Nozioni di q-calcolo nell'ambito del quantum calculus

Publication date:
June 18, 2021
DOI:
DOI 10.5281/zenodo.4982846

Nozioni di q-calcolo nell'ambito del quantum calculus

Amelia Carolina Sparavigna

Department of Applied Science and Technology, Politecnico di Torino, Torino, Italy

Email: amelia.sparavigna@polito.it

Torino 18/06/2021

Abstract

Il testo propone alcune nozioni di q-calcolo nell'ambito del quantum calculus. Si daranno definizioni, dimostrazioni ed esercizi, partendo dai q-numeri e q-binomi. Si definirà la q-derivazione. Poi vedremo le identità di Eulero, i q-esponenziali e le funzioni q-trigonometriche. Seguiranno la q-antiderivata e l'integrale di Jackson. Si vedrà la definizione della funzioni q-Gamma e q-Beta.

Keywords: **q-calculus.**

Subject Areas: **Calculus for Physics.**

1. Introduzione

Il quantum calculus è un calcolo che si basa sul metodo delle differenze finite. Non si è tradotto quantum calculus in calcolo quantico per non confonderlo col calcolo fatto dai computer quantici. Il calcolo non usa i limiti. Ma al limite del parametro utilizzato, per esempio nel caso del q-calcolo, con q che tende ad 1 il calculus diventa quello ordinario.

"The q-calculus, while dating in a sense back to Leonhard Euler and Carl Gustav Jacobi, is only recently beginning to see more usefulness in quantum mechanics, having an intimate connection with commutativity relations and Lie algebra". Wikipedia

Il quantum calculus si esplica principalmente come "q-calculus" e "h-calculus", h si riferisce alla costante di Planck, mentre q sta per quantum. I due parametri sono legati nel modo seguente da $q=e^{ih}$. Vi è anche il (p,q)-calculus.

2. q-numero e binomio

Partiamo dal *numero intero* di tipo q , quindi dal q -numero. Per definizione:

$$[n]=\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$[n]=\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1)}{q-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1$$

Per q che tende a 1, $[n]$ tende a n intero.

Possiamo generalizzare per $\alpha\in\mathbb{C}$:

$$[\alpha]=\frac{q^\alpha-1}{q-1}$$

Inoltre:

$$[\infty]=\frac{1}{1-q}$$

Altro calcolo da considerare è quello del q-binomio.

$$(x-a)_q^n=(x-a)(x-q\,a)\ldots(x-q^{n-1}a)$$

Ad esempio:

$$(x-a)_q^3=(x-a)(x-q\,a)(x-q^2a)$$

Poi abbiamo il q-binomio:

$$(x+a)_q^n=(x+a)(x+qa)\ldots(x+q^{n-1}a)$$

oppure:

$$(x+a)_q^n=\prod_{j=0}^{n-1}(x+q^j a)$$

Possiamo esprimere con Gauss come:

$$(x+a)_q^n=\sum_{j=0}^{n} q^{j(j-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a^j x^{n-j} \quad , \text{ con } \quad \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[j]![n-j]!}$$

Il q-fattoriale è $[k]!=[1][2]...[k]$

Ricordiamo che in algebra il teorema binomiale (o anche formula di Newton, binomio di Newton e sviluppo binomiale) esprime lo sviluppo seguente:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

Il fattore è il classico coefficiente binomiale.

Altra espressione utile per il q-calcolo:

$$(1+x)_q^{\alpha}=\frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+q^{\alpha}x)_q^{\infty}}$$

Esercizio 1. Calcolare il q-binomio:

$$(x+a)_q^3=(x+a)(x+qa)(x+q^2a) \;=\; (x+a)(x^2+xqa+xq^2a+q^3a^2) \;=$$
$$x^3+x^2a+x^2qa+xqa^2+x^2q^2a+xq^2a^2+xq^3a^2+q^3a^3 \;=$$
$$x^3+x^2(q^2a+qa+a)+x(q^3a^2+q^2a^2+qa^2)+q^3a^3 \;=$$
$$x^3+x^2a(q^2+q+1)+xa^2(q^2+q+1)q+q^3a^3$$

Inoltre:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}=1 \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=\frac{[3]!}{[1]![2]!}=\frac{q^3-1}{q-1}=q^2+q+1$$

Quindi:

$$(x+a)_q^3=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}x^3+\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}ax^2+q\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}a^2x+q^3\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}a^3$$

```
                                                 1     n=0
                                              1     1     n=1
                                           1     2     1     n=2
                                        1     3     3     1     n=3
                                     1     4     6     4     1     n=4
                                  1     5     10    10    5     1     n=5
                               1     6     15    20    15    6     1     n=6
                            1     7     21    35    35    21    7     1     n=7
                         1     8     28    56    70    56    28    8     1     n=8
                      1     9     36    84    126   126   84    36    9     1     n=9
                   1     10    45    120   210   252   210   120   45    10    1     n=10
                1     11    55    165   330   462   462   330   165   55    11    1     n=11
             1     12    66    220   495   792   924   792   495   220   66    12    1     n=12
          1     13    78    286   715   1287  1716  1716  1287  715   286   78    13    1     n=13
       1     14    91    364   1001  2002  3003  3432  3003  2002  1001  364   91    14    1     n=14
       k=0   k=1   k=2   k=3   k=4   k=5   k=6   k=7   k=8   k=9   k=10  k=11  k=12  k=13  k=14
```

L'immagine precedente mostra il triangolo di Tartaglia - Pascal.

In ciascuna riga, si può vedere che gli elementi si ottengono come somma di due elementi adiacenti della riga precedente. Ossia, se *k* e *n* sono interi positivi, e *k* è minore o uguale a *n*:

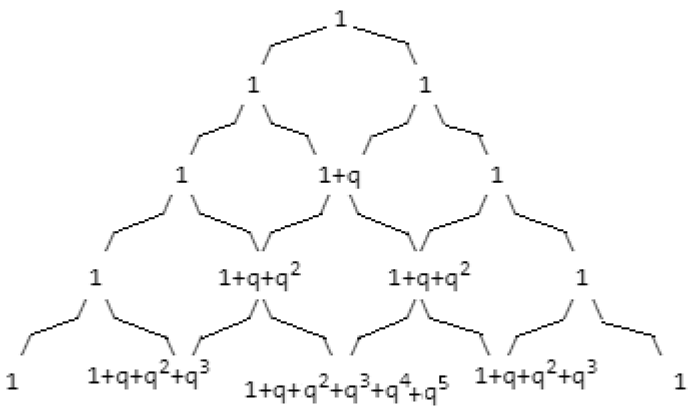
$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \begin{cases} 1, & \text{per } k = 0 \text{ oppure } k = n \\ C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

3. Triangolo di Tartaglia - Pascal ordinario e il q-Pascal

Ricordiamo come si trovano i coefficienti degli sviluppi dei binomi.

Si può usare il triangolo di Tartaglia - Pascal. Il triangolo si costruisce mettendo al vertice il numero 1, nella riga sotto una coppia di 1 e per le righe successive si procede ponendo inizialmente sempre 1, e gli altri numeri si ottengono sommando via via le coppie di numeri che li precedono e li seguono nella riga superiore. Niccolò Tartaglia (1499-1557), matematico italiano, utilizzò il triangolo per trovare i coefficienti del calcolo di un binomio. Blaise Pascal (1623-1662), filosofo e matematico francese, utilizzò invece il triangolo per ricavare tutti gli abbinamenti possibili tra alcuni gruppi di numeri predefiniti.

Ci sono diverse generalizzazione nel q-calcolo. Una è quella proposta nello schema seguente, come si può ricavare dal calcolo esplicito.



Ad esempio:

$$(x+a)_q^3=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}x^3+\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}a\,x^2+q\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}a^2x+q^3\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}a^3$$

$$(x+a)_q^3=x^3+[3]\,a\,x^2+[3]\,q\,a^2x+q^3a^3$$

4. q-differenziale e q-derivata

Il *q-differenziale* è definito come:

$$d_q f(x)=f(qx)-f(x)$$

Esempio: $d_q x=(q-1)x$.

Il *differenziale del prodotto di due funzioni* è:

$$d_q(f(x)g(x))=f(qx)g(qx)-f(x)g(x) \quad =$$
$$f(qx)\,g(qx)-f(qx)\,g(x)+f(qx)\,g(x)-f(x)\,g(x) \quad =$$
$$f(qx)\,d_q g(x)+g(x)\,d_q f(x)$$

Oppure

$$d_q(f(x)g(x))=f(qx)g(qx)-f(x)g(x) \quad =$$

$$f(qx)\ g(qx)+f(x)\ g(qx)-f(x)\ g(qx)-f(x)\ g(x) \ =$$
$$g(qx)\ d_q f(x)+f(x)\ d_q g(x)$$

La *q-derivata* è:

$$D_q f(x)=\frac{d_q f(x)}{dx}=\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$$

Nel limite: $\lim_{q\to 1} D_q f(x)=\frac{d f(x)}{dx}$.

Proprietà. $D_q(a f(x)+b\, q(x))=a D_q f(x)+b D_q g(x)$, con a, b costanti.

Esercizio 2. Calcolare la q-derivata di $f(x)=x^n$ dove n è un intero positivo.

$$D_q x^n=\frac{(qx)^2-x^2}{(q-1)x}=\frac{q^n-1}{q-1}x^{n-1}=[n]x^{n-1}$$

$$D_q x^n=[n]x^{n-1}$$

La *q-derivata del prodotto di funzioni*, si ottiene usando il q-differenziale dato sopra.

$$D_q(f(x)g(x))=f(qx)D_q g(x)+g(x)D_q f(x)=f(x)D_q g(x)+g(qx)D_q f(x)$$

Si trova anche che:

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_q f(x)-f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

Per arrivare a questa espressione, consideriamo $g(x)f(x)/g(x)=f(x)$ e deriviamo.

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x)=D_q f(x)$$

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=-\frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x)+D_q f(x)$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_q f(x)-f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

Usando però l'altra forma della q-derivata, si ottiene:

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(qx)D_q f(x)-f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

Entrambe le forme sono valide. A seconda dei casi, una può essere più utile dell'altra.

Esercizio 3. Calcolare la q-derivata di $f(u)$ rispetto ad *x*, dove $u(x)=\alpha x^{\beta}$, con α,β costanti.

$$D_q f(u(x))=\frac{f(\alpha q^{\beta}x^{\beta})-f(\alpha x^{\beta})}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x))=\frac{f(\alpha q^{\beta}x^{\beta})-f(\alpha x^{\beta})}{\alpha q^{\beta}x^{\beta}-\alpha x^{\beta}}\cdot\frac{\alpha q^{\beta}x^{\beta}-\alpha x^{\beta}}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x))=\frac{f(q^{\beta}u)-f(u)}{q^{\beta}u-u}\cdot\frac{u(qx)-u(x)}{(q-1)x}=D_{q^{\beta}}f(u)\cdot D_q u(x)$$

Esercizio 4. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x)=x+x^2$.

$$D_q u(x) = D_q x + D_q x^2 = \frac{qx - x}{(q-1)x} + \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x}$$

$$D_q u(x) = 1 + x\,\frac{q^2-1}{q-1} = 1 + x(q+1)$$

Esercizio 5. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = 1 + 2x + x^2$.

$$D_q u(x) = 2 + x(q+1)$$

Esercizio 6. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$. Verificare che al limite si ottiene la derivata ordinaria che è $\frac{dy}{dx} = \frac{bc - ad}{(c+dx)^2}$.

$$D_q u(x) = \left[\frac{a + bqx}{c + dqx} - \frac{a + bx}{c + dx}\right] \frac{1}{(q-1)x}$$

Dopo qualche passaggio:

$$D_q u(x) = \left[\frac{bcx(q-1) - adx(q-1)}{(c + dqx)(c + dx)}\right] \frac{1}{(q-1)x} = \frac{bc - ad}{(c + dqx)(c + dx)}$$

A limite per *q* che tende ad 1, ritroviamo la derivata ordinaria.

Esercizio 7. Calcolare $D_q \sqrt{x}$.

$$D_q \sqrt{x} = \frac{\sqrt{qx} - \sqrt{x}}{(q-1)x} = \frac{\sqrt{qx} - \sqrt{x}}{(q-1)x}\,\frac{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}$$

Al limite per *q* che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $1/(2\sqrt{x})$.

Esercizio 8. Calcolare $D_q e^x$.

$$D_q e^x = \frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x}$$

Vediamo che al limite $q \to 1$ si ottiene il risultato ordinario.

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = e^x \frac{e^{x(q-1)} - 1}{(q-1)x} = e^x \frac{x(q-1) + \frac{1}{2} x^2 (q-1)^2 + \ldots}{(q-1)x} = e^x \left(1 + \frac{1}{2} x(q-1) + \ldots \right)$$

Al limite, abbiamo che il risultato della q-derivata diventa quello della derivata ordinaria.

Esercizio 9. Calcolare $D_q a^x$.

$$D_q a^x = \frac{a^{qx} - a^x}{(q-1)x}$$

Al limite per q che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $a^x \ln a$.
Consideriamo la definizione della derivata ordinaria:

$$\frac{d a^x}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \quad .$$

Torniamo alla q-derivata.

$$D_q a^x = \frac{a^{qx} - a^x}{(q-1)x} = a^x \frac{a^{qx-x} - 1}{(q-1)x} = a^x \frac{a^{x(q-1)} - 1}{(q-1)x}$$

Prendiamo il limite di $x(q-1)$ che tende a zero, e troviamo $a^x \ln a$.

Esercizio 10. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

La derivata ordinaria è pari a $\frac{df}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

$$D_q f(x)=\left[\frac{1+\sqrt{xq}}{1-\sqrt{xq}}-\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]\frac{1}{x(q-1)}=\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{q}-1)}{(1-\sqrt{xq})(1-\sqrt{x})\,x(q-1)}$$

$$D_q f(x)=\frac{2}{(1-\sqrt{x\,q})(1-\sqrt{x})\sqrt{x}(\sqrt{q}+1)}$$

Nel limite per q che tende a 1, si trova il risultato con la derivata ordinaria.

Esercizio 11. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x)=\frac{a+bx}{c+d\,x}$.

$$D_q f(x)=\frac{1}{(q-1)x}\left[\frac{a+b\,qx}{c+d\,qx}-\frac{a+b\,x}{c+d\,x}\right]=$$

$$\frac{bc(q-1)x-ad(q-1)x}{(c+d\,qx)(c+d\,x)(q-1)x}=\frac{bc-ad}{(c+d\,qx)(c+d\,x)}$$

5. La (p,q)-derivata

Tale derivata è definita come:

$$D_{p,q} f(x)=\frac{f(px)-f(qx)}{(p-q)x}$$

Si veda il lavoro di P. N. Sadjang.

6. La q-derivata dei binomi

I polinomi binomiali ci servono per arrivare alla q-formula di Taylor.
La formula ordinaria è:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Cerchiamo dei polinomi $P_n(x)$ da usare invece dei polinomi $P_n=(x-a)^n$.
La proprietà richiesta è che si abbia $D_q P_n(x)=P_{n-1}(x)$, come nel caso ordinario si ha $D P_n(x)=P_{n-1}(x)$.
Iniziamo con $a=0$. Sia $P_n(x)=x^n/[n]!$.

$$D_q P_n(x)=\frac{D_q x^n}{[n]!}=\frac{[n]x^{n-1}}{[n]!}=\frac{x^{n-1}}{[n-1]!}=P_{n-1}(x)$$

Supponiamo ora di considerare i polinomi nel caso $a\neq 0$. Partiamo da $P_o(1)=1$. Sia $P_1(x)$ tale che $D_q P_1(x)=1$ e $P_1(a)=0$. Allora $P_1(x)=x-a$.
Cerchiamo $P_2(x)$, con $D_q P_2(x)=P_1(x)$, $P_2(a)=0$. Poniamo:

$$P_2(x)=\frac{x^2}{[2]}-a x-\frac{a^2}{[2]}+a^2$$

$$D_q P_2(x)=\left\{\frac{q^2 x^2}{[2]}-a q x-\frac{a^2}{[2]}+a^2-\frac{x^2}{[2]}+a x+\frac{a^2}{[2]}-a^2\right\}\frac{1}{x(q-1)} =$$

$$\left\{\frac{x^2(q^2-1)}{[2]}-a x(q-1)\right\}\frac{1}{x(q-1)}=\frac{x(q+1)}{[2]}-a=\frac{x(q+1)(q-1)}{(q^2-1)}-a=x-a$$

Abbiamo quindi i seguenti polinomi:

$$P_2(x)=\frac{(x-a)(x-q\,a)}{[2]!} \quad , \quad P_2(x)=\frac{(x-a)(x-q\,a)(x-q^2 a)}{[3]!} \quad , \dots ,$$

$$P_n(x)=\frac{(x-a)(x-q\,a)(x-q^2 a)\dots(x-q^{n-1}a)}{[n]!}=(x-a)_q^n$$

Questi sono i polinomi che diventano $P_n(x)=x^n/[n]!$ quando $a=0$.

L'analogo di $(x-a)^n$ sono quindi i polinomi $(x-a)_q^n$.

Si ha inoltre che: $D_q(x-a)_q^n=[n](x-a)_q^{n-1}$ (*), come si può dimostrare per induzione e con la regola della derivazione del prodotto di funzioni.

Dalla definizione: $(x-a)_q^{k+1}=(x-a)_q^k(x-q^k a)$. Derivo con la regola vista prima:

$$D_q(x-a)_q^{k+1}=(x-a)_q^k D_q(x-q^k a)+(qx-q^k a)D_q(x-a)_q^k =$$
$$(x-a)_q^k+q(x-q^{k-1}a)D_q(x-a)_q^k$$

Usando la regola (*):

$$(x-a)_q^k+q(x-q^{k-1}a)[k](x-a)_q^{k-1} =$$
$$(1+q[k])(x-a)_q^k=[k+1](x-a)_q^k$$

Si noti che: $1+q[k]=1+q\frac{q^k-1}{q-1}=\frac{q^{k+1}-1}{q-1}=[k+1]$.

7. Proprietà dei polinomi

Abbiamo quindi che $D_q P_n=P_{n-1}$. Vediamo ora alcune altre proprietà.

Consideriamo $(x-a)_q^{m+n}$ e vediamo quanto vale. In generale abbiamo che $(x-a)_q^{m+n}\neq(x-a)_q^m\,(x-a)_q^n$. Vale invece:

$$(x-a)_q^{m+n}=(x-a)(x-qa)\dots(x-q^{m-1}a)(x-q^m a)(x-q^{m+1}a)\dots(x-q^{m+n-1}a) =$$

$$(x-a)_q^m \ (x-q^m a)(x-q^{m+1}a)\dots(x-q^{m+n-1}a)=(x-a)_q^m \ (x-q^m a)_q^n$$

$$(x-a)_q^{m+n}=(x-a)_q^m \ (x-q^m a)_q^n$$

Esempio: $(x-a)_q^5=(x-a)_q^4 \ (x-q^4 a)_q^1=(x-a)_q^3 \ (x-q^3 a)_q^2$

Poniamo m come $-n$, abbiamo:

$$(x-a)_q^{-n+n}=1=(x-a)_q^{-n} \ (x-q^{-n} a)_q^n$$

Quindi:

$$(x-a)_q^{-n}=\frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \qquad (*)$$

Vediamo se questa espressione è appropriata per il calcolo. Partiamo nuovamente da $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m \ (x-q^m a)_q^n$ e cambiamo m in $-m'$. Si trova:

$$(x-a)_q^m \ (x-q^m a)_q^n = (x-a)_q^{-m'} \ (x-q^{-m'} a)_q^n = \frac{(x-q^{-m'}a)_q^n}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}}$$

Ad esempio, se $m'=3$ ed $n=3$, il risultato è 1.

Sia $m=-m'<0$ e $n=-n'<0$. Calcoliamo $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m \ (x-q^m a)_q^n$:

$$(x-a)_q^m \ (x-q^m a)_q^n = (x-a)_q^{-m'} \ (x-q^{-m'} a)_q^{-n'} =$$

$$\frac{1}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'} \ (x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}} = \frac{1}{(x-a^{-n'-m'}a)_q^{n'} \ (x-q^{n'}(q^{-n'-m'}a))_q^{m'}} =$$

$$\frac{1}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'+m'}} = (x-a)_q^{-m'-n'} = (x-a)_q^{m+n}$$

La (*) è adeguata al calcolo.

8. Derivate da ricordare

Si possono verificare le seguenti derivate importanti per i calcoli successivi.

Siano $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, t \in \mathbb{C}$.

$$D_q (x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1} \quad ; \quad D_q (a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}$$

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n](x-q^n a)_q^{-n-1} \quad ; \quad D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}$$

$$D_q (ax+b)_q^n = a[n](ax+b)_q^{n-1} \quad ; \quad D_q (a+bx)_q^n = b[n](a+bqx)_q^{n-1}$$

$$D_q (1+bx)_q^t = b[t](1+bqx)_q^{t-1}$$

9. La formula di q-Taylor

L'analogo q della formula di Taylor è:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

Esercizio 12. Scrivere la q-Taylor per la funzione $f(x) = x^n$, $c=1$, dove n è un intero positivo.

$$(D_q^j f)(x) = [n][n-1]...[n-j+1] x^{n-j}$$

$$(D_q^j f)(1) = [n][n-1]...[n-j+1]$$

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]...[n-j+1]}{[j]!}(x-1)_q^j = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j$$

dove: $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]...[n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!}$.

Esercizio 13. Sia n non negativo ed a un numero. Si espanda $f(x)=(x+a)_q^n$ attorno a $x=0$ con la formula di q-Taylor.

$$(x+a)_q^n = (x+a)(x+qa)...(x+q^{n-1}a)$$

$$(D_q^j f)(x) = [n][n-1]...[n-j+1](x+a)_q^{n-j}$$

Se $x=0$, $(a)_q^n=(a)(qa)...(q^{n-1}a)=q^{n(n-1)/2}a^n$.

$$(D_q^j f)(0) = [n][n-1]...[n-j+1]q^{(n-j)(n-j-1)/2}a^{n-j}$$

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{(n-j)(n-j-1)/2} a^{n-j} x^j$$

Dalla definizione: $\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$.

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j}$$

Questa è detta Formula di Gauss binomiale.

10. Coefficienti q-binomiali

Abbiamo già visto che vale la relazione $\begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$, valida anche per il binomiale ordinario $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

Per il calcolo ordinario vale la regola di Pascal:

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \quad \text{con} \quad 1 \leq j \leq n-1$$

Questa relazione viene sostituita da due regole:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

sempre con $1 \leq j \leq n-1$.
Si parte da:

$$[n]=1+q+\ldots+q^{n-1}=(1+q+\ldots+q^{j-1})+q^j(1+q+\ldots+q^{n-j-1})=[j]+q^j[n-j]$$

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \frac{[n-1]![n]}{[j]![n-j]!} = \frac{[n-1]!([j]+q^j[n-j])}{[j]![n-j]!} =$$

$$\frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j]!} + q^j \frac{[n-j]!}{[j]![n-j-1]!} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}$$

Inoltre:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-j-1 \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}$$

Per i coefficienti binomiali ordinari, esiste l'identità:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$$

L'analoga q-formula è:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k} q^{(k-j)(m-j)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}$$

11. Formula di Heine

Prendiamo la funzione: $f(x)=1/(1-x)_q^n$.

$$D_q f(x) = D_q \frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}} \quad ; \quad D_q^j f(x) = \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[j]!} x^j$$

Questa è la formula binomiale di Heine ed è il q-analogo dello sviluppo di Taylor della funzione $1/(1-x)^n$. La seguente formula è invece quella di Gauss (pag.13), con x ed a rimpiazzato da 1 e x rispettivamente:

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j$$

12. Due identità di Eulero

Supponiamo $|q|<1$.

$$\lim_{n\to\infty} [n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

Applicando questi limiti alle formule di Gauss e di Heine, possiamo ottenere:

$$(*) \quad (1+x)_q^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

$$(**) \quad \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

Queste due identità legano un prodotto infinito (a sinistra) ad una sommatoria infinita (a destra). Le due identità sono state scoperte da Eulero. Diciamo (*) la prima e (**) la seconda identità di Eulero.

13. I due q-esponenziali

La funzione esponenziale classica è data da:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

L'analogo q è dato da:

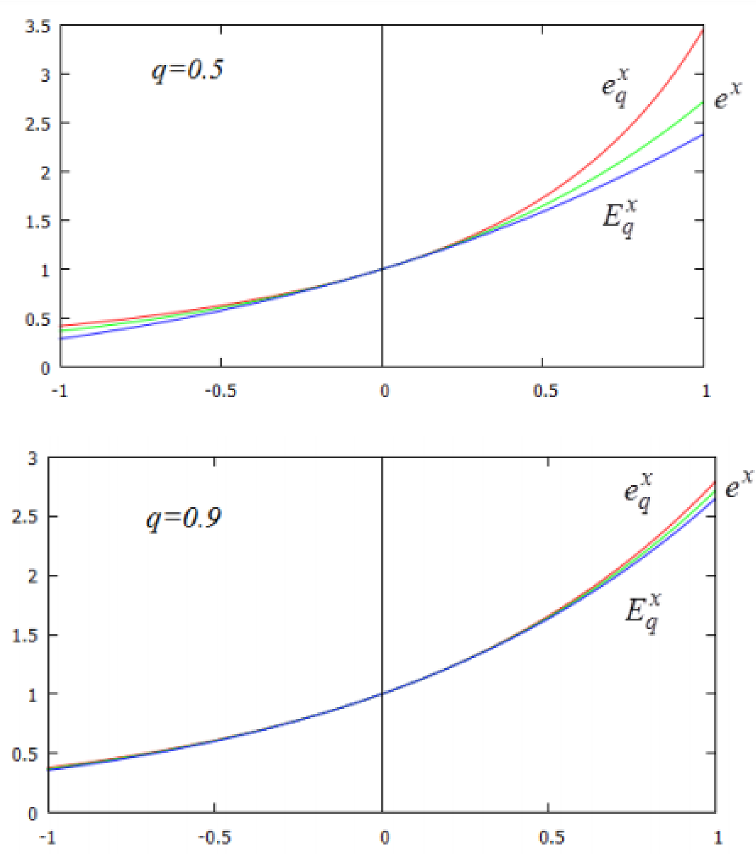
$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}$$

Usando le identità di Eulero, si trova che:

$$e_q^{x/(1-q)} = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} \quad ; \quad e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}$$

Possiamo usare anche un altro analogo, definito nel modo seguente.

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty}$$



Andamento di e_q^x , e^x , E_q^x per diversi valori di q.

14. Proprietà dei due q-esponenziali

La funzione esponenziale ordinaria rimane invariata sotto differenziazione. Lo stesso vale per e_q^x . Infatti:

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j] x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e_q^x$$

Passiamo ad E_q^x .

$$D_q E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{[j] x^{j-1}}{[j]!} =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-2)/2} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{q^j x^j}{[j]!} = E_q^{qx}$$

Quindi: $D_q e_q^x = e_q^x$, $D_q E_q^x = E_q^{qx}$.

Quanto vale $e_q^x e_q^y$? In generale $e_q^x e_q^y \neq e_q^{x+y}$. Altre proprietà sono:

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \quad ; \quad e_{1/q}^x = E_q^x \ .$$

15. Le funzioni q-trigonometriche

Usando i q-esponenziali si ottengono le funzioni q-trigonometriche.

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \qquad \operatorname{Sin}_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{Cos}_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}$$

Abbiamo che $e_{1/q}^x = E_q^x$, quindi $\operatorname{Sin}_q x = \sin_{1/q} x$, $\operatorname{Cos}_q x = \cos_{1/q} x$.

$$\cos_q x \ \operatorname{Cos}_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4}$$

$$\sin_q x \ \operatorname{Sin}_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4}$$

$$\cos_q x \ \mathrm{Cos}_q x \ + \ \sin_q x \ \mathrm{Sin}_q x = 1$$

Le q-derivate sono:

$$D_q \sin_q x = \cos_q x \qquad D_q \mathrm{Sin}_q x = \mathrm{Cos}_q qx$$

$$D_q \cos_q x = -\sin_q x \qquad D_q \mathrm{Cos}_q x = -\mathrm{Sin}_q qx$$

16. Il triplo prodotto di Jacobi

Sia $|q|<1$, si ha che:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{2n-1} z)(1+q^{2n-1} z^{-1})$$

Questo è il triplo prodotto di Jacobi. La verifica come proposta da G.E. Andrews parte da una delle due formule di Eulero, scritta nella forma seguente:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+q^n x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2 x^j}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

17. Una formula di Ramanujan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n} x^n = \frac{(1-q)_q^{\infty} \left(1-\frac{b}{a}\right)_q^{\infty} (1-ax)_q^{\infty} \left(1-\frac{q}{ax}\right)_q^{\infty}}{(1-b)_q^{\infty} \left(1-\frac{q}{a}\right)_q^{\infty} (1-x)_q^{\infty} \left(1-\frac{b}{ax}\right)_q^{\infty}}$$

18. La formula del prodotto di Eulero

Dalla formula di Jacobi, si ottiene la seguente formula, detta del prodotto di Eulero:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-1})(1-q^{3n-2})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

19. Il simbolo q-Pochhammer

Questo simbolo è l'analogo del simbolo di Pochhammer del calcolo ordinario che rappreenta il fattoriale decrescente:

$$(x)_n=x(x-1)(x-2)...(x-n+1) = \prod_{k=1}^{n}(x-k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

Esiste anche il fattoriale crescente:

$$x^{(n)}=x(x+1)(x+2)...(x+n-1) = \prod_{k=1}^{n}(x+k-1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$$

Il q-fattoriale decrescente è dato da:

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k) = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^{n-1})$$

dove $(a;q)_0=1$.

A differenza del simbolo di Pochhammer ordinario, l'analogo q può essere esteso all'infinito.

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$$

Un caso speciale è:

$$\Phi(q)=(q;q)_\infty = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)$$

che è la funzione di Eulero vista prima.

Possiamo scrivere il q-fattoriale con il q-Pochhammer:

$$[n]!=\prod_{k=1}^{n}[k]=[1][2]...[n-1][n] = \frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}...\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}$$

20. La q-antiderivata

La funzione $F(x)$ è la q-antiderivata di $f(x)$ se $D_q F(x)=f(x)$. La q-antiderivata è definita da:

$$\int f(x)d_q x$$

Se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, abbiamo che:

$$\int f(x)d_q x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{[n+1]}+C$$

21. L'integrale di Jackson

Siano $\hat{x}$ e $\hat{M}_q$ degli operatori tali che:

$$\hat{x}[f(x)]=x f(x) \quad ; \quad \hat{M}_q[f(x)]=f(qx)$$

Abbiamo:

$$\hat{M}_q\hat{x}[f(x)]=\hat{M}_q[x f(x)]=q x f(qx)=q\hat{x}\hat{M}_q[f(x)]$$

Quindi: $\hat{M}_q\hat{x}=q\hat{x}\hat{M}_q$.

Usiamo $\hat{M}_q$ nella definizione di q-derivata.

$$\frac{1}{(q-1)x}(\hat{M}_q-1)F(x)=\frac{F(qx)-F(x)}{(q-1)x}=f(x)$$

Scriviamo formalmente l'antiderivata come:

$$F(x)=\frac{1}{1-\hat{M}_q}((1-q)x f(x))=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\hat{M}_q^j(x f(x))$$

dove si è usato lo sviluppo della serie geometrica.
Si ha quindi:

$$F(x)=\int f(x)d_q x=(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)$$

Questa serie è detta integrale di Jackson di $f(x)$ [Kac & Cheung].

Altra formula utile è la seguente:

$$\int f(x)d_q g(x)=\sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x)\left(g(q^j x)-g(q^{j+1}x)\right)$$

Esercizio 14. Calcolare l'integrale di Jackson di x .

$$F(x)=\int x\,d_q x=(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j q^j x=(1-q)x^2\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}$$

Ricordiamo che: $\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}=\frac{1}{1-q^2}$. Quindi:

$$F(x)=\int x\,d_q x=(1-q)x^2\frac{1}{1-q^2}=\frac{x^2}{1+q}=\frac{x^2}{[2]}$$

Esercizio 15. Calcolare l'integrale di Jackson di $(x-a)_q^2$.

Uso l'espressione: $\int f(x)d_q g(x)=\sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x)\left(g(q^j x)-g(q^{j+1}x)\right)$.

$$\int (x-a)_q^2 d_q x = \sum_{j=0}^{\infty} (q^j x - a)_q^2 (q^j x - q^{j+1} x) + C \quad =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (q^j x - a)(q^j x - qa)(q^j x - q^{j+1} x) + C \quad =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[q^{3j} x^3 - a q^{2j} x^2 - q^{2j} q a x^2 + a^2 q q^j x - q q^{3j} x^3 + a q q^{2j} x^2 + q^2 q^{2j} a x^2 - q^2 q^j a^2 x \right] + C$$

Utilizzando il valore delle somme infinite (si veda dopo), si ha:

$$\int (x-a)_q^2 d_q x \; = \; \frac{x^3}{[3]} + x^2 a \frac{q^2-1}{1-q^2} + x a^2 q + C \; = \; \frac{x^3}{[3]} - x^2 a + x a^2 q + C$$

Si scelga $C = -q^3 a^3/[3]$. Inoltre: $(x-a)_q^3 = x^3 - [3] a x^2 + [3] q a^2 x - q^3 a^3$.

Si ha quindi:

$$\int (x-a)_q^2 d_q x \; = \; \frac{(x-a)_q^3}{[3]} \quad .$$

Esercizio 16. Calcolare il q-integrale di $\sqrt{2px}$.

$$\int \sqrt{2px} \;\; d_q x \; = \; (1-q) x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \sqrt{2 p q^j x}$$

$$(1-q) x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \sqrt{2 p q^j x} \; = \; (1-q) x \sqrt{2px} \sum_{j=0}^{\infty} q^{3j/2} \; = \; (1-q) x \sqrt{2px} \; \frac{1}{1-q^{3/2}} \quad =$$

$$(1-q) x \sqrt{2px} \; \frac{1}{1-q^{3/2}} \, \frac{1+q^{3/2}}{1+q^{3/2}} \; = \; (1-q) x \sqrt{2px} \; \frac{1+q^{3/2}}{1-q^3}$$

$$\int \sqrt{2px} \;\; d_q x \; = \; x \sqrt{2px} \; \frac{(1+q^{3/2})}{q^2+q+1}$$

Al limite $q \to 1$, si ottiene l'integrale ordinario:

$$\int \sqrt{2px}\;dx = \frac{2}{3} x \sqrt{2px}$$

Esercizio 17. Calcolare il q-integrale di $1/\sqrt[n]{x}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{1}{\sqrt[n]{q^j x}} = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j-j/n}}{\sqrt[n]{x}} =$$

$$(1-q)x^{1-1/n} \sum_{j=0}^{\infty} q^{j-j/n} = (1-q)x^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{1-q^{\frac{n-1}{n}}} = (1-q)x^{\zeta} \frac{1}{1-q^{\zeta}}$$

dove si è posto per comodità di scrittura $\zeta = \frac{n-1}{n}$.

$$(1-q)x^{\zeta} \frac{1}{1-q^{\zeta}} = (1-q)x^{\zeta} \frac{1+q^{\zeta}}{1-q^{2\zeta}} = x^{\zeta} \frac{1+q^{\zeta}}{q^{2\zeta-1}+\ldots+1}$$

Al limite per $q \to 1$, si ottiene il risultato dell'integrale ordinario:

$$x^{\zeta} \frac{2}{2\zeta} = \frac{n}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}}$$

Esercizio 18. Calcolare il q-integrale di $\sin x$.

$$\int \sin x\;d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \sin q^j x =$$

$$(1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \left[q^j x - \frac{q^{3j}x^3}{3!} + \frac{q^{5j}x^5}{5!} - \ldots \right] =$$

$$(1-q)\,x\left[\frac{x}{1-q^2}-\frac{x^3}{3!(1-q^4)}+\frac{x^5}{5!(1-q^6)}-\ldots\right] = \frac{x^2}{[2]}-\frac{x^4}{3![4]}+\frac{x^6}{5![6]}-\ldots$$

Al limite per $q\rightarrow 1$, l'integrale diventa pari a $1-\cos x$, in accordo col fatto che l'integrale di Jackson è dato a meno di una costante.

22. Il caso del logaritmo

Consideriamo la q-derivata del logaritmo.

$$D_q \ln x=\frac{\ln(qx)-\ln(x)}{(q-1)x} = \frac{\ln q}{(q-1)\,x}$$

Deve quindi essere:

$$\int\frac{1}{x}d_q x=\frac{q-1}{\ln q}\ln x$$

L'espressione di Jackson però non funziona:

$$\int\frac{1}{x}d_q x=(1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty}q^j\frac{1}{q^j x} = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}1 \quad .$$

23. Il q-integrale in WolframMathWorld

Il q-integrale lo troviamo definito come (Andrews)

$$\int_0^1 f(x)\,d_q x=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}q^j f(q^j)$$

Esercizio 19. Calcolare il q-integrale di x .

Lo abbiamo già visto prima.

$$\int_0^1 x\,d_q x=(1-q)\frac{1}{1-q^2}=\frac{1}{1+q}$$

Esercizio 20. Calcolare il q-integrale di x^2 .

$$\int_0^1 x^2 d_q x = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j q^{2j} = (1-q)\frac{1}{1-q^3} = \frac{1}{1+q+q^2}$$

Esercizio 21. Calcolare il q-integrale di x^n .

$$\int_0^1 x^n d_q x = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j q^{nj} = \frac{1-q}{1-q^{n+1}}$$

Esercizio 22. Calcolare il q-integrale di $\ln x$.

$$\int_0^1 \ln x \, d_q x = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \ln q^j = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \, j \ln q = (1-q)\ln q \; \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$\int_0^1 \ln x \, d_q x = \frac{q \ln q}{(1-q)}$$

Per questi esercizi, si sono usate alcune delle seguenti formule:

Somma infinita (per $|x| < 1$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i^2 x^i = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i^3 x^i = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} i^4 x^i = \frac{x(1+x)(1+10x+x^2)}{(1-x)^5}$$

Altre somme a https://it.wikipedia.org/wiki/Lista_delle_serie_matematiche

24. La q-Gamma e la q-Beta

Le funzioni Gamma e Beta di Eulero sono definite nella maniera seguente:

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx \qquad \text{per} \qquad t>0$$

$$B(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}dx \qquad \text{per} \qquad s,t>0$$

Alcune proprietà sono:

$$\Gamma(t+1)=t\,\Gamma(t) \quad , \qquad \Gamma(n)=(n-1)! \quad , \qquad B(t,s)=\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$$

Per $t>0$, si definisce la q-Gamma come:

$$\Gamma_q(t)=\int_0^\infty x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx$$

Per il q-integrale, vale la formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f(x)d_qg(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(qx)d_qf(x)$$

Applico alla q-Gamma:

$$\Gamma_q(t)=\int_0^\infty x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx$$

da cui: $\Gamma_q(t+1)=[t]\Gamma_q(t)$ dove $[t]$ è il q-numero di t .

Per $t,s>0$, si definisce la q-Beta come:

$$\mathrm{B}_q(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x$$

Vale l'analoga:

$$\mathrm{B}_q(t,s)=\frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}$$

25. Una funzione q-costante

Sia la funzione q-Gamma e q-Beta si basano su una funzione particolare (De Sole, Kac):

$$\mathrm{K}(x,t)=\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t}$$

Questa funzione è q-costante:

$$\mathrm{K}(qx,t)=\mathrm{K}(x,t)$$

Se t è un intero, la funzione è indipendente da x ed è uguale a $q^{t(t-1)/2}$.
Per $t\in(0,1)$, allora si ha che:

$$\lim_{q\to 0}\mathrm{K}(x,t)=x^t+x^{t-1}$$

References

[1] Abreu, Luis Daniel (2006). Functions q-Orthogonal with Respect to Their Own Zeros. Proceedings of the American Mathematical Society. 134 (9): 2695–2702. doi:10.1090/S0002-9939-06-08285-2. JSTOR 4098119.

[2] Andrews, G. E. (1986). q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986.

[3] Atanassov, K. T. (2007) On some Pascal's like triangles. Part 1, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 13(1), 31–36.

[4] Atanassov, K. T. (2007) On some Pascal's like triangles. Part 2, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 13(2), 10–14.

[5] De Sole, A., & Victor G. Kac, V. G. (2005). On integral representations of q-gamma and q-beta functions. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 16 (2005), n.1, p. 11–29. Accademia Nazionale dei Lincei

[6] Exton, H. (1983). q-Hypergeometric Functions and Applications. New York: Halstead Press. ISBN 0-85312-491-4.

[7] Jackson, F. H. (1908). On q-functions and a certain difference operator. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 46 (2): 253–281. doi:10.1017/S0080456800002751.

[8] Jackson, F. H. (1910). q-Definite Integrals. Quart. J. Math. 41, 163, 1910.

[9] Jackson, F. H. (1917). The q-Integral Analogous to Borel's Integral. Mess. Math. 47, 57-64, 1917.

[10] Kac, Victor; Cheung, Pokman (2002). Quantum calculus. Universitext. Springer-Verlag. ISBN 0-387-95341-8.

[11] Mansour, Toufik; Schork, Matthias (2015). On some q-Pascal's like triangles. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, ISSN 1310–5132 Vol. 21, 2015, No. 4, 64–69.

[12] Sadjang, PN (2018). On the Fundamental Theorem of (*p,q*)-Calculus and Some (*p,q*)-Taylor Formulas. Results in Mathematics, 73, Article number 39. DOI 10.1007/s00025-018-0783-z

[13] Sparavigna, Amelia Carolina (2016). Graphs of q-exponentials and q-trigonometric functions. 2016. ⟨hal-01377262⟩

[14] Sparavigna, Amelia Carolina. (2018, May 23). The q-integers and the Mersenne numbers. Zenodo. http://doi.org/10.5281/zenodo.1251833