POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Parametrización de órbitas luminosas mediante escalares de estructura

Original
Parametrización de órbitas luminosas mediante escalares de estructura / Albarran Morillo, C., Others,. - ELETTRONICO. - (2021).

Availability:
This version is available at: 11583/2970913 since: 2022-09-06T08:07:11Z

Publisher:

Published
DOI:

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

24 November 2026



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Parametrización de órbitas luminosas mediantes escalares de estructura

AUTOR: Carlos Albarrán Morillo

TUTORES: Justo Hernán Ospino Zúñiga
José Luis Hernández Pastora

Curso 2020-2021





UNIVERSIDAD DE SALAMANCA
MÁSTER UNIVERSITARIO EN MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Parametrización de órbitas luminosas mediantes escalares de estructura

AUTOR: Carlos Albarrán Morillo

TUTORES: Justo Hernán Ospino Zúñiga
José Luis Hernández Pastora

Curso 2020-2021

Don **Justo Hernán Ospino Zuñiga**, Profesor Contratado Doctor del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Salamanca

Don **José Luis Hernández Pastora**, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Salamanca

CERTIFICAN

Que la presente memoria titulada **"Parametrización de órbitas luminosas mediante escalares de estructura"** ha sido realizada bajo su dirección por Don **Carlos Albarrán Morillo**.

Que dicha memoria presenta un trabajo de investigación original y constituye el Trabajo Fin de Máster para lograr el Máster Universitario en Modelización Matemática.

Y para que conste, AUTORIZAN su presentación firmando la presente en Salamanca a 12 Julio de 2021.

Firmado por OSPINO ZUÑIGA JUSTO HERNAN - 70917074R el día 13/07/2021 con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios

Fdo. Justo Hernán Ospino Zúñiga

Firmado por HERNANDEZ PASTORA JOSE LUIS - 11951262W el día 13/07/2021 con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios

Fdo. José Luis Hernández Pastora

Agradecimientos

En primer lugar mostrar mi gratitud hacia Justo, José Luis y Luis, que me han inspirado para comenzar una carrera en la investigación. Justo siempre muy cercano aportando ideas nuevas, mucha motivación y apoyo desde el principio. De Luis destacar su ayuda, que aún no siendo tutor ha mostrado una dedicación plena. Por poner un ejemplo, esta última semana hemos hecho alguna reunión juntos a pesar de que estaba de vacaciones disfrutando de la playa. José Luis, gracias por aportar templanza y otro punto de vista cuando más lo necesitábamos.

A mi hermano, a Manu y sus compañeros de piso que amablemente me cedieron su cocina durante el invierno madrileño para realizar simulaciones, cálculos y largas horas de estudio y lectura. Rescatándome de la atracción de los agujeros negros y de la *vida del cartujo*.

Por último, agradecer a mi familia y gente más cercana, en especial el apoyo recibido por parte de los *Yoyines*. Esenciales en mi vida para lograr mis objetivos y sueños.

Y como diría Justo: Seguimos...

Resumen

Este Trabajo Fin de Máster desarrolla el problema de la trayectoria de fotones en un campo gravitatorio generado por un cuerpo en el marco de la relatividad general, una teoría geométrica donde la gravedad se explica a partir de la curvatura del espacio-tiempo. Esta situación es importante porque ha sido la base de las recientes fotografías del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxía M87 [3] por la Colaboración del Telescopio Event Horizont (EHT).

Plantemos la solución al problema de manera general en función de parámetros físicamente interesantes. Los escalares geométricos obtenidos imponiendo una tétrada en el formalismo 1+3, describen la fuente y los parámetros de energía y momento angular, la órbita de los fotones alrededor de la fuente.

A través de nuestro nuevo enfoque con estos parámetros, podemos primeramente clasificar y parametrizar todas las geodésicas de una manera sencilla, para posteriormente comprobar que obtenemos los resultados ya conocidos. Por último, se introducen nuevos casos no conocidos que abren líneas de investigación sobre otros tipos de geodésicas nunca antes vistas.

Abstract

This Master's thesis develops the problem of the photons trajectory in a gravitational field generated by a source within the framework of general relativity, a geometric theory where gravity is explained from the curvature of space-time. This situation is important because it has been the basis for recent photographs of the supermassive black hole at the center of the galaxy M87 [3] by the Event Horizont Telescope Collaboration (EHT) .

Let us present the solution to the problem in a general way based on physically interesting parameters. The geometric scalars obtained by following a tetrad in 1+3 formalism describe the source and the energy and angular momentum parameters describe the photon orbits around the source.

Through our new model with these parameters, we can first classify and parameterize all possible geodesics in a simple way. After that, we check that we obtain the already known results. Finally, new unknown cases are introduced that open lines of research on other types of geodesics never seen before.

Índice general

Agradecimientos **1**

Resumen **1**

Abstract **2**

Introducción y contexto del trabajo desarrollado **6**

1. Planteamiento del problema y objetivos **8**
1.1. Objetivo general 8
1.2. Objetivos específicos 8

2. Marco teórico **10**
2.1. Gravitación 10
2.1.1. Gravitación newtoniana 10
2.1.2. Relatividad General 13
2.1.3. Modificaciones de la Relatividad General 14
2.2. Relatividad General 14
2.2.1. Métrica 14
2.2.2. Tensor de Riemann 15
2.2.3. Tensor de Ricci 15
2.2.4. Ecuaciones de Einstein 15
2.2.5. Tensor de Weyl 16
2.3. Formalismo 1+3 17
2.3.1. Tétrada 17
2.3.2. Derivada covariante de la tétrada 18
2.3.3. Escalares geométricos 19
2.4. Soluciones de vacío 20
2.4.1. Dos Killing 20
2.4.2. Escalares de Weyl 21
2.4.3. Caracterización en término de los escalares 21
2.5. Geodésicas 22
2.5.1. Ecuaciones de las geodésicas 22

3. Metodología seguida **24**

4. Resultados parciales y discusión **26**
4.1. Schwarzschild 27
4.2. Kerr 36

5. Conclusiones y desarrollos futuros **44**

Apéndices **46**

Bibliografía **50**

Índice de figuras

2.1. Se representa en rojo el potencial efectivo Newtoniano frente a r y los dos términos del potencial efectivo. En líneas discontinuas se representan tres valores de energía: negativo, nulo y positivo. El caso B-B´corresponde con trayectorias elípticas, el A con parábolas y el C con hipérbolas. 12

4.1. El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m^2 = 30$. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía positiva. 30
4.2. Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón 30
4.3. Dentro del caso de energía positiva si r es mayor que el punto de corte, movimiento dispersivo, es una parábola que se va al infinito. 31
4.4. El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m^2 = 30$. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía negativa. 31
4.5. Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón 32
4.6. Los fotones se mueven describiendo elipses pero con una precesión del perihelio de la órbita. 32
4.7. Son órbitas que consideramos de dispersión. Son las equivalentes a las órbitas parabólicas newtonianas. 33
4.8. Representación en ejes coordenados planos de ϕ frente a θ para distintos valores de α. 35
4.9. El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m = +\sqrt{30}$, $E_n = 10$, para distintos valores de a. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía positiva 38
4.10. Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón 39
4.11. Dentro de energía positiva si r es mayor que el punto de corte, movimiento dispersivo, es una parábola que se va al infinito. 40
4.12. El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m = +15$, $E_n = -1$, para distintos valores de a. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía negativa. 41
4.13. Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón 42
4.14. Dentro de energía positiva si r es mayor que el punto de corte, movimiento dispersivo, es una parábola que se va al infinito. 42

Introducción y contexto del trabajo desarrollado

Un problema crucial en la astrofísica relativista es la naturaleza de los candidatos a agujeros negros.
Recientemente la Colaboración del Telescopio Event Horizont (EHT) fotografió por primera vez un agujero de negro supermasivo con masa de $M = (6{,}7 \pm 0{,}7) \times 10^9 M_\odot$ y un parámetro de spin adimensional $a = 0{,}94$ [4] en el centro de la galaxia M87 [3] consistente con la sombra producida por un agujero negro de Kerr. Por esta razón, las medidas de EHT son de gran importancia, porque los resultados pueden ser usados para restringir la métrica de fondo y son complementarios con las trayectorias medidas de estrellas alrededor de objetos compactos dadas por la colaboración GRAVITY [2] y LIGO/VIRGO detecciones de ondas gravitacionales, asociadas a la dinámica del espacio-tiempo [1].
Aunque las imágenes del EHT descartan algunas alternativas de agujeros negros, no hay evidencia o prueba para afirmar que lo son, los cuales normalmente descritos por los espacio-tiempos de Schwarzschild o Kerr [16],[6]. Además de estas relevantes soluciones astrofísicas a la relatividad general, hay otras soluciones sin un horizonte de sucesos que pueden imitar la firma electromagnética de un agujero negro [18], haciendo difícil la identificación del objeto compacto a partir de las observaciones iniciales. De hecho, según [15], cualquier objeto con una esferafotónica puede producir sombras muy similares a los agujeros negros. Algunos ejemplos de imitadores de agujeros negros sin singularidades en la curvatura son estrellas de fotones [13],[14] cuyas sombras son muy similares a las obtenidas con las soluciones de Kerr [19].
Adicionalmente, se ha mostrado que empezando desde condiciones razonables físicamente es posible colapsar un fluido a un objeto compacto con una singularidad en la curvatura, pero sin un horizonte de sucesos. Estos sistemas son llamados singularidades desnudas, en cuya definición no se incluye el horizonte de sucesos [16],[7],[8]. Estos resultados violan la no comprobada conjetura de censura cósmica [17],[5] la cual dice que no es posible formar una singularidad sin un horizonte de sucesos[12], por lo tanto estas singularidades abren la posibilidad de estudiar y observar fenómenos gravitacionales en el régimen ultra-fuerte, es decir, en la vecindad de una singularidad en la curvatura[16]. De aquí la importancia de obtener imágenes de singularidades desnudas para determinar las diferencias con las imágenes de agujeros negros.

A raíz de las imágenes del EHT han surgido distintas propuestas de simular estas imágenes a partir de las ecuaciones de Einstein más complejas [14]. Estas fotos son el impacto de los fotones desviados por un campo gravitacional muy fuerte que se mueven

por geodésicas nulas. La desviación que sufren estos fotones depende de la fuente. Por consiguiente, se va a poder obtener información de la fuente dependiendo de la desviación que sufra la luz que nos llega. La información que se va a poder obtener de estas imágenes es si la fuente tiene rotación o no o si la fuente es un agujero negro, un objeto compacto o una combinación de ambos. Al tener una desviación netamente gravitacional se tiene en cuenta los efectos de la materia oscura. La materia oscura se cree que es la responsable de este efecto gravitatorio de curvatura de la luz alrededor de un objeto masivo situado entre el objeto emisor y receptor.
En este trabajo se propone seguir el artículo [14] pero bajo un formalismo equivalente a las ecuaciones de Einstein que ha probado ser más útil [9],[11],[10]. Esto nos permitirá encontrar soluciones a las ecuaciones geodésicas nulas (trayectorias de fotones) a partir de los escalares generados por las proyecciones del tensor de Riemann.

Capítulo 1

Planteamiento del problema y objetivos

Lo que se quiere estudiar en este trabajo son las geodésicas luminosas dentro del formalismo de cantidades escalares y compararlo con los resultados ya obtenidos. Por lo tanto, el problema principal planteado es cómo resolver la trayectoria de fotones en relatividad general utilizando el formalismo de escalares qué se desarrollará con detalle en los próximos capítulos.

Una vez que se tenga resuelto el problema principal de las geodésicas luminosas, se formula la siguiente pregunta de investigación: ¿se puede sacar información de las propiedades físicas de la fuente a partir de las trayectorias de fotones?. Para resolver esta pregunta planteada se utilizarán dos casos particulares, el caso de la métrica de Schwarzschild obtenida resolviendo las ecuaciones de Einstein en el vacío para un cuerpo masivo esférico estático con simetría axial y estacionario. Luego, se estudia el caso de la métrica de Kerr que tiene rotación, por lo tanto, es una métrica no estática pero como en Schwarzschild es invariante respecto de t e independiente de ϕ, es decir, estacionaria y con simetría axial. Por último, se compararán los resultados obtenidos en ambas métricas viendo que se obtienen trayectorias luminosas distintas.

1.1. Objetivo general

El objetivo general del trabajo es encontrar la formulación más general que permita la clasificación de todas las trayectorias de los fotones en el marco de la relatividad general.

1.2. Objetivos específicos

- Plantear las ecuaciones de las geodésicas para fotones en término de los escalares geométricos a_i, Ω_i y j_i.
- Identificar las cantidades que parametrizan los distintos tipos de geodésicas.

- Aplicar este formalismo y los distintos tipos de geodésicas luminosas en el caso de Kerr y Schwarzschild.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presenta un desarrollo amplio de los conceptos utilizados para explicar el problema planteado. Es decir, las herramientas qué necesitamos para resolver este problema, el marco teórico del trabajo.

En todo el trabajo vamos a utilizar unidades geometrizadas, en las que la velocidad de la luz y la constante de la gravitación valen la unidad. En la teoría general de la relatividad el espacio, el tiempo y la masa están relacionados, por lo que puede usarse la misma unidad para las tres.

2.1. Gravitación

Los modelos sobre gravitación son teorías que pretenden describir un fenómeno físico: la gravedad. La gravedad es la única fuerza de la naturaleza que actúa en todas partes; controla los efectos de todas las demás fuerzas donde quieran que actúen. Regula las órbitas de los planetas así como la vida de las estrellas. La gravedad gobierna incluso los lugares más violentos del Universo- quásares, púlsares, supernovas - y los más tranquilos - agujeros negros, la radiación de fondo de microondas. La gravedad explica la uniformidad del Universo a escalas muy grandes y su increíble variedad en escalas pequeñas. Si entendemos cómo funciona la gravedad, entonces empezaremos a comprender el Universo, de ahí la importancia que tiene la gravitación.
En este capítulo vamos a explicar como Newton entendía la gravedad, una teoría fenomenológica, basada en la descripción de la interacción a distancia entre cuerpos masivos. A continuación, la gravitación según Einstein, una teoría matemática para la descripción de un fenómeno físico y por último las teorías modificadas a la teoría de Einstein que han surgido recientemente debido a los grandes avances en astronomía.

2.1.1. Gravitación newtoniana

La ley de la gravedad de Newton es simple y convincente: La fuerza gravitacional entre dos cuerpos es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. La fuerza gravitacional de Newton entre cuerpos es una fuerza instantánea: no importa qué tan lejos estén los dos cuerpos, la fuerza entre

ellos responderá instantáneamente a cualquier cambio en su separación, por lo tanto es explicada con el concepto de fuerza a distancia.
En lenguaje alternativo, la teoría gravitacional newtoniana establece que la aceleración a (la tasa de cambio de la velocidad v) impartida por la gravitación en una partícula de prueba está determinada por el potencial gravitacional ϕ

$$a = -dv/dt = -\nabla\phi \tag{2.1}$$

y el potencial está determinado por la distribución de masa circundante ρ por la ecuación diferencial parcial de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{2.2}$$

Esta formulación es completamente equivalente a la ley de gravitación de Newton. Debido a que la aceleración de una partícula de prueba depende solo del potencial generado por la materia en el entorno, la teoría respeta el principio de equivalencia débil: el movimiento de una partícula es independiente de su estructura o composición interna .
Para calcular la trayectoria de partículas con masa en el espacio newtoniano partimos de la conservación de la energía total de la partícula

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi} - \frac{GMm}{r} \tag{2.3}$$

y teniendo en cuenta la conservación del momento angular:

$$L = mr^2\dot{\phi} \tag{2.4}$$

Sustituimos esta en la anterior

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \tag{2.5}$$

Se define el potencial efectivo:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \tag{2.6}$$

quedando la anterior de la forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) \tag{2.7}$$

Si nos fijamos en la función $V_{\text{eff}}(r)$ vemos que los puntos de corte con la recta E nos dan puntos de retorno, ya que en ellos $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$.

A continuación, representamos la función $V_{\text{eff}}(r)$ en rojo, $\frac{L^2}{2mr^2}$ en azul, $-\frac{GMm}{r}$ en negro y la energía total en línea discontinua. Se distingue cuatro situaciones dependiendo del valor de E:

1. La energía corta en el mínimo del potencial y la órbita sería de radio constante, una circunferencia.

2. Dos puntos de corte y la órbita estará ligada entre el valor de los dos radios en que corta la energía con el potencial efectivo. La órbita corresponde a una elipse.

3. Energía cero, con un sólo punto de retorno y la partícula se va para en el infinito. Es una trayectoria parabólica.

4. Energías positivas, en el que hay un solo punto de retorno y la órbita es no ligada, coincidiendo con una hipérbola.

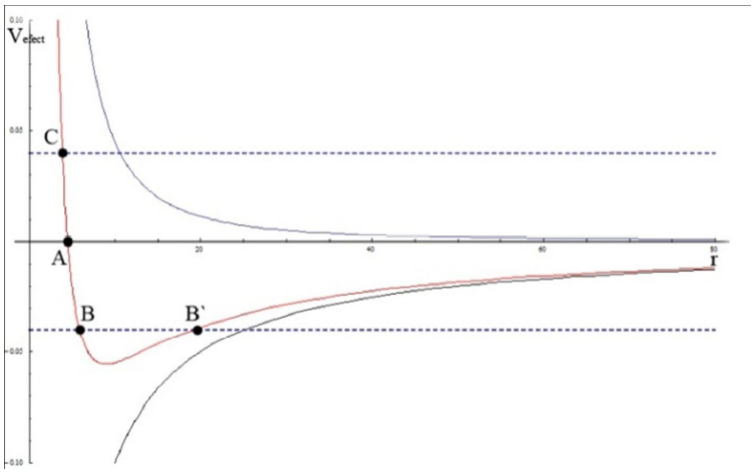

Figura 2.1: Se representa en rojo el potencial efectivo Newtoniano frente a r y los dos términos del potencial efectivo. En líneas discontinuas se representan tres valores de energía: negativo, nulo y positivo. El caso B-B´corresponde con trayectorias elípticas, el A con parábolas y el C con hipérbolas.

Para obtener la ecuación diferencial que gobierna las trayectorias partimos de la energía y del potencial efectivo y teniendo en cuenta $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}$, obtenemos:

$$E = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{2mr^4} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \tag{2.8}$$

que con el cambio de variable $u = 1/r$

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{d(1/u)}{d\phi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi} \tag{2.9}$$

De modo que la energía pasa a tener la siguiente forma:

$$E = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{2m} + \frac{L^2u^2}{2m} - GMmu \tag{2.10}$$

Ahora derivando respecto a ϕ

$$\frac{du}{d\phi}\frac{d^2u}{d\phi^2}\frac{L^2}{m} + \frac{du}{d\phi}\frac{L^2u}{m} - \frac{du}{d\phi}GMm = 0 \tag{2.11}$$

Supondremos que las trayectorias no son circulares y trayectorias con momento angular, no rectas, por lo que podemos dividir $L^2\frac{du}{d\phi}$. La ecuación diferencial que se obtiene es la conocida ecuación de Binet clásica:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} \tag{2.12}$$

Ecuación inhomogénea de fácil solución analítica:

$$u(\phi) = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{GMm^2e}{L^2}\cos\phi \tag{2.13}$$

siendo e la excentricidad de la órbita y con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \dot{u}(0) &= 0 \\ u(0) &= \frac{GMm^2(1+e)}{L^2} = u_{\text{máx}} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Deshaciendo el cambio de variable y definiendo $\frac{1}{p} = \frac{GMm^2}{L^2}$, tenemos:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos\phi} \tag{2.15}$$

con

$$\begin{aligned} \dot{r}(0) &= 0 \\ r(0) &= \frac{p}{1+e} = r_{\text{mín}} \text{ (perihelio)} \\ r(\pi) &= \frac{p}{1-\rho} = r_{\text{máx}} \text{(afelio)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

La ecuación de $r(\phi)$ es una canónica en polares en la que distinguimos:

$$\begin{aligned} e = 0 &\rightarrow \text{ Circunferencia} \\ e < 1 &\rightarrow \text{ Elipse} \\ e = 1 &\rightarrow \text{ Parábola} \\ e > 1 &\rightarrow \text{ Hipérbola} \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.1.2. Relatividad General

Hasta Einstein, la gravedad fue pensada como una simple fuerza. La relatividad general de Einstein es una teoría geométrica donde la gravedad se explica a partir de la curvatura del espacio-tiempo. En presencia de cualquier tipo de materia la geometría del espacio-tiempo no es plana sino curva. Einstein también reemplazó la ley newtoniana del movimiento por la afirmación de que las partículas de prueba libres se mueven a lo largo de las geodésicas, las curvas más cortas de la geometría del espacio-tiempo.
Einstein formuló sus ecuaciones de campo usando el lenguaje de la geometría diferencial, a través del cálculo tensorial, no sólo son unas ecuaciones compactas sino que tienen una simetría muy profunda: tienen exactamente la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Esto es el principio general de covariancia.
Las ecuaciones de campo en este caso son

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{2.18}$$

En el caso relativista buscamos la geodésica de la métrica de Schwarzschild para compararla con el caso newtoniano visto anteriormente.
La energía en este caso viene dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2c^2}\dot{r}^2 + \frac{1}{c^2}\left[\frac{-GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2r^3}\right] \tag{2.19}$$

Definiendo $E_N = mc^2\mathcal{E}$ y $L = ml$

$$E_N = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[\frac{-GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}\right] \tag{2.20}$$

Al calcular las geodésicas en esta teoría se obtiene una expresión para la energía de las órbitas con una corrección a la teoría newtoniana que aparece reflejada en el último término de la anterior expresión.
Dependiendo de los valores de l y M tendremos un tipo de potencial efectivo, y el valor de $\mathcal{E}$ nos dará el tipo de órbita posible, como en Newton.
La deducción de la ecuación de las geodésicas en este marco relativista se verá en el capítulo siguiente en profundidad.

2.1.3. Modificaciones de la Relatividad General

Las modificaciones de la relatividad general son alternativas que intentan describir el fenómeno de la gravitación.
Son intentos de construir una teoría ideal de la gravedad. Existen alternativas sencillas a la relatividad general, que no involucran la mecánica cuántica o la unificación de fuerzas. Unas teorías intentan construir una teoría utilizando los principios de la mecánica cuántica conocidas como teorías de la gravedad cuántica. Otras intentan explicar la gravedad y otras fuerzas al mismo tiempo, conocidas como teorías clásicas de campo unificado. Por último, las más ambiciosas que intentan explicar tanto la gravedad en término de mecánica cuántica como unificar fuerzas; las teorías del todo.
Estas alternativas no han ganado mucha aceptación y siguen siendo objeto intenso de estudio en la física teórica.

2.2. Relatividad General

En nuestro trabajo estudiaremos las geodésicas en un campo gravitatorio creado por un cuerpo en el marco de la relatividad general en el que pasamos de trabajar con fuerzas y vectores (gravedad newtoniana) a geometría y tensores. La relatividad general es la que goza de mayor aceptación entre la comunidad científica de todas las teorías propuestas para explicar la interacción gravitatoria.

2.2.1. Métrica

Lo revolucionario de la relatividad general es la identificación de este campo gravitatorio con la métrica, un objeto matemático que describe las propiedades geométricas del espacio-tiempo, son soluciones a las ecuaciones de Einstein que veremos más adelante.

Consideramos campos gravitatorios creados por fuentes estacionarias y con simetría axial. Para estas el elemento de línea de la forma más general se puede escribir como

$$ds^2 = -A^2dt^2 + B^2dr^2 + C^2d\theta^2 + R^2d\phi^2 + 2\omega_3 dtd\phi \tag{2.21}$$

2.2.2. Tensor de Riemann

El tensor de Riemann, es el tensor que define completamente la curvatura del espaciotiempo y usualmente se escribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R^{\rho}{}_{\alpha\beta\mu} &= C^{\rho}{}_{\alpha\beta\mu} + \frac{1}{2}R^{\rho}_{\beta}g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}R_{\alpha\beta}\delta^{\rho}_{\mu} \\ &+ \frac{1}{2}R_{\alpha\mu}\delta^{\rho}_{\beta} - \frac{1}{2}R^{\rho}_{\mu}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}R(\delta^{\rho}_{\beta}g_{\alpha\mu} - g_{\alpha\beta}\delta^{\rho}_{\mu}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

El primer término, a la derecha del signo igual, es el tensor de Weyl y los demás son términos que contienen el tensor y escalar de Ricci. Debido al importante papel de éstas cantidades tensoriales en nuestra investigación, serán detalladas a continuación. Para los cálculos del tensor de Riemann se utilizaron los símbolos de Christofell o coeficientes de conexión que se utilizan siempre que se deban realizar cálculos teóricos que implican geometría, pues permiten efectuar cálculos muy complejos sin confusión; éstos representan la variación de los vectores base usados para describir el espaciotiempo y expresan, de forma general, una medida de su curvatura por lo que localmente valen cero ya que siempre existe un sistema de referencia inercial local. Los símbolos de Christofell se definen como sigue

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu v} = (1/2)g^{\lambda\sigma}\left(\partial_{\mu}g_{\sigma v} + \partial_{v}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu v}\right) \tag{2.23}$$

Donde ∂_{α} es la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$. El tensor de Riemann en función de los símbolos de Christofell

$$R^{\rho}_{\alpha\beta\mu} = \partial_{\beta}\Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\mu}\Gamma^{\rho}_{\eta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\eta\mu} \tag{2.24}$$

2.2.3. Tensor de Ricci

El tensor de Ricci viene dado por la contracción de índices del tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\alpha\mu} = R^{\beta}_{\alpha\beta\mu} \tag{2.25}$$

Si se realiza una última contracción sobre los dos índices del tensor de Ricci se obtiene la curvatura escalar dada por:

$$R = g^{\alpha\mu}R_{\alpha\mu} \tag{2.26}$$

2.2.4. Ecuaciones de Einstein

Las métricas se obtienen al resolver las ecuaciones de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{2.27}$$

donde $G_{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein. $= R_{\alpha\beta}$ y R son contracciones del tensor de Riemann ${R^{\rho}}_{\alpha\beta\mu}$, éste expresa la curvatura del espaciotiempo y está relacionado con derivadas de la métrica hasta segundo orden. El tensor de Riemann posee simetrías en la contracción sobre ciertos pares de índices que conllevan a la simetría de $G_{\alpha\beta}$. Además el tensor de Einstein tiene divergencia por construcción

$$\nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.28}$$

donde ∇_{α} es la derivada covariante, ésta lleva información del cambio en las componentes de los cuadrivectores y en sus vectores de base.
En el lado derecho de la ecuación el tensor de esfuerzo energía, expresa la generalización del tensor de esfuerzo de mecánica clásica y es simétrico. Las componentes de $T_{\alpha\beta}$ contienen información de la relación entre los vectores de momento y flujo de energía en algún marco de referencia. Por las leyes de conservación de la energía tiene divergencia nula

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \tag{2.29}$$

donde $\alpha = 0$ es la conservación de la energía y $\alpha = 1, 2, 3$ se refiere a la conservación del momento.
La divergencia $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ es generalizada a espacios curvos como la cuadridivergencia ∇_{α}, pero ahí no hay conservación de cuadrimomentos en general, sino que $\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$ implica como la materia ha de moverse. Lo que propuso Einstein es que cúmulos de masa o fuentes de energía deforman el espaciotiempo y a la vez éste dicta como moverse en él. Es por ello que estas ecuaciones son acopladas, para resolverlas y encontrar las componentes de la métrica, uno debe hacer suposiciones del tensor $T^{\alpha\beta}$, es decir, intuir ciertas características de la materia o la energía contenida en esa región del espaciotiempo.

2.2.5. Tensor de Weyl

Al igual que el tensor de Riemann, el tensor de Weyl expresa la fuerza de marea que siente un cuerpo cuando se mueve por una geodésica, pero este no transmite información del cambio del volumen del cuerpo, sino solo cómo la forma del cuerpo es distorsionado por la fuerza de marea. Se recuerda al lector que la fuerza de marea es un efecto gravitacional que estira un cuerpo a lo largo de la línea hacia el centro de masa de otro cuerpo debido a un gradiente en el campo gravitacional del otro cuerpo. La curvatura de Weyl es la única parte de la curvatura que existe en el espacio libre y gobierna la propagación de las ondas gravitacionales.
El tensor de Weyl se puede descomponer en una parte eléctrica y otra magnética

$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma\beta\delta} V^{\gamma} V^{\delta} \tag{2.30}$$
$$H_{\alpha\beta} = {}^{*}C_{\alpha\gamma\beta\delta} V^{\gamma} V^{\delta} \tag{2.31}$$

Donde $C_{\alpha\gamma\beta\delta}$ es el tensor de curvatura de Weyl y ${}^{*}C_{\alpha\gamma\beta\delta}$ es su dual. El tensor de Weyl se dice que es puramente eléctrico si $H_{\alpha\beta} = 0$ y puramente magnético si $E_{\alpha\beta} = 0$

2.3. Formalismo 1+3

La congruencia temporal es uno de los temas principales de la relatividad general debido a que las partículas materiales siguen geodésicas temporales. Por lo tanto, el estudio de los aspectos cinemáticos y geométricos de las curvas temporales es fundamental para analizar la evolución de fluidos autogravitantes y aquí es común el uso de un marco basado en el bien conocido formalismo 1+3. En este formalismo, cualquier cantidad tensorial puede simplificarse en sus componente a través de un vector tangente a una congrugencia temporal $\mathbf{V}$ y las componentes totalmente ortogonales a ella. Por lo tanto $\mathbf{V}$ será el vector tangente a la congrugencia temporal y $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta$ el proyector al espacio ortogonal a $\mathbf{V}$.

2.3.1. Tétrada

Las ecuaciones de la relatividad general que se obtienen a partir de las funciones métricas son ecuaciones muy complicadas, ecuaciones diferenciales de orden dos y no lineales, se hace necesario buscar formas para simplificarlas. Una de ellas es escribir la métrica en términos de una tétrada con la que conseguimos reducir a primer orden este conjunto de ecuaciones y escribirlas en términos de los escalares cinemáticos y las j_i que salen al hacer la derivada covariante de los vectores de la tétrada. Este es el camino que llevaremos para hacer las ecuaciones más manejables.
En este caso la tétrada satisface las relaciones estándares:

$$\begin{aligned} V^\alpha V_\alpha = -K^\alpha K_\alpha = -L^\alpha L_\alpha = -S^\alpha S_\alpha = -1 \\ V^\alpha K_\alpha = V^\alpha L_\alpha = V^\alpha S_\alpha = K^\alpha L_\alpha = L^\alpha S_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

La tétrada para esta métrica se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} V^\alpha &= (\frac{1}{A}, 0, 0, 0), \quad V_\alpha = (-A, 0, 0, \frac{\omega_3}{A}) \\ K^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta}}(0, \Delta_1, 0, 0) \\ L^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}}(0, 0, \Delta_2, 0) \\ S^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}(\frac{\omega_3}{A}, 0, 0, A) \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde Δ, Δ_1 and Δ_2 son

$$\Delta = A^2 B^2 C^2 R^2 + B^2 C^2 \omega_3^2$$
$$\Delta_1 = A^2 C^2 R^2 + C^2 \omega_3^2, \quad \Delta_2 = A^2 R^2 + \omega_3^2$$

Ahora usando que $\Delta_1 = C^2 \Delta_2$ y que $\Delta = B^2 C^2 \Delta_2$ entonces la tétrada se puede escribir

como sigue

$$\begin{aligned} V^\alpha &= (\frac{1}{A},0,0,0), \quad V_\alpha = (-A,0,0,\frac{\omega_3}{A}) \\ K^\alpha &= (0,\frac{1}{B},0,0) \\ L^\alpha &= (0,0,\frac{1}{C},0) \\ S^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}(\frac{\omega_3}{A},0,0,A) \end{aligned} \tag{2.34}$$

Con la tétrada definimos los operadores derivada direccional

$$f^\bullet = V^\alpha \partial_\alpha f; \quad f^\dagger = K^\alpha \partial_\alpha f \quad \text{y} \quad f^* = L^\alpha \partial_\alpha f \tag{2.35}$$

2.3.2. Derivada covariante de la tétrada

La derivada covariante se denota por ; y viene dada por

$$X_{\alpha;\beta} = X_{\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} X_\mu \tag{2.36}$$

donde $X_{\alpha,\beta}$ es la derivada parcial $\partial X_\alpha / \partial x^\beta$.

La derivada covariante de **V**, en el formalismo 1+3, se puede escribir como sigue:

$$V_{\alpha;\beta} = -a_\alpha V_\beta + \sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta} \tag{2.37}$$

con las variables cinemáticas

$$a_\alpha = V_{\mu;\nu} V^\nu h^\mu_\alpha \tag{2.38}$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = V_{\mu;\nu} h^\mu_\alpha h^\nu_\beta = \sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta} \tag{2.39}$$

y

$$a_\alpha = a_1 K_\alpha + a_2 L_\alpha + a_3 S_\alpha \tag{2.40}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_1 K_\alpha K_\beta + \sigma_2 L_\alpha L_\beta - (\sigma_1 + \sigma_2) S_\alpha S_\beta \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \Omega_1(K_\alpha L_\beta - K_\beta L_\alpha) + \Omega_2(K_\alpha S_\beta - K_\beta S_\alpha) \\ &+ \Omega_3(L_\alpha S_\beta - L_\beta S_\alpha) \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\Omega_\alpha = \Omega_3 K_\alpha - \Omega_2 L_\alpha + \Omega_1 S_\alpha \tag{2.43}$$

La derivada covariante **K**, en el formalismo 1+3, puede escribirse como:

$$K_{\alpha;\beta} = -a_\mu K^\mu V_\alpha V_\beta + V_\alpha(\sigma_{\nu\beta} + \Omega_{\nu\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\nu\beta})K^\nu - \tilde{a}^{(k)}_\alpha V_\beta + J^{(k)}_{\alpha\beta} \tag{2.44}$$

con

$$\tilde{a}^{(k)}_{\alpha} = h^{\mu}_{\alpha} K_{\mu;\nu} V^{\nu} = \tilde{a}^{(k)}_{2} L_{\alpha} + \tilde{a}^{(k)}_{3} S_{\alpha} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned} J^{(k)}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} K_{\mu;\nu} &= (j_1 K_{\beta} + j_2 L_{\beta} + j_3 S_{\beta}) L_{\alpha} \\ &+ (j_4 K_{\beta} + j_5 L_{\beta} + j_6 S_{\beta}) S_{\alpha} \end{aligned} \tag{2.46}$$

La derivada covariante de los vectores espaciales **K L S**, en el formalismo 1+3 se escribe como:

$$e^{(i)}_{\alpha;\beta} = V_{\alpha} V_{\mu;\beta} e^{(i)\mu} - \tilde{a}^{(i)}_{\alpha} V_{\beta} + J^{(i)}_{\alpha\beta} \tag{2.47}$$

$$\tilde{a}^{(i)}_{\alpha} = h^{\mu}_{\alpha} e^{(i)}_{\mu;\nu} V^{\nu} = \Omega_{\alpha\mu} e^{\mu(i)} \tag{2.48}$$

$$J^{(i)}_{\alpha\beta} = h^{\mu}_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} e^{(i)}_{\mu;\nu} \tag{2.49}$$

2.3.3. Escalares geométricos

Los escalares geométricos que salen al hacer las derivadas covariantes de los vectores de la tétrada son :

- La cuadriaceleración:

$$a_{\alpha} = V_{\alpha;\beta} V^{\beta} = a_{!} K_{\alpha} + a_2 L_{\alpha} + a_3 S_{\alpha} \tag{2.50}$$

$$a_1 = a_{\alpha} K^{\alpha} = V_{\alpha;\beta} V^{\beta} K^{\alpha} \tag{2.51}$$

$$a_2 = a_{\alpha} L^{\alpha} = V_{\alpha;\beta} V^{\beta} L^{\alpha} \tag{2.52}$$

$$a_3 = a_{\alpha} S^{\alpha} = V_{\alpha;\beta} V^{\beta} S^{\alpha} \tag{2.53}$$

- La vorticidad:

$$\Omega_{\alpha\beta} = (V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha} + a_{\alpha} V_{\beta} - a_{\beta} V_{\alpha}) \tag{2.54}$$

$$\Omega_1 = (V_{\alpha;\beta} K^{\alpha} L^{\beta}) \tag{2.55}$$

$$\Omega_2 = (V_{\alpha;\beta} K^{\alpha} S^{\beta}) \tag{2.56}$$

$$\Omega_3 = (V_{\alpha;\beta} L^{\alpha} S^{\beta}) \tag{2.57}$$

- Los escalares j_i:

$$\begin{aligned} j_1 &= K_{\alpha;\beta} L^{\alpha} K^{\beta} \quad j_2 = K_{\alpha;\beta} L^{\alpha} L^{\beta} \quad j_3 = K_{\alpha;\beta} L^{\alpha} S^{\beta} \\ j_4 &= K_{\alpha;\beta} S^{\alpha} K^{\beta} \quad j_5 = K_{\alpha;\beta} S^{\alpha} L^{\beta} \quad j_6 = K_{\alpha;\beta} S^{\alpha} S^{\beta} \\ j_7 &= L_{\alpha;\beta} S^{\alpha} K^{\beta} \quad j_8 = L_{\alpha;\beta} S^{\alpha} L^{\beta} \quad j_9 = L_{\alpha;\beta} S^{\alpha} S^{\beta} \end{aligned} \tag{2.58}$$

De momento a los escalares j_i no se les ha dado un significado físico como a los otros. En el apéndice final (5) se puede consultar la forma de estos escalares para la métrica de Schwarzschild, Kerr y una métrica más general con rotación y simetría axial y temporal.

2.4. Soluciones de vacío

El estudio de las geodésicas se hace en el campo gravitatoria afuera de la fuente que crea ese campo, por lo tanto es solución en vacío. La parte del tensor de Riemann relacionado con el tensor de Ricci se hace cero porque al irnos a las ecuaciones de Einstein, el tensor de energía-impulso se hace cero ($T_{\alpha\beta}$=0) en el vacío.
El tensor de Riemann en el vacío es simplemente el tensor de Weyl :

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{2.59}$$
$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma\beta\delta}V^{\gamma}V^{\delta} \tag{2.60}$$
$$H_{\alpha\beta} = {}^{*}C_{\alpha\gamma\beta\delta}V^{\gamma}V^{\delta} \tag{2.61}$$

Ahora reescribimos la parte eléctrica del tensor de Weyl en términos de la tétrada:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= E_1K_{\alpha}K_{\beta} + E_2L_{\alpha}L_{\beta} - (E_1+E_2)S_{\alpha}S_{\beta} \\ &+ E_3K_{(\alpha}L_{\beta)} + E_4K_{(\alpha}S_{\beta)} + E_5L_{(\alpha}S_{\beta)} \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$E_{\alpha\beta} = a_{\alpha}a_{\beta} + h^{\mu}_{(\alpha}h^{\nu}_{\beta)}a_{\nu;\mu} + \Omega^2 h_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha}\omega_{\beta} \tag{2.63}$$

y la parte magnética del tensor de Weyl descompuesta en términos de la tétrada:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} &= H_1K_{\alpha}K_{\beta} + H_2L_{\alpha}L_{\beta} - (H_1+H_2)S_{\alpha}S_{\beta} \\ &+ H_3K_{(\alpha}L_{\beta)} + H_4K_{(\alpha}S_{\beta)} + H_5L_{(\alpha}S_{\beta)} \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$H_{\alpha\beta} = 2\omega_{(\alpha}a_{\beta)} + h^{\mu}_{(\alpha}h^{\nu}_{\beta)}\omega_{\nu;\mu} - a_{\mu}\omega^{\mu}h_{\alpha\beta} \tag{2.65}$$

Tenemos la expresión de la parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl en el vacío.
Ahora bien, el campo que genera el objeto está determinado por la parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl, si uno conoce estas partes, conoce el campo exterior. Todos los fotones que se mueven alrededor del objeto van a estar controlados por ambas partes del tensor de Weyl.

2.4.1. Dos Killing

Estas ecuaciones para las dos partes del tensor de Weyl siguen siendo complicadas y vamos a imponer más restricciones para poder integrarlas. A mayores de estar en el vacío le imponemos ciertas simetrías, simetría temporal y simetría axial.

En relatividad general la métrica es el tensor que nos importa y nos determina todo lo que nos interesa. Entonces las simetrías que nos van a interesar son aquellas que dejan invariante a la métrica.

Cabe recordar que los difeormorfismos $\Phi : M \to M$ que dejan invariante a un tensor forman un grupo y los campos de vectores $\vec{V}$ que dejan invariante al tensor forman un álgebra de Lie de dicho grupo.

En efecto, un difeomorfismo que deja la métrica invariante ($\Delta_\Phi g = \Phi^* g - g = 0$) se llama isometría. El campo de vectores $\vec{V}$ que deja invariante a la métrica ($\mathfrak{L}_{\vec{V}} g = 0$) se les llama campo de vectores de Killing. El conjunto de vectores de Killing forman una álgebra de Lie, que son transformaciones infinitesimales del grupo de isometrías.

- **Ecuación de Killing**

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_X g_{\alpha\beta} &= g_{\delta\beta} X^\delta_{,\beta} + g_{\beta\delta} X^\delta_{,\beta} + g_{\alpha\beta,\delta} X^\delta \qquad (2.66) \\ &= X_{\alpha;\beta} + X_{\beta;\alpha} = 0 \\ X_{\alpha;\beta;\mu} &= R_{\alpha\beta\mu\delta} X^\delta \qquad (2.67) \end{aligned}$$

- **Killing Temporal**

$$\tau^\alpha = (1,0,0,0) = \tau_0 V^\alpha \quad \Rightarrow \tau_0 = A \qquad (2.68)$$

- **Killing Axial**

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &= (0,0,0,1) = \xi_0 V^\alpha + \xi_3 S^\alpha \qquad (2.69) \\ \xi_0 &= -\frac{\omega_3}{A} \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{\Delta_2}}{A} \qquad (2.70) \end{aligned}$$

- **Identidades para los vectores de Killing**

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha;\beta} + \tau_{\beta;\alpha} &= 0 \qquad \tau^\mu \tau_{\alpha;\beta;\mu} = 0 \qquad (2.71) \\ \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} &= 0 \qquad \xi^\mu \xi_{\alpha;\beta;\mu} = 0 \qquad (2.72) \end{aligned}$$

2.4.2. Escalares de Weyl

Tanto para la parte eléctrica como magnética del tensor de Weyl los únicos escalares que sobreviven son E_1, E_2, E_3 y H_1, H_2, H_3 respectivamente que obtenemos al reescribir el tensor en términos de la tétrada.

2.4.3. Caracterización en término de los escalares

Estas imposiciones nos llevan a ciertas restricciones que nos permitirían escribir las ecuaciones de una manera más simple. La parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl quedan exclusivamente en términos de nuestros escalares cinemáticos y j_i, ya tenemos claro la fuente que tenemos.
Las escalares de Weyl en término de los escalares

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1^\dagger - a_2 j_1 + a_1^2 + \Omega_2^2 \qquad (2.73) \\ E_2 &= -E_1 - a_1 j_6 - a_2 j_9 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2 \qquad (2.74) \\ E_3 &= -a_1^\theta + a_1 a_2 - a_2 j_2 + \Omega_2 \Omega_3 \qquad (2.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= -\Omega_3^\dagger - (a_2 + j_1)\Omega_2 - a_1 \Omega_3 \qquad (2.76) \\ H_2 &= \Omega_3^\dagger + (2a_2 + j_1 - j_9)\Omega_2 + j_6 \Omega_3 \qquad (2.77) \\ H_3 &= -\Omega_3^\theta - j_2 \Omega_2 - 2a_2 \Omega_3 \qquad (2.78) \end{aligned}$$

2.5. Geodésicas

En la relatividad general, una geodésica generaliza la noción de línea recta al espacio-tiempo curvo. Una partícula que se mueve o cae libremente lo hace a lo largo de una geodésica. Como ya mencionamos en la relatividad general, la gravedad puede considerarse como una consecuencia de una geometría espaciotemporal curva donde la fuente de la curvatura es el tensor de tensíon-energía. Así, por ejemplo, la trayectoria de un planeta que orbita una estrella es la proyección de una geodésica de la geometría del espacio-tiempo curvado de cuatro dimensiones alrededor de la estrella sobre un espacio tridimensional. Las partículas se mueven a lo largo de geodésicas temporales; las partículas sin masa como el fotón siguen en cambio geodésicas nulas, siendo estas nuestro objeto de estudio en este trabajo.

2.5.1. Ecuaciones de las geodésicas

La técnica más utilizada para obtener la ecuación de una geodésica es con las ecuaciones de Euler-Lagrange del principio de mínima acción.
Si consideramos la prametrización de una curva en el espaciotiempo por un parámetro u, de manera que el tiempo propio es reescrito como

$$d\tau^2 = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} g_{\alpha\beta} du^2 \tag{2.79}$$

entonces el intervalo de espaciotiempo entre dos eventos a y b sería

$$\tau_{ab} = \int_a^b \left(g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right)^{\frac{1}{2}} du \tag{2.80}$$

con $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$

Usando el principio de máximo envejecimiento que nos asegura que el tiempo propio es un extremal, de manera similar a la Mecánica Clásica donde el lagrangiano extremiza la acción, el integrando anteior debe extremizar el tiempo propio. Las curvas que cumplen esto se las llama geodésicas:

$$\delta s = \delta \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du}\right)^{\frac{1}{2}} du = \delta \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} F du = 0 \tag{2.81}$$

donde

$$F = \left(g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \tag{2.82}$$

Así se puede trabajar con el método tradicional para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange del principio de mínima acción.

$$\delta s = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial F}{\partial x^a}\delta x^a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a}\delta \dot{x}^a\right) du \tag{2.83}$$

integrando por partes la segunda integral

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a}\delta \dot{x}^a\right) du = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a}\right)\int \delta \dot{x}^a du\right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left[\left(\int \delta \dot{x}^a du\right)\frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a}\right)\right] du \tag{2.84}$$

el primer término de la derecha desaparece pues la variación de x^a entre los extremos es nula. Entonces

$$\delta s = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left[\frac{\partial F}{\partial x^a} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) \right] \delta x^a du = 0 \tag{2.85}$$

lo que hay entre los corchetes es cero y por lo tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x^a} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0 \tag{2.86}$$

así F es el lagrangiano buscado

$$L = \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$$

Entonces según el principio de Hamilton, encontramos que la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{2.87}$$

o

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\alpha\kappa}\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\kappa}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \tag{2.88}$$

con las cantidades conservadas

$$g_{\alpha 0}\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = E \quad g_{\alpha 3}\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = L \tag{2.89}$$

Capítulo 3

Metodología seguida

Primeramente planteamos las ecuaciones de las geodésicas en función de los escalares de estructura. Para ello, en vez de usar las ecuaciones de Euler-Lagrange directamente, seguiremos un enfoque basado en la definición de lo que es la geodésica, determinada por un vector tangente que es paralelo así mismo. De la propia definición de geodésicas obtenemos un conjunto de ecuaciones. Además usando que es un vector de módulo constante, obtenemos otro conjunto de ecuaciones. Con estos dos conjuntos de ecuaciones clasificamos los distintos tipos de geodésicas.

Los vectores de Killing y las cantidades conservadas para garantizar una fuente estacionaria con simetría axial

$$\tau^\alpha Z_\alpha = E, \quad \xi^\alpha Z_\alpha = L, \quad Z^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \tag{3.1}$$

donde el vector que determina las geodésicas se define como

$$Z_\alpha = z_0 V_\alpha + z_1 K_\alpha + z_2 L_\alpha + z_3 S_\alpha \tag{3.2}$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{z_0}{A} + \frac{z_3\omega_3}{A\sqrt{\Delta_2}} \tag{3.3}$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{z_1}{B} \tag{3.4}$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{z_2}{C} \tag{3.5}$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{z_3 A}{\sqrt{\Delta_2}} \tag{3.6}$$

El producto escalar de los dos vectores de Killing por el vector Z_α es una constante y el módulo también es constante. Para estos tres casos vemos que sale al imponer que son constantes:

1. **Primer Killing**

$$Z_\alpha \tau^\alpha = Cte \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha;\beta}\tau^\alpha + Z_\alpha \tau^\alpha_{;\beta} = 0 \tag{3.7}$$

$$z_{0;\alpha} = -z_0 a_1 K_\alpha - a_2 z_0 L_\alpha \tag{3.8}$$

$$z_0 = \frac{E_n}{A} \tag{3.9}$$

2. **Segundo Killing**

$$Z_\alpha \xi^\alpha = Cte \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha;\beta}\xi^\alpha + Z_\alpha \xi^\alpha_{;\beta} = 0 \tag{3.10}$$

$$z_{3;\alpha} = (2z_0\Omega_2 - j_6 z_3)K_\alpha + (2z_0\Omega_3 - j_9 z_3)L_\alpha \tag{3.11}$$

$$z_3 = \frac{A^2 L_m + E_n \omega_3}{A\sqrt{A^2R^2 + \omega_3^2}} \tag{3.12}$$

3. **Módulo Constante**

$$Z_\alpha Z^\alpha = Cte \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha;\beta}Z^\alpha = 0 \tag{3.13}$$

$$z_1 z_1^\dagger + z_2 z_2^\dagger = j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 \tag{3.14}$$

$$z_1 z_1^\theta + z_2 z_2^\theta = j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 \tag{3.15}$$

Ya tenemos el primer conjunto de ecuaciones que sale al imponer la condición de módulo constante y el otro conjunto que sale de la propia definición de curva geodésica, vector tangente que es paralelo a sí mismo es

$$z_1 z_1^\dagger + z_2 z_1^\theta = j_1 z_1 z_2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 + j_2 z_2^2 + j_6 z_3^2 \tag{3.16}$$

$$z_1 z_2^\dagger + z_2 z_2^\theta = -j_2 z_1 z_2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 - j_1 z_1^2 + j_9 z_3^2 \tag{3.17}$$

Una vez que tenemos las ecuaciones de las geodésicas luminosas en términos de nuestros escalares pasamos a la clasificación y parametrización de las órbitas luminosas.

Clasificación: 4 Casos

A partir de las ecuaciones de (3.14) - (3.17) restando la primera a la tercera y la segunda a la cuarta se obtienen estas dos ecuaciones

$$z_2(z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2) = 0 \tag{3.18}$$

$$z_1(z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2) = 0 \tag{3.19}$$

Estas dos ecuaciones son clave y son el núcleo de nuestro trabajo. Encontramos una forma de clasificar las geodésicas. Estas dos ecuaciones se deben cumplir siempre, porque no hemos impuesto nada sobre las geodésicas. Por lo tanto, son todas las geodésicas para una fuente con simetría axial y simetría temporal, todas se van a clasificar a partir de estas dos ecuaciones. Existen estos 4 posibles casos que salen para que se cumplan ambas ecuaciones

Todos los casos posibles

1. $z_2 = 0$ y $z_1 = 0 \Rightarrow$ Son todas las órbitas circulares y cooplanarias.
2. $z_2 = 0$ y $z_1^\theta = j_1 z_1 \Rightarrow$ Son todas las órbitas cooplanarias no circulares.
3. $z_1 = 0$ y $z_2^\dagger = -j_2 z_2 \Rightarrow$ Son todas las órbitas circulares y no cooplanarias.
4. $z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0 \Rightarrow$ Como veremos más adelante es el caso más general que contiene a los tres casos anteriores.

Estos son los 4 criterios para poder decir cuales son todas las geodésicas que existen.

Capítulo 4

Resultados parciales y discusión

Como aplicación vamos a estudiar los distintos tipos de órbitas luminosas en el caso de Schwarzschild y Kerr.

La métrica de Schwarschild en coordenadas polares

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \tag{4.1}$$

La métrica para Kerr

$$\begin{gathered} ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4mar\sin^2\theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\ a = \frac{J}{m} \\ \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta = r^2 - 2mr + a^2 \end{gathered} \tag{4.2}$$

El conjunto de ecuaciones que salen en cada caso son:

Caso A: $z_2 = 0\ z_1 = 0$

En este caso, el conjunto de ecuaciones que sale es

$$j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 = 0 \tag{4.3}$$
$$j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 = 0 \tag{4.4}$$
$$\epsilon + z_0^2 - z_3^2 = 0 \tag{4.5}$$

Caso B: $z_2 = 0\ z_1^\theta = j_1 z_1$

En este caso, el conjunto de ecuaciones que sale es

$$j_9 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_3 - a_2 z_0^2 - j_1 z_1^2 = 0 \tag{4.6}$$
$$\epsilon + z_0^2 - z_3^2 - z_1^2 = 0 \tag{4.7}$$
$$z_1^\theta - j_1 z_1 = 0 \tag{4.8}$$

Caso C: $z_1 = 0\ z_2^\dagger = -j_2 z_2$

En este caso, el conjunto de ecuaciones que sale es

$$\begin{aligned} j_6 z_3^2 - 2z_0 z_3 \Omega_2 - a_1 z_0^2 + j_2 z_2^2 &= 0 && (4.9)\\ \epsilon + z_0^2 - z_3^2 - z_2^2 &= 0 && (4.10)\\ z_2^\dagger + j_2 z_2 &= 0 && (4.11) \end{aligned}$$

Caso D: $z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2 = 0$

En este caso, el conjunto de ecuaciones que sale es

$$\begin{aligned} z_1 z_1^\theta + z_2 z_2^\theta - j_9 z_3^2 + 2z_0 z_3 \Omega_3 + a_2 z_0^2 &= 0 && (4.12)\\ z_2^\dagger - z_1^\theta + j_1 z_1 + j_2 z_2 &= 0 && (4.13)\\ \epsilon + z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 &= 0 && (4.14) \end{aligned}$$

Dado que

$$f^{\dagger\theta} - f^{\theta\dagger} = f^\dagger j_1 + f^\theta j_2 \tag{4.15}$$

para cualquier función escalar arbitraria, la solución de la ecuación (4.13) puede ser escrita como

$$z_1 = f^\dagger \qquad z_2 = f^\theta \tag{4.16}$$

y de la ecuación (4.14) conseguimos que

$$(f^\dagger)^2 + (f^\theta)^2 = \epsilon + z_0^2 - z_3^2 \tag{4.17}$$

Este caso contiene a los anteriores,es decir: El caso A, es un caso particular, cuando $f = cte$, el caso B, es un caso particular de D, cuando $f = f(r)$, el caso C, es un caso particular de D, cuando $f = f(\theta)$. Al imponer sólo una condición tenemos la libertad de elegir la función f.

Todas las posibilidades de geodésicas, para ese tipo de fuentes, que existan se clasifican primero así. Vamos a aplicarlo a geodésicas nulas en los casos de Schwarzschild y Kerr para ver que nuestro método funciona y salen los resultados conocidos. Nuestro enfoque es mucho más simple, primero para clasificar geodésicas y luego para integrarlas y pintar.

4.1. Schwarzschild

Caso A: $z_2 = 0\ z_1 = 0$

Esta familia de geodésicas luminosas con $z_2 = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda} = 0$ son cooplanarias ($\dot{\theta} = 0$) y además como $z_1 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} = 0$ son órbitas circulares ($\dot{r} = 0$). Es decir, aquí vamos a tener el conjunto de órbitas cooplanarias circulares con radio constante que para el caso de Schwarzshild valdrá $r = 3m$ (4.3 y 4.5). Además del conjunto de ecuaciones que tiene que cumplir esta familia se saca también que son órbitas situadas en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ (4.4) y existe una relación entre la energía y momento angular que se cumple

siempre $E_n^2 = \frac{L_m^2}{27m^2}$ (4.3 y 4.5).
Del conjunto de ecuaciones que tiene que cumplir esta familia y haciendo uso de (3.3)-(3.6) así como de la definición de z_0 y z_3 se llega a que la ecuación de la geodésica luminosa con $r = 3m$ en este caso es

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L_m}{27E_n m^2} \tag{4.18}$$

La energía del sistema que orbita viene dada por por la suma de la energía cinética más el potencial efectivo con el que interaccionan mutuamente el sistema que órbita y la fuente, este sólo depende de la distancia r al origen. En esta familia de geodésicas luminosas de radio constante ($\dot{r} = 0$), esto implica que $V_{eff}^2 = E_n^2$. De (4.5) se obtiene la expresión para el potencial efectivo

$$V_{eff}^2 = \frac{L_m^2(r-2m)}{r^3} \tag{4.19}$$

Para analizar el movimiento de los fotones utilizamos:

$$\frac{\partial V_{eff}^2}{\partial r} = -\frac{2L_m^2(r-3m)}{r^4} \tag{4.20}$$

y

$$\frac{\partial V_{eff}^2}{\partial r^2} = \frac{6L_m^2(r-4m)}{r^5} \tag{4.21}$$

De la primera sacamos que se hace cero cuando $r = 3m$ lo que habíamos obtenido del conjunto de ecuaciones de esta familia, ese será el radio constante del fotón.
Sustituyendo ese valor del radio en la derivada segunda del potencial efectivo, se obtiene que esa expresión es negativa. Esto implica que la órbita con radio $r = 3m$ es inestable, independientemente del valor del momento angular.

Caso B: $z_2 = 0$ $z_1^\theta = j_1 z_1$

En este caso tenemos que las geodésicas de la luz son cooplanarias $z2 = 0$ entonces $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$ ($\dot{\theta} = 0$). De (4.6) se obtiene que son órbitas contenidas en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Las curvas características usando la condición de módulo constante y la propia definición de z_0 y z_3 son

$$\dot{r}^2 = E_n^2 + \frac{L_m^2(2m-r)}{r^3} \tag{4.22}$$

$$\dot{\theta} = 0 \tag{4.23}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L_m}{r^2} \tag{4.24}$$

$$\dot{t} = \frac{E_n}{1-\frac{2m}{r}} \tag{4.25}$$

Estas ecuaciones podemos agruparlas usando (3.3-3.6). Obteniendo la ecuación de la trayectoria porque tengo r en función de t

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{E_n^2}{1-\frac{2m}{r}} - \frac{L_m^2}{r^2}}}{E_n} \tag{4.26}$$

y

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L_m(-2m+r)}{E_n r^3} \tag{4.27}$$

Juntando las dos últimas ecuaciones obtengo r en función de ϕ, es decir, la órbita

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{(2m-r)rL_m^2 + E_n^2 r^4}}{L_m} \tag{4.28}$$

Es el caso clásico que todo el mundo conoce, órbitas cooplanarias en Schwarzschild con un radio que varía al que hemos llegado de una manera sencilla con nuestro enfoque a través de los escalares.

El potencial efectivo, teniendo en cuenta lo que anteriormente mencionamos: la energía de la órbita viene dada por la suma de la energía cinética menos el potencial efectivo de (4.22) despejamos el potencial efectivo:

$$V_{eff} = \frac{L_m^2(2m-r)}{r^3} \tag{4.29}$$

Podemos calcular también directamente con nuestro nuevo enfoque el potencial efectivo. Teniendo en cuenta la definición de $\dot{r} = \frac{z_1}{B}$ y que $\dot{r}^2$ menos una constante (energía) es el potencial efectivo

$$\left(\frac{z_1}{B}\right)^2 - En = \frac{L_m^2(2m-r)}{r^3} \tag{4.30}$$

Llegamos a la misma expresión para el potencial efectivo de órbitas para fotones cooplanarios con un radio que varía.

Dependiendo de los valores de L_m tendremos un tipo de potencial efectivo y el valor de la energía nos dará el tipo de órbita posible, de forma análoga a Newton. Cabe recordar que si la energía es menor que el mínimo del potencial, no existe movimiento posible. Cuando la energía es igual al mínimo del potencial, la trayectoria es una circunferencia de radio constante, que no nos interesa en este caso. Por lo tanto estudiaremos los casos en que la energía es mayor que ese mínimo.
Hay que tener en cuenta que al estudiar las trayectorias de fotones, por simplicidad r, L y E están adimensionalizados ($L = L/m$, $r = r/m$, $E = E/m$ y $m = 1$). $L_m \neq 0$ significa que hay cambio de ángulo, un intento de orbitar $\dot{\phi} \neq 0$. En todos los dibujos el disco negro representa la región acotada por el horizonte de eventos del agujero negro.

Estudiaremos dos posibilidades dependiendo de si la energía es positiva o la energía es negativa:

Energía positiva

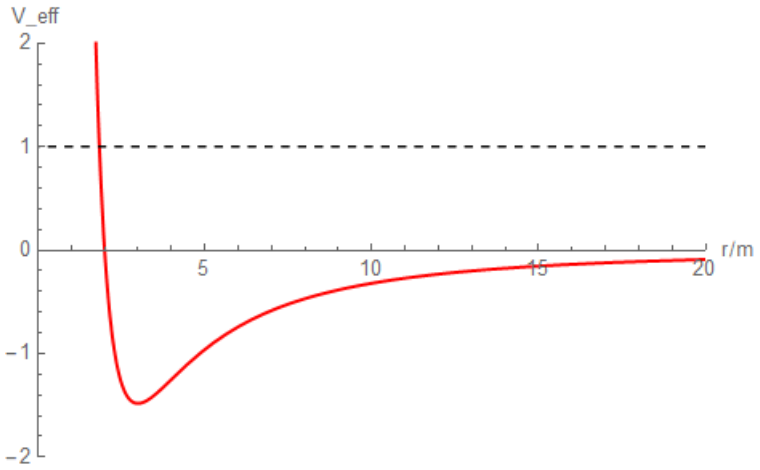

Figura 4.1: El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m^2 = 30$. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía positiva.

Se ve que en este caso hay un punto de corte que se da cuando $V_{eff} = En$. Al integrar de forma numérica (4.28) se van a distinguir dos casos según el valor de r elegido para una determinada energía positiva:

- Para valores de r a la izquierda del punto de corte:

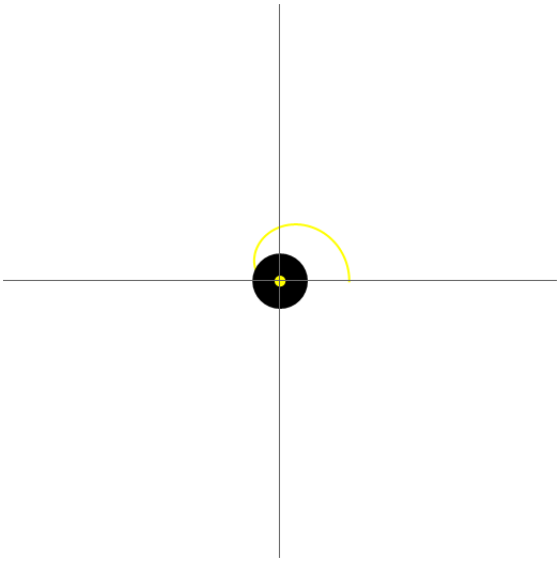

Figura 4.2: Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón

- Para valores de r a la derecha del punto de corte:

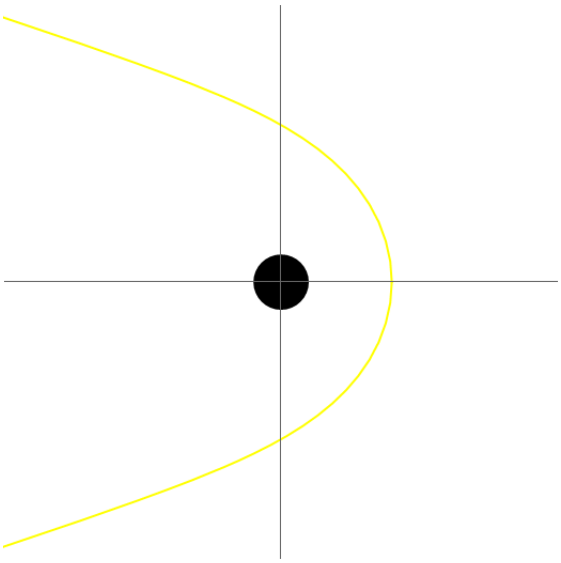

Figura 4.3: Dentro del caso de energía positiva si r es mayor que el punto de corte, movimiento dispersivo, es una parábola que se va al infinito.

Con energía positiva y con un r a la derecha del punto de corte hay posibilidad de escape del fotón llegando al ojo del observador. Por lo tanto, se obtienen imágenes de estas fuentes cuando el fotón es lanzado desde un punto a la derecha del punto de corte entre potencial efectivo y energía positiva.

Energía negativa

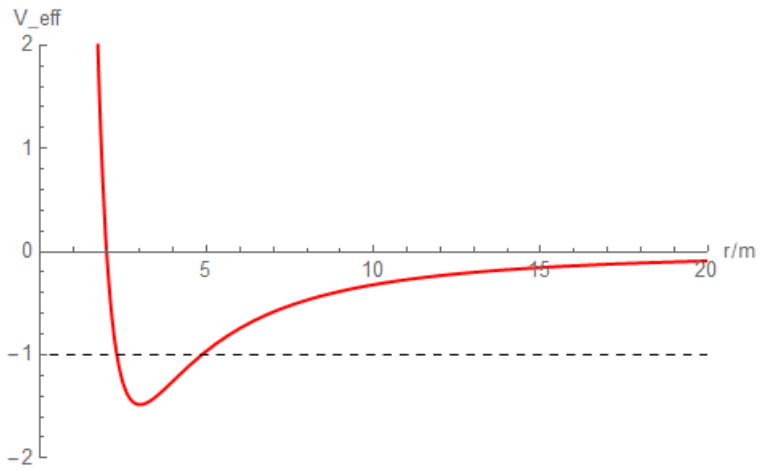

Figura 4.4: El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m^2 = 30$. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía negativa.

Se ve que en este caso hay dos puntos de corte que se dan cuando $V_{eff} = En$. Al integrar de forma numérica (4.28) se van a distinguir tres casos según el valor de r elegido para una determinada energía negativa:

- Para valores de r a la izquierda del primer punto de corte:

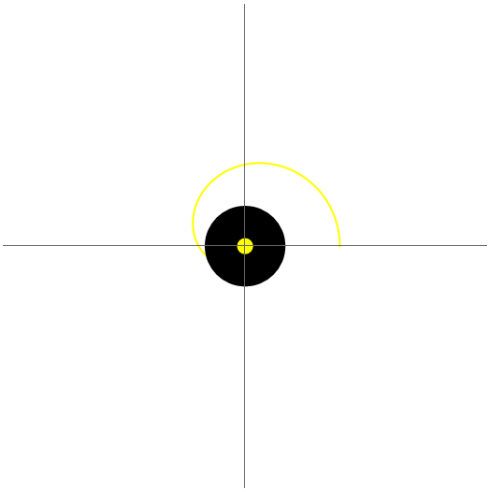

Figura 4.5: Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón

- Si r está entre ambos puntos de corte:

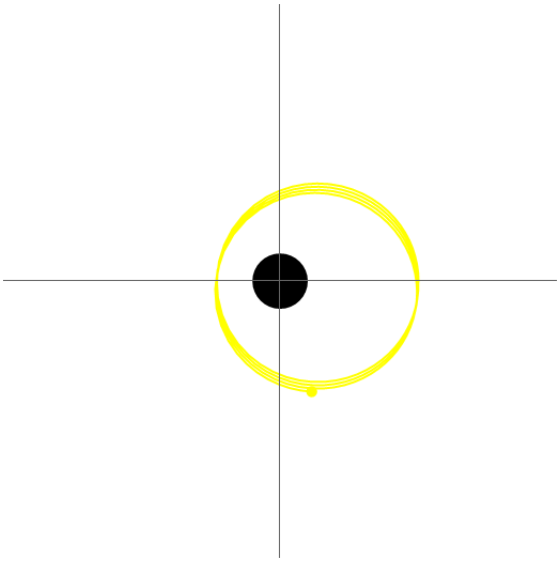

Figura 4.6: Los fotones se mueven describiendo elipses pero con una precesión del perihelio de la órbita.

- Si r está a la derecha del segundo punto de corte:

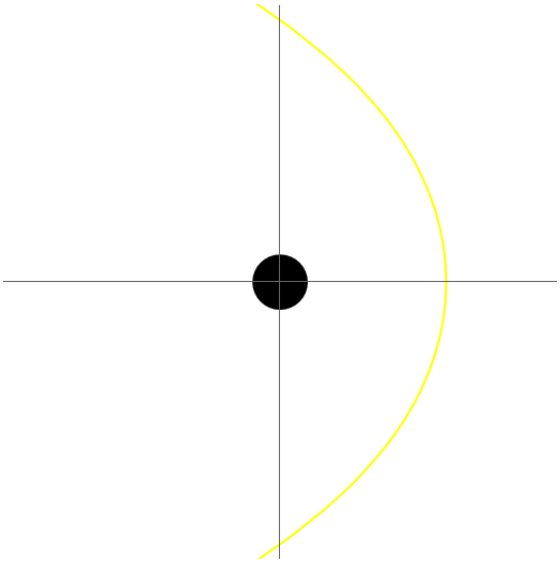

Figura 4.7: Son órbitas que consideramos de dispersión. Son las equivalentes a las órbitas parabólicas newtonianas.

Con energía negativa y con un r a la derecha del segundo punto de corte hay posibilidad de escape del fotón y que puede llegar al ojo del observador. Por lo tanto, se obtienen imágenes de estas fuentes cuando el fotón es lanzado desde un punto a la derecha del segundo punto de corte entre potencial efectivo y energía negativa.

Caso C: $z_1 = 0$ $z_2^\dagger = -j_2 z_2$

En esta sección estudiaremos un caso muy novedoso nunca antes analizado, fuera del objetivo del trabajo ya que con el caso A y B conseguimos reproducir todos los resultados conocidos con nuestro nuevo enfoque. El estudio con más profundidad de este caso tanto en Schwarzschild como en Kerr se deja abierto a líneas futuras de investigación.

Esta familia de trayectorias luminosas son órbitas circulares ya que $z_1 = 0$ implica que $\dot{r} = 0$, es decir, son órbitas de radio constante pero en este caso no son cooplanarias $\dot{\theta} \neq 0$ como pasaba en el caso A. Del conjunto de ecuaciones que tienen que cumplir esta familia y haciendo uso de (3.3)-(3.6) así como de la definición de z_0 y z_3 se llegan a las ecuaciones características

$$\dot{\theta}^2 = \frac{E_n^2}{r(-2m+r)} - \frac{L_m^2 \csc^2(\theta)}{r^4} \tag{4.31}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L_m \csc^2(\theta)}{r^2} \tag{4.32}$$

$$\dot{t} = \frac{E_n}{(1-\frac{2m}{r})} \tag{4.33}$$

Sólo varía el ángulo θ y el ángulo ϕ.
Estas ecuaciones podemos agruparlas usando otra vez (3.3-3.6) y nos quedan de la si-

guiente manera

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L_m \csc^2(\theta)(r-2m)}{E_n r^3} \tag{4.34}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{-\frac{E_n^2}{2mr-r^2}-\frac{L_m^2\csc^2(\theta)}{r^4}}}{E_n} \tag{4.35}$$

juntando ambas se llega a

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{r^2\sin^2(\theta)\sqrt{\frac{E_n^2}{r(r-2m)}-\frac{L_m^2\csc^2(\theta)}{r^4}}}{L_m} \tag{4.36}$$

Tenemos θ en función de ϕ.

Ahora haciendo uso de (4.9) del conjunto de ecuaciones para este caso, podemos calcular el radio constante de la órbita

$$\frac{E_n^2\sqrt{1-\frac{2m}{r}}(r-3m)}{(r-2m)^2} = 0 \tag{4.37}$$

El único radio que hay constante es $r = 3m$ lo cual concuerda con el caso A. Con este valor de radio constante voy a reescribir las ecuaciones características

$$\dot{\theta}^2 = \frac{27E_n^2m^2 - L_m^2\csc^2(\theta)}{81m^4} \tag{4.38}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L_m\csc^2(\theta)}{9m^2} \tag{4.39}$$

$$\dot{t} = 3E_n \tag{4.40}$$

Ahora reescribiendo la ecuación (4.36) con nuestro radio constante se llega a la ecuación de la órbita

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\sin^2(\theta)\sqrt{27E_n^2m^2 - L_m^2\csc^2(\theta)}}{L_m} \tag{4.41}$$

que definiendo el parámetro $\alpha = \frac{27m^2E_n^2}{L_m^2}$ llegamos a que la ecuación anterior puede escribirse de una manera más sencilla para su posterior integración como

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \sin(\theta)\sqrt{\alpha\sin^2(\theta)-1} \tag{4.42}$$

donde α es constante y la curva que describe el fotón sobre la bola de radio constante al integrar la ecuación anterior es

$$\tan(\phi+\phi_0(t)) = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\alpha\sin^2(\theta)-1}} \tag{4.43}$$

Esta ecuación es interesante y de la que se puede sacar toda la información para el caso C en Schwarzschild. Todo depende del parámetro α.

La primera conclusión que sacamos de la ecuación anterior es que el denominador no puede ser 0 o complejo. De aquí sacamos la condición de que

$$\alpha \sin^2(\theta) > 1 \tag{4.44}$$

Necesariamente $\theta \neq \pm\pi$, esta curva no puede encontrarse en los polos de la esfera de radio constante $r = 3m$. Analizando el parámetro α se distinguen tres casos:

- $\alpha = 1$. En este caso se recupera el caso A, al imponer $\alpha = 1$ entonces $E_n^2 = \frac{L_m^2}{m^2 27}$ y el valor de θ es fijo e igual a $\pi/2$. En este caso tenemos una órbita inestable como ya se estudió.
- $\alpha < 1$. No hay movimiento posible.
- $\alpha > 1$. Aquí si tenemos la posibilidad de órbitas que estudiaremos a continuación. La representación gráfica de (4.43)

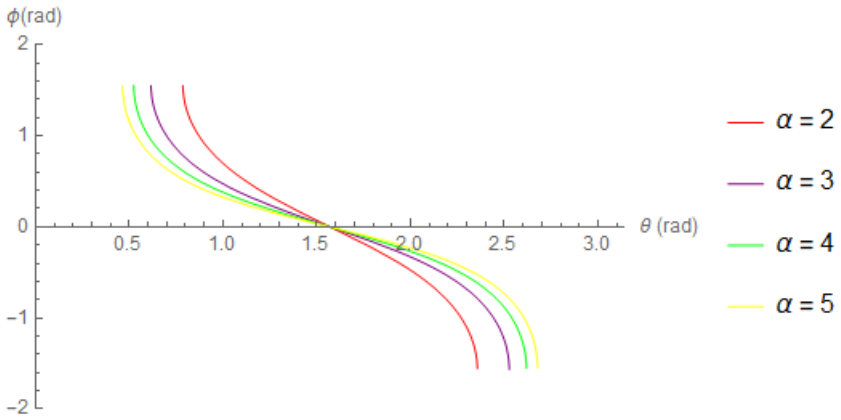

Figura 4.8: Representación en ejes coordenados planos de ϕ frente a θ para distintos valores de α.

Son curvas que atraviesan el eje horizontal en $\pi/2$ y tienen dos asíntotas verticales en dos valores del ángulo θ que viene dada por los ceros en el denominador de (4.43), es decir,

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \tag{4.45}$$

θ_c se refiere al ángulo crítico donde ϕ se hace infinito. Otra vez se ve la importancia del parámetro α pues no sólo nos da una condición para la energía sino que también nos determina los ángulos críticos θ_c de las órbitas permitidas.

Por lo tanto, el movimiento orbital circular en $\pi/2$ en la esfera a $r = 3m$ es inestable como se vio en el caso A. Si vamos aumentando la energía, aumentando α, el fotón tiene dos posibilidades dependiendo de si L_m es positivo o negativo, irse a una órbita asintóticamente circular sobre el plano cte. de valor $\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ y rotando en sentido positivo de ϕ, o bien una órbita que asintóticamente será un plano cte. de valor

$\theta_c = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ y rotando en sentido de valores negativos de ϕ. Ambas contenidas en la esfera de $r = 3m$.

4.2. Kerr

Caso A: $z_2 = 0$ $z_1 = 0$

Ahora para la métrica de Kerr haremos un análisis similar de esta familia de órbitas luminosas con $z_2 = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\lambda} = 0$, son cooplanarias ($\dot{\theta} = 0$) y además como $z_1 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{d\lambda} = 0$ son órbitas circulares ($\dot{r} = 0$). Es decir, aquí vamos a tener el conjunto de órbitas cooplanarias circulares con radio constante que para el caso de Kerr valdrá (4.3 y 4.5)

$$r = \frac{\left(\sqrt[3]{2am\left(\sqrt{a-m}\sqrt{a+m}+a\right)-m^3}+m\right)^2}{\sqrt[3]{2am\left(\sqrt{a-m}\sqrt{a+m}+a\right)-m^3}} \tag{4.46}$$

Además del conjunto de ecuaciones que tienen que cumplir esta familia, se saca también que son órbitas situadas en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ (4.4) y existe una relación entre la energía y momento angular que se cumple siempre (4.3 y 4.5)

$$E_n = \pm\frac{\sqrt{L_m^2 r^2\left(a^2+r(r-2m)\right)}+2aL_m m}{a^2(2m+r)+r^3} \tag{4.47}$$

La ecuación de la geodésica luminosa con ese radio constante es

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2aE_n m + L_m(r-2m)}{a^2E_n(2m+r) - 2aL_m m + E_n r^3} \tag{4.48}$$

En esta familia de geodésicas de radio constante se cumple que $V_{eff}^2 = E_n^2$ como explicamos para Schwarzschild y por lo tanto el potencial efectivo de (4.5) será

$$V_{eff}^2 = \frac{\left(L_m r\sqrt{a^2+r(r-2m)}+2aL_m m\right)^2}{\left(a^2(2m+r)+r^3\right)^2} \tag{4.49}$$

Para analizar el movimiento de los fotones utilizamos:

$$\frac{\partial V_{eff}^2}{\partial r} = -\frac{2L_m^2\left(r\sqrt{a^2+r(r-2m)}+2am\right)\left(a^2r\left(6m^2-3mr+r^2\right)+6amr^2\sqrt{a^2+r(r-2m)}+2a^3m\sqrt{a^2+r(r-2m)}-2a^4m+r^4(r-3m)\right)}{\sqrt{a^2+r(r-2m)}\left(a^2(2m+r)+r^3\right)^3} \tag{4.50}$$

Se hace cero cuando el radio vale

$$r = \frac{\left(\sqrt[3]{2am\left(\sqrt{a-m}\sqrt{a+m}+a\right)-m^3}+m\right)^2}{\sqrt[3]{2am\left(\sqrt{a-m}\sqrt{a+m}+a\right)-m^3}} \tag{4.51}$$

que es el radio esperado para que se cumpliera ese conjunto de ecuaciones y también para $r = 0$ (origen de coordenadas) y para $r = 2m$ se anula. No es posible que los fotones se muevan con esos radios porque son singularidades de la métrica. Son horizontes en el sentido de que la norma del vector de Killing temporal se anula para esos radios. Del análisis de estabilidad no podemos concluir nada ya que esto dependerá de la masa y del parámetro a.

Caso B: $z_2 = 0$ $z_1^\theta = j_1 z_1$

En este caso tenemos que las geodésicas de la luz son cooplanarias $z2 = 0$ entonces $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$ ($\dot{\theta} = 0$). En este caso de (4.6) se obtiene que son órbitas contenidas en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ .Las curvas características usando la condición de módulo constante y la propia definición de z_0 y z_3 vienen dadas por

$$\dot{r}^2 = E_n^2 + \frac{2(-aE_n + L_m)^2 m}{r^3} + \frac{(aE_n - L_m)(aE_n + L_m)}{r^2} \tag{4.52}$$

$$\dot{\phi} = \frac{2aE_n m - 2L_m m + L_m r}{a^2 r - 2mr^2 + r^3} \tag{4.53}$$

$$\dot{t} = \frac{a^2 E_n(2m + r) - 2aL_m m + E_n r^3}{r\left(a^2 + r(r - 2m)\right)} \tag{4.54}$$

Se ve fácilmente que al imponer $a = 0$ se recupera el caso de Schwarzschild.
Estas ecuaciones podemos agruparlas usando (3.3-3.6). Obteniendo la ecuación de la trayectoria porque tengo r en función de t

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\left(a^2 + r(r - 2m)\right)\sqrt{2m(L_m - aE_n)^2 + r(aE_n - L_m)(aE_n + L_m) + E_n^2 r^3}}{\sqrt{r}\left(a^2 E_n(2m + r) - 2aL_m m + E_n r^3\right)} \tag{4.55}$$

y

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2aE_n m + L_m(r - 2m)}{a^2 E_n(2m + r) - 2aL_m m + E_n r^3} \tag{4.56}$$

Juntando las dos últimas ecuaciones obtengo r en función de ϕ, es decir, la órbita

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\left(a^2 + r(r - 2m)\right)\sqrt{2m(L_m - aE_n)^2 + r(aE_n - L_m)(aE_n + L_m) + E_n^2 r^3}}{\sqrt{r}(2aE_n m + L_m(r - 2m))} \tag{4.57}$$

Es el caso clásico que todo el mundo conoce, órbitas cooplanarias en Kerr con un radio que varía.
Se ve fácilmente que al imponer $a = 0$ se recupera el caso de Schwarzschild.

El potencial efectivo, teniendo en cuenta lo que anteriormente mencionamos: la energía de la órbita viene dada por la suma de la energía cinética menos el potencial efectivo de (4.52) despejamos el potencial efectivo:

$$V_{eff} = \frac{2(-aE_n + L_m)^2 m}{r^3} + \frac{(aE_n - L_m)(aE_n + L_m)}{r^2} \tag{4.58}$$

Podemos calcular también directamente con nuestro nuevo enfoque el potencial efectivo. Teniendo en cuenta la definición de $\dot{r} = \frac{z_1}{B}$ y que $\dot{r}^2$ menos una constante (energía) es el potencial efectivo

$$\left(\frac{z_1}{B}\right)^2 - En = \frac{2(-aE_n + L_m)^2 m}{r^3} + \frac{(aE_n - L_m)(aE_n + L_m)}{r^2} \tag{4.59}$$

Llegamos a la misma expresión para el potencial efectivo de órbitas para fotones cooplanarios con un radio que varía.

Ahora el potencial efectivo depende de la E_n, L_m y de a. Variando estos tendremos un tipo de potencial efectivo y el valor de la energía nos dará el tipo de órbita posible, de forma análoga a Newton. Por simplicidad r, L y E están adimensionalizados ($L = L/m$, $r = r/m$, $E = E/m$ y $m = 1$).

Estudiaremos dos posibilidades dependiendo de si la energía es positiva o la energía es negativa:

Energía positiva

Al estudiar como varía el V_{eff} respecto de r/m se aprecia la influencia de la a de manera que para una $a \neq 0$ hay un único punto de corte entre una energía positiva y el potencial efectivo, por lo tanto en este caso hay dos posibilidades, a la izquierda de ese punto de corte la partícula colapsa y a la derecha escapa.

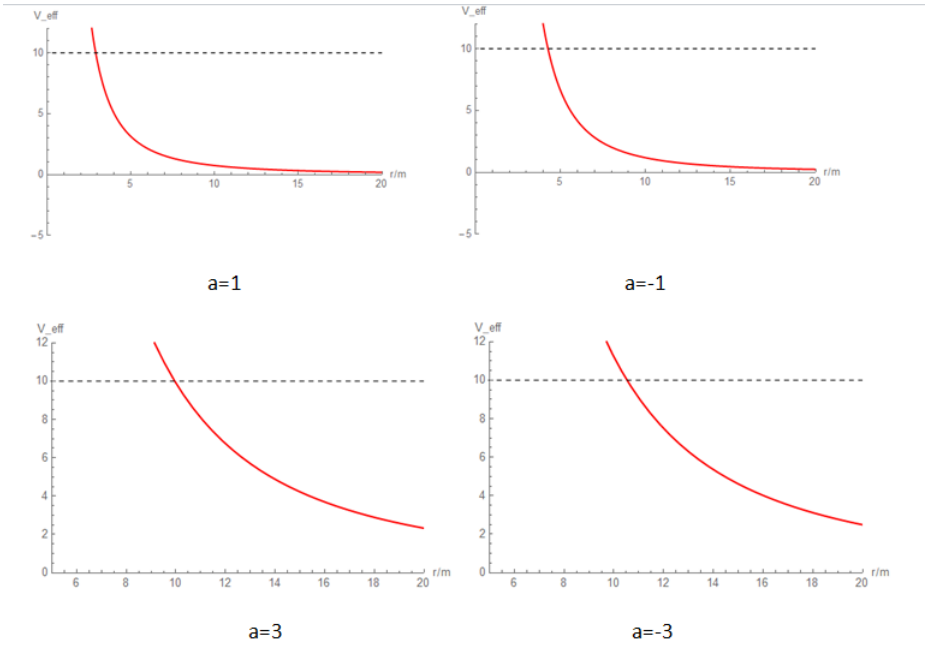

Figura 4.9: El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m = +\sqrt{30}$, $E_n = 10$, para distintos valores de a. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía positiva

A mayor a el punto de corte del potencial efectivo y la energía es mayor, es decir, el radio para escapar del atractor tiene que ser mayor. Si a tiene el mismo módulo pero distinto signo, el radio también es mayor para el caso de fuente con a negativo. El punto de corte se da cuando $V_{eff} = En$. Al integrar de forma numérica (4.57) se van a distinguir dos casos según el valor de r elegido para una determinada energía positiva.
Al dibujar las trayectorias de los fotones para este caso de energía positiva con $a = -3$. En todo momento $L_m \neq 0$ significa que hay cambio de ángulo, un intento de orbitar $\dot{\phi} \neq 0$.

Se recuerda que en todos los dibujos el disco negro representa la región acotada por el horizonte de eventos del agujero negro.

- Para valores de r a la izquierda del punto de corte:

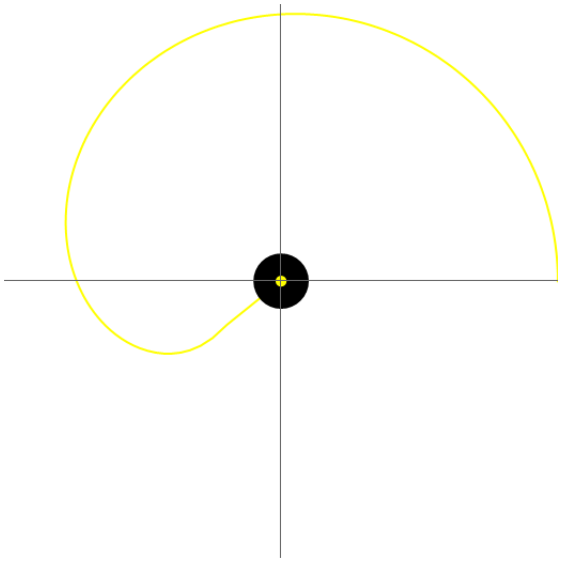

Figura 4.10: Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón

Aquí enfatizamos que las órbitas alrededor de un atractor Schwarzschild poseen una simetría en la coordenada ϕ que no existe en el espaciotiempo de Kerr, debido a la rotación del atractor se rompe la simetría produciendo la ergorregión, zona a partir de la cual la fuerza de arrastre será tal que no habrá ningún sistema capaz de mantenerse estático respecto de un observador lejano y se verá obligado a acompañar al agujero negro en su giro. Fotones incluso con momento angular negativo que entran en la ergorregión deben rotar en sentido del momento angular del atractor. El fotón se ve arrastrado en sentido opuesto al original debido a la rotación del atractor y entonces cae al horizonte de eventos.
Como hemos visto llegamos a los resultados obtenidos por otros métodos con nuestro nuevo enfoque de una manera sencilla.

- Para valores de r a la derecha del punto de corte:

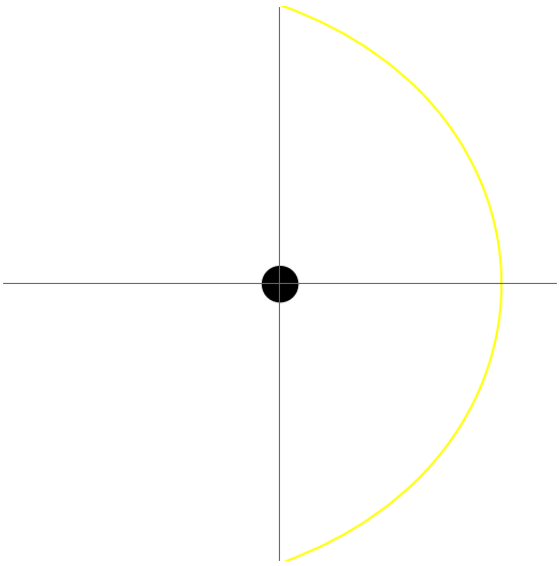

Figura 4.11: Dentro de energía positiva si r es mayor que el punto de corte, movimiento dispersivo, es una parábola que se va al infinito.

Con energía positiva y con un r a la derecha del punto de corte hay posibilidad de escape del fotón llegando al ojo del observador. Por lo tanto, se obtienen imágenes de estas fuentes cuando el fotón es lanzado desde un punto a la derecha del punto de corte entre potencial efectivo y energía positiva.

Energía negativa

En este caso para estudiar el potencial efectivo con una energía negativa viendo los casos anteriores, tenemos que cambiar los valores de la energía ($E_n = -1$) y del momento angular ($L_m = 10$) para que la forma del potencial efectivo cambie y que haya puntos de corte con la energía negativa, existiendo movimiento. Aumentando el valor del momento angular y disminuyendo el de la energía lo logramos. A partir de ahí, dibujaremos las trayectorias de los fotones con la integración numérica de (4.57).

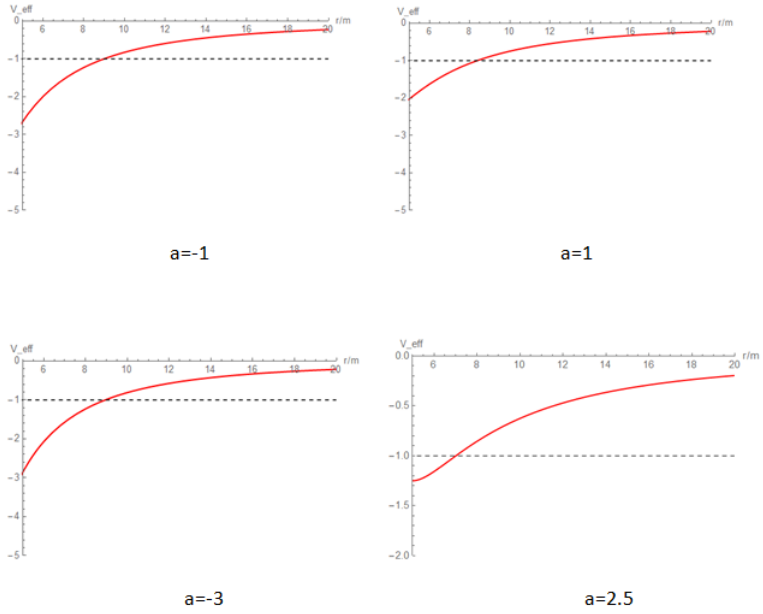

Figura 4.12: El potencial efectivo para geodésicas nulas (fotones) cooplanarias con un radio que varía y $L_m = +15$, $E_n = -1$, para distintos valores de a. En rojo el V_{eff} y línea discontinua la energía negativa.

A continuación, se va a pintar las trayectorias de los fotones para este caso de energía negativa con $a = -3$. En todo momento $L_m \neq 0$ significa que hay cambio de ángulo, un intento de orbitar $\dot{\phi} \neq 0$.
En todos los dibujos el disco negro representa la región acotada por el horizonte de eventos del agujero negro.

- Para valores de r a la izquierda del punto de corte:

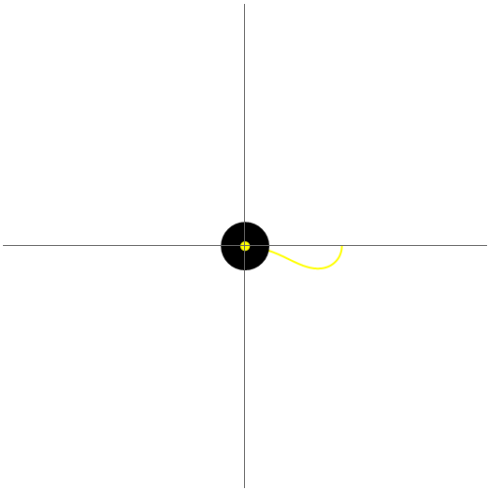

Figura 4.13: Caso que corresponde a fotón que cae en la singularidad, el punto amarillo corresponde a la posición final del fotón

Vemos el efecto de errogación de nuevo. El fotón se ve arrastrado en sentido opuesto al original debido a la rotación del atractor y entonces cae al horizonte de eventos.

- Para valores de r a la derecha del punto de corte:

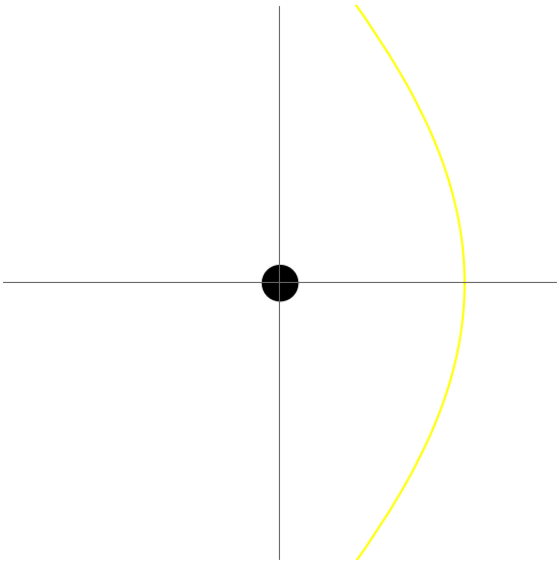

Figura 4.14: Dentro de energía positiva si r es mayor que el punto de corte, movimiento dispersivo, es una parábola que se va al infinito.

Con energía negativa y con un r a la derecha del punto de corte hay posibilidad de escape del fotón llegando al ojo del observador. Por lo tanto, se obtienen imágenes de estas fuentes cuando el fotón es lanzado desde un punto a la derecha del punto de corte entre potencial efectivo y energía negativa.

En ambos casos al no existir dos puntos de corte entre potencial efectivo y energía no vemos órbitas en forma de elipse como pasaba en Schwarzschild, el fotón en una métrica de Kerr o bien escapa o es atraído por el atractor siendo esta una importante diferencia entre los dos tipos de fuente.

Caso C: $z_1 = 0$ $z_2^\dagger = -j_2 z_2$

Este caso C queda fuera de los objetivos del trabajo. Es un caso totalmente novedoso fuera de lo estudiado hasta ahora, siendo objeto de trabajos futuros con más profundidad. Introduciremos las ecuaciones características de esta familia. El radio constante deberá cumplir (4.9) y aunque no se ha comprobado por similitud con Schwarzschild todo apunta a que sea el del caso A.

Esta familia de trayectorias luminosas son órbitas circulares, ya que, $z_1 = 0$ implica que $\dot{r} = 0$, es decir, son órbitas de radio constante pero en este caso no son cooplanarias ($\dot{\theta} \neq 0$) como pasaba en el caso A. Del conjunto de ecuaciones que tienen que cumplir esta familia y haciendo uso de (3.3)-(3.6) así como de la definición de z_0 y z_3 se llega a que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\frac{E_n^2}{1-\frac{2mr}{a^2\cos^2(\theta)+r^2}} - \frac{\left(a^2 L_m \cos(\theta)\cot(\theta) - 2aE_n mr\sin(\theta) + L_m r\csc(\theta)(r-2m)\right)^2}{(a^2+r(r-2m))(a^2\cos^2(\theta)+r^2)(a^2\cos^2(\theta)+r(r-2m))}}{a^2\cos^2(\theta)+r^2} \tag{4.60}$$

$$\dot{\phi} = \frac{a^2 L_m \cot^2(\theta) - 2aE_n mr + L_m r\csc^2(\theta)(r-2m)}{\left(a^2+r(r-2m)\right)\left(a^2\cos^2(\theta)+r^2\right)} \tag{4.61}$$

$$\dot{t} = \frac{\left(a^2 E_n(2m+r) + 2aL_m m + E_n r^3\right)}{r^2\left(a^2+r(r-2m)\right)} \tag{4.62}$$

Estas ecuaciones podemos agruparlas usando otra vez (3.3-3.6) y nos quedan de la siguiente manera

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)\left(a^2 L_m\cot^2(\theta) + 2aE_n mr + L_m r\csc^2(\theta)(r-2m)\right)}{\left(a^2\cos^2(\theta)+r^2\right)\left(a^2E_n\cos(2\theta)\left(a^2+r(r-2m)\right) + a^2E_n r(2m+3r) + a^4E_n - 4aL_m mr + 2E_n r^4\right)} \tag{4.63}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{a^2+r(r-2m)}\sqrt{a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2}\sqrt{\left(a^2+r(r-2m)\right)\left(a^2E_n^2\cos(2\theta) - 2L_m^2\csc^2(\theta)\right) + a^2\left(E_n^2 r(2m+3r) + 2L_m^2\right) + \frac{a^4}{E_n^{-2}} - 8aE_nL_m mr + 2\frac{E_n^2}{r^{-4}}}}{\left(a^2\cos^2(\theta)+r^2\right)\left(a^2E_n\cos(2\theta)\left(a^2+r(r-2m)\right) + a^2E_n r(2m+3r) + a^4E_n - 4aL_m mr + 2E_n r^4\right)} \tag{4.64}$$

Se comprueba en seguida que se llega al caso de Schwarzschild imponiendo que $a = 0$. Juntando las dos últimas e integrando tenemos como se mueven los fotones en la esfera de radio constante.

Como trabajos futuros sería muy interesante hacer un estudio como en el caso de Schwarzschild, obtener el radio constante en el que tendremos órbitas que varían su ángulo θ y ϕ así como algún parámetro que nos permita estudiar la existencia o no de estas órbitas circulares no cooplanarias.

Capítulo 5

Conclusiones y desarrollos futuros

En este trabajo hemos sido capaces de formular el problema de las geodésicas luminosas, es decir, las trayectorias de los fotones en el campo gravitatorio generado por un cuerpo en el marco de la teoría de la relatividad general, en término de unos parámetros físicamente interesantes. Por el lado de la fuente, los escalares que nos salieron a partir de la derivada covariante del formalismo de tétrada que propusimos para simplificar el conjunto de ecuaciones de la relatividad general que se obtienen a partir de las funciones métricas. Cambiando los escalares que nos salen de la métrica podemos cambiar la fuente de manera muy sencilla. En el caso de los fotones nos queda la energía y el momento angular como parámetros físicamente interesantes para estudiar las órbitas.

La mayor contribución en este trabajo es el desarrollo de un formalismo en el que planteamos las ecuaciones de las geodésicas para fotones en término de los escalares geométricos de la fuente a_i, Ω_i y j_i. En vez de usar las ecuaciones de Euler-Lagrange, nos basamos en la definición de lo que es una geodésica, determinada por un vector tangente que es paralelo a si mismo. Llegando así al planteamiento de las ecuaciones en términos de nuestros escalares de una manera sencilla.

Al identificar las cantidades que parametrizan los distintos tipos de geodésicas conseguimos hacer una clasificación de todas las geodésicas posibles. Se analizaron los casos A y B para fotones en una métrica de Kerr y Schwarzschild que son los que aparecen en todos los trabajos publicados sobre geodésicas, obteniendo con nuestro enfoque de escalares los resultados ya conocidos y validando el modelo planteado. En particular el caso C, es algo nuevo que nunca antes se había visto, geodésicas luminosas circulares no cooplanarias. Este caso para una métrica de Kerr se ha dejado introducido para trabajos futuros.

Las imágenes recientes de la Colaboración del Telescopio Event Horizont (EHT) de un agujero negro supermasivo han abierto la posibilidad de entender las imágenes para distintas fuentes. En [14] se simularon estas imágenes a partir de las ecuaciones de Einstein más complejas. Con nuestro modelo hemos conseguido lo mismo siguiendo el formalismo de escalares.

Desarrollos futuros

Con nuestro enfoque hemos sido capaces de clasificar todas las geodésicas para luego aplicarlo en Kerr y Schwarzschild para el caso de geodésicas luminosas. Por lo tanto, esta clasificación se puede aplicar a cualquier métrica que sea simétrica axial y temporalmente, dejando abierto un desarrollo futuro para otras métricas con esas propiedades.

Nuestro trabajo plantea investigaciones futuras muy interesantes que se han ido mencionando durante el desarrollo del trabajo. Para el caso C, órbitas circulares no cooplanarias, en Schwarzschild se ha conseguido sacar el radio constante de la esfera alrededor de la fuente, una relación de la energía con el momento angular que se tiene que cumplir siempre y el descubrimiento de dos órbitas asintóticamente circulares en dicha esfera. Para una métrica de Kerr todo esto se deja para desarrollarlo en un futuro, ya que queda fuera de los objetivos de este trabajo .
Respecto al caso D, es muy interesante porque generaliza y contiene a todos los anteriores, dejando este caso abierto a investigaciones posteriores.

Apéndices

En esta sección se presentan los escalares geométricos para distintas fuentes con simetría axial y temporal.

Escalares para la métrica de Schwarzschild

Los escalares para esta métrica

$a_1 = \frac{m}{r^2\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}$
$j_2 = \frac{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}{r}$
$j_6 = \frac{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}{r}$
$j_9 = \frac{cot\theta}{r}$

Escalares para la métrica de Kerr

Los escalares para esta métrica son

$$a_1 = -\frac{2\sqrt{2}m\sqrt{a^2+r(r-2m)}\left(a^2\cos(2\theta)+a^2-2r^2\right)}{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^{3/2}\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r(r-2m)\right)}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{m}{r^2\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}$

$$a_2 = -\frac{4\sqrt{2}a^2mr\sin(2\theta)}{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^{3/2}\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r(r-2m)\right)}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$

$$j_1 = \frac{\sqrt{2}a^2\sin(2\theta)}{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^{3/2}}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad j_1 = 0$

$$j_2 = \frac{2\sqrt{2}r\sqrt{a^2+r(r-2m)}}{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^{3/2}}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad j_2 = \frac{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}{r}$

$$j_6 = \frac{4a^2r^2(2r-5m)+a^4\cos(4\theta)(r-m)+4a^2r\cos(2\theta)\left(a^2+r(2r-3m)\right)+a^4(m+3r)+8r^3(r-2m)^2}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+r(r-2m)}\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^{3/2}\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r(r-2m)\right)}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad j_6 = \frac{\sqrt{1-\frac{2m}{r}}}{r}$

$$j_9 = \frac{\cot(\theta)\left(a^4\cos(4\theta)+4a^2\cos(2\theta)\left(a^2+2r(r-2m)\right)+8a^2r^2+3a^4+8r^3(r-2m)\right)}{\sqrt{2}(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2)^{3/2}(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r(r-2m))}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad j_9 = \frac{cot\theta}{r}$

$$\Omega_2 = -\frac{2\sqrt{2}am\sin(\theta)\left(a^2\cos(2\theta)+a^2-2r^2\right)}{(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2)^{3/2}(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r(r-2m))}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 = 0$

$$\Omega_3 = -\frac{8\sqrt{2}amr\cos(\theta)\sqrt{a^2+r(r-2m)}}{(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2)^{3/2}(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r(r-2m))}$$

Para $a = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_3 = 0$

En todos los casos los escalares de Schwarzschild se recuperan como esperábamos.

Escalares para una métrica general

Una métrica general con un término de rotación $w_3(r,\theta)$:

$$\begin{pmatrix} -A(r,\theta)^2 & 0 & 0 & w_3(r,\theta) \\ 0 & B(r,\theta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C}(r,\theta)^2 & 0 \\ w_3(r,\theta) & 0 & 0 & R(r,\theta)^2 \end{pmatrix}$$

Los escalares para esta métrica general, usando esta función de cambio

$$\omega_3 = A^2\psi \tag{5.1}$$

pueden ser escritos como sigue

$$a_1 = \frac{A_{,r}}{AB} \qquad a_2 = \frac{A_{,\theta}}{AC} \tag{5.2}$$

$$j_1 = -\frac{B_{,\theta}}{BC} \qquad j_2 = \frac{C_{,r}}{BC} \tag{5.3}$$

$$j_6 = \frac{(\ln(R^2+A^2\psi^2))_{,r}}{2B} \tag{5.4}$$

$$j_9 = \frac{(\ln(R^2+A^2\psi^2))_{,\theta}}{2C} \tag{5.5}$$

$$\Omega_2 = \frac{A\psi_{,r}}{2B\sqrt{R^2+A^2\psi^2}} \tag{5.6}$$

$$\Omega_3 = \frac{A\psi_{,\theta}}{2C\sqrt{R^2+A^2\psi^2}} \tag{5.7}$$

Bibliografía

[1] B. P. Abbott y col. «Observation of gravitational waves from a binary black hole merger». En: *Physical Review Letters* 116.6 (2016), págs. 1-16. ISSN: 10797114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837.

[2] R. Abuter y col. «Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole». En: *Astronomy and Astrophysics* 615 (2018). ISSN: 14320746. DOI: 10.1051/0004-6361/201833718. arXiv: 1807.09409.

[3] Kazunori and Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: *The Astrophysical Journal* 875.1 (2019), pág. L1. ISSN: 2041-8213. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0ec7.

[4] Kazunori and Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring». En: *The Astrophysical Journal* 875.1 (2019), pág. L5. ISSN: 2041-8205. DOI: 10.3847/2041-8213/ab0f43.

[5] Demetrios Christodoulou. «Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud». En: *Communications in Mathematical Physics* 93.2 (1984), págs. 171-195. ISSN: 00103616. DOI: 10.1007/BF01223743.

[6] S Hony y col. «Letter to the Editor Astronomy Letter to the Editor». En: 106 (2002), págs. 103-106. DOI: 10.1051/0004-6361.

[7] Pankaj S. Joshi, Daniele Malafarina y Ramesh Narayan. «Distinguishing black holes from naked singularities through their accretion disc properties». En: *Classical and Quantum Gravity* 31.1 (2014). ISSN: 02649381. DOI: 10.1088/0264-9381/31/1/015002. arXiv: 1304.7331.

[8] Pankaj S. Joshi, Daniele Malafarina y Ramesh Narayan. «Equilibrium configurations from gravitational collapse». En: *Classical and Quantum Gravity* 28.23 (2011). ISSN: 02649381. DOI: 10.1088/0264-9381/28/23/235018. arXiv: 1106.5438.

[9] Shashank N. Kane, Ashutosh Mishra y Anup K. Dutta. «Preface: International Conference on Recent Trends in Physics (ICRTP 2016)». En: *Journal of Physics: Conference Series* 755.1 (2016). ISSN: 17426596. DOI: 10.1088/1742-6596/755/1/011001.

[10] J. Ospino y L. A. Núñez. «Karmarkar scalar condition». En: *The European Physical Journal C* 80.2 (2020), págs. 1-9. ISSN: 1434-6044. DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-7738-8. arXiv: 2001.09378.

[11] J. Ospino y col. «Are there any models with homogeneous energy density?» En: *General Relativity and Gravitation* 50.11 (2018), págs. 1-17. ISSN: 15729532. DOI: 10.1007/s10714-018-2467-0. arXiv: 1810.03059.

[12] R. Penrose, Andrzek Królak y Werner Israel. «Gravitational collapse: The role of general relativity». En: *General Relativity and Gravitation* 34.7 (2002), págs. 1135-1139. ISSN: 00017701. DOI: 10.1023/A:1016534604511.

[13] Edwin A Power y col. «Geon* J.» En: 172.5 (1968).

[14] «Shadows around the q-metric». En: *Classical and Quantum Gravity* 38.1 (2021), págs. 1-20. ISSN: 13616382. DOI: 10.1088/1361-6382/abc223. eprint: 2007.13600.

[15] Rajibul Shaikh y Pankaj S. Joshi. «Can we distinguish black holes from naked singularities by the images of their accretion disks?» En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.10 (2019). ISSN: 14757516. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/10/064. arXiv: 1909.10322.

[16] Rajibul Shaikh y col. «Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 482.1 (2019), págs. 52-64. ISSN: 13652966. DOI: 10.1093/mnras/sty2624. arXiv: 1802.08060.

[17] Stuart L. Shapiro y Saul A. Teukolsky. «Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship». En: *Physical Review Letters* 66.8 (1991), págs. 994-997. ISSN: 00319007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.66.994.

[18] Kentarou Tanabe y Shigehiro Nagataki. «Extended monopole solution of the Blandford-Znajek mechanism: Higher order terms for a Kerr parameter». En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 78.2 (2008), págs. 1-7. ISSN: 15507998. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.024004.

[19] F. H. Vincent y col. «Imaging a boson star at the Galactic center». En: *Classical and Quantum Gravity* 33.10 (2016). ISSN: 13616382. DOI: 10.1088/0264-9381/33/10/105015. arXiv: 1510.04170.