

Fondamenti Teorici del q-Calculus: Una Trattazione Essenziale per l'Analisi basata sulle Differenze Finite

*Original*

Fondamenti Teorici del q-Calculus: Una Trattazione Essenziale per l'Analisi basata sulle Differenze Finite / Sparavigna, Amelia Carolina. - ELETTRONICO. - (2025). [10.5281/zenodo.17948801]

*Availability:*

This version is available at: 11583/3005899 since: 2025-12-16T08:33:51Z

*Publisher:*

*Published*

DOI:10.5281/zenodo.17948801

*Terms of use:*

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

*Publisher copyright*

(Article begins on next page)

# Fondamenti Teorici del q-Calculus: Una Trattazione Essenziale per l'Analisi basata sulle Differenze Finite

Amelia Carolina Sparavigna<sup>1</sup>

<sup>1</sup> DISAT, Politecnico di Torino

DOI: 10.5281/zenodo.17948801

Il lavoro che ora si presenta costituisce una trattazione introduttiva e definitoria del **q-Calcolo** nell'ambito del *quantum calculus*, un settore della matematica che si basa sul **metodo delle differenze finite** e non impiega il concetto di limite. Il q-calcolo, pur avendo radici storiche in figure come Eulero e Jacobi, ha trovato rinnovata rilevanza nella meccanica quantistica per la sua connessione con le relazioni di commutatività e le algebre di Lie. Il testo <https://doi.org/10.5281/zenodo.4982846> espone le definizioni e le dimostrazioni chiave, a partire dai **q-numeri** e dai **q-binomi**, e introduce l'operatore di **q-derivazione**. Vengono quindi illustrate le **Identità di Eulero**, le funzioni **q-esponenziali** e **q-trigonometriche**. La trattazione si conclude con la definizione della **q-antiderivata** e dell'**integrale di Jackson**, strumenti fondamentali per la sintesi della teoria e per la definizione di funzioni speciali come le funzioni q-Gamma e q-Beta. Si sottolinea che, al limite in cui il parametro q tende all'unità ( $q \rightarrow 1$ ), il q-calcolo converge al calcolo differenziale e integrale ordinario.

## Oltre il Limite: L'Analisi delle Differenze Finite e la Generalizzazione del Calcolo con il q-Calcolo

In un'epoca in cui la fisica teorica, la combinatoria e l'ingegneria affrontano la sfida di modellare sistemi intrinsecamente discreti, il paradigma del calcolo differenziale e integrale basato sul limite risulta, in alcuni contesti, insufficiente. Il **q-Calcolo** – l'articolazione più influente del *quantum calculus* – emerge come la risposta matematica a questa esigenza, offrendo un formalismo potente e sorprendentemente elegante fondato sul **metodo delle differenze finite**.

Questo studio si propone di guidare il lettore attraverso le nozioni fondamentali del q-calcolo, non come mero esercizio accademico, ma come fondamento essenziale per l'analisi moderna. Pur vantando illustri radici storiche che risalgono a **Leonhard Euler** e **Carl Gustav Jacobi**, la metodologia ha trovato una rinnovata e cruciale pertinenza nelle strutture algebriche legate alla **meccanica quantistica** e alla teoria delle **Algebre di Lie**, fornendo gli strumenti per descrivere relazioni di commutatività che vanno oltre il formalismo standard.

## La Struttura Discreta e L'Analisi q-Analogica

Il lavoro proposto in <https://doi.org/10.5281/zenodo.4982846> inizia con l'introduzione dei **q-numeri** e dei **q-binomi**, i veri mattoni di questa analisi. Questi q-analoghi ridefiniscono in modo strutturato le operazioni base e le identità combinatorie, consentendo un approccio sistematico alla generalizzazione delle funzioni classiche.

Il cuore operativo è rappresentato dall'operatore di **q-derivazione** ( $D_q$ ), che sostituisce il concetto di tasso di variazione istantaneo con un operatore di differenza finito. Questo operatore, lungi dall'essere una semplice approssimazione, è il meccanismo attraverso cui la teoria si manifesta nella sua piena potenza, specialmente quando applicato alla dimostrazione delle fondamentali **Identità di Eulero** e alla definizione delle nuove e affascinanti funzioni **q-esponenziali** e **q-trigonometriche**.

## La Sintesi: L'Integrale di Jackson e la Teoria delle Funzioni Speciali

La trattazione <https://doi.org/10.5281/zenodo.4982846> si conclude con la definizione della **q-antiderivata** e, in particolare, dell'**integrale di Jackson**. Quest'ultima è la controparte dell'integrazione di Riemann e funge da operatore inverso della q-derivazione, chiudendo il cerchio del teorema fondamentale del calcolo in questo contesto generalizzato. La padronanza di questi strumenti è cruciale, poiché sono i vettori attraverso i quali è possibile definire e studiare le **funzioni q-Gamma e q-Beta**, essenziali per le teorie di interpolazione e per una vasta gamma di applicazioni nelle funzioni speciali e nella fisica teorica.

Il valore analitico di questo formalismo è ulteriormente amplificato dalla sua eleganza: al limite in cui il parametro  $q$  tende all'unità ( $q \rightarrow 1$ ), l'intero apparato del q-calcolo converge in modo dimostrabile al calcolo differenziale e integrale ordinario. Questa convergenza non è solo un test di validità, ma un potente strumento concettuale che permette di comprendere la relazione profonda tra il mondo discreto e quello continuo.

Invitiamo i matematici, i fisici e gli ingegneri a consultare il lavoro completo, disponibile al seguente link, per acquisire le competenze fondamentali necessarie per applicare il q-calcolo alle loro sfide di ricerca più avanzate: <https://doi.org/10.5281/zenodo.4982846>

## Distinzione Cruciale e Interconnessioni tra q-Calcolo e q-Statistica di Tsallis

Nonostante l'uso del medesimo parametro  $q$ , il **q-Calcolo** (un'analisi sulle differenze finite) e la **q-Statistica di Tsallis** (una termodinamica non-estensiva) sono nati per scopi differenti. Tuttavia, la ricerca matematica e fisica ha rivelato che il formalismo del q-calcolo può essere impiegato con successo per fornire un quadro analitico e algebrico alla statistica di Tsallis.

### 1. La q-Derivata nella Statistica di Tsallis

Il legame analitico più diretto risiede nella proprietà fondamentale dell'entropia di Tsallis ( $S_q$ ). La ricerca ha dimostrato che l'entropia discreta di Tsallis soddisfa una relazione che coinvolge la **q-derivata** ( $D_q$ ) definita nel q-calcolo.

- **Lavoro di Riferimento (Esempi):** Studi come quelli di **Johal** (1998) hanno esplicitamente collegato la q-derivata di Jackson alla formula dell'entropia di Tsallis in distribuzioni multifrattali. Johal, R. S. (1998). q calculus and entropy in nonextensive statistical physics. *Physical Review E*, 58(4), 4147.
- **Significato:** Questo indica che l'operatore  $D_q$  del q-calcolo, che generalizza la derivata, è l'operatore "naturale" che descrive la variazione delle quantità nel contesto della q-statistica. Se l'entropia classica di Shannon è legata alla derivata ordinaria del logaritmo, l'entropia di Tsallis è legata alla q-derivata.

### 2. Le Algebre Deformate (q-Algebra)

Per superare le difficoltà formali derivanti dalla **non-additività** dell'entropia di Tsallis (la proprietà  $S_q(A+B) \neq S_q(A) + S_q(B)$ ), i ricercatori hanno sviluppato algebre "deformate", note come **q-Algebre** (o *q-Deformed Algebras*) specifiche per la Tsallis Statistica.

- **Lavoro di Riferimento (Esempi):** Ricerche condotte da **Borges** hanno definito nuove operazioni (*q-somma*, *q-prodotto*, ecc.) che rendono le leggi di probabilità di Tsallis formalmente additive o moltiplicative nel contesto di questa algebra deformata. Borges, E. P. (2004). A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 340(1-3), 95-101.
- **Connessione al q-Calcolo:** Sebbene l'algebra di Tsallis utilizzi operatori di deformazione che sono diversi da quelli del q-Calcolo tradizionale (che è legato alla q-deformazione di Lie), il concetto stesso di **algebra deformata** che generalizza le operazioni matematiche è il punto

di contatto. Entrambi i formalismi tentano di costruire un apparato matematico consistente basato sulla generalizzazione parametrica ( $q$ ).

### 3. Funzioni Speciali Generalizzate

Un'altra area di forte interconnessione si trova nelle **funzioni q-generalizzate**, in particolare:

- **q-Logaritmo e q-Esponenziale di Tsallis:** Queste sono le funzioni inverse utilizzate per definire la q-Statistica. Anche se, come accennato, sono formalmente diverse dalle q-funzioni definite da Jackson (nel q-calcolo), molte ricerche le analizzano usando gli strumenti del q-calcolo. Ad esempio, è stato dimostrato che l'esponenziale di Tsallis risolve un'equazione differenziale non lineare. Tsallis, C., Levy, S. V., Souza, A. M., & Maynard, R. (1995). Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature. *Physical Review Letters*, 75(20), 3589.
- **q-Gamma e q-Beta:** Alcuni ricercatori hanno esteso le funzioni **q-Gamma** e **q-Beta** per adattare al contesto della q-Statistica, rendendo possibile l'uso dell'analisi complessa e integrale del q-calcolo per studiare le distribuzioni di probabilità non-estensiva. Niven, R. K., & Suyari, H. (2009). The q-gamma and (q,q)-polygamma functions of Tsallis statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(19), 4045–4060. DOI: 10.1016/j.physa.2009.06.018.

#### In Sintesi: La Cassa degli Attrezzi Analitici

Il **q-Calcolo** può essere visto come una "cassa degli attrezzi analitici" molto generale, che generalizza le regole della derivazione e dell'integrazione. La **q-Statistica di Tsallis** è un'applicazione fisica specifica che richiede una generalizzazione della termodinamica.

Gli studi collegano i due, dimostrando che gli strumenti del q-calcolo (come la q-derivata e i q-fattoriali) possono essere utilizzati per:

1. Fornire una derivazione matematica più rigorosa delle proprietà fondamentali della q-Statistica.
2. Costruire le funzioni speciali (q-Gamma, q-Beta, ecc.) che sono necessarie per il quadro di Tsallis.
3. Analizzare le proprietà delle equazioni differenziali non lineari che emergono nella termodinamica non-estensiva.

#### Il Legame Dettagliato tra q-Calcolo e Algebra di Lie

##### 1. Il Contesto Classico: Algebre di Lie

Un'**Algebra di Lie** è un'algebra che cattura le simmetrie continue di un sistema (come le rotazioni in meccanica quantistica o le trasformazioni di Lorentz in relatività). La sua struttura fondamentale è definita dalla **Parentesi di Lie** (spesso il commutatore):  $[X, Y] = XY - YX$ .

Questa parentesi governa le relazioni tra i generatori delle trasformazioni. L'**Algebra Involupante Universale** è l'algebra associativa generata da questi elementi e dalle loro relazioni di commutazione. È la base algebrica su cui si costruisce la meccanica quantistica standard (ad esempio, le relazioni di commutazione per l'impulso angolare).

##### 2. La Deformazione: I Gruppi Quantistici $U_q$

Il q-calcolo fornisce gli strumenti matematici per operare una **q-Deformazione** dell'algebra  $U$ , trasformandola in quella che viene chiamata **Gruppo Quantistico** o **Algebra Involupante Quantistica**  $U_q$ . Questa deformazione è cruciale perché il **q-calcolo** è essenzialmente il calcolo delle **differenze finite**, mentre l'Algebra di Lie è il calcolo differenziale.

## Ruolo della Deformazione

1. Il q-Numero: L'elemento fondamentale è il q-numero, definito come:

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

Quando il parametro di deformazione  $q$  tende a 1, il q-numero  $[n]_q$  tende al numero intero classico  $n$ .

2. **La q-Derivata:** L'operatore di q-derivazione studiato

$$(D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x})$$
 è anch'esso una deformazione della derivata ordinaria  $f'(x)$ , a cui converge per  $q \rightarrow 1$ .

In sintesi, i Gruppi Quantistici  $U_q$  sostituiscono le relazioni algebriche lineari (definite dal limite  $q \rightarrow 1$ ) con relazioni non-lineari che dipendono da  $q$ .

## 3. L'Esempio Canonico.

L'esempio più studiato è la q-deformazione dell'algebra di Lie (che genera il gruppo delle rotazioni  $SU(2)$ ).

Algebra Classica ( $\mathfrak{sl}_2$ )	Algebra Quantistica ( $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ )
<b>Generatori:</b> $E, F, H$	<b>Generatori:</b> $E, F, K = q^H, K^{-1} = q^{-H}$
<b>Relazione di Commutazione (Classica):</b>	<b>Relazione di q-Commutazione (Deformata):</b>
$[E, F] = EF - FE = H$	$[E, F]_q = EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$

Come si può vedere:

- Il membro di destra della relazione quantistica è proprio il **q-numero**  $[H]_q$  (o una sua variante).
- Quando si pone  $q \rightarrow 1$ ,

$$\frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \rightarrow H,$$

e si recupera perfettamente la relazione classica.

## 4. Conseguenze e Significato Fisico

La q-deformazione è molto più di un esercizio matematico; introduce una struttura fondamentale nuova:

- **Struttura di Hopf Algebra:** I gruppi quantistici non sono solo algebre associative; sono anche **Hopf Algebre**, il che fornisce regole per la *co-moltiplicazione* (come si combina una simmetria con se stessa, essenziale per il prodotto tensoriale delle rappresentazioni). Questa proprietà è fondamentale nella teoria quantistica.
- **Geometria Non-Commutativa:** La deformazione è spesso interpretata come la descrizione di uno **spazio quantizzato** o **non-commutativo**. Se gli operatori classici commutano, gli operatori quantistici (deformati) non commutano secondo una regola che dipende da  $q$ .
- **Applicazioni in Fisica:**

- **Statistica Quantistica e Meccanica Statistica Non-Estensiva:** Come visto, la q-statistica di Tsallis è un altro esempio di deformazione. Le due teorie non sono identiche, ma condividono la filosofia del "deformare" la matematica classica.
- **Teoria dei Campi e Gravità Quantistica:** I gruppi quantistici compaiono nella quantizzazione di modelli dove si ipotizza che lo spazio-tempo stesso sia discreto (e non commutativo) a scale piccolissime.
- **Teoria dei Nodi:** I gruppi quantistici sono stati utilizzati per costruire potenti invarianti di nodi (come l'invariante di Jones), dimostrando un legame profondo tra la deformazione algebrica e la topologia.

In sintesi, il q-calcolo fornisce la **struttura analitica** (i q-numeri, q-integrali, q-derivate) che permette di costruire e manipolare le **Algebre Quantistiche**, le quali sono le deformazioni dei sistemi di simmetria classici definiti dalle Algebre di Lie.

Tocchiamo ora un punto che evidenzia la potenza e l'inaspettata portata del q-calcolo e dei Gruppi Quantistici: la loro applicazione alla **Teoria dei Nodi**, un ramo della topologia. Il legame si comprende meglio attraverso l'esempio dell'**Invariante di Jones ( $V_L(t)$ )**, un polinomio che è in grado di distinguere tra diversi tipi di nodi.

### L'Esempio: Dall'Algebra di Lie all'Invariante di Jones

Ecco come la q-deformazione di un'Algebra di Lie (che usa il q-calcolo) genera un invariante topologico (l'Invariante di Jones):

#### 1. Il Contesto Topologico: I Nodi

In Topologia, un **Nodo** è un'immersione di una circonferenza nello spazio tridimensionale. Due nodi sono considerati equivalenti (o "lo stesso nodo") se uno può essere deformato nell'altro senza tagliarlo.

- L'obiettivo della Teoria dei Nodi è trovare **invarianti** matematici: quantità (numeri, polinomi, gruppi) che non cambiano se il nodo viene deformato. Se due nodi hanno invarianti diversi, *allora sono nodi diversi*.

#### 2. L'Origine Classica: L'Invariante di Alexander (1928)

Il primo invariante polinomiale, il **Polinomio di Alexander**, è stato scoperto utilizzando strumenti di algebra omologica. Per molto tempo, è stato l'unico strumento potente.

#### 3. L'Invariante di Jones e la Struttura q-algebrica (1984)

Nel 1984, Vaughan F. R. Jones scoprì un nuovo e molto più potente invariante, l'**Invariante di Jones ( $V_L(t)$ )**, basato su un'algebra che non aveva un chiaro legame con la topologia: l'**Algebra di Hecke**. Successivamente, fu dimostrato che l'Invariante di Jones emergeva naturalmente dalle **rappresentazioni dei Gruppi Quantistici**.

#### 4. La Meccanica del Legame

Il legame si stabilisce così:

- **Punto di Partenza:** Si inizia con l'Algebra di Lie più semplice (relativa al gruppo  $SU(2)$ ).
- **Deformazione:** Si applica la q-deformazione per ottenere il Gruppo Quantistico (come descritto in precedenza), dove le relazioni di commutazione sono governate dal q-calcolo:

$$[E, F]_q = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

- **La Treccia (Braids) e Rappresentazioni:** I nodi possono essere rappresentati come la chiusura di una **treccia (braid)**. Le proprietà algebriche dei Gruppi Quantistici permettono di costruire una **rappresentazione matriciale** delle operazioni di incrocio e riavvolgimento delle treccie.
- **L'Invariante:** L'**Invariante di Jones** ( $V_L(t)$ ) viene calcolato prendendo la **traccia** di queste matrici di rappresentazione deformate. La traccia è la funzione che, per natura, non cambia sotto deformazioni (coniugazione), garantendo l'invarianza del polinomio.

## 5. Il Ruolo di q

Il parametro q (che nel q-calcolo è un fattore di deformazione, e nella formula finale viene sostituito dalla variabile t) svolge un ruolo essenziale:

- **q crea la distinzione:** È proprio la dipendenza da q (o t) che permette all'invariante di Jones di essere un polinomio complesso in grado di distinguere tra nodi che l'invariante di Alexander falliva a distinguere (ad esempio, il nodo trifoglio dal suo riflesso speculare).

In conclusione, l'Invariante di Jones è un perfetto esempio di come una struttura algebrica radicalmente moderna (i Gruppi Quantistici, basati sul q-calcolo) sia stata in grado di risolvere un problema di topologia pura, dimostrando che la deformazione del calcolo classico ha conseguenze profonde e concrete nella matematica e nella fisica.

## Conclusioni

Lo studio delle nozioni fondamentali del **q-Calcolo** è cruciale per chiunque intenda esplorare il *quantum calculus*, un'alternativa metodologica al calcolo tradizionale basato sui limiti. L'approccio delle differenze finite, che sta al cuore del q-calcolo, offre non solo un ponte teorico verso la meccanica quantistica e la teoria delle algebre, ma è anche di crescente importanza per la sua applicazione in diversi campi della fisica e dell'ingegneria, come le **funzioni speciali** e le **teorie di interpolazione**.

La comprensione rigorosa di concetti come l'integrale di Jackson e le funzioni q-Gamma e q-Beta, così come definite in questo scritto, pone le basi per:

1. **Modellazione di Sistemi Discreti:** L'uso intrinseco delle differenze finite rende il q-calcolo particolarmente adatto per la modellazione di sistemi fisici e matematici discreti.
2. **Transizione al Continuo:** La capacità del sistema di convergere al calcolo ordinario per  $q \rightarrow 1$  fornisce un potente strumento analitico per comprendere la transizione tra i mondi discreti e continui.

In sintesi, il q-calcolo si conferma una disciplina essenziale per l'analisi moderna, fornendo gli strumenti matematici necessari per un'indagine approfondita di fenomeni che richiedono un approccio non legato al limite.

## Ringraziamenti (Acknowledgements)

L'Autrice desidera ringraziare **Gemini (Google's AI)** per l'assistenza fornita nella strutturazione del manoscritto, in particolare per la contestualizzazione del q-Calcolo e l'intersezione tra il q-Calcolo (analisi sulle differenze finite) e la q-Statistica di Tsallis (termodinamica non-estensiva), e per la discussione sulle algebre di Lie.