L'uso delle funzioni parte intera e mantissa nei processi di campionamento e quantizzazione

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

n. 78
maggio 2021

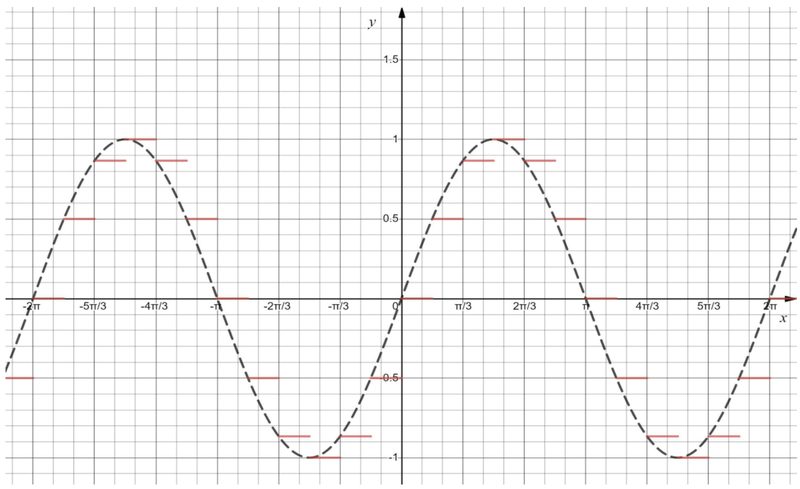
L'USO DELLE FUNZIONI PARTE INTERA E MANTISSA NEI PROCESSI DI CAMPIONAMENTO E QUANTIZZAZIONE

*di Enrico Perano**

** Dottorando in Ingegneria Elettronica, Politecnico di Torino*

Sommario

Le funzioni parte intera floor(x) = E(x) e mantissa frac (x)=M (x) vengono utilizzate in molti linguaggi di programmazione e sono imple- mentate in molti sistemi di computer algebra (C.A.S.). Nei corsi di Analisi Matematica vengono definite e studiate per le loro particolari proprieta` che le rendono diverse dalle funzioni tradizionali che normal- mente vengono proposte, ma non vengono valorizzate per la loro im- portanza nelle applicazioni. Il seguente articolo mostra come possano essere utilizzate, ad esempio, per descrivere i processi di quantizzazione e campionamento sui quali si basa la conversione di un segnale analogi- co, cio`e una funzione continua dipendente dal tempo, in forma digitale. I segnali del mondo reale infatti sono funzioni continue, ma un elaboratore digitale `e in grado di operare solo ad intervalli di tempo discreti , cio`e i valori del segnale sono acquisiti in corrispondenza di istanti inter- vallati solitamente di un periodo fisso.



Pertanto le ampiezze del segnale devono essere prelevate solo in determinati istanti ed approssimate sce- gliendo un numero finito di valori rappresentativi.

Come riportato nei paragrafi seguenti, si puo` realizzare il campiona- mento o la quantizzazione di una funzione continua componendola con la parte intera, a seconda che si scelga la parte intera come funzione interna o esterna della composizione, cio`e si consideri la funzione com- posta g = f [E(x)] oppure g = E [f (x)]. L'utilizzo della mantissa invece permette di determjnare l'errore di quantizzazione, cio`e l'errore che si commette nell'approssimare il valore analogico di un segnale campionato con il valore digitale che gli viene assegnato.

Mathematics Subject Classification: 33B99, 94A12, 94A20

Parole chiave: funzione parte intera, funzione mantissa, campionamento, quantizzazione

1 Preliminari

Sono note dalla Matematica le seguenti definizioni ([1]):

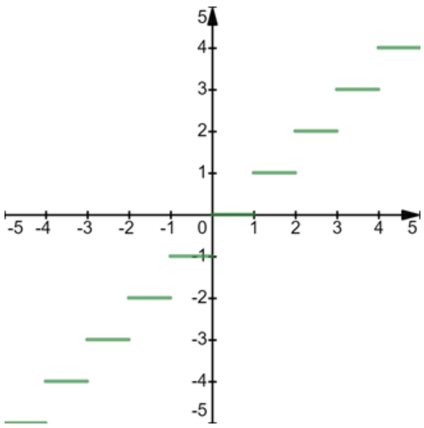
$$y = E\,[x] = [x] \ = \text{floor}(x) = \max\{m \in Z | m \leq x\}$$

$$y = \text{ceil}(x) = [x] \ = \min\{n \ \in Z | n \geq x\}$$

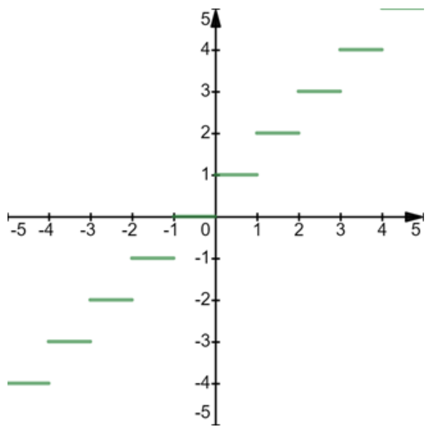
$$y = M\,(x) = x - E\,[x] = x - k \qquad k \leq x \leq k + 1$$

In pratica, per un dato valore reale x, la funzione floor(x) fornisce il maggiore dei valori interi minori o uguali a x, mentre ceil(x) il minore degli interi superiori o uguali a x. Se x è intero, floor(x) e ceil(x) coincidono e valgono entrambe x:

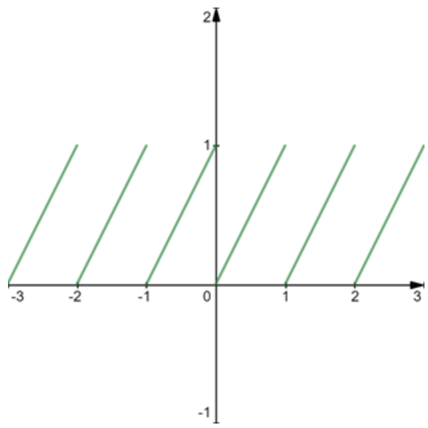
$$\text{floor}(x) = \text{ceils}(x) \qquad x \in Z$$



(a) floor (x)



(b) ceil(x)



(c) M (x) = frac(x)

$$\text{dom}\{\text{floor(x)}\} = \text{dom}\{\text{ceil(x)}\} = \text{dom}\{M(x)\} = R$$

$$\text{Img}\{\text{floor(x)}\} = \text{Img}\{\text{ceil(x)}\} = Z \ ; \ \text{Img}\{M\,(x)\} = [0,\ 1)$$

La funzione $y = M(x)$ associa a ogni numero intero il valore zero, a ogni numero reale non intero x la sua parte decimale, se x è positivo, il valore complementare della sua parte decimale, se x è negativo.
Le funzioni floor(x) e ceil(x) sono legate dalle relazioni

$$\text{floor}(\text{x}) \leq \text{ceil}(\text{x})$$
$$\text{ceil}(\text{x}) - \text{floor}(\text{x}) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ 1 & x \notin Z \end{cases}$$
$$\text{floor}(\text{x}) = -\text{ceil}(\text{-x})$$

mentre della funzione mantissa si possono riassumere le seguenti proprietà:

$$M(x) + M(-x) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ 1 & x \notin Z \end{cases}$$
$$0 \leq M(x) < 1$$
$$M(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x \in Z$$
$$M[M(x)] = M(x) \quad \forall x \in R$$

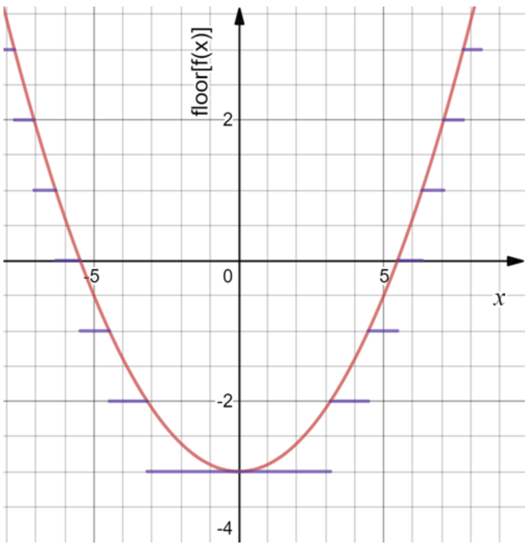
Quando il termine "parte intera" è utilizzato in senso generico, senza cioè specificare a quale dei due tipi di operatore si vuole fare riferimento, si intende sempre la funzione floor(x), indicata più brevemente con $E(x)$ o $[\text{x}]$.

$$y = E(x) = \lfloor x \rfloor = k \quad k \leq x < k + 1 (k \in Z)$$

2 Introduzione

Nel seguito si descrivono le possibili funzioni che si ottengono componendo floor(x) e Frac(x) con un'altra funzione $f(x)$ e per ciascuna il grafico corrispondente, scegliendo come esempio $f(x) = 0.1x^2 - 3$.

1. $g(x) = E[f(x)] = k \qquad k \leq f(x) < k + 1 \qquad k \in Z$



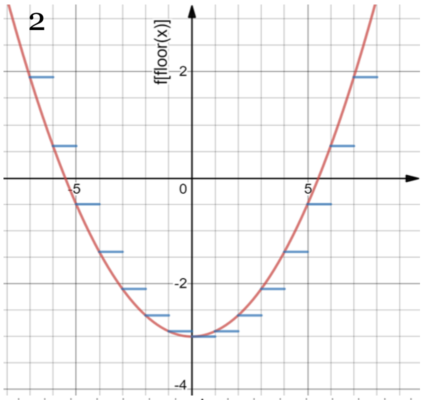
Una volta risolta l'equazione $f(x) = k$, cioè ricavate le controimmagini $f^{-1}(k)$, il grafico di $g(x)$ si traccia rappresentando i tratti di retta orizzontale di equazione $y = k$ negli intervalli di estremi $f^{-1}(k)$ e $f^{-1}(k+1)$.

La formula si puo' generalizzare supponendo di suddividere in intervalli di ampiezza T ≠ 1, sia l'insieme di valori della variabile x che quello di $f(x)$. Si ottengono allora le seguenti espressioni:

$$g(x) = T \cdot E\left[\frac{f(x)}{T}\right] = kT \qquad kT \leq f(x) < (k+1)T \qquad (1)$$
$$g(x) = E\left[f\left(\frac{x}{T}\right)\right] \qquad kT \leq x < (k+1)T \qquad (2)$$

Nel primo caso si suddivide l'immagine della funzione $f(x)$ in intervalli di ampiezza T nei quali la funzione $g(x)$ risulta uguale al valore di $f(x)$ nei loro estremi inferiori. Nel secondo invece è il dominio di definizione di $f(x)$ che viene suddiviso in intervalli di ampiezza T e, in ciascuno di essi, $g(x)$ assume i valori interi contenuti nell'intervallo di estremi $f(kT)$ e $f[(k+1)T]$ compresa la parte intera del minimo tra $f(kT)$ e $f[(k+1)T]$.

2. $g(x) = f[E(x)] = f(k) \qquad k \leq x < k+1 \qquad (k \in Z)$



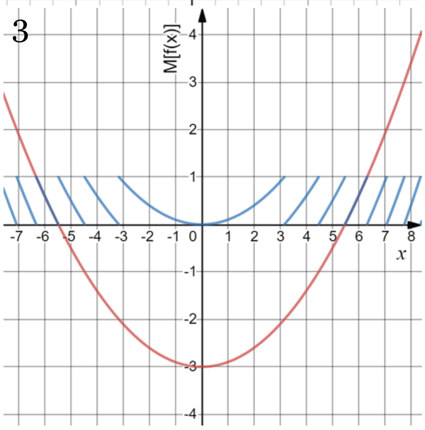
La funzione $g(x)$, in ogni intervallo della variabile x di ampiezza unitaria tra due interi consecutivi, si mantiene costante al valore che $f(x)$ assume nel primo estremo.

$$g(x) = f\left[T \cdot E\left(\frac{x}{T}\right)\right] = f(kT) \qquad kT \leq x < (k+1)T \qquad (3)$$

Considerando intervalli di ampiezza $T \neq 1$ la funzione $g(x)$ assume la forma più generale:

$$g(x) = M[f(x)] = f(x) - E[f(x)] = f(x) - k$$
$$k \leq f(x) < k+1 \quad (k \in Z)$$

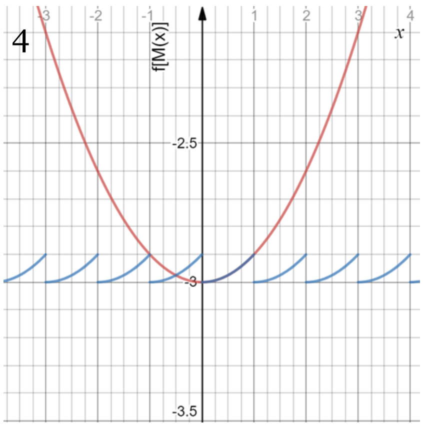
3. $$g(x) = M[f(x)] = f(x) - E[f(x)] = f(x) - k$$
$$k \leq f(x) < k+1 \quad (k \in Z)$$



Le porzioni del grafico di $f(x)$ comprese tra k e $k+1$, contenute negli intervalli di estremi $f^{-1}(k)$ e $f^{-1}(k+1)$, vengono riportate sull'asse orizzontale, sollevandole o abbassandole di k a seconda che k sia negativo o positivo.
Ovviamente è sempre: $Im\{M[f(x)]\} = [0,1)$.

4. $g(x) = f[M(x)] = f[x - E(x)] =$
$= f(x-k) k \leq x < k+1 \quad (k \in Z)$

Da tale equazione si deduce che il grafico di $g(x)$ si ottiene ripetendo periodicamente l'andamento assunto da $f(x)$ nell'intervallo $[0, 1)$, in intervalli adiacenti uguali di ampiezza unitaria.



Più in generale, si può prolungare periodicamente l'andamento di una funzione $f(x)$ assegnato in un generico intervallo $[a,b]$.
Indicata con T l'ampiezza dell'intervallo $[a, b)$, cioè il periodo del prolungamento $g(x)$, e posto $b = a + T$, si ottiene l'espressione di $g(x)$ sottraendo alla variabile indipendente x in $f(x)$ la funzione parte intera, traslata in a e opportunamente modificata dal coefficiente T nella scala dei valori di entrambi gli assi, come riportato nel seguito:

$$g(x) = f\left[x - T \cdot E\left(\frac{x-a}{T}\right)\right] = f\left[T \cdot M\left(\frac{x-a}{T}\right) + a\right] =$$
$$= \begin{cases} f(x) & a \leq x \leq a+T \\ f(x-T) & a+T \leq x < a+2T \\ f(x-2T) & a+2T \leq x < a+3T \\ \dots & \\ f(x-kT) & a+kT \leq x < a+(k+1)T \end{cases}$$

5. Per le applicazioni che vedremo nei prossimi paragrafi è utile definire ancora una composizione di una funzione $f(x)$ con la parte intera $E(x)$ che si potrebbe considerare una versione modificata della mantissa anche se i suoi valori possono non contenere solo la parte decimale. La sua espressione è

$$f(x) - f\left[E(x)\right]$$

e, più in generale, considerando intervalli di ampiezza generica T, anziché unitaria:

$$f(x) - f\left[T \cdot E\left(\frac{x}{T}\right)\right]$$

Tale funzione, che nel seguito indicheremo con $\tilde{M}$, fornisce, per ogni intervallo $[kT, (k+1)T)$, la differenza tra il valore che la funzione $f(x)$ assume in una generica ascissa x compresa tra kT e $(k+1)T$, e quello nell'estremo inferiore dell'intervallo, cioè $f(kT)$. Il grafico di $\tilde{M}[f(x)]$ si ottiene quindi riportando in ogni intervallo $[kT, (k+1)T)$ l'andamento di $f(x)$, abbassandolo o alzandolo sull'asse orizzontale a seconda che sia positivo o negativo, in quanto risulta $\tilde{M}(kT) = 0, \quad \forall k \in Z$.
Si noti che, nel caso particolare in cui fosse $f(x) = x$, la (4) verrebbe a coincidere con la funzione mantissa tradizionale modificata per un fattore di scala pari a T:

$$T \cdot M\left[\frac{f(x)}{T}\right] = T\left\{\frac{f(x)}{T} - E\left[\frac{f(x)}{T}\right]\right\} = f(x) - f\left[T \cdot E\left(\frac{x}{T}\right)\right]$$

in quanto, ponendo $f(x) = x$, risulta: $f[E(x)] = E[f(x)]$.
Volendo considerare un unico valore rappresentativo della funzione in ciascun intervallo, la funzione $\tilde{M}[f(x)]$ definisce l'errore che si compie nello scegliere $f(kT)$ anziché $f(x)$.

3 Quantizzazione di una funzione analogica

Una funzione si dice **analogica** quando la sua immagine puo' variare con continuita' ed assumere tutti i valori compresi tra un minimo e un massimo ([2]). Una funzione si dice **quantizzata** quando la sua immagine è costituita da un numero discreto e finito di valori.
L'operatore parte intera permette di quantizzare una funzione analogica convertendo la sua immagine continua in un insieme di valori rappresentativi. In pratica il processo di quantizzazione consiste nel suddividere l'intervallo di variazione dell'ampiezza della funzione in un numero finito di sottointervalli, a ciascuno dei quali si associa un unico valore (solitamente il primo estremo o il valore medio tra due estremi). L'insieme di infiniti valori assunti dalla funzione in ciascun intervallino viene poi sostituito da quell'unico che lo rappresenta. Se la funzione non è strettamente monotona, si hanno piu' controimmagini per uno stesso valore rappresentativo, ma le funzioni analogiche a cui si applica il processo di quantizzazione sono segnali determinati, cioè funzioni analogiche nella quali la variabile indipendente x *è* il tempo t. Pertanto le controimmagini dei valori di un segnale sono gli istanti in cui li assume e puo' capitare che un segnale assuma uno stesso valore in istanti diversi.
La quantizzazione permette di ottenere una replica discreta della funzione che approssima quella continua e tale approssimazione è tanto piu' precisa quanto piu' è elevato il numero di intervalli in cui viene suddivisa la sua immagine.
Utilizzando l'operatore parte intera $E[\ ]$ il processo di quantizzazione di una funzione continua $f(x)$ con passo Q si puo' descrivere con il seguente schema a blocchi:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\tfrac{1}{Q}[\ \ ]} \longrightarrow \boxed{E[\ \ ]} \longrightarrow \boxed{Q[\ \ ]} \longrightarrow g(x) = Q \cdot E\left[\tfrac{f(x)}{Q}\right]$$

ottenendo come risultato un'espressione della forma (1).

Risulta infatti

$$g(x) = kQ \qquad \text{se} \quad k \leq \frac{f(x)}{Q} < k+1, \text{ cioé per } kQ \leq f(x) < (k+1)Q$$

Se poi all'espressione di $g(x)$ si aggiunge $Q/2$, si associa a ogni intervallo $[kQ,(k+1)Q)$ il livello medio.
L'errore che si compie nell'approssimare un valore di $f(x)$ compreso tra kQ e $(k+1)Q$ con $f(kQ)$ è dato dall'espressione:

$$f(x) - QE\left[\frac{f(x)}{Q}\right]$$

che coincide con $M[f(x)]$ se risulta $Q = 1$.

4 Campionamento di una funzione analogica

Campionare una funzione analogica $f(x)$ significa scegliere solamente alcuni valori rappresentativi in corrispondenza di opportune x equispaziate nel dominio ([2]). Detto in termini piu' semplici: si suddivide il dominio di $f(x)$ in un opportuno numero di intervalli equispaziati e per tutta l'ampiezza di ciascuno intervallo si suppone che la funzione sia costante e pari al valore assunto nel primo estremo. I valori rappresentativi della funzione campionata in ciascun intervallo si chiamano campioni ([3]).
Quindi, mentre la quantizzazione di una funzione consiste nel suddividere con un fascio di rette orizzontali equidistanti la sua immagine in un numero discreto di intervalli di ugual ampiezza sull'asse orizzontale, il campionamento si effettua svolgendo lo stesso procedimento, ma ora sul dominio: tramite un fascio di rette, sempre equidistanti, ma questa volta verticali, si determina un numero discreto finito di intervalli di ugual ampiezza sull'asse orizzontale e in ciascun intervallo la funzione campionata si pone uguale al valore che assume nell'estremo inferiore.
Il campionamento con periodo T del grafico di $f(x)$ è dato dalla funzione (3):

$$h(x) = f\left[T \cdot E\left(\frac{x}{T}\right)\right]$$

Risulta infatti:

$$h(x) = f(kT) \qquad \text{per } kT \leq x < (k+1)T$$

Inoltre l'errore che si compie in ciascun intervallo nello scegliere $f(kT)$ come valore rappresentativo della funzione, anziche' $f(x)$, è dato da:

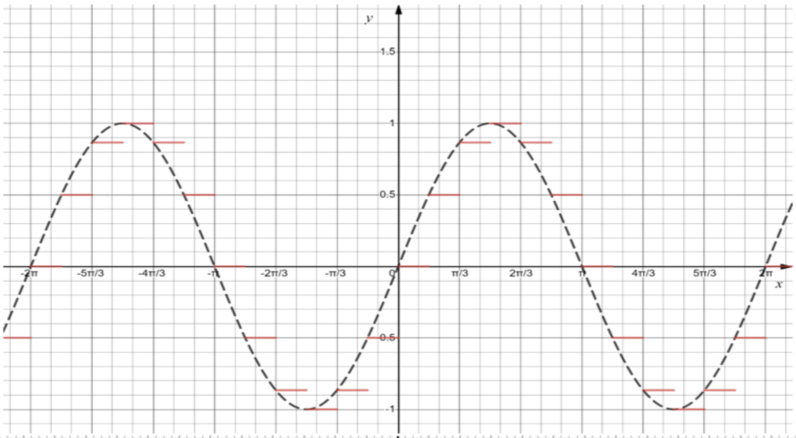
$$f(x) - f(kT) \quad \forall x \in [kT, (k+1)T[$$

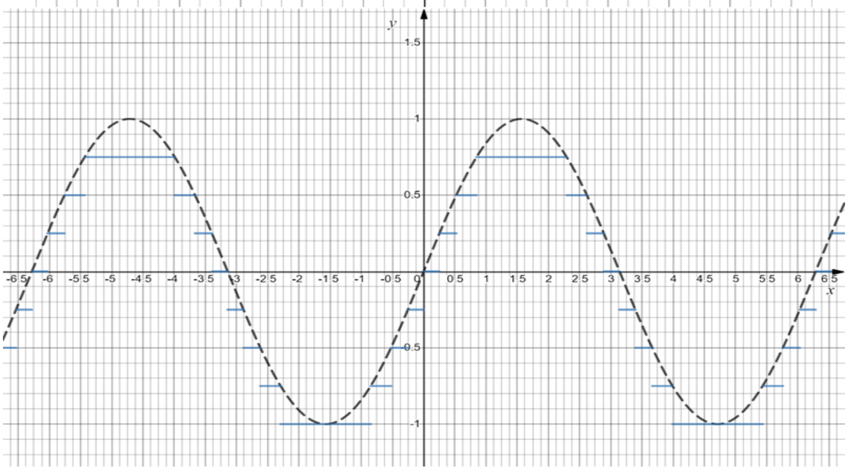
e si puo' quindi scrivere nella forma (4):

$$\tilde{M}[f(x)] = f(x) - f\left[T \cdot E\left(\frac{x}{T}\right)\right]$$

Per ogni $[kT,(k+1)T)$ tale errore risulta ovviamente nullo in $x = kT$ e massimo in $x = (k+1)T-$, supponendo la funzione strettamente monotona.

A titolo di esempio le figure seguenti riportano la quantizzazione con passo $Q = .25$ (blue) e il campionamento con periodo $T = \pi/6$ (red) di una sinusoide.





5 Quantizzazione di una funzione campionata

Vediamo ora quale risultato si ottiene applicando in sequenza i due procedimenti precedenti, ovvero campionando una funzione analogica e successivamente quantizzandola ([2],[3]).
Si tratta in pratica di discretizzare sia il dominio sia l'immagine della funzione.
Ciascuno dei campioni della funzione, ottenuti discretizzando il dominio, sarà contenuto in un preciso intervallo tra quelli in cui è suddivisa l'immagine, per cui verrà sostituito dal valore rappresentativo di tale intervallo.
Analiticamente il risultato è dato dalla seguente espressione:

$$g(x) = Q \cdot E\left\{\frac{f\left[T \cdot E\left(\frac{x}{T}\right)\right]}{Q}\right\}$$

dove si è indicato con $f(x)$ la funzione analogica che deve essere prima campionata, cioè discretizzata nel dominio e poi quantizzata, cioè discretizzata nell'immagine.
Facciamo ora un esempio numerico senza scegliere nessuna funzione $f(x)$ in particolare. Consideriamo nel dominio di $f(x)$ l'intervallo $[T, 2T)$, cioè $T \leq x < 2T$.
Poiche' in tale intervallo la funzione campionata si mantiene costante al valore assunto nel primo estremo $x = T$, cioè $f(T)$, bisogna stabilire in quale, tra gli intervalli in cui è suddivisa l'immagine, si trova il valore $f(T)$, cioè in pratica si deve determinare l'intero h soddisfacente la seguente diseguaglianza:

$$hQ \leq f(T) < (h+1)Q$$

Se, ad esempio, risulta $h = 2$, cioè si ha $2Q \leq f(T) < 3Q$, possiamo scrivere:

$$g(x) = 2Q \qquad \text{per } T \leq x < 2T$$

E importante tenere presente che la differenza dei valori di due campioni consecutivi deve essere superiore all'ampiezza Q degli intervalli di quantizzazione altrimenti si perde informazione. In altre parole, l'intervallo di quantizzazione deve essere sufficientemente piccolo da contenere un campione alla volta.
Consideriamo, ad esempio, i campioni della funzione analogica $f(x)$ negli intervalli $[2T, 3T)$ e $[3T, 4T)$, cioè $f(2T)$ e $f(3T)$, e supponiamo che il valore $f(2T)$ sia contenuto in un certo intervallo di quantizzazione, di ampiezza Q, estremi hQ e $(h+1)Q$ con h intero opportuno. Tale intervallo non deve comprendere anche il campione $f(3T)$ che altrimenti non verrebbe quantizzato e si perderebbe. Infatti a piu' campioni contenuti in uno stesso intervallo di quantizzazione viene associato lo stesso valore rappresentativo.
Quantizzare una funzione gia' campionata riveste un'importanza fondamentale nel campo della trasmissione dei segnali. Infatti, campionando una funzione, la sua immagine si riduce a un insieme discreto di valori, i cosiddetti campioni, ciascuno dei quali puo' essere un qualunque numero reale nell'ambito dell'im- magine di $f(x)$. Se pero' si effettua anche la quantizzazione, ciascun campione viene approssimato con un valore fisso: l'estremo inferiore o il valor medio del quanto a cui tale campione appartiene.
Cosi', se quantizziamo, ad esempio, l'immagine di f(x) mediante una suddivisione in dieci intervalli, ogni campione di f(x) che, ricordo, puo' essere un qualunque valore reale appartenente all'immagine, verra' rappresentato solamente da uno tra dieci valori possibili: quelli che definiscono gli intervalli di quantizzazione. Ovviamente, quanto piu' il campione è "distante" dal valore rappresentativo del quanto che lo contiene e tanto maggiore è l'errore di approssimazione.
Vediamo ora di applicare queste considerazioni alla funzione analogica $f(x) = 0.025x^3 + 0.3x + 1$. Supponiamo di campionarla nell'intervallo $[-6, +6]$ con $T = 1$ e quantizzarla con passo $Q = 0.5$.
Il processo di campionamento dà origine alla funzione

$$h(x) = 0.025\left[T \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{T}\right)\right]^3 + 0.3\left[T \cdot \text{floor}\left(\frac{x}{T}\right)\right] + 1$$

che, applicando la definizione di parte intera, si può scrivere nella forma:

$$h(x) = 0.025(kT)^3 + 0.3(kT) + 1 = f(kT) \qquad \text{per } kT \leq x < (k+1)T \quad (k \in Z)$$

In ogni intervallo di ampiezza T semiaperto a destra la funzione campionata $h(x)$ si mantiene costante al valore assunto da $f(x)$ nell'estremo inferiore; così vale $f(T) = f(1) = 1.325$ in $[T, 2T) = [1, 2)$, $f(2T) = f(2) = 1.8$ in $[2T, 3T) = [2, 3)$, $f(3T) = f(3) = 2.575$ in $[3T, 4T) = [3, 4)$ e così via.
La quantizzazione della funzione campionata $h(x)$ si ottiene tramite la relazione:

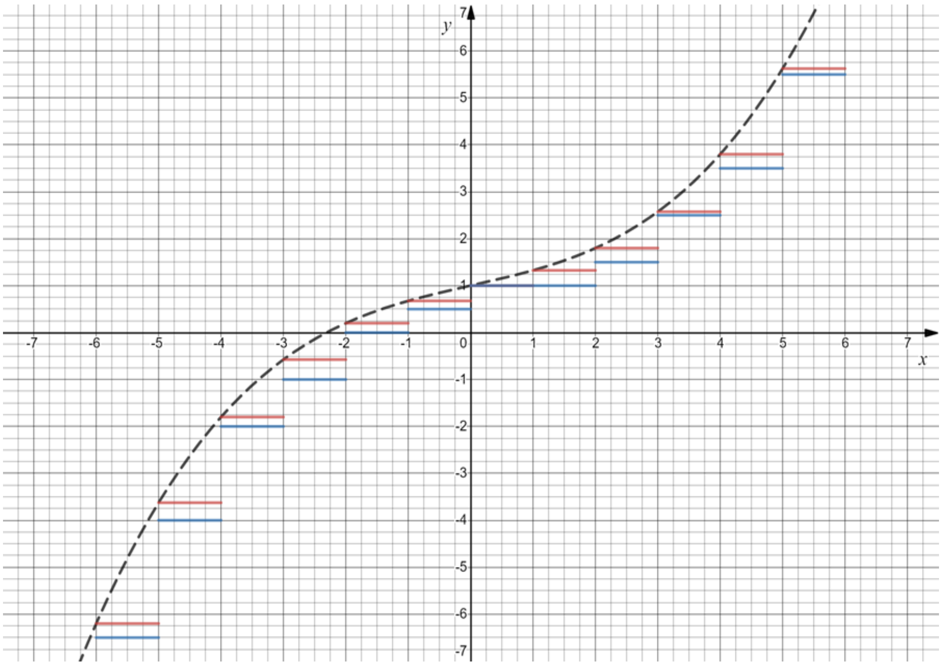
$$g(x) = Q \cdot \text{floor}\left[\frac{h(x)}{Q}\right]$$

ponendo $Q = 0.5$.
La funzione $g(x)$ suddivide l'asse delle ordinate in intervalli equidistanti di ampiezza $Q = 0.5$:

$$\ldots, [-1, -0.5), [-0.5, 0), [0, +0.5), [+0.5, +1), \ldots$$

e associa a ogni valore di $h(x)$, cioè a ciascun campione di $f(x)$, l'estremo inferiore dell'intervallo che, tra questi, lo contiene.

Così, ad esempio, il campione di $f(x)$ nell'intervallo di campionamento $[T, 2T)$, cioè $f(T) = f(1) = 1.325$, essendo compreso nell'intervallo di quantizzazione $[+1, +1.5)$, sarà approssimato con il valore $+1$;
analogamente il campione $f(3T) = f(3) = 2.575$, che risulta nell'intervallo $[3T, 4T = [3, 4)$ sull'asse orizzontale, diventerà, per effetto della quantizzazione, l'estremo inferiore dell'intervallo $[+2.5, +3)$ in cui è compreso, cioè $+2.5$; e così via.
Nelle figure seguenti sono riportati a confronto gli andamenti di $h(x)$ e $g(x)$, cioè i campioni di $f(x)$ (red) e i corrispondenti valori ad essi associati dalla quantizzazione, cioè da $g(x)$ (blue).



I risultati del processo si possono riassumere in una tabella scrivendo, per ciascuno dei dodici intervalli di campionamento di ampiezza $T = 1$, i valori di $h(x)$, cioè i campioni di $f(x)$ e i corrispondenti valori quantizzati forniti dalla funzione $g(x)$.

$[-6, -5)$	$h(-6) = f(-6) = -6.2$	$g(-6.2) = -6.5 = g([-6, -5))$
$[-5, -4)$	$h(-5) = f(-5) = -3.625$	$g(-3.625) = -4 = g([-5, -4))$
$[-4, -3)$	$h(-4) = f(-4) = -1.8$	$g(-1.8) = -2 = g([-4, -3))$
$[-3, -2)$	$h(-3) = f(-3) = -0.575$	$g(-0.575) = -1 = g([-3, -2))$
$[-2, -1)$	$h(-2) = f(-2) = 0.2$	$g(0.2) = 0 = g([-2, -1))$
$[-1, 0)$	$h(-1) = f(-1) = 0.675$	$g(0.675) = 0.5 = g([-1, 0))$
$[0, 1)$	$h(0) = f(0) = 1$	$g(1) = 1 = g([0, 1))$
$[1, 2)$	$h(1) = f(1) = 1.325$	$g(1.325) = 1 = g([1, 2))$
$[2, 3)$	$h(2) = f(2) = 1.8$	$g(1.8) = 1.5 = g([2, 3))$
$[3, 4)$	$h(3) = f(3) = 2.575$	$g(2.575) = 2.5 = g([3, 4))$
$[4, 5)$	$h(4) = f(4) = 3.8$	$g(3.8) = 3.5 = g([4, 5))$
$[5, 6)$	$h(5) = f(5) = 5.625$	$g(5.625) = 5.5 = g([5, 6))$

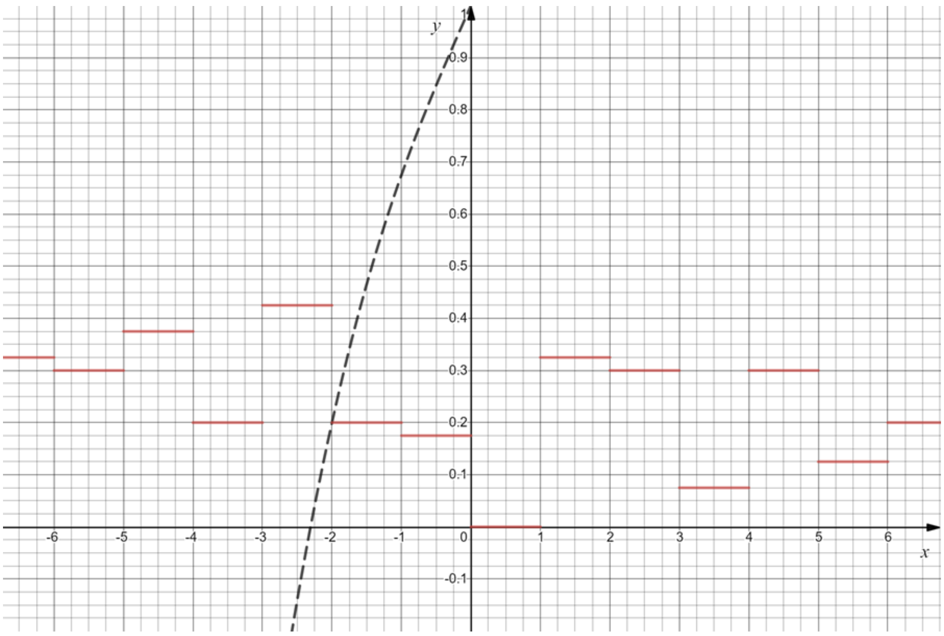
E' facile verificare che i valori ottenuti sia di $h(x)$ che di $g(x)$ sono quelli riportati sui grafici.

Si noti che $\forall x \in [kT, (k+1)T)$ si pone $g(x) = g[f(kT)]$.

L'errore che si commette in ogni periodo sostituendo il campione di $f(x)$ con il corrispondente valore quantizzato da $g(x)$ è dato da:

$$f\left[T\cdot \text{floor}\left(\frac{x}{T}\right)\right]-Q\cdot\text{floor}\left\{\frac{f\left[T\cdot\text{floor}\left(\frac{x}{T}\right)\right]}{Q}\right\}=\begin{cases}-6.2-(-6.5)=0.3 & -6\le x\le -5\\ -3.625-(-4)=0.375 & -5\le x\le -4\\ -1.8-(-2)=0.2 & -4\le x<-3\\ -0.575-(-1)=0.425 & -3\le x<-2\\ +0.2-0=0.2 & -2\le x<-1\\ +0.675-(0.5)=+0.175 & -1\le x<0\\ +1-(+1)=0 & 0\le x<+1\\ +1.325-(+1)=0.325 & +1\le x<+2\\ +1.8-(+1.5)=0.3 & +2\le x<+3\\ +2.575-(+2.5)=0.075 & +3\le x<+4\\ +3.8-(3.5)=0.3 & +4\le x<+5\\ +5.625-(5.5)=0.125 & +5\le x<6\end{cases}$$

ed è riportato graficamente nella figura seguente.



Si noti che, ponendo $Q = 1$, l'errore di quantizzazione equivale alla mantissa della funzione campionata:

$$f\left[T\cdot\text{floor}\left(\frac{x}{T}\right)\right]-\text{floor}\left\{f\left[T\cdot\text{floor}\left(\frac{x}{T}\right)\right]\right\}=M\left\{T\cdot\text{floor}\left[\left(\frac{x}{T}\right)\right]\right\}$$

Enrico Perano
(*Dottorando in Ingegneria Elettronica, Politecnico di Torino*)

Riferimenti Bibliografici

[1] Graham R. L., Knuth D. E., and Patashnik O., *Concrete Mathematics*, Chap.3, Addison-Wesley 1989.

[2] Parigi V.,Perano E., *Sistemi automatici*, Vol.3, Cap.7, Paravia 1995

[3] Luise M.,M.Vitetta G., *Teoria dei segnali*, McGraw-Hill Education 2009

EMMECI quadro
Scienza Educazione E Didattica

DIRETTORE RESPONSABILE Mario Gargantini
www.emmeciquadro.eu

Aut. Trib. Milano n. 226 del 24.3.2000
ISSN 2240-0389
Emmeciquadro (online)