica sorgente $f(r)$ si ottiene mediante la "somma continua" (convoluzione):

$$u(r) = \int G\,(r, r')\, f(r')\, dr'$$

Se si applica $\mathcal{L}$ a questa soluzione $u(r)$ e si porta l'operatore dentro l'integrale, si ritrova immediatamente $\mathcal{L}u(r) = \int \delta\,(r - r') f(r') dr' = f(r)$.

Un Esempio Classico: L'Elettrostatica

In elettrostatica, l'equazione di Poisson lega il potenziale elettrico $\phi(r)$ alla densità di carica $\rho(r)$:

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

La funzione di Green per l'operatore Laplaciano ∇^2 nello spazio tridimensionale libero risolve:

$$\nabla^2 G(r, r') = \delta(r - r')$$

La soluzione fondamentale è ben nota:

$$G(r, r') = -\frac{1}{4\pi |r - r'|}$$

Ed infatti, il potenziale completo $u(r) = \phi(r)$ generato da una distribuzione di carica $\rho(r)$ diventa:

$$\phi(r) = \int \left(-\frac{1}{4\pi |r - r'|}\right)\left(-\frac{\rho(r')}{\varepsilon_0}\right) dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|r - r'|}\, dr'$$

Ovvero la familiare legge di Coulomb integrata su tutto lo spazio.

Le Condizioni al Contorno

La bellezza delle funzioni di Green risiede anche nel modo in cui gestiscono le **condizioni al contorno** (Dirichlet, Neumann, ecc.).

Quando il problema non è nello spazio libero ma su un dominio limitato Ω con un bordo $\partial\Omega$:

- La funzione di Green si divide in due parti:
$$G(r, r') = G_0(r, r') + H(r, r')$$
- G_0 è la **soluzione fondamentale** nello spazio libero (che gestisce la singolarità della delta).
- $H(r, r')$ è una **funzione armonica** ($\mathcal{L}H = 0$) scelta ad hoc per far rispettare a G le condizioni richieste sul bordo (ad esempio $G(r, r') = 0$ per $r \in \partial\Omega$).

Un metodo geometrico per trovare H in domini con simmetria (come sfere o piani) è il **metodo delle cariche immagine** (vedi Appendice A).

In Fisica Teorica e Meccanica Quantistica

Nelle teorie di campo, nella meccanica quantistica e nella fisica dello stato solido, le funzioni di Green assumono una veste dinamica e temporale (spesso chiamate **propagatori**):

- **Matrice S e Diagrammi di Feynman:** Il propagatore quantistico descrive l'ampiezza di probabilità che una particella si propaghi da un punto dello spazio-tempo (r', t') a un altro (r, t).
- **Equazione di Lippmann-Schwinger:** Nella teoria dello scattering, la funzione di Green descrive come un'onda incidente viene diffusa da un potenziale bersaglio.
- **Sistemi a molti corpi:** Le funzioni di Green permettono di calcolare le risposte spettrali (come la densità degli stati) di materiali complessi inclusi gli effetti di correlazione ed interazione.

Una piccola nota di simmetria (Reciprocità):

Per operatori auto-aggiunti, la funzione di Green gode della proprietà di reciprocità:

$$G(r, r') = G(r', r)$$

Significa che l'effetto misurato nel punto r dovuto a una sorgente posta in r' è identico all'effetto che misureresti in r' ponendo la stessa sorgente in r.

Facciamo ora alcini esempi di utilizzo delle funzioni di Green.

Esempi

Esempio 1: Operatori Differenziali su Varietà Curvilinee
Il Laplaciano sulla Sfera S^2 e le Funzioni Armoniche

Se lavoriamo su una superficie curva (una varietà riemanniana come una sfera di raggio R), l'operatore differenziale diventa l'operatore di Laplace-Beltrami Δ_{LB}. L'equazione per la funzione di Green è:

$$\Delta_{LB}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi R^2}$$

(Nota: il termine costante $-1/(4\pi R^2)$ serve per il teorema della divergenza su una superficie chiusa e compatto senza bordo).

- **La Soluzione:** Sfruttando la simmetria sferica, se poniamo la sorgente al polo nord, la funzione di Green dipende solo dall'angolo polare θ (o dalla distanza geodetica):

$$G(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\ln(1 - \cos\theta) + \text{costante}$$

- **Il significato:** La singolarità logaritmica $-\ln(\theta)$ vicino alla sorgente ($\theta \to 0$) è il comportamento tipico bidimensionale. Lo sviluppo in serie di questa funzione di Green dà origine direttamente ai **polinomi di Legendre** e alle **armoniche sferiche** $Y_{lm}(\theta, \phi)$, che usiamo comunemente per descrivere gli orbitali atomici o i modi di vibrazione di una sfera.

Si chiede a Gemini il dettagio del calcolo. Attenzione all'uso che fa Gemini delle variabili adimensionate.

L'Operatore di Laplace-Beltrami sulla Sfera S^2

Consideriamo una sfera di raggio $R = 1$ (per semplicità di notazione; per un raggio R generico basterà dividere per R^2).

L'operatore di Laplace-Beltrami in coordinate sferiche (θ, ϕ) è:

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Scegliamo di posizionare la **sorgente al Polo Nord** ($\theta' = 0$). Per simmetria azimutale, la funzione di Green $G(\theta)$ dipenderà esclusivamente dall'angolo polare θ, annullando tutte le derivate rispetto a ϕ:

$$\Delta_{LB}\, G(\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dG}{d\theta}\right)$$

L'Equazione Differenziale Fuori dalla Singolarità

L'equazione da risolvere su tutta la sfera è:

$$\Delta_{LB}\, G(\theta) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r'}_N) - \frac{1}{4\pi}$$

dove $-1/(4\pi)$ è il termine di background uniforme necessario affinché l'integrale dell'equazione su tutta la sfera rispetti il teorema della divergenza:

$$\int_{S^2} \Delta_{LB}\, G\, d\Omega = 0 = \int_{S^2} \delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{r'}_N) d\Omega - \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} d\,\Omega = 1 - \frac{1}{4\pi}(4\pi) = 0$$

Per tutti i punti **fuori dal Polo Nord** ($\theta > 0$), la delta di Dirac si annulla e l'equazione diventa una semplice equazione differenziale ordinaria:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dG}{d\theta}\right) = -\frac{1}{4\pi}$$

Integrazione Passo-Passo

Primo Integrale

Moltiplichiamo entrambi i membri per $\sin\theta$:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dG}{d\theta}\right) = -\frac{1}{4\pi}\sin\theta$$

Integrando rispetto a θ:

$$\sin\theta\frac{dG}{d\theta} = -\frac{1}{4\pi}\int \sin\theta\ d\theta = \frac{1}{4\pi}\cos\theta + C_1$$

Per determinare la costante di integrazione C_1, analizziamo il comportamento al **Polo Sud** ($\theta = \pi$). Al Polo Sud non ci sono sorgenti puntiformi, quindi il gradiente/flusso deve rimanere regolare (finito). Affinché la derivata $\frac{dG}{d\theta}$ non diverga quando $\sin(\pi) = 0$, il membro di destra deve annullarsi in $\theta = \pi$:

$$\frac{1}{4\pi}\cos(\pi) + C_1 = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{4\pi} + C_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = \frac{1}{4\pi}$$

Sostituendo C_1:

$$\sin\theta\frac{dG}{d\theta} = \frac{1}{4\pi}(\cos\theta + 1)$$

Divisione per $\sin\theta$:

$$\frac{dG}{d\theta} = \frac{1}{4\pi}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

Usando le identità trigonometriche dell'angolo dimezzato $\frac{1+\cos\theta}{\text{si}} = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$\frac{dG}{d\theta} = \frac{1}{4\pi}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Secondo Integrale

Integrando direttamente in θ:

$$G(\theta) = \frac{1}{4\pi}\int \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{4\pi}\cdot 2\ln\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + C_2$$

$$G(\theta) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + C_2$$

Poiché $1-\cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Longrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$, possiamo riscrivere il logaritmo sfruttando le proprietà delle potenze:

$$G(\theta) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{1/2} + C_2 = \frac{1}{4\pi}\ln(1-\cos\theta) - \frac{1}{4\pi}\ln 2 + C_2$$

Raggruppando le costanti in un'unica costante arbitraria C:

$$G(\theta) = \frac{1}{4\pi}\ln(1-\cos\theta) + C$$

Verifica della Singolarità al Polo Nord ($\theta \to 0$)

Verifichiamo che la costante e il segno corrispondano esattamente alla delta di Dirac al Polo Nord. Quando $\theta \to 0$, usiamo l'approssimazione di Taylor $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$:

$$1-\cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}$$

$$G(\theta) \approx \frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln\theta - \frac{\ln 2}{4\pi} + C$$

Poiché la distanza geodetica dal Polo Nord è $r \approx \theta$, il comportamento asintotico locale è:

$$G(r) \sim \frac{1}{2\pi}\ln r$$

In $2D$, la soluzione fondamentale del Laplaciano $\nabla^2 G = \delta^2(\mathbf{r})$ è proprio $\frac{1}{2\pi}\ln r$. Il coefficiente è quindi esatto.

Discussione ulteriore sulle dimensioni
Come si vede Gemini propone una distanza geodetica $r \approx \theta$. Cogliamo l'occasione per chiedere all'AI le dimensioni reali.
Se guardiamo le unità di misura, c'è un'incoerenza fondamentale nello scrivere semplicemente $\ln r$ quando r è una lunghezza formale con dimensioni [L] (perché l'argomento di un logaritmo deve essere **sempre adimensionato**). Vediamo dove nasce e come si risolve formalmente questa apparente incongruenza dimensionale, sia dal punto di vista geometrico che da quello analitico.

L'Origine dell'Inghippo: Raggio della Sfera e Coordinate Adimensionali
Nel calcolo precedente abbiamo posto per comodità il raggio della sfera $R = 1$. Quando $R = 1$, l'angolo θ (in radianti, che è adimensionato) coincide numericamente con la distanza geodetica sulla sfera $s = R\theta$. Ma se reintroduciamo esplicitamente il raggio R con le sue dimensioni di lunghezza [L]:

1. La distanza geodetica reale dal Polo Nord è $s = R \cdot \theta \Longrightarrow \theta = \frac{s}{R}$ (adimensionale).
2. L'operatore di Laplace-Beltrami ha dimensioni $[\mathrm{L}]^{-2}$:
$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2}\nabla^2_{\theta,\phi}$$
3. La delta di Dirac bidimensionale sulla sfera ha anch'essa dimensioni di un'area inversa $[\mathrm{L}]^{-2}$.

Quindi l'equazione reale con le dimensioni corrette è:
$$\Delta_{LB}\, G(s) = \delta^2(\mathbf{s}) - \frac{1}{4\pi R^2}$$
Poiché Δ_{LB} ha dimensioni $[\mathrm{L}]^{-2}$ e la delta $\delta^2(\mathbf{s})$ ha dimensioni $[\mathrm{L}]^{-2}$, la funzione di Green $G(s)$ deve essere un numero **adimensionato.**

Il Comportamento Asintotico Corretto (Adimensionale)
Reintroducendo R nell'integrazione, l'argomento del logaritmo rimane rigorosamente adimensionale:
$$G(\theta) = \frac{1}{4\pi}\ln(1 - \cos\theta) + C$$
Quando ci avviciniamo al Polo Nord ($\theta \to 0$), sapendo che $\theta = s/R$:
$$1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{s}{R}\right)^2$$
Sostituendo nell'espressione della funzione di Green:
$$G(s) \approx \frac{1}{4\pi}\ln\left[\frac{1}{2}\left(\frac{s}{R}\right)^2\right] + C = \frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{s}{R}\right)^2 - \frac{\ln 2}{4\pi} + C$$
Sfruttando la proprietà dei logaritmi $\ln(x^2) = 2\ln x$:
$$G(s) \approx \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{s}{R}\right) + \text{costante}$$
Ecco che **le dimensioni tornano perfettamente**:

- L'argomento del logaritmo è il rapporto adimensionale tra due lunghezze: $\frac{s}{R} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{L}]}$.
- $G(s)$ è adimensionale.

Il Confronto con il Piano $2D$ Euclideo
Nel piano euclideo piatto $2D$, quando scriviamo l'equazione per il Laplaciano standard:
$$\nabla^2 G_{2D}(\mathbf{r}) = \delta^2(\mathbf{r}).$$
La funzione di Green classica che si trova sui libri è spesso scritta come $G_{2D}(r) = \frac{1}{2\pi}\ln r$. Ma rigorosamente, anche sul piano euclideo serve una **scala di lunghezza di riferimento** r_0 (che definisce il punto in cui la funzione di Green si annulla) per rendere l'argomento adimensionale:
$$G_{2D}(r) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{1}{2\pi}\ln r - \frac{1}{2\pi}\ln r_0$$

Sulla sfera, il ruolo di questa "lunghezza di riferimento" r_0 viene fornito in modo del tutto naturale dalla **curvatura della sfera stessa**, ovvero dal suo raggio R. Pertanto è proprio l'introdurre il rapporto $\ln(s/R)$ che garantisce l'omogeneità dimensionale del problema fisicamente e matematicamente.

Sviluppo in Serie in Polinomi di Legendre
Per collegare la funzione di Green alle **armoniche sferiche**, utilizziamo la nota espansione analitica della funzione logaritmica in serie di polinomi di Legendre $P_l(\cos\theta)$:

$$\ln(1-\cos\theta) = -\ln 2 - 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{P_l(\cos\theta)}{l}$$

Sostituendo questa espansione nella nostra funzione di Green $G(\theta)$:

$$G(\theta) = \frac{1}{4\pi}\left(-\ln 2 - 2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{P_l(\cos\theta)}{l}\right) + C$$

Se scegliamo la costante $C = \frac{\ln}{4\pi}$ (in modo che la media della funzione di Green sulla sfera sia nulla $\int_{S^2} G\ d\Omega = 0$), la forma spettrale/armonica diventa:

$$G(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{l(l+1)}P_l(\cos\theta)$$

Connessione con gli Autovalori del Laplaciano:
Ricordiamo che gli autovalori dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera S^2 sono $\lambda_l = -l(l+1)$ con le armoniche sferiche $Y_{lm}(\theta,\phi)$ come autofunzioni. Usando il teorema di addizione per le armoniche sferiche:

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Otteniamo la classica **rappresentazione spettrale analitica di Lehmann**:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}^*(\mathbf{r}')Y_{lm}(\mathbf{r})}{-l(l+1)}$$

Il calcolo è completo: dimostra formalmente come dalla risoluzione dell'equazione differenziale con la singolarità logaritmica $2D$ si arrivi alla somma sugli autovalori del Laplaciano sferico $-l(l+1)$.

Esempio 2: Propagatori in Meccanica Quantistica

L'Oscillatore Armonico Quantistico (Propagatore di Feynman)

In meccanica quantistica, la funzione di Green dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo è il **propagatore** $K(x,t;x',0)$, che rappresenta l'ampiezza di probabilità che una particella localizzata in x' al tempo $t=0$ si trovi in x al tempo t:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)K(x,t;x',0) = i\hbar\,\delta(x-x')\delta(t)$$

Per un **oscillatore armonico unidimensionale** con massa m e frequenza ω, il propagatore esatto (calcolabile tramite l'integrale di cammino di Feynman) è:

$$K(x,t;x',0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega t)}}\exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega t)}\left((x^2+x'^2)\cos(\omega t) - 2xx'\right)\right]$$

- **Cosa ci dice?** Se conosci la funzione d'onda iniziale $\psi(x',0)$, basta integrarla con $K(x,t;x',0)$ per conoscere l'evoluzione temporale $\psi(x,t)$ a qualsiasi istante futuro. Inoltre, per $t \to 2\pi/\omega$ (un periodo classico completo), la particella ritorna esattamente allo stato iniziale.

Si noti che il propagatore $K(x,t;x',0)$ in una dimensione spaziale ha dimensioni di una **lunghezza inversa**, ovvero:

$$[K] = \mathrm{L}^{-1} \quad (\text{o } \mathrm{m}^{-1} \text{ nel Sistema Internazionale})$$

Ecco le due verifiche indipendenti che lo confermano:

1. Verifica dall'Equazione Differenziale con la Delta di Dirac Dall'equazione dell'operatore di Schrödinger con sorgente:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) K(x,t;x',0) = i\hbar\,\delta(x-x')\delta(t)$$

- **Membro di sinistra:** Ha le dimensioni di [Energia] · $[K]$.
- **Membro di destra:** $i\hbar$ ha le dimensioni di una [Azione] = [Energia] · [Tempo]. Le distribuzioni δ hanno dimensioni pari all'inverso del loro argomento:
  - $[\delta(x-x')] = \mathrm{L}^{-1}$
  - $[\delta(t)] = \mathrm{T}^{-1}$
  - Il prodotto a destra ha dunque dimensioni: [Energia] · [Tempo] · $\mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{T}^{-1}$ = [Energia] · L^{-1}.

Uguagliando:

$$[\text{Energia}] \cdot [K] = [\text{Energia}] \cdot \mathrm{L}^{-1} \Longrightarrow [K] = \mathrm{L}^{-1}$$

2. Verifica dall'Espressione Analitica dell'Oscillatore Armonico Nell'espressione del propagatore:

$$K(x,t;x',0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega t)}}\exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega t)}\left((x^2+x'^2)\cos(\omega t) - 2xx'\right)\right]$$

L'argomento dell'esponenziale è adimensionale [massa per velocità al quadrato diviso energia], quindi le dimensioni fisiche di K sono interamente determinate dal prefattore sotto radice:

- $[m] = \mathrm{M}$ (massa)
- $[\omega] = \mathrm{T}^{-1}$ (frequenza)
- $[\hbar] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-1}$ (costante di Planck ridotta, azione)
- $[\sin(\omega t)]$ è adimensionale

Sostituendo le dimensioni nel prefattore:

$$\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right] = \sqrt{\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-1}}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{L}^2}} = \mathrm{L}^{-1}$$

Significato Fisico Dimensionalmente $K(x,t;x',0)$ è una densità di ampiezza di probabilità: quando lo integri rispetto alla posizione iniziale x' per ottenere la funzione d'onda al tempo t, $\psi(x,t) = \int K\,(x,t;x',0)\psi(x',0)\,dx'$, il fattore dx' (dimensione L) compensa esattamente la dimensione L^{-1} di K, restituendo per $\psi(x,t)$ la corretta dimensione di una funzione d'onda 1D ($\mathrm{L}^{-1/2}$).

Calcolo del propagatore

Per calcolare il propagatore $K(x_b,T;x_a,0)$, usiamo l'integrale sulle traiettorie:

$$K(x_b,T;x_a,0) = \int \mathcal{D}\,[x(t)]\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\right)$$

dove l'azione classica per l'oscillatore armonico è:

$$S[x(t)] = \int_0^T \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)dt$$

Decomposizione Attorno alla Traiettoria Classica

Poiché la lagrangiana è un polinomio di secondo grado nelle posizioni e nelle velocità (un'azione quadratica), possiamo decomporre una generica traiettoria $x(t)$ nella somma tra la **traiettoria classica** $\bar{x}(t)$ (che minimizza l'azione) e una **fluttuazione quantistica** $y(t)$:

$$x(t) = \bar{x}(t) + y(t)$$

con le condizioni al contorno:

- Per $x(t)$: $x(0) = x_a$ e $x(T) = x_b$
- Per $\bar{x}(t)$: $\bar{x}(0) = x_a$ e $\bar{x}(T) = x_b$
- Per le fluttuazioni $y(t)$: $y(0) = 0$ e $y(T) = 0$

Espandendo l'azione $S[\bar{x} + y]$ attorno a $\bar{x}(t)$, i termini lineari in $y(t)$ si annullano per le equazioni di Eulero-Lagrange. L'azione si separa esattamente in due parti:

$$S[x(t)] = S_{cl}[x_a, x_b, T] + S[y(t)]$$

Di conseguenza, il propagatore si fattorizza nel prodotto tra il **fattore di fase classico** e il **determinante quantistico delle fluttuazioni** $F(T)$:

$$K(x_b, T; x_a, 0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a, T)\right) \cdot \underbrace{\int_{y(0)=0}^{y(T)=0} \mathcal{D}\,[y(t)]\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[y(t)]\right)}_{F(T)}$$

$$K(x_b, T; x_a, 0) = F(T) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a, T)\right)$$

Calcolo dell'Azione Classica S_{cl}

L'equazione del moto classica è $\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \bar{x} = 0$. La soluzione generale che soddisfa $\bar{x}(0) = x_a$ e $\bar{x}(T) = x_b$ è:

$$\bar{x}(t) = \frac{x_b - x_a \cos(\omega T)}{\sin(\omega T)} \sin(\omega t) + x_a \cos(\omega t)$$

Integriamo per parti l'azione classica:

$$S_{cl} = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m \dot{\bar{x}}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 \bar{x}^2\right) dt = \left[\frac{1}{2} m \bar{x} \dot{\bar{x}}\right]_0^T - \frac{1}{2} m \int_0^T \bar{x} \underbrace{(\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \bar{x})}_{=0} dt$$

$$S_{cl} = \frac{1}{2} m [x_b \dot{\bar{x}}(T) - x_a \dot{\bar{x}}(0)]$$

Calcoliamo le velocità agli estremi derivando $\bar{x}(t)$:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \omega \frac{x_b - x_a \cos(\omega T)}{\sin(\omega T)} \cos(\omega t) - \omega x_a \sin(\omega t)$$

- In $t = 0$: $\dot{\bar{x}}(0) = \omega \frac{x_b - x_a \cos(\omega T)}{\sin(\omega T)}$
- In $t = T$: $\dot{\bar{x}}(T) = \omega \frac{x_b \cos(\omega T) - x_a}{\sin(\omega T)}$

Sostituendo nell'espressione dell'azione:

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [x_b (x_b \cos(\omega T) - x_a) - x_a (x_b - x_a \cos(\omega T))]$$

$$S_{cl}(x_b, x_a, T) = \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega T) - 2 x_a x_b]$$

Calcolo del Fattore di Fluttuazione $F(T)$ (si veda anche Appendice B)

Il fattore $F(T)$ è l'integrale sulle fluttuazioni nulle agli estremi $y(0) = y(T) = 0$:

$$F(T) = \int \mathcal{D}\,[y(t)] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt\right]$$

Espandiamo $y(t)$ in serie di Fourier di soli seni (rispettando le condizioni $y(0) = y(T) = 0$):

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

L'azione delle fluttuazioni diventa una somma di gaussiane indipendenti nei coefficienti a_n:

$$S[y] = \frac{mT}{4}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2\right]$$

L'integrale funzionale si trasforma nell'integrale su tutti gli a_n:

$$F(T) = J(T)\prod_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\,a_n \exp\left\{\frac{imT}{4\hbar}\left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2\right]a_n^2\right\}$$

Usando la formula per l'integrale gaussiano $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\ ^2}\,da = \sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}}$, otteniamo:

$$F(T) = C(T)\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{\omega T}{n\pi}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Riconosciamo il **prodotto infinito di Eulero** per la funzione seno:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{x}{n\pi}\right)^2\right] = \frac{\sin x}{x}$$

Di conseguenza:

$$F(T) = \frac{C_0}{\sqrt{\sin(\omega T)}}$$

Determinazione della costante C_0:
Per trovare la costante C_0, consideriamo il limite di particella libera ($\omega \to 0$), dove il propagatore deve ridurre al propagatore libero $K_{libero} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}$:

$$\lim_{\omega\to 0} F(T) = \frac{C_0}{\sqrt{\omega T}} \Longrightarrow \frac{C_0}{\sqrt{\omega T}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \Longrightarrow C_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar}}$$

Quindi il fattore di fluttuazione vale esattamente:

$$F(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega T)}}$$

Per capire

Per capire in modo "terra terra" perché il propagatore quantistico $K(x,t;x',0)$ è una funzione di Green, lasciamo da parte per un attimo l'integrale di cammino e pensiamo a un'analogia quotidiana: **un sasso lanciato in uno stagno d'acqua**.

L'Analogia dello Stagno
Se fai cadere un piccolo sasso in un punto preciso x' dell'acqua al tempo $t = 0$:

1. Nel punto e nell'istante del lancio crei una **sorgente puntiforme concentrata** (una δ di Dirac).
2. Da quel punto si genera un'onda che si propaga nello stagno.
3. L'altezza dell'onda che arriva nel punto x al tempo t è la **risposta del sistema** a quel singolo impulso iniziale.

Come già visto inizialmente in fisica e matematica, la funzione che descrive la risposta di un sistema a un impulso concentrato si chiama **Funzione di Green**.

In Meccanica Quantistica: Come Evolve una Particella
In meccanica quantistica, lo "stagno" è lo spazio e l'onda è la **funzione d'onda** $\psi(x,t)$, la cui evoluzione è governata dall'equazione di Schrödinger:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi(x,t) = 0$$

Ora facciamo l'esperimento del sasso con una particella:

1. **La Condizione Iniziale (Il Sasso):**
   All'istante $t = 0$, immaginiamo di misurare la posizione della particella e di trovarla esattamente nel punto x'. La sua funzione d'onda iniziale è un pacchetto totalmente localizzato, una delta di Dirac:
   $$\psi(x, 0) = \delta(x - x')$$
2. **L'Evoluzione Temporale:**
   Con il passare del tempo $t > 0$, il pacchetto d'onda si allarga e si propaga nello spazio secondo l'equazione di Schrödinger. La funzione d'onda risultante al tempo t è **per definizione** il propagatore $K(x, t; x', 0)$:
   $$\psi(x, t) = K(x, t; x', 0)$$
3. **L'Equazione Differenziale Soddisfatta:**
   Se applichiamo l'operatore di Schrödinger $L = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}$ al propagatore (con la condizione al contorno che $K = 0$ per $t < 0$, cioè il propagatore "ritardato"), otteniamo:
   $$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) K(x, t; x', 0) = i\hbar\,\delta(t)\,\delta(x - x')$$

Ecco la definizione matematica esatta di funzione di Green: **il propagatore K è la soluzione dell'equazione differenziale di Schrödinger quando il membro di destra è una sorgente spaziotemporale** $i\hbar\,\delta(t)\delta(x - x')$.

Come si usa nella pratica (Il Principio di Sovrapposizione)
Il motivo per cui le funzioni di Green sono utilissime (e il motivo per cui calcoliamo il propagatore) è che **se sai cosa fa il sistema per un singolo punto, sai cosa fa per qualsiasi stato iniziale generico**. Se all'inizio ($t = 0$) non hai una delta di Dirac, ma una funzione d'onda generica $\psi(x, 0)$ (ad esempio una combinazione di più "sassi" caduti nello stagno), basta sommare (integrare) i contributi di ogni singolo punto x' pesati dalla funzione d'onda iniziale:
$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K\,(x, t; x', 0)\,\psi(x', 0)\,dx'$$
Il propagatore $K(x, t; x', 0)$ agisce proprio come il "nocciolo" (kernel) che prende l'informazione dello stato in x' al tempo 0 e la "trasporta" nel punto x al tempo t.

Pensiamo ancora ad un altro problema semplicissimo di vita quotidiana: **il riscaldamento di una sbarra di metallo**. L'equazione del calore è l'equivalente "classico e reale" dell'equazione di Schrödinger (a meno dell'unità immaginaria i).

L'Esperimento del "Colpo di Calore"
Immaginiamo una sbarra metallica lunghissima.
1. **La sorgente al tempo $t = 0$:**
   Prendiamo un laser e spariamo un impulso di calore concentrato in un singolo punto x' nell'istante $t = 0$. In quel punto la temperatura schizza in alto, mentre altrove la sbarra è fredda. La distribuzione di temperatura iniziale è una delta di Dirac:
   $$T(x, 0) = \delta(x - x')$$
2. **La diffusione del calore per $t > 0$:**
   Con il passare del tempo, il calore inizia a fluire e a diffondersi lungo la sbarra. La macchia calda si allarga e si abbassa. La temperatura nel punto x all'istante t è descritta dalla funzione $G(x, t; x', 0)$:
   $$G(x, t; x', 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4Dt}\right)$$
   (dove D è la conducibilità termica della sbarra).

Questa risposta $G(x, t; x', 0)$ a un singolo punto caldo iniziale è la **Funzione di Green** dell'equazione del calore.

Perché questo G è sia un Propagatore che una Funzione di Green?

1. È una Funzione di Green (in senso matematico)

Soddisfa l'equazione della diffusione con la sorgente impulso nell'origine spaziotemporale:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G(x,t;x',0) = \delta(t)\,\delta(x-x')$$

Operatore differenziale applicato alla funzione di Green = **Impulso concentrato (Delta)**.

2. È un Propagatore (in senso fisico)

Ti dice **come "propaga" un profilo di temperatura generico nel tempo**.

Se all'inizio ($t = 0$) la sbarra non è scaldata in un solo punto, ma ha un profilo di temperatura qualsiasi $T(x,0)$ (ad esempio scaldata con una fiamma più larga), per sapere la temperatura in qualsiasi punto x al tempo t basta fare la somma (integrazione) di tutti i punti scaldata all'inizio:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G\,(x,t;x',0)\,T(x',0)\,dx'$$

Il Ponte con la Meccanica Quantistica

In meccanica quantistica il principio è **identico**:

- **Temperatura** $T(x,t)$ ⟶ **Funzione d'onda** $\psi(x,t)$
- **Equazione del calore** ⟶ **Equazione di Schrödinger** $(t \to it)$
- **Propagatore del calore** G ⟶ **Propagatore di Feynman** $K(x,t;x',0)$

Il propagatore quantistico K è semplicemente la risposta dell'universo quantistico quando all'inizio collochi una particella in un unico punto x' ($\psi(x,0) = \delta(x-x')$) e guardi come la sua ampiezza di probabilità "si diffonde" nello spazio col passare del tempo.

In sintesi

Mettiamo a confronto diretto i due esempi che abbiamo visto, mostrando come il concetto di **Funzione di Green** e quello di **Propagatore** siano esattamente la stessa cosa, sia in fisica classica che in fisica quantistica.

Il Principio Generale

In entrambi i casi, l'idea di fondo è identica:

1. **La sorgente (δ di Dirac):** Accendiamo un segnale (calore o ampiezza quantistica) in un singolo punto dello spazio x' all'istante $t = 0$.
2. **La risposta del sistema:** La funzione che descrive come quel singolo punto si diffonde o si propaga nello spazio al tempo t è la **Funzione di Green** (o **Propagatore**).
3. **Il principio di sovrapposizione:** Conoscendo la risposta del sistema a un singolo punto, possiamo calcolare l'evoluzione di *qualsiasi* stato iniziale generico $f(x,0)$ semplicemente mediante un'integrazione:

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Propagatore}\,(x,t;x',0)\,f(x',0)\,dx'$$

Confronto Diretto tra i Due Casi

Caratteristica	**1. Caso Classico con l'Equazione del Calore**	**2. Caso Quantistico con l'Equazione di Schrödinger**
Cosa rappresenta la funzione	Temperatura $T(x,t)$ lungo una sbarra metallica	Ampiezza di probabilità $\psi(x,t)$ di una particella
Stato iniziale concentrato	Impulso di calore puntiforme in x': $T(x,0) = \delta(x-x')$	Particella perfettamente localizzata in x': $\psi(x,0) = \delta(x-x')$

Caratteristica	1. Caso Classico con l'Equazione del Calore	2. Caso Quantistico con l'Equazione di Schrödinger
Equazione Differenziale	$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)T(x,t) = 0$	$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)\psi(x,t) = 0$
Equazione con la sorgente puntiforme	$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G = \delta(t)\delta(x - x')$	$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)K = i\hbar\,\delta(t)\delta(x - x')$
Espressione esplicita (particella/diffusione libera)	$G(x,t;x',0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4Dt}\right)$	$K(x,t;x',0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left(\frac{im(x-x')^2}{2\hbar t}\right)$
Significato Fisico	Il profilo gaussiano di calore che si allarga col tempo	La propagazione e l'allargamento del pacchetto d'onda quantistico

L'Analogia Formale
Noterai che l'equazione di Schrödinger e l'equazione del calore sono matematicamente **la stessa identica equazione**, a patto di effettuare la sostituzione del tempo reale t con il tempo immaginario (la cosiddetta *rotazione di Wick*):

$$t_{\text{diffusione}} \leftrightarrow it_{\text{quantistica}}$$

- **Nel calore:** Il propagatore G descrive la diffusione irreversibile dell'energia termica.
- **In quantistica:** Il propagatore K (calcolabile con l'integrale di cammino di Feynman $\int \mathcal{D}\,[x(t)]e^{iS/\hbar}$) descrive l'evoluzione delle fasi e delle ampiezze di probabilità.

In sintesi: **un propagatore è la funzione di Green del tempo**, ossia la "risposta elementare" del sistema a un impulso iniziale concentrato nello spazio-tempo.

Esempio 3. Applicazioni alla Spettroscopia e Fisica dello Stato Solido
Densità degli Stati (DOS) e Risposta Spettrale

In fisica della materia e spettroscopia, si utilizza la **funzione di Green ritardata** $G^R(E)$ definita nello spazio delle energie (frequenze), legata all'Hamiltoniana del sistema H:

$$G^R(E) = \frac{1}{E - H + i\eta} \qquad (\text{con } \eta \to 0^+)$$

In un sistema quantistico discreto o in un solido, gli autovalori di H sono i livelli energetici E_n. Usando l'identità sulle distribuzioni $\frac{1}{x+i\eta} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x)$, la parte immaginaria della funzione di Green dà **direttamente la Densità degli Stati (DOS)** $\rho(E)$:

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi}\,\text{Im}\left[\text{Tr}\left(G^R(E)\right)\right] = \sum_n \delta\,(E - E_n)$$

- **Nella pratica spettroscopica:**
  Quando c'è interazione con l'ambiente (smorzamento, scattering, o tempo di vita finito τ), il polo E_n si sposta nel piano complesso $E_n - i\Gamma_n$. La parte immaginaria di $G^R(E)$ trasforma le delta di Dirac in **profilo di righe spettrali** (Lorentziane o Guassiane o q-Gaussiane/Tsallis, a seconda delle statistiche e delle correlazioni del sistema):

$$\mathrm{Im}[G^R(E)] \propto \frac{\Gamma_n}{(E-E_n)^2+\Gamma_n^2}$$

Questo è proprio il legame matematico profondo che permette di calcolare teoricamente gli **spettri di assorbimento, Raman o fotoemissione** partendo dalle funzioni di Green del sistema a molti corpi.

La Lorentziana

La **Lorentziana** (o profilo di Lorentz-Cauchy) è la funzione che descrive la forma tipica delle righe spettrali quando i livelli energetici sono soggetti a un allargamento omogeneo (ad esempio per tempo di vita finito degli stati o smorzamento quantistico).
La sua forma normalizzata — tale che l'area sottesa dall'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ sia pari a 1 — è espressa da:

$$L(x;x_0,\gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}$$

Oppure, scrivendola in termini della **FWHM** (Full Width at Half Maximum, cioè la larghezza a metà altezza $\Gamma = 2\gamma$):

$$L(x;x_0,\Gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\frac{1}{2}\Gamma}{(x-x_0)^2+\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2} = \frac{2}{\pi\Gamma}\frac{1}{1+4\left(\frac{x-x_0}{\Gamma}\right)^2}$$

Caratteristiche principali

- x_0 **(Centro/Picco):** È la posizione del massimo della funzione, dove la curva raggiunge l'altezza massima $L(x_0) = \frac{1}{\pi\gamma} = \frac{2}{\pi\Gamma}$.
- γ **(Parametro di scala o semilarghezza):** Rappresenta la semilarghezza a metà altezza (HWHM).
- $\Gamma = 2\gamma$ **(FWHM):** È la larghezza totale del picco misurata al 50% dell'altezza massima.
- **Code "pesanti" (Asintoto):** A differenza della Gaussiana (che decade esponenzialmente come e^{-x^2}), la Lorentziana cade molto più lentamente all'infinito, come $1/x^2$.

Legame con la Fisica e le Funzioni di Green
Se richiamiamo la funzione di Green ritardata dell'operatore energetico/frequenziale con uno smorzamento o tempo di vita $\tau = \hbar/(2\Gamma)$:

$$G^R(E) = \frac{1}{(E-E_0)+i\Gamma}$$

Prendendo la parte immaginaria (a meno di un fattore $\mp 1/\pi$), otteniamo esattamente la forma Lorentziana:

$$\mathrm{Im}[G^R(E)] = \mathrm{Im}\left[\frac{(E-E_0)-i\Gamma}{(E-E_0)^2+\Gamma^2}\right] = -\frac{\Gamma}{(E-E_0)^2+\Gamma^2}$$

È proprio questa relazione che fa emergere le forme lorenziane nei picchi di assorbimento, di emissione e negli spettri Raman dei sistemi fisici discreti-

Appendice A

Il **metodo delle cariche immagine** è uno dei metodi matematico-geometrici più affascinanti di tutta la fisica classica. Facciamo l'esempio più famoso e intuitivo: **una carica puntiforme davanti a un piano conduttore infinito messo a terra** (che corrisponde esattamente a risolvere il problema di Dirichlet $G(r,r') = 0$ sul bordo).

Il Problema Fisico

Immaginiamo di avere un piano conduttore infinito nello spazio 3D posto a potenziale zero ($V = 0$), situato lungo il piano $z = 0$. Mettiamo una carica puntiforme positiva $+q$ nello spazio libero nel punto $r' = (0,0,d)$ con $d > 0$. Vogliamo trovare il potenziale $\phi(r)$ per tutti i punti dello spazio superiore ($z > 0$). L'equazione da risolvere per il potenziale è:

$$\nabla^2\phi(r) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(x)\delta(y)\delta(z-d) \quad \text{con } \phi(r) = 0 \text{ su } z = 0$$

In termini di **funzione di Green** $G(r,r')$, il potenziale è $\phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}G(r,r')$, con la condizione al contorno $G(r,r') = 0$ quando $r = (x,y,0)$.

La Costruzione della Funzione di Green: $G = G_0 + H$

1. La Soluzione Fondamentale $G_0(r,r')$

Nello spazio libero (senza il piano conduttore), la risposta alla delta di Dirac è la classica soluzione coulombiana generata dalla carica in $(0,0,d)$:

$$G_0(r,r') = -\frac{1}{4\pi|r-r'|} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}$$

Se valutiamo G_0 sul bordo $z = 0$, otteniamo:

$$G_0(x,y,0;r') = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+d^2}} \neq 0$$

G_0 da sola **non rispetta** la condizione di annullarsi sul bordo.

2. La Funzione Armonica $H(r,r')$ (L'Idea dell'Immagine)

Per annullare il potenziale su $z = 0$, introduciamo una funzione armonica $H(r,r')$ che soddisfi $\nabla^2 H = 0$ per tutto il semispazio $z > 0$. Fisicamente, immaginiamo di "togliere" il piano conduttore e di posizionare una **carica immagine fittizia** $-q$ nello spazio speculare $z < 0$, ovvero nel punto $r'' = (0,0,-d)$. Il contributo al potenziale di questa carica fittizia è la nostra funzione H:

$$H(r,r') = \frac{1}{4\pi|r-r''|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}$$

Notiamo due cose fondamentali su H:

1. Per $z > 0$, la singolarità di H si troverebbe in $z = -d$, quindi **nel semispazio $z > 0$ la funzione H è perfettamente regolare e armonica** ($\nabla^2 H = 0$).
2. Sul piano $z = 0$, H assume esattamente il valore opposto di G_0:

$$H(x,y,0;r') = +\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+d^2}}$$

3. La Funzione di Green Completa

Sommando le due parti $G(r,r') = G_0(r,r') + H(r,r')$, otteniamo la funzione di Green esatta:

$$G(r,r') = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

Verifichiamo immediatamente:

- **In $z > 0$:** $\nabla^2 G = \delta(r-r')$ (perché $\nabla^2 G_0 = \delta$ e $\nabla^2 H = 0$).
- **Sul bordo $z = 0$:**

$$G(x,y,0;r') = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}\right] = 0$$

La condizione di Dirichlet è perfettamente soddisfatta!

Significato Fisico e Carica Indotta

L'effetto della carica immagine $-q$ in $z = -d$ riproduce matematicamente l'effetto reale delle **cariche di induzione reali** (elettroni) che si accumulano sulla superficie del piano conduttore per via

dell'attrazione elettrostatica esercitata da $+q$. Se infatti calcoliamo la densità di carica superficiale indotta sul piano $\sigma(x,y)$ usando il teorema di Gauss sul bordo:

$$\sigma(x,y) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -q \frac{\partial G}{\partial z}\bigg|_{z=0} = -\frac{q\, d}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

Se integriamo questa densità di carica su tutto il piano infinito $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\,(x,y)\,dx\,dy$, otteniamo **esattamente** $-q$. La carica totale indotta sul conduttore reale è pari alla carica immagine che avevamo ipotizzato per risolvere l'equazione!

Appendice B

Vediamo nel dettaglio l'algebra iniziale del calcolo di *F(T),* e il cambio di variabili che portano da un integrale sulle traiettorie $y(t)$ ad un prodotto infinito di integrali gaussiani ordinarie sui coefficienti a_n.

Il Cambio di Coordinate Funzionale

Le fluttuazioni $y(t)$ devono annullarsi agli estremi: $y(0) = 0$ e $y(T) = 0$.

Possiamo rappresentare qualunque funzione $y(t)$ in questo intervallo come combinazione lineare delle funzioni di una base ortogonale di soli seni:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

Specificare la traiettoria $y(t)$ equivale a specificare l'infinita sequenza dei suoi coefficienti di Fourier $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Il cambio di variabili nell'integrale funzionale trasforma la misura $\mathcal{D}[y(t)]$ (di cui si discute in seguito) nel prodotto delle misure ordinarie da_n, a meno di uno jacobiano di trasformazione $J(T)$:

$$\mathcal{D}[y(t)] = J(T) \prod_{n=1}^{\infty} d\, a_n$$

Calcolo Esplicito dell'Azione $S[y]$

L'azione per la fluttuazione è:

$$S[y] = \frac{1}{2} m \int_0^T (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)\, dt$$

Calcoliamo separatamente i due termini integrali inserendo la serie di Fourier.

A. Calcolo del termine delle posizioni $\int_0^T y^2\, dt$

$$y^2(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_n\, a_k \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$$

Integrando da 0 a T, usiamo la **proprietà di ortogonalità** dei seni:

$$\int_0^T \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2}\delta_{nk}$$

Poiché il prodotto si annulla per $n \neq k$ ed è pari a $T/2$ per $n = k$, i doppi somatori crollano a una singola somma:

$$\int_0^T y\,(t)^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

B. Calcolo del termine delle velocità $\int_0^T \dot{y}^2\, dt$

Deriviamo $y(t)$ rispetto al tempo t:

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

Eleviamo al quadrato $\dot{y}^2(t)$:

$$\dot{y}^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_n\, a_k \left(\frac{n\pi}{T}\right)\left(\frac{k\pi}{T}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$$

Integrando da 0 a T, usiamo l'ortogonalità dei coseni:

$$\int_0^T \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2}\delta_{nk}$$

Sostituendo δ_{nk}:

$$\int_0^T \dot{y}\,(t)^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2$$

C. Assemblaggio dell'Azione $S[y]$

Unendo i due pezzi nell'espressione dell'azione:

$$S[y] = \frac{1}{2} m \left[\frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2 \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right]$$

Raccogliendo i fattori comuni $\frac{mT}{4}$ e a_n^2:

$$S[y] = \frac{mT}{4}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2\right]$$

Trasformazione dell'Integrale Funzionale

Ora inseriamo l'azione $S[y]$ e la nuova misura $\mathcal{D}[y(t)] = J(T)\prod_{n=1}^{\infty} d\,a_n$ nell'integrale di Feynman:

$$F(T) = \int \mathcal{D}\,[y(t)]\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[y]\right)$$

$$F(T) = \int \left(J(T)\prod_{n=1}^{\infty} d\,a_n\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{mT}{4}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2\right]\right\}$$

Poiché l'esponenziale di una somma è il prodotto degli esponenziali:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \exp(A_n)$$

L'integrale funzionale si fattorizza completamente nel prodotto di infiniti integrali gaussiani indipendenti sulle singole variabili a_n:

$$F(T) = J(T)\prod_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\,a_n\, \exp\left\{\frac{imT}{4\hbar}\left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2\right] a_n^2\right\}$$

Trasformando le traiettorie nella loro rappresentazione di Fourier, un problema ad infinite dimensioni si riduce a un prodotto infinito di integrali gaussiani indipendenti.

Il Propagatore Finale

Riassemblando il fattore di fluttuazione $F(T)$ con la fase dell'azione classica $\exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}\right)$, otteniamo il risultato per il propagatore dell'oscillatore armonico:

$$K(x_b, T; x_a, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega T)}} \exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega T)}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos(\omega T) - 2x_a x_b\right]\right\}$$

La misura funzionale

Il simbolo $\mathcal{D}[x(t)]$ rappresenta la **misura funzionale** (o misura dell'integrale di cammino). Mentre un normale integrale dx somma i valori di una funzione su dei **punti**, l'integrale di Feynman somma il contributo di **intere funzioni (traiettorie)** $x(t)$ nello spazio vettoriale ad infinite dimensioni dei cammini continui che collegano il punto iniziale $(x_a, 0)$ al punto finale (x_b, T).

Definizione Formale per Discretizzazione

Poiché non è possibile sommare direttamente su uno spazio di funzioni continue, si definisce $\mathcal{D}[x(t)]$ attraverso il limite di un integrale ad altissima dimensione (discretizzazione temporale):

1. Si suddivide l'intervallo di tempo $[0, T]$ in N sotto-intervalli trascurabili di durata $\epsilon = T/N$.
2. La traiettoria continua $x(t)$ viene approssimata da una sequenza di $N-1$ posizioni intermedie:
$$x_1 = x(t_1),\ x_2 = x(t_2),\ \dots,\ x_{N-1} = x(t_{N-1})$$
con le estremità fisse $x_0 = x_a$ e $x_N = x_b$.
3. Per ogni istante intermedio t_j, la particella può trovarsi in qualunque punto dello spazio, per cui occorre integrare su tutti i possibili dx_j da $-\infty$ a $+\infty$.

La misura $\mathcal{D}[x(t)]$ è definita come il limite del prodotto di tutti questi integrali spaziali intermedi, ripesati da un fattore di normalizzazione ad ogni passo:

$$\mathcal{D}[x(t)] = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N-1} d\,x_j$$

L'integrale di cammino completo si scrive quindi come:

$$K(x_b, T; x_a, 0) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_{N-1}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_N(x_0, x_1, \dots, x_N)\right)$$

Il Ruolo del Fattore di Normalizzazione

Il fattore moltiplicativo ad ogni passo:

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}$$

non è arbitrario:

- **Consistenza dimensionale**: Ogni integrazione in dx_j aggiunge una dimensione di lunghezza [L]. Il fattore A garantisce che il propagatore finale mantenga le corrette dimensioni fisiche di una densità di probabilità/ampiezza ($[\mathrm{L}]^{-1}$ in 1D).
- **Proprietà di composizione**: Assicura che valga la relazione di completezza (o equazione di Chapman-Kolmogorov) per tempi intermedi t_c:
$$K(x_b, T; x_a, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\,x_c\, K(x_b, T; x_c, t_c)\, K(x_c, t_c; x_a, 0)$$

Significato Geometrico e Quantistico

Geometricamente, $\mathcal{D}[x(t)]$ assegna un "volume" nello spazio delle traiettorie.

Nessuna traiettoria classica isolata domina a priori l'integrale: $\mathcal{D}[x(t)]$ pesa allo stesso modo traiettorie liscie, traiettorie spezzate e persino traiettorie non derivabili. La selezione del percorso classico emerge solo nel limite macroscopico $\hbar \to 0$, dove le fasi $e^{iS/\hbar}$ di traiettorie lontane da quella classica interferiscono distruttivamente annullandosi a vicenda.

Conclusioni

Il percorso teorico sviluppato nel manoscritto dimostra la profonda unificazione concettuale operata dalla funzione di Green nei confronti di fenomeni apparentemente distinti della fisica classica e

quantistica. Che si tratti di determinare il potenziale indotto da una distribuzione di carica, della diffusione irreversibile del calore lungo una sbarra metallica o della propagazione dell'ampiezza di probabilità di un pacchetto d'onda quantistico, la struttura sottostante rimane la medesima: la risposta del sistema a un sollecito spaziotemporale concentrato.

L'analisi dimensionale condotta sia sul Laplaciano sferico sia sul propagatore dell'oscillatore armonico chiarisce aspetti spesso trascurati nei manuali standard, come la necessità di scale di lunghezza caratteristiche (il raggio di curvatura R) per mantenere la coerenza degli argomenti logaritmici. Inoltre, il calcolo analitico del fattore di fluttuazione nell'integrale di cammino illustra come le simmetrie e i vincoli al contorno si riflettano direttamente nella spettroscopia dei sistemi.

L'estensione naturale allo spazio delle frequenze e delle energie mostra infine la rilevanza pratica del formalismo: la funzione di Green ritardata $G^R(E)$ si rivela lo strumento ideale per connettere la struttura quantistica intima di un materiale con le grandezze direttamente osservabili in laboratorio, spiegando l'origine dei profili di riga e della densità degli stati spettrali. Il testo si propone quindi come una sintesi chiara e rigorosa, capace di coniugare l'intuito fisico con la correttezza formale.

Riferimenti

Fondamenti Matematici delle Funzioni di Green e Propagatori

Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F.E. (2011). *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press. *Riferimento classico per la definizione formale di operatore differenziale, principio di sovrapposizione e sviluppo delle funzioni di Green tramite autovalori ed autofunzioni.*

Economou, E. N. (2006). *Green's Functions in Quantum Physics*. Springer Science & Business Media. *Testo fondamentale per comprendere il passaggio dalle funzioni di Green nei sistemi differenziali classici alla teoria dei propagatori nei sistemi quantistici e alla materia condensata.*

Laplaciano su Varietà, Sfera S^2 e Analisi Dimensionale

Chavel, I. (1984). *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press. *Tratta l'operatore di Laplace-Beltrami su varietà riemanniane complesse e compatte come la sfera S^2, approfondendo la singolarità logaritmica in 2D e lo sviluppo in serie di polinomi di Legendre e armoniche sferiche.*

Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons. *Contiene l'analisi rigorosa delle condizioni al contorno, la trattazione del potenziale coulombiano e il metodo delle cariche immagine (trattato nell'Appendice A del documento).*

Integrali di Cammino di Feynman e Propagatore dell'Oscillatore Armonico

Feynman, R., & Hibbs, A. R. (1965). The path integral formulation of quantum mechanics. McGraw-Hill, New York. *Il testo d'origine in cui viene formalizzata la misura funzionale $\mathcal{D}[x(t)]$, la scomposizione attorno alla traiettoria classica $x_{cl}(t)$ e il calcolo esplicito del propagatore dell'oscillatore armonico tramite prodotti infiniti.*

Schulman, L. S. (2012). *Techniques and Applications of Path Integration*. Dover Publications. *Fornisce i dettagli algebrici sul calcolo dei determinanti di fluttuazione $F(T)$, l'uso della trasformata di Fourier per le condizioni al contorno nulle e le trasformazioni di misura.*

Spettroscopia, Densità degli Stati (DOS) e Profili di Riga

Mahan, G. D. (2000). *Many-Particle Physics*. Springer Science & Business Media. *Dettaglia la relazione tra la funzione di Green ritardata $G^R(E)$, la parte immaginaria e la Densità degli Stati (DOS), mostrando l'emergere dei profili di riga (Lorentziane) per stati con tempo di vita finito.*