

Metriche e Carte

Original

Metriche e Carte / Sparavigna, A. C.. - ELETTRONICO. - (2022). [10.5281/zenodo.6523957]

Availability:

This version is available at: 11583/2962862 since: 2022-05-06T16:11:04Z

Publisher:

ZENODO

Published

DOI:10.5281/zenodo.6523957

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)



May 6, 2022

Metriche e Carte

Sparavigna, Amelia Carolina

Il testo parte dalla metrica legata all'ellissoide terrestre. Discute le deformazioni introdotte dalla rappresentazione dell'ellissoide sulle carte geografiche o topografiche. Verrà spiegato l'angolo di convergenza al meridiano ed il suo ruolo per trovare l'azimut dall'angolo di direzione. Il testo di riferimento è quello di Ambrogio Maria Manzino, Quaderni di topografia, geodesia, cartografia, trattamento delle misure, Torino, 2017.

Name	Size
Metrica-2.pdf md5:a6bb15e4ae83be4045f091036ee96a55	1.5 MB Preview

-

Publication date: May 6, 2022

Zenodo DOI Badge

DOI

10.5281/zenodo.6523957



Powered by [CERN Data Centre](#) & [Invenio](#).

Metriche e Carte

Amelia Carolina Sparavigna

Department of Applied Science and Technology, Politecnico di Torino, Torino, Italy

Email: amelia.sparavigna@polito.it

Torino 06/05/2022

Abstract

Il testo parte dalla metrica legata all'ellissoide terrestre. Discute le deformazioni introdotte dalla rappresentazione dell'ellissoide sulle carte geografiche o topografiche. Verrà spiegato l'angolo di convergenza al meridiano ed il suo ruolo per trovare l'azimut dall'angolo di direzione. Il testo di riferimento è quello di Ambrogio Maria Manzino, Quaderni di topografia, geodesia, cartografia, trattamento delle misure, Torino, 2017.

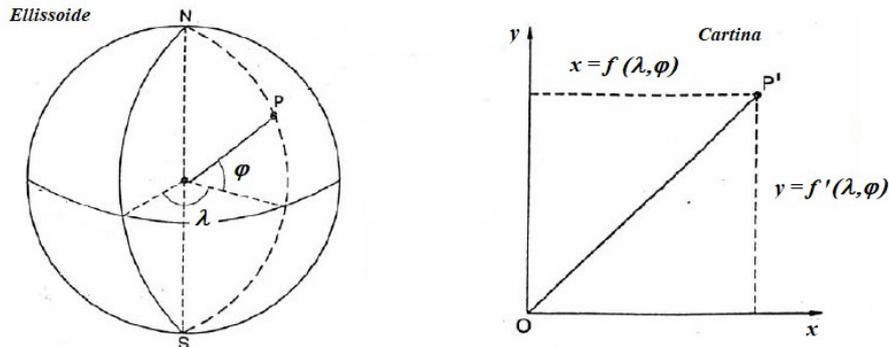
Keywords: Metrica, Angolo di convergenza al meridiano, Azimut.

Subject Areas: Topografia, Cartografia

Introduzione

Per rappresentare le particolarità della superficie terrestre si procede con la proiezione dei punti che la descrivono su una superficie matematica che approssima bene il pianeta. Questa superficie è un ellissoide di rotazione. Per scopi di misura e progetto legati alla topografia, la superficie dell'ellissoide non è tuttavia la più comoda. Inoltre non è sviluppabile su un piano, come invece sono le superfici laterali cilindriche o coniche [1].

Poiché non sviluppabile, per proiettare o trasformare le coordinate ellissoidiche di latitudine (φ) e longitudine (λ) in coordinate piane (y, x) occorre accettare la presenza nella trasformazione di una, seppur minima, deformazione metrica. Se le distanze sulla carta saranno deformate rispetto a quelle sull'ellissoide, sarà possibile tuttavia scegliere particolari proiezioni cartografiche che non deformino le superfici, oppure mantengano invariati gli angoli [1]. Una carta è quindi una rappresentazione bidimensionale di una parte dell'ellissoide. Vediamo come definire e quali sono le deformazioni che si hanno nello sviluppo delle carte.



Ellissoidi di riferimento

In [1] viene dettagliato il problema della rappresentazione della Terra, partendo dalla gravitazione ed introducendo geoidi e sferoidi. Dallo sferoide si passa all'ellissoide di rotazione. La ricerca dei parametri relativi è, in passato, avvenuta tramite misure gravimetriche, osservazioni astronomiche e satellitari, congiuntamente a misure di tempo [1]. Il testo riporta anche i valori di alcuni ellissoidi di riferimento.

Il riferimento impiegato nel contesto GPS (Global Positioning System) è il WGS84. L'acronimo WGS84 significa World Geodetic System 1984. È un sistema mondiale di geodetiche, basato su un ellissoide di riferimento elaborato nel 1984. Il modello matematico della Terra è stato ottenuto da misure disponibili al 1984. Il datum globale WGS84 utilizza lo standard EGM96, che approssima il geoidi nel suo complesso ed è valido per tutto il mondo. L'acronimo EGM96 significa Earth Geopotential Model 1996 ed indica un modello geopotenziale della superficie terrestre ottenuto da somma di armoniche sferiche.

Tra gli ellissoidi menzionati in [1], vi sono i seguenti (semiassi e reciproco dello schiacciamento):

Bessel (1841)	6 377 397,155	6 356 078,963	299,1528128
Hayford (1910)	6 378 388	6 356 911,946	297
WGS-84 (1984)	6 378 137	6 356 752,3142	298,257223563

In [1], troviamo anche menzionato il sistema ITRS2014. È una realizzazione dell' International Terrestrial Reference System (ITRS), supportato operativamente dall' International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS), https://www.iers.org/IERS/EN/Home/home_node.html

Le rappresentazioni cartografiche

Tornando al problema posto nell'introduzione, e quindi alla rappresentazione cartografica dell'ellissoide, esso è affrontato nel Cap. 5 di [1]. "L'ellissoide è una superficie di riferimento planimetrica per i rilievi topografici" [1]. Tale superficie è definita in forma chiusa e permette la rappresentazione variazionale della Terra e di ciò che è presente su di essa [1]. La domanda che ci si pone in [1] è come utilizzare tale superficie per un progetto. Una soluzione potrebbe essere quella di usarne una porzione in un ambiente CAD, ma ciò sarebbe molto scomodo, oltre alle difficoltà poste dalla misura su tale porzione di lunghezze, superfici, dislivelli ed angoli [1]. Pertanto la soluzione è quella di usare una rappresentazione piana. Una superficie a doppia curvatura, come la sfera o l'ellissoide, non è sviluppabile sul piano senza introdurre una deformazione. Storicamente, spiega il Rif. [1], si scelse di proiettare su piani, coni o cilindri, limitando in esse le deformazioni in un dato intorno (nazione, regione) di interesse. Sia queste carte che le carte non proiettive sono chiamate "indistintamente *rappresentazioni, proiezioni cartografiche* o semplicemente *carte*" [1].

Definizioni

Passiamo ad alcune definizioni. Esistono dei moduli per quantificare le deformazioni introdotta passando dall'ellissoide di riferimento alla carta. Si segue sempre la discussione di [1].

Sia $m = \frac{ds_c}{ds_e}$ il rapporto tra ds_c arco infinitesimo su rappresentazione cartografica

e ds_e arco infinitesimo sulla superficie dell'ellissoide. Sia $m_a = \frac{d\sigma_c}{d\sigma_e}$ il rapporto tra $d\sigma_c$ area infinitesima su rappresentazione cartografica e $d\sigma_e$ area infinitesima sulla superficie dell'ellissoide.

Deformazioni

Si prenda un meridiano sull'ellissoide e la trasformata del meridiano corrispondente sulla rappresentazione. Un elemento di linea sull'ellissoide forma un angolo α , detto **azimut**, con il meridiano. L'elemento corrispondente nella rappresentazione forma un angolo α' (**angolo di direzione**) con la linea trasformata del meridiano.

La deformazione angolare è pari a $\delta = \alpha' - \alpha$. L'angolo è detto **deformazione angolare**.

Metriche

Per le metriche e la relazione con le curvature si veda [2].

Si definisca una corrispondenza tra un punto sull'ellissoide e la sua proiezione sul piano tramite le funzioni:

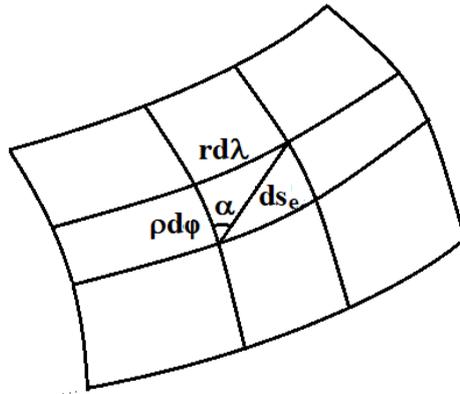
$$x = x(\varphi, \lambda) = f(\varphi, \lambda) \quad , \quad y = y(\varphi, \lambda) = f'(\varphi, \lambda) \quad .$$

φ , λ sono le coordinate geografiche del punto e x , y le coordinate lineari della rappresentazione. Le funzioni inverse sono:

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad , \quad \lambda = \lambda(x, y) \quad .$$

Si considerino, da un punto generico P, gli spostamenti infinitesimi lungo il parallelo e lungo il meridiano.

L'elemento di parallelo è definito come $ds_{e,\lambda} = r d\lambda$. L'elemento di meridiano è dato da: $ds_{e,\varphi} = \rho d\varphi$. Si definisce $(ds_e)^2 = r^2 \cdot d\lambda^2 + \rho^2 \cdot d\varphi^2$, dove ds_e è l'ipotenusa del triangolo con cateti definiti dagli elementi di parallelo e meridiano e che forma un azimut α .



Passiamo alla proiezione: $(ds_c)^2 = dx^2 + dy^2$.

Differenziamo: $dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$, $dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$

La metrica è: $(ds_c)^2 = e \cdot d\varphi^2 + 2f \cdot d\varphi \cdot d\lambda + g \cdot d\lambda^2$.

In tale formula, si sono definiti i coefficienti seguenti:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2, \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2, \quad f = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Deformazione lineare

Si noti che: $\rho \cdot d\varphi = ds_e \cdot \cos \alpha$, $r \cdot d\lambda = ds_e \sin \alpha$.

Sostituendo nella metrica:

$$(ds_c)^2 = e \cdot (ds_e)^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \rho^{-2} + 2f \cdot (ds_e)^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot \rho^{-1} r^{-1} + g \cdot (ds_e)^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot r^{-2}$$

$$m^2 = \frac{ds_c^2}{ds_e^2} = \frac{e}{\rho^2} \cos^2 \alpha + \frac{2f}{r\rho} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{g}{r^2} \sin^2 \alpha$$

$$m^2 = \frac{ds_c^2}{ds_e^2} = e' \cos^2 \alpha + 2f' \sin \alpha \cos \alpha + g' \sin^2 \alpha$$

Si noti che: $e' = \frac{e}{\rho^2}$, $f' = \frac{f}{\rho r}$, $g' = \frac{g}{r^2}$

Questo è il modulo di *deformazione lineare*.

Deformazione areale

Dal triangolo, passiamo al quadrilatero tra due meridiani e due paralleli molto vicini, con area (base per altezza):

$$d\sigma_e = \rho d\varphi \cdot r d\lambda$$

Le proiezioni di meridiani e paralleli non sono ortogonali tra di loro. Si introduca l'angolo ω tra gli elementi infinitesimi di tali proiezioni dm, dp . Dopo alcuni passaggi si ottiene [1]:

$$m_a = \frac{d\sigma_c}{d\sigma_e} = \frac{\sqrt{e \cdot f - g^2}}{\rho \cdot r}$$

Il modulo della *deformazione areale* è:

$$m_a = \frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)$$

Deformazione angolare

Prendiamo l'elemento ds_e sull'ellissoide e sia α il suo azimut. Sia ds_c l'elemento corrispondente sulla carta ed α' il suo angolo. Si ricava:

$$\tan \alpha' = \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} \cdot \tan \alpha$$

Il modulo di *deformazione angolare* è:

$$\tan \delta = \frac{\left(\frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} - 1 \right) \cdot \tan \alpha}{1 + \frac{\rho}{r} \cdot \sqrt{\frac{g}{e}} \tan^2 \alpha}$$

In [1], si prosegue poi con le Trasformazioni Conformi, Pag. 119. Sono trasformazioni interessanti per via delle condizioni di Cauchy-Riemann.

Trasformazione conforme di Gauss

Fra le infinite trasformazioni conformi, quella più usata è la carta di Gauss. Internazionalmente, con due convenzioni che limitano le deformazioni lineari, tale carta prende il nome di Universale Trasversa di Mercatore, UTM, anche se l'invenzione è dovuta a Gauss [1].

Le due convenzioni sono:

- 1) l'intero globo terrestre è descritto con 32 fusi
- 2) coefficiente di contrazione è pari a 0.9996.

Si veda per i dettagli di calcolo il Rif. [1], da pag. 119 e da pag. 125 per la carta di Gauss. Le caratteristiche geometriche della Carta di Gauss sono specificate al Rif. [1] Pag. 134, Eq. 5.30 e 5.31.

Convergenza delle Trasformate di Meridiani e Paralleli

Al Rif. [1], pag. 136, il testo dice che si valuta l'angolo γ che consente di ricavare dalla cartografia, la direzione del nord geografico a partire dalla direzione dell'asse y e viceversa.

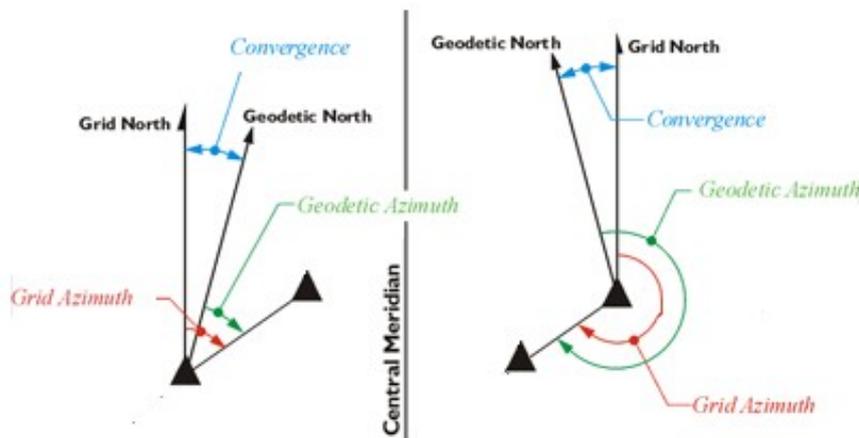
Data l'equazione parametrica della trasformata del parallelo, si ottiene:

$$\gamma = \lambda \sin \varphi \cdot \left[1 + \frac{\lambda^2}{3} \cos^2 \varphi \cdot (1 + 3 e^2 \cos^2 \varphi) \right]$$

Nella formula, λ rappresenta la differenza di longitudine tra il meridiano passante per il luogo in esame e il meridiano centrale del fuso a cui detto luogo appartiene.

L'angolo γ è detto "convergenza del meridiano".

In qualunque punto P della superficie terrestre è possibile definire tre diverse direzioni "Nord": Nord magnetico, determinato con la bussola, Nord geografico, coincidente con il meridiano per il punto P, e Nord cartografico, che è la direzione dell'asse y del riferimento cartografico. Il Nord cartografico è detto anche Nord reticolo. In Inglese si dicono Grid North e Geodetic North.



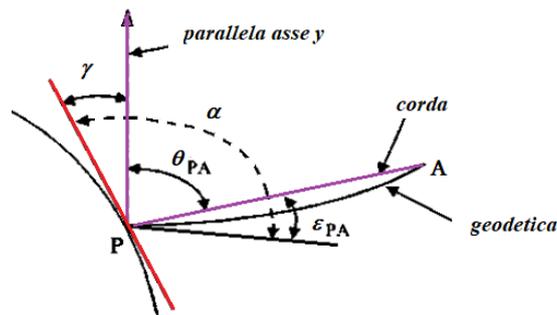
L'immagine illustra angolo di direzione (in Inglese Grid Azimuth) ed azimuth (Geodetic Azimuth). La proiezione dell'ellissoide su una carta introduce l'angolo di convergenza (Convergence). Immagine adattata da <https://www.e-education.psu.edu/geog862/node/1816>

In Inglese: Angolo di convergenza (Convergence), Nord geografico (Geodetic North), Nord cartografico o Nord reticolo (Grid North), Meridiano di riferimento (Central Meridian), Angolo di direzione (Grid azimuth), Azimut (Geodetic Azimuth).

Su una carta, l'angolo di convergenza è formato dalla direzione del nord cartografico (che è parallelo all'asse y, la trasformata del meridiano centrale del fuso) e dalla direzione del nord geografico (trasformata del meridiano locale). Pertanto, se siamo sul meridiano centrale del fuso, l'angolo di convergenza è nullo.

Azimut

Nel punto P si definisce l'azimut α di una geodetica PA sull'ellissoide, l'angolo compreso tra le tangenti al meridiano per P e alla geodetica stessa.



Sulla carta, note le coordinate Est e Nord dei punti P ed A, si calcola l'angolo di direzione come:

$$\theta_{PA} = \arctan \frac{E_A - E_P}{N_A - N_P}$$

Il valore dell'azimut corrispondente è :

$$\alpha = \gamma + \theta_{PA} - \epsilon_{PA}$$

Il contributo ϵ_{PA} è l'angolo di riduzione alle corde.

Si consideri una posizione relativamente sfavorevole, ossia agli estremi del fuso, per lati di 15 km, ad una latitudine media di 45°, l'angolo di riduzione è di 0.5''. Nel campo topografico, quindi, è possibile non tener conto di queste correzioni [3].

Software online

Per avere l'angolo di convergenza si può usare software online.

<https://www.borneo.name/coordinate/geografiche-utm-mgrs>

Si ringrazia vivamente l'Ingegnere Vito Borneo per il software che mette a disposizione per studio e ricerca.

Esempio – Torino

Coordinate di Piazza Castello (come da Wikipedia)

Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS.
I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long:

UTM:

MGRS:

Convergenza del meridiano: -000° 55' 49.8343"

Fattore di scala: 0.999731594

Lat/long in: grad/min/sec gradi decimali;

UTM in: m mm;

MGRS unità

Convergenza al meridiano $\gamma = -000^{\circ} 55' 49.8343'' = 0.9305^{\circ}$

Si confronti con la discussione in [4].

Si possono scegliere anche i gradi decimali. Sempre per Piazza Castello, Torino, si ha:

Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS.
I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long: 45.07079574° N, 007.68580534° E

UTM: 32 N 396549 4991655

MGRS: 32T LQ 96549 91655

Convergenza del meridiano: -000.93050568°**Fattore di scala: 0.999731593**Lat/long in: grad/min/sec gradi decimali;UTM in: m mm;MGRS unità**Esempio – Vercelli****Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.**

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS.
I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long: 45° 19' 00" N, 8° 25' 00" E

UTM: 32 N 454278 5018295

MGRS: 32T MR 54278 18294

Convergenza del meridiano: -000° 24' 53.1343"**Fattore di scala: 0.999625702**Lat/long in: grad/min/sec gradi decimali;UTM in: m mm;MGRS unità

Esempio - Pavia

Conversione di coordinate Geografiche (Lat/Long) in UTM e MGRS.

Inserire le coordinate (WGS84) in uno dei tre moduli: Geografiche, UTM, o MGRS. I valori vengono aggiornati automaticamente

Lat/Long: 45° 11' 00" N, 9° 09' 00" E

UTM: 32 N 511785 5003328

MGRS: 32T NR 11784 03327

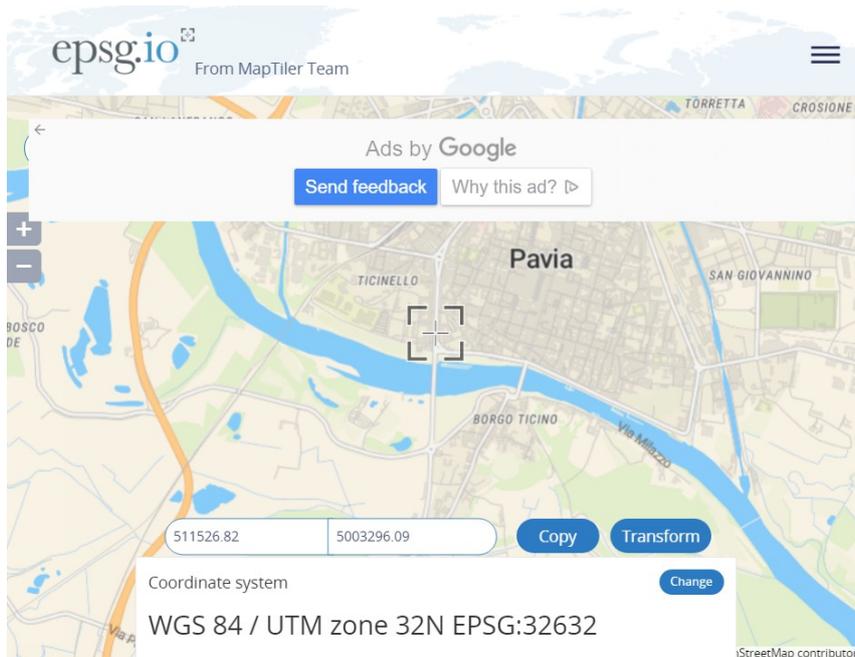
Convergenza del meridiano: +000° 06' 23.0579"

Fattore di scala: 0.999601708

Lat/long in: grad/min/sec gradi decimali;

UTM in: m mm;

MGRS unità



Coordinate UTM

Per conoscere le coordinate UTM relative ad un sito in Piemonte, nel 2021, si poteva usare il Geoportale della Regione Piemonte, al link <https://www.geoportale.piemonte.it/geocatalogo/>, ora non più attivo (Maggio 2022, il link è <https://www.geoportale.piemonte.it/visregpi-go/>). Il link attuale continua a fornire un righello come strumento misura, non più il compasso. Nella versione 2021 della mappa interattiva, se si usava il tasto destro del mouse, compariva la finestra con quacode e coordinate UTM. Si lasciamo quindi le immagini seguenti, come memoria della precedente versione della mappa interattiva.



Si ringrazia il sito Geoportale del Piemonte, per i preziosi strumenti che mette a disposizione ed ora utilizzati per studio e ricerca. Nella versione del 2021, se si usava il tasto destro del mouse comparivano le coordinate UTM. Oggi, nella versione 2022, tali coordinate vanno importate. Nel 2021 si aveva anche a disposizione il compasso, da utilizzare come in immagine seguente.



Nella versione del 2021, si aveva a disposizione il compasso e quindi la mappa interattiva forniva anche un angolo. L'angolo dato dal Geoportale era un angolo di direzione, non un azimut. Il Geoportale si basa infatti su carte catastali. La figura mostrata sopra riporta un angolo di direzione, pari a 117.4° di Via Garibaldi, Torino. Usando questo dato e l'angolo di convergenza al meridiano prima ottenuto, e trascurando la riduzione alle corde, poiché si assume distanza molto piccola, l'azimut della via è pari a 116.47°. Si dovrebbero dare anche le incertezze, come in [3]. Si noti che il valore dell'angolo di convergenza varia da un estremo all'altro della via.

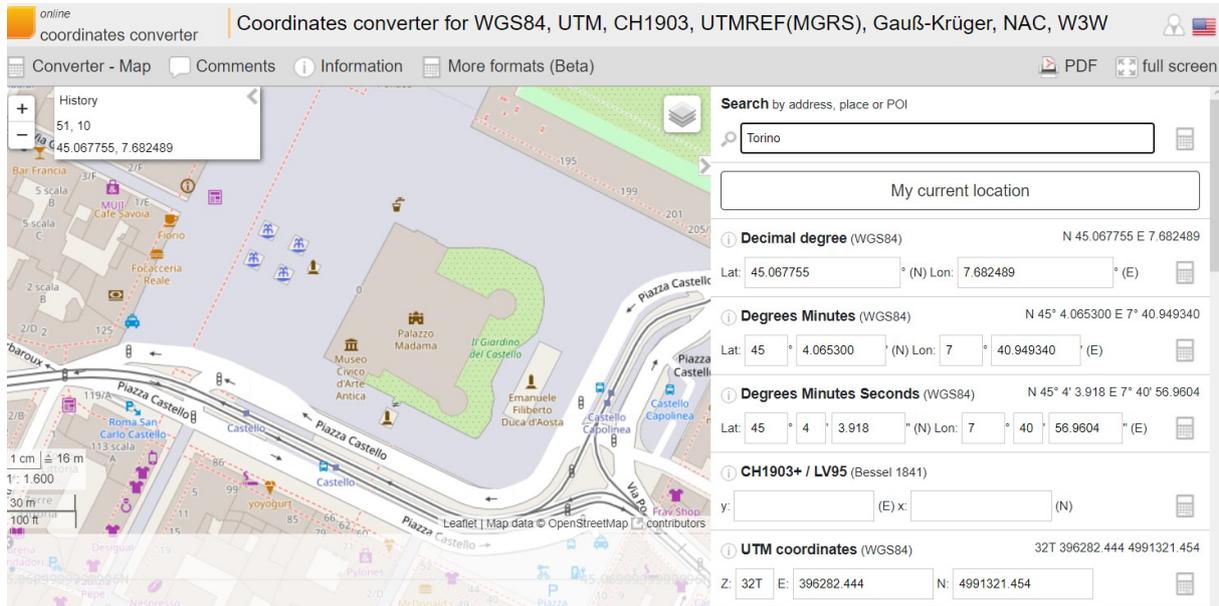
Per avere le coordinate UTM, si consiglia l'uso del portale <https://www.geoplaner.com>, come già suggerito in [4].

<https://www.geoplaner.com>

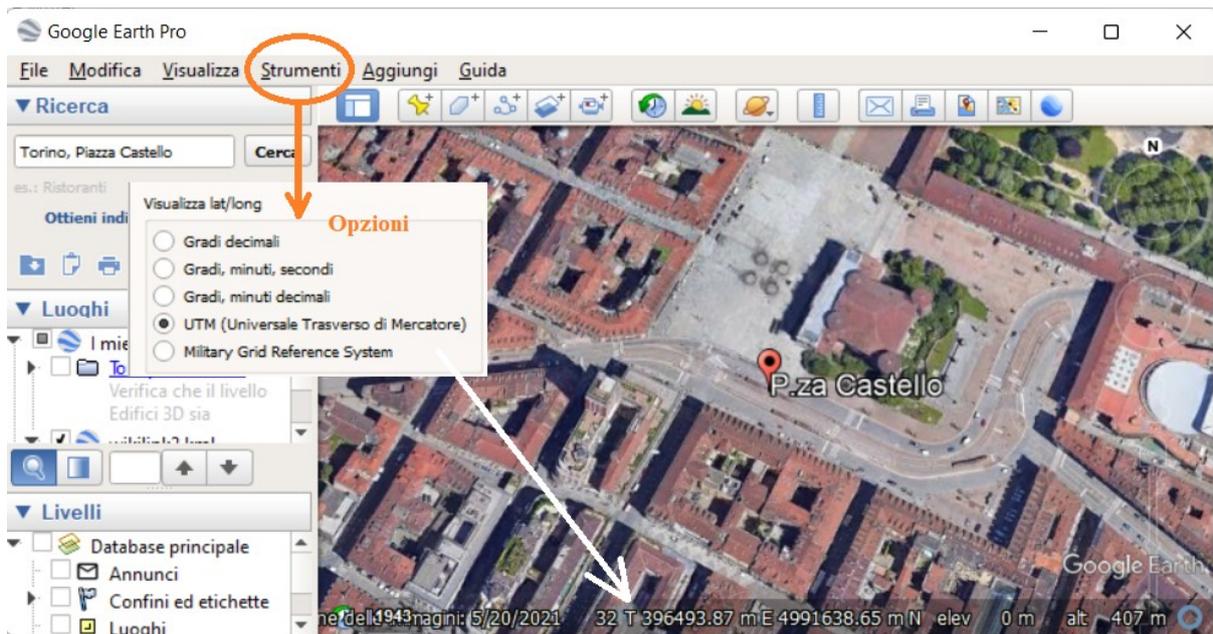


Un sito alternativo è :

<https://coordinates-converter.com/en/decimal/45.067755,7.682489?karte=OpenStreetMap&zoom=18> (screenshot seguente)



Oppure Google Earth Pro



Si scelga tra gli "Strumenti" le "Opzioni ..." per avere la visualizzazione preferita delle coordinate.

"Un tempo le attività umane erano territorialmente più limitate rispetto ad oggi e anche i sistemi di riferimento con origini locali, a volte con estensione di soli pochi km, erano sufficienti. La loro incoerenza esterna ha portato presto ad aumentarne le dimensioni per diminuire la numerosità, creando in Italia situazioni a “macchia di leopardo” in compresenza cioè di origini di piccole e grandi estensioni, pur sempre incoerenti tra loro e soprattutto incoerenti con i sistemi di riferimento globali nei quali si opera con rilievi GNSS, tecnica ormai usata anche per operazioni di rilievo catastale. Per coerenza con le carte tecniche e con i sistemi di posizionamento satellitare, è di notevole importanza riunificare ... La necessità di questa trasformazione è legata anche all’evoluzione che hanno avuto i sistemi di riferimento nazionali e internazionali, e in Italia dalla direttiva INSPIRE, recepita dal DPCM del 10 novembre 2011 che prevede l’adozione del nuovo sistema geodetico nazionale basato sulla Rete Dinamica Nazionale (RDN) e la rappresentazione cartografica di Gauss nella standardizzazione internazionale UTM" [5].

References

- [1] Ambrogio Maria Manzino, Quaderni di topografia, geodesia, cartografia, trattamento delle misure, Vol. 1, Levrotto & Bella, 2017.
- [2] Sparavigna, Amelia Carolina. (2021). Metrica e Curvature di Gauss e Riemann. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4724602>
- [3] Topografia, Università di Pisa, Corso di Laurea in Ingegneria Civile, dell’Ambiente e del Territorio.
- [4] Sparavigna, Amelia Carolina. (2019). Angolo di direzione ed azimut del decumano massimo di Augusta Taurinorum. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3510146>
- [5] Cina, A., & Manzino, A. M. (2018). Dai “piccoli sistemi” locali della cartografia catastale a quelli globali GNSS. Territorio Italia 2018, 1, 3; doi: 10.14609/Ti_1_18_3i