POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Metrica e Curvature di Gauss e Riemann

Original
Metrica e Curvature di Gauss e Riemann / Sparavigna, A. C.. - ELETTRONICO. - (2021). [10.5281/zenodo.4724602]

Availability:
This version is available at: 11583/2897732 since: 2021-04-29T17:15:48Z

Publisher:

Published
DOI:10.5281/zenodo.4724602

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

17 December 2025

Metrica e Curvature di Gauss e Riemann

Amelia Carolina Sparavigna
Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino, Torino

Si richiamano alcuni concetti su vettori e tensori. Si discute la metrica ed infine la curvatura di Gauss ed il tensore di Riemann. Esempi vari sono proposti.

Torino, 28 Aprile 2021, DOI: 10.5281/zenodo.4724602

Nella Fisica generale, un vettore è definito come combinazione lineare, $\boldsymbol{V}=V^i\boldsymbol{e}_i$, dove $\boldsymbol{e}_i$ indica un vettore unitario, in genere corrispondente all'asse *i-esimo* di un riferimento ortogonale cartesiano. Più avanti si specificherà sulla posizione degli indici a pedice ed apice.
L'utilizzo dei vettori inizia con la cinematica e prosegue con la meccanica Newtoniana, con riferimento cartesiano e un vettore posizione dato da $\boldsymbol{r}=r^i\boldsymbol{e}_i$. Ponendo fissi i vettori unitari, si calcolano le derivate: $d^n\boldsymbol{r}/dt^n=d^nr^i/dt^n\boldsymbol{e}_i$. Se la base cambia col tempo, l'espressione si ottiene calcolando anche le derivate della base. Ad esempio: $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dr^i}{dt}\boldsymbol{e}_i+r^i\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}$.

Nella fisica Newtoniana, in genere, si usa indicare col pedice le componenti di vettori e tensori (ora si è però usato l'apice). Esistono tensori covarianti e controvarianti e per questo motivo apice e pedice hanno diverso significato.

Tensore del primo ordine covariante e controvariante

Si prenda una funzione $y=f(x^1,x^2,...,x^i,...,x^n)$ di n variabili. *Si scrivano ora gli indici relativi alle coordinate ad apice.* Il differenziale totale si trova calcolando la variazione incrementale dy di y risultante dall'incremento di $dx^1,dx^2,...,dx^i,...,dx^n$ delle variabili $x^1,x^2,...,x^i,...,x^n$:

$$dy=\frac{\partial y}{\partial x^i}dx^i$$

dove $\partial y/\partial x^i$ sono le derivate parziali di y rispetto a x^i (sono indici, non esponenti). La quantità scalare dy è il differenziale di y.

Definiamo il vettore $\boldsymbol{g}$ con componenti $g_i=\frac{\partial y}{\partial x^i}$. In tal modo si ha:

$$dy=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{d}=g_i dx^i \quad .$$

Il gradiente $\boldsymbol{g} = \nabla y$ è un esempio di tensore *covariante*, mentre il differenziale della posizione $\boldsymbol{d}$ è un esempio di tensore *controvariante.* La differenza tra i due tensori è nel come si trasformano passando da un riferimento ad un altro.

Supponiamo di avere un altro riferimento $X^1,X^2,...,X^i,...,X^n$. Abbiamo delle funzioni $X^i=F^i(x^1,x^2,...,x^i,...,x^n)$, e quindi:

$$dX^i=\frac{\partial X^i}{\partial x^j}dx^j$$

Sia $\boldsymbol{D}$ l'analogo di $\boldsymbol{d}$. $\boldsymbol{D}=grad\, X^i\cdot\boldsymbol{d}$. Questa formula rappresenta la regola di trasformazione tipica di un tensore controvariante del primo ordine.
Invece il vettore gradiente $\boldsymbol{g}=\nabla y$ è un tensore covariante. Per trovare la sua trasformazione, supponiamo di poter scrivere le funzioni $x^i=f^i(X^1,X^2,...,X^i,...,X^n)$ con i = 1, 2, .., n, di modo che:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} dX^j$$

Quindi: $dy = \frac{\partial y}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial X^j} dX^j$. Sia $\boldsymbol{G}$ il gradiente di y rispetto alle nuove coordinate. Si ha, poiché $g_i = \frac{\partial y}{\partial x^i}$, che:

$$G_i = \frac{\partial x^j}{\partial X^i} g_j \quad .$$

Questa equazione è il prototipo della regola di trasformazione di un tensore covariante del primo ordine. Confrontando con la regola controvariante, vediamo che si ha combinazione lineare delle derivate parziali. Nel caso controvariante, i coefficienti sono le derivate parziali delle nuove coordinate rispetto le vecchie, Nel caso covariante, sono le derivate delle vecchie rispetto le nuove.

Covarianza e controvarianza

La covarianza e la controvarianza si riferiscono quindi al modo in cui la rappresentazione di una data entità, che sia geometrica o fisica, varia quando si effettua un cambiamento di coordinate, come ad esempio una rotazione o una dilatazione dello spazio. Nel caso di una rotazione di una base ortogonale la differenza tra vettori controvarianti e covarianti non si percepisce.
Affinché un vettore sia indipendente dalla base (sistema di riferimento) in cui viene ambientato è necessario che le sue componenti subiscano una trasformazione "contraria" a quella che subiscono i vettori di base $\boldsymbol{e}_i$ quando si cambia la base. Un vettore è per questo motivo detto vettore controvariante, e le sue componenti controvariano al fine di mantenerne l'invarianza rispetto al sistema di riferimento. Esempi di vettori controvarianti sono la posizione di un oggetto relativamente ad un osservatore e le sue derivate rispetto al tempo, come la velocità e l'accelerazione.
Abbiamo anche però i vettori duali, ovvero appartenenti allo spazio duale dello spazio di partenza (sia V uno spazio vettoriale, il suo spazio duale indicato con

V* è formato da funzionali lineari). Affinché siano indipendenti dalla base in cui vengono scritti è necessario che le componenti subiscano la stessa trasformazione dei vettori (funzioni lineari) di base, quando si cambia la base. Un vettore duale è perciò detto vettore covariante, e le sue componenti covariano al fine di mantenerne l'invarianza rispetto al sistema di riferimento. Esempi di vettori covarianti si ottengono solitamente applicando il gradiente ad una funzione.

Proiezione

Si definisce una base duale con la relazione:

$$\boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{e}_i)=\delta_{ij}$$

che dice che l'applicazione di $\boldsymbol{e}^j$ su $\boldsymbol{e}_i$ produce la delta di Kronecker.
Ogni vettore **v** può essere espresso in modo univoco come combinazione lineare degli elementi della base:

$$\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i$$

Il risultato dell'applicazione di $\boldsymbol{e}^i$ su **v** è: $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}^i(v^j\boldsymbol{e}_j)=v^j\delta_{ij}=v_i$.

Tale applicazione è chiamata anche proiettore: può infatti essere interpretata come una proiezione sulla retta generata da $\boldsymbol{e}_i$.

La metrica

Il teorema di Pitagora dice che il quadrato della distanza differenziale *ds* nello spazio-tempo di componenti dt, dx, dy, dz è una funzione del tipo:

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j \quad , \text{ con } \quad g_{00}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=1 \quad \text{e gli altri} \quad g_{ij}=0 \quad .$$

Questa è detta la metrica di Minkowski. Si noti che la formula esprime qualcosa di relativo alle relazioni metriche dello spazio, ma lo fa in termini dello specifico riferimento usato. Se cambiamo le coordinate, da Cartesiane a polari per esempio, i coefficienti $g_{\mu\nu}$ saranno differenti. Spesso è però più semplice convertire $g_{\mu\nu}$ da un sistema di coordinate ad un altro. Sia $g_{\mu\nu}$ scritto per le coordinate x^α, e sia un altro sistema di coordinate y^α, definito in termini di x^α dalle funzioni:

$$y^i = f_i(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \text{, con } i = 0,1,2,3$$

Sia lo Jacobiano della trasformazione non nullo. Abbiamo:

$$x^i = F_i(y^0, y^1, y^2, y^3) \quad \text{, con } i = 0,1,2,3$$

Valutiamo i dx delle coordinate. Per esempio dx^0 è $dx^0 = \frac{\partial x^0}{\partial y^i} dy^i$ e simili per dx^1, dx^2, e dx^3. Il prodotto di due qualsiasi dei differenziali dx^μ e dx^ν diventa:

$$dx^\mu dx^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

Sostituendo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

I primi tre fattori sulla destra sono i coefficienti di $dy^\alpha dy^\beta$ nella metrica data rispetto alle coordinate y. La metrica si trasforma passando dal sistema di coordinate x a quello y come:

$$(g_{\alpha\beta})_y = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} (g_{\mu\nu})_x$$ Tensori che si trasformano così sono covarianti.

Invece:

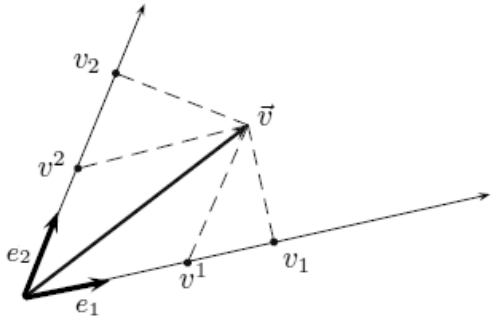
$$(A^{\alpha\beta})_y = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} (A^{\mu\nu})_x$$ è la trasformazione di tensori controvarianti.

Rappresentazione

È possibile dare un'utile rappresentazione "visuale" delle componenti di un vettore. Consideriamo un sistema di riferimento non cartesiano, bidimensionale per semplicità, un vettore **v** in uno spazio bidimensionale e siano $\boldsymbol{e}_i$ i versori degli assi. Le componenti covarianti e controvarianti sono definite come:

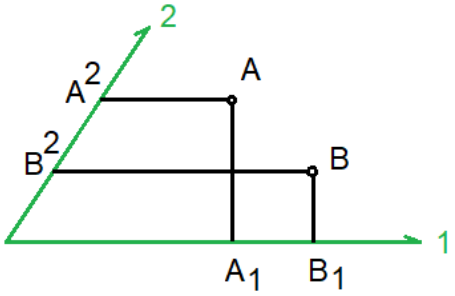
$$\boldsymbol{v} = v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 \quad \textit{Componenti controvarianti } v^i$$
$$v_1 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_1 \ , \ v_2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_2 \quad \textit{Componenti covarianti } v_i$$

Questa rappresentazione permette una semplice interpretazione geometrica: le componenti controvarianti rappresentano le componenti del vettore **v** nella base $\boldsymbol{e}_i$, mentre le componenti covarianti rappresentano la proiezione del vettore **v** sui versori $\boldsymbol{e}_i$ della base, come si vede dalla figura seguente. Nel caso di un sistema di riferimento ortogonale le due rappresentazioni coincidono.



Si può definire un vettore covariante, con componenti v_i , ed un vettore controvariante, di componenti v^i .

Il prodotto scalare tra due vettori è $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_i B^j$ ed è invariante.



Se il riferimento è ortogonale, non è rilevante se l'indice è a pedice o ad apice.

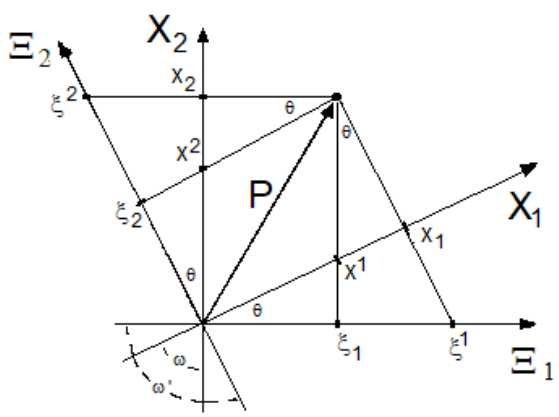
Ricapitolando, ogni vettore $\boldsymbol{v}$ di V può essere espresso in modo univoco come combinazione lineare degli elementi della base: $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i$. Il risultato dell'applicazione di $\boldsymbol{e}^i$ su **v** è il seguente:

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{e}^i(v^k\boldsymbol{e}_k)=v^k\delta_{ik}=v^i \quad .$$

Il versore $\boldsymbol{e}^i$ funziona come una applicazione che estrae dal vettore la i-esima componente rispetto alle coordinate della base. Tale applicazione è un proiettore, interpretata come una proiezione sulla retta generata da $\boldsymbol{e}_i$.

Esempio

Questo esempio è ispirato ad uno proposto in "Reflections on Relativity", di Kevin Brown, 2011. Per comprendere meglio come le rappresentazioni dei vettori in diversi sistemi di coordinate sono legate le une alle altre, si prenda il vettore **P** nel piano.



Nel sistema di coordinate X, **P** ha componenti controvarianti (x^1, x^2) e componenti covarianti (x_1, x_2). Prendiamo un altro riferimento Ξ, dove Ξ_1 è perpendicolare a X_2, e Ξ_2 è perpendicolare a X_1. Le componenti controvarianti di **P** sono (ξ^1, ξ^2) e le covarianti (ξ_1, ξ_2). Con ω si indica l'angolo positivo tra

X_1, X_2, e con ω' quello tra Ξ_1 , Ξ_2. Valgono le relazioni ω + ω' = π e θ = (ω'−ω)/2. Inoltre:

$$x_1=\xi^1\cos\theta \quad , \quad x_2=\xi^2\cos\theta \quad ; \quad \xi_1=x^1\cos\theta \quad , \quad \xi_2=x^2\cos\theta$$

Le relazioni mostrano che le componenti covarianti rispetto al sistema X sono le stesse, a parte un fattore di scala, delle componenti controvarianti rispetto al sistema Ξ, e vice versa. I sistemi sono detti duali l'uno rispetto all'altro.
La metrica è data da:

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

I coefficienti $g_{\mu\nu}$ sono le componenti del tensore metrico covariante. Questo tensore è simmetrico. Il tensore metrico covariante del sistema X è dato da:

$$(g_{uv})_X=\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{bmatrix}$$

Quello del sistema duale Ξ :

$$(g_{uv})_\Xi=\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega' \\ \cos\omega' & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante g è pari a $(\sin\omega)^2$, per cui $x_u=\xi^u\sqrt{g}$, $x^u=\xi_u/\sqrt{g}$.

L' *inverso* del tensore metrico si indica con la notazione $g^{\mu\nu}$. Per i sistemi X e Ξ, gli inversi sono:

$$(g^{uv})_X=\frac{1}{\sin^2\omega}\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad (g^{uv})_\Xi=\frac{1}{\sin^2\omega}\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{bmatrix}$$

Da tali espressioni: $ds^2=g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$.

Ne risulta che l'inverso del tensore metrico covariante è il tensore metrico controvariante. Si consideri ora un vettore $\boldsymbol{x}$ con le componenti controvarianti relative a X date da x^1, x^2, e usiamo il tensore metrico covariante:

$$dx_\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu$$

Si ha anche che:

$$dx^\nu = g^{\mu\nu}\, dx_\mu$$

Si può convertire tra le versioni controvarianti e covarianti del vettore, grazie al tensore metrico. Con operazioni di questo tipo si intende l'alzare o l'abbassare gli indici.
Notiamo che nel caso di metrica variabile, per estendersi a intervalli di lunghezza finita, si deve integrare lungo un dato cammino la forma differenziale $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

Si ricordi anche che le componenti controvarianti sono misurate parallele agli assi coordinati, le componenti covarianti sono misurate perpendicolarmente agli altri assi.

Curvatura

Il primo capitolo del testo di S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, 1972, discute la storia della geometria non euclidea, arrivando al concetto di "curvatura". Una osservazione che ivi si trova è da sottolineare.
"For both Euclidean and non-Euclidean geometry the "model" is provided by the theory of real numbers. Descartes' analytic geometry shows that if a point is identified with a pair of real numbers (x_1, x_2) and the distance between two points (x_1, x_2) and (X_1, X_2) identified as $\left[(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2\right]^{1/2}$, then all of Euclid's postulates can be proved as theorems about real numbers".
Ragionando sulle coordinate. Gauss assunse che, per porzioni sufficientemente piccole dello spazio, fosse possibile trovare localmente le coordinate Euclidee (ξ_1, ξ_2) affinché la distanza fosse:

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2$$

Se la superficie non è Euclidea, non si trova una regione finita descrivibile in modo euclideo.
Si immagini di avere delle coordinate (x_1, x_2) che coprono lo spazio considerato. La distanza tra due punti (x_1, x_2) e $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ è data da:

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + 2 g_{12} dx_1 dx_2 + g_{22} dx_2^2$$

dove:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)^2 \quad ,$$

$$g_{12} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right) \quad ,$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)^2 \quad .$$

Si arriva a tale espressione considerando $ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2$. Inoltre:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2) \quad , \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2) \quad ,$$

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 \quad , \quad d\xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2 \quad .$$

La forma di ds^2 è "the hallmark of a metric space".

Sia una sfera di raggio a in coordinate polari sferiche θ, ϕ . La metrica è:

$$g_{\theta\theta} = a^2 \ , \ g_{\phi\theta} = 0 \ , \ g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2\theta$$

La metrica dipende dalle proprietà metriche dello spazio, ma anche dalle coordinate. Se si descrive il piano nelle coordinate polari r, θ si ha:

$$g_{rr}=1 \ , \ g_{r\theta}=0 \ , \ g_{\theta\theta}=r^2$$

Non sembra euclidea ma lo è.
In generale, cambiare le coordinate da (x_1, x_2) a coordinate (x'_1, x'_2) significa cambiare la funzione metrica da g_{ij} a g'_{ij} .

Cerchiamo allora una funzione di g_{ij} che dipenda solo dalle proprietà dello spazio e non dalla scelta delle coordinate. Gauss ha trovato tale funzione ed è la curvatura gaussiana:

$$K(x_1, x_2)=\frac{A}{2g}-\frac{B g_{22}}{4g^2}+\frac{C g_{12}}{4g^2}-\frac{D g_{11}}{4g^2}$$

dove:

$$A=2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} \quad , \quad B=\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)-\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)^2$$

$$C=\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\right)-2\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)+\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right) \quad ,$$

$$D=\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}\right)-\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1}\right)^2 \quad , \quad g \equiv g_{11}g_{22}-g_{12}^2$$

Se applichiamo alla sfera: $K=\frac{1}{a^2}$. Se si applica al piano, la curvatura è nulla.

Metrica e curvatura del cilindro

Calcoliamo la curvatura del cilindro. Partiamo dalla sua metrica.

$$x = R\cos\phi \quad , \quad y = R\sin\phi \quad , \quad z = z$$

$$dx = -R\sin\phi\, d\phi \quad , \quad dy = R\cos\phi\, d\phi \quad , \quad dz = dz$$

$$ds^2 = R^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\, d\phi^2 + dz^2 = R^2 d\phi^2 + dz^2$$

$$ds^2 = g_{11} d\phi^2 + 2 g_{12} d\phi\, dz + g_{22} dz^2$$

La metrica è: $g_{11} = R^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 1$.

Si usi la formula della curvatura. La curvatura gaussiana è nulla.

Metrica e curvatura del cono

Esempio ispirato da una lezione di Arrigo Amadori[1]. Sia il cono con vertice nell'origine descritto nel seguente modo.

$$X:\ (u, v) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (kv\cos u, kv\sin u, v)$$

dove k è la tangente dell'angolo di apertura del cono, ed inoltre $0 < u < 2\pi$, $v > 0$. Si calcolino le derivate.

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = -kv\sin u \quad , \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial u} = kv\cos u \quad , \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = k\cos u \quad , \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = k\sin u \quad , \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial v} = 1$$

1 http://www.arrigoamadori.com/lezioni/Miscellanea/3/GeodeticheCono.html

Siano:

$$X=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix} \quad , \quad X_u=\begin{pmatrix}\partial\xi_1/\partial u\\ \partial\xi_2/\partial u\\ \partial\xi_3/\partial u\end{pmatrix} \quad , \quad X_v=\begin{pmatrix}\partial\xi_1/\partial v\\ \partial\xi_2/\partial v\\ \partial\xi_3/\partial v\end{pmatrix}$$

Quindi:

$$X_u=\begin{pmatrix}-kv\sin u\\ k\,v\cos u\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad X_v=\begin{pmatrix}k\cos u\\ k\,\sin u\\ 1\end{pmatrix}$$

La metrica è data da:

$$g_{11}=\langle X_u,X_u\rangle=k^2v^2 \quad , \quad g_{12}=g_{21}=\langle X_u,X_v\rangle=0 \quad , \quad g_{22}=\langle X_u,X_u\rangle=k^2+1$$

Calcoliamo la curvatura:

$$K(u,v)=\frac{A}{2g}-\frac{B\,g_{22}}{4g^2}+\frac{C\,g_{12}}{4g^2}-\frac{D\,g_{11}}{4g^2}$$

$$A=-2k^2 \quad , \quad B=-4k^4v^2 \quad , \quad C=0 \quad , \quad D=0 \quad ,$$

$$g\equiv g_{11}g_{22}-g_{12}^2=k^4v^2+k^2v^2$$

Quindi la curvatura è nulla.

Metrica del toro

Esempio ispirato da matematicamente.it [2] (soluzione di Alexander Pigazzini).

$$X:\ (u,v)\rightarrow(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=((a+r\cos u)\cos v,(a+r\cos u)\sin v,r\sin u)$$

2 https://www.matematicamente.it/forum/curvatura-e-geodetiche-del-toro-t61069.html

dove $0<u<2\pi$, $0<v<2\pi$, $a>r$.

I vettori tangenti sono:

$$X_u=\begin{pmatrix}\partial\xi_1/\partial u\\ \partial\xi_2/\partial u\\ \partial\xi_3/\partial u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r\sin u\cos v\\ -r\sin u\sin v\\ r\cos u\end{pmatrix} \quad , \quad X_v=\begin{pmatrix}\partial\xi_1/\partial v\\ \partial\xi_2/\partial v\\ \partial\xi_3/\partial v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(a+r\cos u)\sin v\\ (a+r\cos u)\cos v\\ 0\end{pmatrix} \quad ,$$

La metrica è:

$$g_{11}=\langle X_u,X_u\rangle=r^2 \quad , \quad g_{12}=g_{21}=\langle X_u,X_v\rangle=0 \quad ,$$
$$g_{22}=\langle X_u,X_u\rangle=(a+r\cos u)^2$$

La curvatura è : $\dfrac{\cos u}{r(a+r\cos u)}$.

Matematicamente.it propone anche un altro approccio alla curvatura.
Si calcolino le derivate seconde, come ad esempio:

$$X_{uu}=\begin{pmatrix}\partial^2\xi_1/\partial u^2\\ \partial^2\xi_2/\partial u^2\\ \partial^2\xi_3/\partial u^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r\cos u\cos v\\ -r\cos u\sin v\\ -r\sin u\end{pmatrix} \quad ,$$

Si ha:

$$X_{uv}=\begin{pmatrix}r\sin u\sin v\\ -r\sin u\cos v\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad X_{vv}=\begin{pmatrix}-(a+r\cos u)\cos v\\ -(a+r\cos u)\sin v\\ 0\end{pmatrix}$$

La normale alla superficie è definita come:

$$N=\frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|}=(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u) \quad .$$

Siano:

$$e=\langle N, X_{uu}\rangle=r \quad , \quad f=\langle N, X_{uv}\rangle=0 \quad , \quad g=\langle N, X_{vv}\rangle=(a+r\cos u)\cos u$$

La curvatura è: $K=\dfrac{eg-f^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\dfrac{\cos u}{r(a+r\cos u)}$.

Mentre E, F e G sono i coefficienti della prima forma fondamentale, e, f e g sono i coefficienti della seconda forma fondamentale.

Sferoide

Uno sferoide è una superficie di rotazione. Vediamo come viene descritto in mathworld.wolfram.com/Spheroid.html .

$$x=a\sin v\ \cos u \quad , \quad y=a\sin v\ \sin u \qquad z=c\cos v$$

dove $u\in[0,2\pi)$, $v\in[0,\pi]$

Calcoliamo i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

$$E=a^2\sin^2 v \quad , \quad F=0 \quad , \quad G=\frac{1}{2}Q^2$$

$$e=\frac{\sqrt{2}\ ac\sin^2 v}{Q} \quad , \quad f=0 \quad , \quad g=\frac{\sqrt{2}\ ac}{Q}$$

dove $Q=\sqrt{a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos(2v)}$.

La curvatura gaussiana è: $K=\dfrac{4c^2}{Q^4}$.

Iperboloide e paraboloide

Passiamo ora ad un iperboloide, come descritto in mathworld.wolfram.com/ One-SheetedHyperboloid.html .

$$x=a\sqrt{1+u^2}\cos v \quad , \quad y=a\sqrt{1+u^2}\sin v \qquad z=c\,u$$

dove $v\in[0,2\pi)$. Calcoliamo i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

$$E=c^2+\frac{a^2u^2}{1+u^2} \quad , \quad F=0 \quad , \quad G=a^2(1+u^2)$$

$$e=-\frac{a\,c}{(1+u^2)Q} \quad , \quad f=0 \quad , \quad g=\frac{a\,c(1+u^2)}{Q}$$

dove $Q=\sqrt{c^2+(a^2+c^2)u^2}$.

La curvatura gaussiana è: $K=-\frac{c^2}{Q^4}=-\frac{c^2}{[c^2+(a^2+c^2)u^2]^2}$.

Passiamo al paraboloide, come descritto in mathworld.wolfram.com/ Paraboloid.html .

$$x=a\sqrt{u/h}\cos v \quad , \quad y=a\sqrt{u/h}\sin v \qquad z=u$$

dove $u\geq 0$, $v\in[0,2\pi)$. Calcoliamo i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

$$E=1+\frac{a^2}{4hu} \quad , \quad F=0 \quad , \quad G=a^2\frac{u}{h}$$

$$e=-\frac{a^2}{2uQ} \quad , \quad f=0 \quad , \quad g=\frac{2a^2u}{Q}$$

dove $Q=\sqrt{a^4+4a^2hu}$.

La curvatura gaussiana è: $K=-\frac{4a^4h^2}{Q^4}=-\frac{4h^2}{[a^2+4hu]^2}$.

Nastro di Möbius

Da https://mathworld.wolfram.com/MoebiusStrip.html vediamo la discussione di tale nastro.

$$x=[R+s\cos(t/2)]\cos t \quad , \quad x=[R+s\cos(t/2)]\sin t \quad , \quad z=s\sin(t/2)$$

dove $s\in[-w,w]$ e $t\in[0,2\pi)$. Calcoliamo i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

$$E=1 \quad , \quad F=0 \quad , \quad G=R^2+2Rs\cos(t/2)+\frac{1}{4}s^2(3+2\cos t)$$

$$e=0 \quad , \quad f=\frac{R}{Q} \quad , \quad g=\frac{\sin(t/2)}{Q}[2(R^2+s^2)+4Rs\cos(t/2)+s^2\cos t]$$

dove $Q=\sqrt{4R^2+3s^2+2s[4R\cos(t/2)+s\cos t]}$.

La curvatura gaussiana è: $K=-\frac{4R^2}{Q^4}$

"Tutte le superfici della geometria tradizionale sono bilaterali: hanno due facce, una superiore e una inferiore, o una interna e una esterna. Per passare da una faccia all'altra bisogna bucare la superficie o scavalcarne il margine. Il nastro di Moebius è una superficie con una sola faccia. Si ottiene unendo le due estremità di un nastro di carta, ma dopo avergli dato mezzo giro di torsione, unendo cioè l'angolo destro di un lato con quello sinistro dell'altro, a differenza di quanto si fa per formare con un nastro un normale cilindro". www.focus.it/scienza/scienze/quali-caratteristiche-ha-il-nastro-di-moebius

Esempio

Per la teoria ed altri esempi ancora, si vedano anche gli appunti di Alessandro Savo, al link http://www.sbai.uniroma1.it/~alessandro.savo/ .
Prima di studiare l'esempio, ricordiamo che la curvatura Gaussiana è anche data dal prodotto delle curvature principali della superficie.

Calcoliamo le curvature principali di una superficie di rotazione:

$$f(u,v)=\begin{pmatrix}\phi(v)\cos u\\ \phi(v)\sin u\\ \psi(v)\end{pmatrix}$$

dove $(u,v)\in[a,b]\times[0,2\pi]$, assumendo $\phi>0$ su $[a,b]$. Tale superficie è ottenuta per rotazione di una curva attorno all'asse z.

Calcoliamo:

$$f_u=\begin{pmatrix}-\phi(v)\sin u\\ \phi(v)\cos u\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad f_v=\begin{pmatrix}\phi'\cos u\\ \phi'\sin u\\ \psi'\end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \phi'=\frac{d\phi}{dv} \quad , \quad \psi'=\frac{d\psi}{dv}$$

Si ha che la metrica è data da: $g_{11}=\phi^2$, $g_{12}=0$, $g_{22}=\phi'^2+\psi'^2$

Si ponga $\tau=\tau(u,v)=\sqrt{\phi'^2+\psi'^2}$. In forma compatta e matriciale:

$$g=\begin{pmatrix}\phi^2 & 0\\ 0 & \tau^2\end{pmatrix}$$

Si introduca:

$$N=N(u,v)=\frac{f_u\wedge f_v}{|f_u\wedge f_v|}=\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix}\psi'\cos u\\ \psi'\sin u\\ -\phi'\end{pmatrix}$$

Calcoliamo:

$$f_{uu}=\begin{pmatrix}-\phi\cos u\\ -\phi\sin u\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad f_{uv}=\begin{pmatrix}-\phi'\sin u\\ \phi'\cos u\\ 0\end{pmatrix} \quad , \quad f_{vv}=\begin{pmatrix}\phi''\cos u\\ \phi''\sin u\\ \psi''\end{pmatrix}$$

Quindi:

$$l_{11}=\langle f_{uu},N\rangle=-\frac{\phi\psi'}{\tau} \quad , \quad l_{22}=\langle f_{vv},N\rangle=-\frac{\phi''\psi'-\phi'\psi''}{\tau} \quad ,$$

$$l_{12}=\langle f_{uu},N\rangle=0$$

In forma matriciale:

$$l=\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix}-\phi\psi' & 0\\ 0 & \phi''\psi'-\phi'\psi''\end{pmatrix}$$

Si introduce la matrice di Weingarter.

La matrice dell'operatore di Weingarter è : $w=g^{-1}l$. Le curvature principali sono gli autovalori di *w*.

La curvatura gaussiana è data da $K=\dfrac{\det l}{\det g}, \quad K=\dfrac{l_{11}l_{22}-l_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}.$

La curvatura media è data da $H=\frac{1}{2}\operatorname{tr} w$.

Nell'esempio considerato:

$$w=g^{-1}l=\begin{pmatrix}-\dfrac{\psi'}{\tau\phi} & 0\\ 0 & \dfrac{\phi''\psi'-\phi'\psi''}{\tau^3}\end{pmatrix}.$$

La matrice w è diagonale. Le curvature principali sono:

$$k_1 = -\frac{\psi'}{\tau\phi}, \quad k_2 = \frac{\phi''\psi' - \phi'\psi''}{\tau^3},$$

La curvatura gaussiana è il prodotto: $K = k_1 k_2$.

Possiamo ripetere il calcolo per il toro di raggi $a > b$.

$$\phi(v) = a + b\cos v \quad , \quad \psi(v) = b\sin v \quad .$$

Il calcolo mostra che: $k_1 = -\frac{\cos v}{a + b\cos v}$, $k_2 = -\frac{1}{b}$.

$$K = \frac{\cos v}{b(a + b\cos v)} \quad , \quad -2H = \frac{a + 2b\cos v}{b(a + b\cos v)}$$

dove H è la curvatura media.

Superficie minime: catenoide, elicoide e superficie di Scherk

La catenoide è una superficie ottenuta dalla rotazione di una curva catenaria attorno alla sua direttrice. È stata la prima superficie minima ed essere scoperta. questa proprietà fu dimostrata da Leonhard Euler nel 1744. Una elicoide è invece una superficie con avvitamenti rispetto ad un asse, avvitamenti prodotti con un passo fissato. Catenoide ed elicoide retto sono legate da una deformazione attraverso la quale una catenoide diventa una elicoide:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \cos\theta \sinh v \sin u + \sin\theta \cosh v \cos u \\ y(u,v) &= -\cos\theta \sinh v \cos u + \sin\theta \cosh v \sin u \\ z(u,v) &= u\cos\theta + v\sin\theta \end{aligned}$$

dove $(u,v) \in (-\pi, \pi] \times (-\infty, \infty)$, con parametro di deformazione $-\pi < \theta \leq \pi$.

La superficie di Scherk (dal nome di Heinrich Scherk) è un esempio di superficie minima, Scherk descrisse due superfici minime nel 1834. Erano i terzi esempi non banali di superfici minime dopo la catenoide e l' elicoide.
La prima superficie di Scherk è asintotica a due infinite famiglie di piani paralleli, ortogonali tra loro, che si incontrano in uno schema a scacchiera di archi a ponte. La seconda superficie di Scherk appare globalmente come due piani ortogonali la cui intersezione consiste in una sequenza di tunnel in direzioni alternate. Le sue intersezioni con i piani orizzontali sono costituite da iperboli alternati.
Si definisce superficie minima una superficie che ha curvatura media uguale a zero in ogni punto. Quando si parla di superficie minime si intendono quelle superficie che minimizzano l'area, rispondono alla domanda seguente. Dato uno specifico bordo, qual è la superficie di area minima che ha tale bordo? Questo problema è detto *Problema di Plateau*.
Se si costruisce un telaio di fil di ferro e lo immerge in acqua e sapone, sul telaio si formerà un film di acqua saponata. La superficie formata dalla pellicola è proprio una superficie minima che risolve il problema.

Bolle di sapone

Il problema di Plateau fu proposto da Lagrange nel 1760, tuttavia prende il nome di Joseph Plateau, che fece esperimenti su di esso tramite bolle di sapone. Questo problema è importante nel calcolo delle variazioni, e ha dato origine alla teoria geometrica della misura, formulata da Herbert Federer nel 1960. Sono stati risolti diversi casi particolari del problema, ma solo nel 1930 Jesse Douglas e Tibor Radó, indipendentemente uno dall'altro, hanno trovato soluzioni generali. Il metodo usato è stato peraltro molto diverso; la soluzione di Radó era basata su precedenti lavori di René Garnier ed è valida solamente per curve chiuse semplici e rettificabili, mentre Douglas si è avvalso di idee completamente nuove, e il suo risultato è valido per ogni curva chiusa semplice. Entrambi dovettero risolvere problemi di minimizzazione; Douglas minimizzò il cosiddetto "integrale di Douglas", mentre Radó minimizzò l'energia. Nel 1936 Douglas ottenne la medaglia Fields per questo risultato.

Teorema egregium

Per il teorema egregium dimostrato da Gauss nel 1828, la curvatura gaussiana dipende solo dalla sua prima forma fondamentale, cioè dal suo tensore metrico.
La curvatura gaussiana è quindi invariante per isometrie della superficie: si tratta cioè di una proprietà intrinseca della superficie. Una isometria non è necessariamente un movimento rigido dello spazio: un esempio è fornito da un foglio di carta, che può essere arrotolato fino a formare un cilindro. Piano e cilindro sono (almeno localmente) isometrici.
Isometria: Trasformazione geometrica che lascia invariate le lunghezze, gli angoli e le aree.
Il teorema egregium è un risultato della geometria differenziale. Con tale teorema si trova che la curvatura gaussiana K è una grandezza intrinseca di una superficie, conservata dalle trasformazioni isometriche locali. In altre parole, la curvatura gaussiana è intrinseca alla superficie e indipendente dallo spazio ambiente, nonostante sia definita come prodotto delle curvature principali (il cui valore dipende da come la superficie è immersa dallo spazio ambiente).
Il risultato è stato scoperto da Carl Friedrich Gauss e pubblicato nel 1827 nelle Disquisitiones generales circa superficies curvas, enunciato nel seguente modo:
«Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.» (Karl Friedrich Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas).
È chiamato dallo stesso Gauss theorema egregium (teorema egregio) per via dell'importanza del risultato: è un risultato tutt'altro che intuitivo e di grande valore.
Una delle conseguenze immediate del teorema è il fatto che superfici con differente curvatura gaussiana non possono essere fra loro isometriche. Ad esempio, una sfera (che ha curvatura strettamente positiva) non può essere isometrica al piano (che ha curvatura nulla): per questo motivo ad esempio i planisferi presentano sempre delle distorsioni.
Il viceversa non è vero in generale: un controesempio è fornito dalla superficie di rotazione Φ generata da una curva logaritmica e dall'elicoide Ψ:

$$\Phi : (u,v) \rightarrow (av\cos u, a\,v\sin u, b\log v)$$
$$\Psi : (u,v) \rightarrow (av\cos u, a\,v\sin u, bu)$$

con parametri *a,b*.
Le due superfici hanno la stessa curvatura gaussiana ma non sono isometriche. Tale implicazione vale solo nel caso le due superfici abbiano curvatura gaussiana uguale e costante (teorema di Minding).

Altre formulazioni della curvatura

La curvatura gaussiana di una superficie *M* in un punto è definita come il prodotto delle due curvature principali nel punto o, equivalentemente, nei modi seguenti.
Siano E, F e G provenienti dalla prima forma differenziale di Gauss. Partiamo da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2$$

Scriviamo:

$$\frac{\partial x}{\partial u} du = \phi_u(u,v)\, du \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} dv = \phi_v(u,v)\, dv \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} du = \psi_u(u,v)\, du$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} dv = \psi_v(u,v)\, dv \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial u} du = \chi_u(u,v)\, du \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} dv = \chi_v(u,v)\, dv$$

Prima forma differenziale di Gauss:

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

con:

$$E = \phi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2 \quad , \quad F = \phi_u \phi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v \quad , \quad G = \phi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2$$

Ma questi sono i coefficienti g_{ij} della metrica. Gauss espresse la curvatura come:

$$K=\frac{1}{(EG-F)^2}\{A+B-C\}$$

dove A, B e C sono dati da: A= $\left(F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}\right)\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$

B= $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$

C= $\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$

con $E_u=\partial E/\partial u$, $E_v=\partial E/\partial v$, e simili per le derivate seconde.

"Gauss dimostrò che l'espressione della curvatura gaussiana dipende solo dai coefficienti E, F, G e dalle loro derivate prime e seconde, e quindi solo dalla prima forma quadratica fondamentale e pertanto essa risulta una proprietà intrinseca della superficie." Elementi di Geometria Differenziale: Con esercizi, Alfredo Donno, Società Editrice Esculapio, 1 Maggio 2010.
Il testo continua con l'esempio di sfera e piano e con sfera paraboloide iperbolico (che ha curvatura negativa in ogni punto).

In https://mathworld.wolfram.com/GaussianCurvature.html troviamo altra formula. Sia $g = EG - F^2$.

$$K = \frac{1}{g^2}\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & k_{23} & k_{33} \end{vmatrix} - \frac{1}{g^2}\begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & 0 \end{vmatrix},$$

con

$$k_{23} \equiv \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}$$
$$k_{33} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Oppure:

$$K = \begin{aligned} & \frac{1}{2g}\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right] - \frac{G}{4g^2}\left[\frac{\partial E}{\partial u}\left(2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] + \\ & \frac{F}{4g^2}\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right)\left(2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right)\right] - \\ & \frac{E}{4g^2}\left[\frac{\partial G}{\partial v}\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Con simboli di Christoffel (che vediamo successivamente), si ha:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{g}}{E}\Gamma_{11}^2\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{g}}{E}\Gamma_{12}^2\right)\right],$$

Teorema di Gauss - Bonnet

Il suddetto teorema è un teorema della geometria differenziale, che esprime la relazione tra la curvatura di una superficie e la sua topologia tramite la caratteristica di Eulero. Il nome del teorema viene da Carl Gauss che lo aveva dedotto senza pubblicarlo, e da Pierre-Ossian Bonnet che ne discusse con pubblicazione un caso particolare nel 1848. Ricordiamo che la "caratteristica di Eulero" è un numero intero usato in topologia, indicato comunemente con la lettera χ .
Sia M una varietà bidimensionale compatta con bordo ∂M . Si ha che:

$$\int_M K \, \mathrm{d}A + \int_{\partial M} k_g \, \mathrm{d}s = 2\pi\chi(M),$$

- K è la curvatura gaussiana di ogni punto di M;
- k_g è la curvatura geodetica di ∂M;
- dA è l'elemento di area;
- ds è l'elemento di linea lungo ∂M;
- $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero di M.

Per la curvatura geodetica o tangenziale, si veda la discussione in Appunti parziali di Geometria 2, D. L. Ferrario, staff.matapp.unimib.it/~ferrario/e/notesgeo2/sect0014.html
Per superfici senza bordo:

$$\int_M K \, \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M),$$

La curvatura gaussiana totale è uguale a 2π volte la caratteristica di Eulero. Tale caratteristica è invariante per omeomorfismi. Quindi, una deformazione continua "senza strappi" che mantiene gli invarianti topologici, comporta una

variazione locale della curvatura gaussiana della superficie. Tale variazione, nel complesso, mantiene invariata la curvatura totale.
Il toro, che ha caratteristica di Eulero nulla, ha una curvatura totale nulla. Il toro non può avere curvatura ovunque positiva o ovunque negativa.
Il teorema di Gauss - Bonnet ci permette, conoscendo la curvatura gaussiana, di calcolare la caratteristica di Eulero.

Le caratteristiche di Eulero, per alcune figura geometriche, si trovano in "Caratteristica di Eulero-Poincaré, curvatura di Gauss e tassellazione di superfici architettoniche" di Alberto Saracco[3].

Superficie S	$\chi(S)$
piano	*1*
sfera	*2*
cilindro	*0*
Nastro di Moebius	*0*
Bottiglia di Klein	*0*
Piano proiettivo	*1*
toro	*0*
bitoro	*-2*
g-toro	*2-2g*

Il bitoro è la superficie della ciambella con due buchi (o sfera con due manici) e nome di ogni altra superficie che da essa si ottenga con una deformazione continua.

Derivate e simboli di Christoffel

Abbiamo visto in precedenza la curvatura scritta coi simboli di Christoffel. Vediamo che cosa sono, con discussione in "Reflections on Relativity", di Kevin Brown, 2011. Un vettore può essere espresso in forma controvariante o covariante, come una combinazione dei vettori della base $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, o della base duale $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^3$, come:

3 http://www2.unipr.it/~saralb74/divulgazione/PresenzaTecnicaSaracco.pdf

$$\mathbf{A} = A^i \mathbf{u}_i = A_i \mathbf{u}^i$$

dove A^i sono le componenti controvarianti e A_i le covarianti di **A.** Per le basi valgono le relazioni:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}^j = \delta_i^j \qquad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = g_{ij} \qquad \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^j = g^{ij}$$

dove g_{ij} e g^{ij} sono le componenti del tenore metrico. Il differenziale di **A** si trova come:

$$d\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}^i dA_i + A_i d\,\boldsymbol{u}^i \quad ; \quad d\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_i dA^i + A^i d\,\boldsymbol{u}_i$$

Ricordiamo che la base può variare col tempo.

Sia una qualsiasi quantità Q = f(x) e coordinate x^i : $dQ = \frac{\partial Q}{\partial x^i} dx^i$. Possiamo riscrivere i differenziali:

$$dx^i \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i} - \boldsymbol{u}_j \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - A^j \frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x^i} \right) \quad ; \quad dx^i \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i} - \boldsymbol{u}^j \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_j \frac{\partial \boldsymbol{u}^j}{\partial x^i} \right)$$

Queste relazioni valgono per tutte le possibili combinazione di dx^i , quindi le quantità dentro le parentesi sono nulle:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i} = \boldsymbol{u}_j \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + A^j \frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x^i} \quad ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x^i} = \boldsymbol{u}^j \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + A_j \frac{\partial \boldsymbol{u}^j}{\partial x^i}$$

Siano A_k^i e A_{ik} definiti come:

$$A_k^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^j \frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x^k} \boldsymbol{u}^i \quad , \quad A_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + A_j \frac{\partial \boldsymbol{u}^j}{\partial x^k} \boldsymbol{u}_i$$

Si introduce per convenienza il simbolo di Christoffel del secondo tipo:

$$\Gamma^i_{jk} = \boldsymbol{u}^i \frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x^k}$$

Siccome $-\boldsymbol{u}^i \frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x^k} = \boldsymbol{u}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}^j}{\partial x^k}$, le precedenti equazioni si trasformano in:

$$A^i_k = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} A^j$$

$$A_{i\,k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk} A_j$$

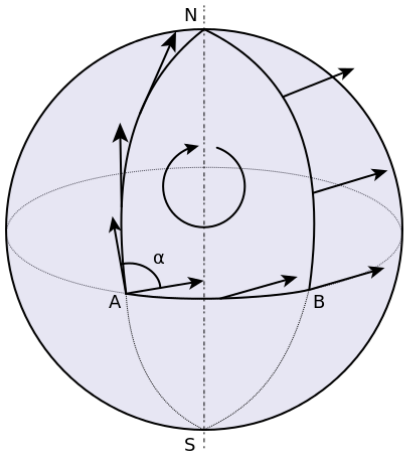
Queste sono le derivate covarianti della forma controvariante e covariante del vettore **A**, rispettivamente. Se le basi sono costanti (come nel caso Cartesiano) i simboli di Christoffel sono nulli e rimane solo il primo termine. Il secondo termine c'è quando la base cambia con la posizione nel sistema di coordinate.
In generale, il simbolo di Christoffel è dato da:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \right)$$

Naturalmente, quando consideriamo delle varietà curve, vediamo sorgere alcuni nuovi fenomeni.

Ad esempio, una conseguenza della planarità di una superficie è che se un vettore viene trasportato parallelamente a se stesso attorno a un percorso chiuso, assume il suo orientamento originale quando ritorna nella sua posizione originale. Tuttavia, se i coefficienti metrici variano in modo tale che il tensore di curvatura sia diverso da zero, allora in generale un vettore che è stato trasportato parallelamente a se stesso lungo un circuito chiuso subirà un cambiamento di orientamento. In effetti, Gauss ha mostrato che la quantità di deflessione subita da un vettore come risultato del trasporto parallelo attorno a

un circuito chiuso è esattamente proporzionale all'integrale della curvatura sulla regione racchiusa.



Curvatura intrinseca della sfera: dopo il trasporto parallelo di un vettore lungo il percorso chiuso ANB, il vettore subisce un deviazione proporzionale alla superficie dell'area racchiusa dal percorso e alla curvatura della sfera. Image Courtesy: Fred the Oyster

Connessione affine

Quindi, la curvatura di uno spazio-tempo può essere caratterizzata prendendo un vettore in qualche punto e trasportandolo parallelamente lungo una curva sullo spazio-tempo. Una connessione affine è una regola che descrive come muovere in modo legittimo un vettore lungo una curva sulla varietà senza mutarne la direzione. Questo avviene attraverso una mappa bilineare descritta in termini di un insieme di coefficienti di connessione (noti anche come simboli di Christoffel) specificando cosa accade alle componenti dei vettori di base sotto trasporto parallelo infinitesimale. I coefficienti di connessione non sono componenti di un tensore.

Moto di una particella in un campo gravitazionale

Vediamo come usare i simboli di Christoffel in gravitazione. Prendiamo Lev Landau e Evgenij Lifšits, Teoria dei Campi, Editori Riuniti, 1976, quando parlano del moto di una particella in un campo gravitazionale.
Il moto di una particella libera n relatività ristretta è governato dal principio di minima azione, in virtù del quale, la particella si muove con una linea d'universo estremale tra due dati punti d'universo. Nel caso della fisica classica, ciò si traduce nel moto rettilineo uniforme. Il moto di una particella in un campo gravitazionale deve essere determinato dal principio di minima azione nello stesso modo, poiché il campo gravitazionale non è altro che una modificazione della metrica. Nel suo moto, la particella descriverà pertanto una geodetica.
Altro modo di descrivere il moto è di partire dalla espressione del differenziale covariante. Sia $u^i = dx^i / ds$ il quadrivettore velocità. Per il moto libero, esso è nullo. In relatività ristretta: $du^i = 0$. Generalizzando $Du^i = 0$, per la derivazione covariante:

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0$$

E quindi, dividendo per ds : $\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0$.

Il primo termine è la 4-accelerazione, e la grandezza $-m \Gamma^i_{kl} u^k u^l$ la 4-forza.
In precedenza, il testo di Lev Landau e Evgenij Lifšits ha mostrato come è possibile annullare il simbolo di Christoffel con una adeguata scelta delle coordinate. Questa è in fondo una espressione del principio di equivalenza.

Ricordiamo ora anche il 4-impulso della particella che è:

$$p^i = mc\, u^i \quad , \quad p_i p^i = m^2 c^2 \quad .$$

Tenendo presente che $p_i = -\partial S / \partial x^i$ (S è l'azione), l'equazione di Hamilton e Jacobi diventa:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}-m^2c^2=0$$

Non è applicabile alla luce, ma possiamo usare il quadrivettore d'onda, $k^i=dx^i/d\lambda$ dove λ è un parametro variabile lungo il raggio di luce. Si arriva alla forma:

$$\frac{d^2k^i}{d\lambda}+\Gamma^i_{kl}k^k k^l=0 \quad .$$

Utilizzando $\partial\psi/\partial x^i$, dove ψ è l'iconale, troviamo l'equazione dell'iconale in un campo gravitazionale:

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0$$

Se siamo al limite non relativistico, con campi gravitazionali piccoli, abbiamo:

$$ds^2=(c^2+2\varphi)dt^2+d\boldsymbol{r}^2$$

dove con φ si indica il potenziale non relativistico del campo gravitazionale. La componente g_{00} del tensore metrico nel caso limite è pari a:

$$g_{00}=1+\frac{2\varphi}{c^2} \quad .$$

La curvatura di Riemann

Torniamo a parlare di curvatura. Finora si è parlato di superficie descritte da due coordinate. Se le dimensioni sono di più non si può usare una sola curvatura. Il problema venne esteso e risolto da Georg Riemann nel 1854.
Continuiamo riprendendo la lettura del testo di Weinberg. Si parte dalla connessione affine:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

Cambiamo il sistema di coordinate X in X'. Con i passaggi esplicitati nel testo di Weinberg, relativi alla trasformazione da un sistema ad un altro, si arriva a definire un tensore:

$$R_{ijk}{}^{l} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{jk}}{\partial x^{i}} + \left(\Gamma^{p}_{ik}\Gamma^{l}_{jp} - \Gamma^{p}_{jk}\Gamma^{l}_{ip}\right)$$

Questo è il tensore di curvatura di Riemann-Christoffel.
Questo tensore è l'unico che può essere costruito dal tensore metrico e sue derivate prime e seconde. Da tal tensore si ricavano i tensori di Ricci e la curvatura scalare.

Curvatura di Ricci

$$R_{ik} = R_{ijk}{}^{j}$$

Curvatura scalare

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

Se abbiamo una superficie bidimensionale, ci troviamo con:

$$R_{ijkl} = K\left(g_{ik}\, g_{lj} - g_{il}\, g_{kj}\right)$$

dove c'è il tensore metrico e la curvatura gaussiana K.

Si noti che il tensore di Riemann ha n^4 componenti, dove n è la dimensione della varietà su cui è definito. Le relazioni appena descritte riducono questo numero a $n^2(n^2-1)/12$ componenti indipendenti. In dimensione 1, 2, 3 e 4 il numero di componenti indipendenti è quindi rispettivamente 0, 1, 6, 20.

La curvatura di Ricci della superficie è:

$$R_{ij} = K g_{ij}$$

Torniamo alla connessione affine. Essa è legata alla metrica:

$$\Gamma^m{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right) = \frac{1}{2} g^{mk} \left(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k} \right)$$

Si noti che al tensore metrico g_{ij} è associato un analogo tensore, denotato con la stessa lettera ma con gli indici in alto g^{ij}. Il tensore è definito in coordinate come la matrice inversa di g_{ij} (questa definizione non dipende dalla scelta delle coordinate). Questo tensore è detto a volte tensore metrico coniugato. La relazione fra i due tensori può essere scritta nel modo seguente:

$$g_{\nu\mu} g^{\mu\gamma} = \delta^{\gamma}_{\nu}$$

dove compare la delta di Kronecker. Altro tensore di Christoffel è:

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k} \right)$$

I simboli di Christoffel soddisfano le relazioni di simmetria

$\Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}$ o, rispettivamente , $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$

Le relazioni contrattuali sui simboli di Christoffel sono date da

$$\Gamma^i{}_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^k}$$

Inoltre:

$$g^{k\ell}\Gamma^{i}{}_{k\ell} = \frac{-1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\, g^{ik}\right)}{\partial x^k}$$

dove | g | è il valore assoluto del determinante del tensore metrico .

2-Sfera, 2-Toro, 3-Sfera

Vediamo il calcolo di alcuni tensori di Riemann, come svolto da Jennifer Cox, in The Riemann Curvature Tensor, 2019[4]. Abbiamo solo bisogno della metrica.

Due casi li abbiamo già visti e sono la sfera ed il toro.

2-Sfera (θ, ϕ): $g_{ij} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$

Curvatura di Riemann:

$$R_{1212} = r^2 \sin^2\theta \qquad R^1_{212} = \sin^2\theta$$

$$R_{1221} = -r^2 \sin^2\theta \quad R^1_{221} = -\sin^2\theta$$

$$R_{2121} = r^2 \sin^2\theta \qquad R^2_{121} = 1$$

$$R_{2112} = -r^2 \sin^2\theta \quad R^2_{112} = -1$$

Tensore di Ricci: $R_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$

Curvatura scalare: $S = \frac{2}{r^2}$

4 https://digitalcommons.latech.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1008&context=mathematics-senior-capstone-papers

---

2-Toro (θ, ϕ): $g_{ij} = \begin{bmatrix} (R + r\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$

Curvatura di Riemann:

$$R_{1212} = r\cos\phi(R + r\cos\phi) \qquad R^1_{212} = \frac{r\cos\phi}{R + r\cos\phi}$$

$$R_{1221} = -r\cos\phi(R + r\cos\phi) \qquad R^1_{221} = -\frac{r\cos\phi}{R + r\cos\phi}$$

$$R_{2121} = r\cos\phi(R + r\cos\phi) \qquad R^2_{121} = \frac{1}{r}\cos\phi(R + r\cos\phi)$$

$$R_{2112} = -r\cos\phi(R + r\cos\phi) \qquad R^2_{112} = -\frac{1}{r}\cos\phi(R + r\cos\phi)$$

Tensore di Ricci: $R_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\cos\phi(R + r\cos\phi) & 0 \\ 0 & \frac{r\cos\phi}{R + r\cos\phi} \end{bmatrix}$

Curvatura scalare: $S = \frac{2\cos\phi}{r(R + r\cos\phi)}$

3-Sfera (ψ, θ, ϕ): $g_{ij} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\psi\sin^2\theta \end{bmatrix}$

Curvatura di Riemann:

$$R_{1212} = r^2 \sin^2 \psi \qquad R^1_{212} = \sin^2 \psi$$

$$R_{1313} = r^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta \quad R^1_{313} = \sin^2 \psi \sin^2 \theta$$

$$R_{2323} = r^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta \quad R^2_{323} = \sin^2 \psi \sin^2 \theta$$

Tensore di Ricci: $R_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sin^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin^2\psi \sin^2\theta \end{bmatrix}$

Curvatura scalare: $s = \frac{6}{r^2}$.

La 3-sfera

La 3-sfera è una figura geometrica nello spazio euclideo 4-dimensionale, in particolare è l'analogo in questo spazio della sfera. È definita come il luogo dei punti equidistanti da un punto fissato. La 3-sfera è chiamata anche ipersfera, ma con lo stesso termine si indicano tutte le n-sfere con n≥3.
La 3-sfera è una varietà tridimensionale che fa da bordo alla palla 4-dimensionale. Quindi, la 3-sfera è in $\mathbb{R}^4$. La metrica euclidea su $\mathbb{R}^4$ induce una metrica sulla 3-sfera dandole la struttura di una varietà Riemanniana.
Proviamo a descrivere la sfera con le coordinate:

$$x_0 = r\cos\psi \quad , \quad x_1 = r\sin\psi\cos\theta \quad , \quad x_2 = r\sin\psi\sin\theta\cos\phi \quad ,$$
$$x_3 = r\sin\psi\sin\theta\sin\phi \quad \text{, dove} \quad 0<\psi\leq\pi \quad , \quad 0<\theta\leq\pi \quad , \quad 0<\phi\leq 2\pi$$

La metrica è: $ds^2 = r^2 d\psi^2 + r^2 \sin^2\psi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$. Mettiamo $r=1$.

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

Seguendo ora la discussione in www.physics.mcgill.ca/~rhb/ph514/10sol6.pdf di Bryce Cyr (2018). La metrica usata è come quella già vista prima:

$$g_{\psi\psi}=1 \quad , \quad g_{\theta\theta}=\sin^2\psi \quad , \quad g_{\phi\phi}=\sin^2\psi\sin^2\theta$$

Gli elementi del tensore di Riemann sono:

$$\begin{aligned} R^{\psi}_{\theta\psi\theta} &= \sin^2\psi & \qquad R^{\psi}_{\theta\theta\psi} &= -\sin^2\psi \\ R^{\theta}_{\psi\theta\psi} &= 1 & \qquad R^{\theta}_{\psi\psi\theta} &= -1 \\ R^{\phi}_{\psi\phi\psi} &= 1 & \qquad R^{\phi}_{\psi\psi\phi} &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{\psi}_{\phi\psi\phi} &= \sin^2\theta\sin^2\psi & \qquad R^{\psi}_{\phi\phi\psi} &= -\sin^2\theta\sin^2\psi \\ R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \sin^2\theta\sin^2\psi & \qquad R^{\theta}_{\phi\phi\theta} &= -\sin^2\theta\sin^2\psi \\ R^{\phi}_{\theta\phi\theta} &= \sin^2\psi & \qquad R^{\phi}_{\theta\theta\phi} &= -\sin^2\psi \end{aligned}$$

Tensore di Ricci:

$$R_{\psi\psi}=1 \quad , \quad R_{\theta\theta}=2\sin^2\psi \quad , \quad R_{\phi\phi}=2\sin^2\psi\sin^2\theta \quad , \quad R_{\psi\theta}=R_{\psi\phi}=R_{\theta\phi}=0$$

Scalare di Ricci: $R=g^{\psi\psi}R_{\psi\psi}+g^{\theta\theta}R_{\theta\theta}+g^{\phi\phi}R_{\phi\phi}=2+2+2=6$

Lo spazio-tempo piatto e curvo

Lo spazio-tempo piatto è un esempio di varietà Lorentziana, descrivibile con coordinate (t,x,y,z) e metrica:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu .$$

Le coordinate coprono tutto lo spazio $\mathbb{R}^4$. La metrica dello spazio-tempo piatto (o metrica di Minkowski) è la metrica usata nella relatività ristretta. Indicandola col simbolo η, è rappresentata dalla seguente matrice:

$$\eta = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In coordinate sferiche (t, r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad \text{dove:} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$$

L'espressione della metrica cambia con le coordinate, ma non il fatto che lo spazio-tempo sia piatto.
Si prenda ora una metrica differente:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2)$$

che contenga un fattore di scala. Seguendo le note di Lectures on Cosmology[5], o seguendo il testo di Weinberg, si arriva a modificare tal metrica in modo che essa contenga un parametro, così da avere spazi piatti, sferici o iperbolici:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{d^2 r}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$$

Si veda nel Weinberg, pag. 412 la metrica di Robertson-Walker, dove si trova $a(t) = R(t)$, funzione sconosciuta del tempo. Come dice il testo, è interessante considerare lo spazio tridimensionale a t costante. La metrica relativa è:

$$^3 g_{rr} = \frac{R^2(t)}{1 - k r^2} \quad , \quad ^3 g_{\theta\theta} = r^2 R^2(t) \quad , \quad ^3 g_{\phi\phi} = r^2 \sin^\theta R^2(t) \quad ,$$

$$^3 g_{\mu\nu} = 0 \quad se \;\; \mu \neq \nu$$

5 https://physics.princeton.edu/~jdunkley/uploads/3/9/7/7/39770842/cosmo_2016.pdf

La curvatura tridimensionale scalare è data da:

$$^{3}K(t)=\frac{k}{R^{2}(t)}$$

Per $k=+1$, lo spazio è una sfera di raggio $R(t)$ in uno spazio Euclideo a quattro dimensioni. $R(t)$ può essere detto "raggio dell'universo".
Quindi, oltre allo spazio-tempo piatto abbiamo quelli curvi.

Una metrica molto nota è quella di Schwarzschild, che è indipendente dal tempo, ed è data da:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

dove G è la costante gravitazionale, ed M una costante dalle dimensioni della massa. La metrica di Schwarzschild diventa quella di Minkowski quando M tende a zero. Si veda la discussione nel Capitolo 8 del testi di Weinberg.

La metrica di Schwarzschild

Approccio a tale metrica proposto in "Reflections on Relativity", di Kevin Brown, 2011.
Sia una massa statica puntiforme, con simmetria sferica ed indipendente dal tempo. La metrica relativa venne ricavata da Karl Schwarzschild nel 1916 come soluzione dell'equazione di Einstein. Il testo propone un approccio, senza coinvolgere la relatività generale, assumendo la terza legge di Keplero.
Sia r la coordinata spaziale radiale, con la massa in r = 0. Sia t la coordinata temporale.
Parametrizziamo la sfera in modo che: $ds^2=r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\phi)^2$, dove gli angoli sono latitudine e longitudine. La metrica spazio-temporale sia:

$$(d\tau)^2=g_{tt}(dt)^2+g_{rr}(dr)^2+g_{\theta\theta}(d\theta)^2+g_{\phi\phi}(d\phi)^2$$

con $g_{\theta\theta}=-r^2$, $g_{\phi\phi}=-r^2\sin^2\theta$. g_{tt} , g_{rr} sono per ora funzioni ignote di r e di m. Se si pone $m = 0$, le funzioni g_{tt} , g_{rr} devono essere pari in valore assoluto a 1 per avere la metrica di Minkowski in coordinate polari. La metrica è diagonale, quindi la metrica controvariante è data da $g^{\alpha\alpha}=1/g_{\alpha\alpha}$.
Le sole derivate diverse da zero sono:

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}=-2r \quad , \quad \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r}=-2r\sin^2\theta \quad , \quad \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta}=-2r^2\sin\theta\cos\theta$$

insieme a quelle di g_{tt} , g_{rr} ancora da determinare. Kevin Brown procede utilizzando, almeno approssimativamente, la distanza radiale Newtoniana dal centro della massa. Ci sarà una geodetica con r costante che gira attorno alla massa centrale m con velocità angolare ω, Ma tali quantità sono legate dalla III legge Keplero: $Gm=r^3\omega^2$.
Per un moto puramente circolare sul piano equatoriale $\theta = \pi/2$ a r costante, la metrica si reduce a: $(d\tau)^2=g_{yy}(dt)^2-r^2(d\phi)^2$.

Considerando $dr/d\tau = 0$, le equazioni delle geodetiche per il moto circolare sono:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2}=\frac{d^2\theta}{d\tau^2}=\frac{d^2\phi}{d\tau^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=2r\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

Moltiplicando per $(d\tau/dt)^2$ ed identificando la velocità angolare ω con la derivata di ϕ rispetto a t, si ha:

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}l=2r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=2r\omega^2$$

A questo punto, usando la terza Legge di Keplero, Kevin Brown arriva alla metrica:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$
$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Notiamo che il termine $d\Omega^2$ rappresenta l'elemento di metrica nella 2-sfera e che M rappresenta una costante il cui significato fisico è quello di massa a riposo del corpo gravitante. Una scrittura alternativa della metrica è:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$
$$R_S = 2GM$$

R_S è detto Raggio di Schwarzschild del corpo di massa M.

In relatività generale, si parte dall'equazione di Einstein nel vuoto per ottenere tale metrica. Il dettaglio è dato a partire dalla pag.179 di S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, edizione del 1972.

Il testo di Brown discute anche le relative geodetiche. Una geodetica è il cammino che minimizza la distanza tra due punti . L'equazione della geodetica è:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\lambda}\frac{dx^\kappa}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$
$$\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\lambda g_{\nu\kappa} + \partial_\kappa g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\kappa\lambda})$$

Se $\Gamma^\mu_{\kappa\lambda}=0$, allora la particella ha accelerazione nulla $d^2x^\mu/d\tau^2=0$.

Per concludere, seguono alcune parole sul metodo di Tullio Regge per affrontare la curvatura e su Gauss e la cartografia.

Tullio Regge e la curvatura

"Uno dei contributi cruciali allo studio della Relatività generale fu dato da Tullio Regge con un metodo che porta il suo nome e grazie al quale il difficile formalismo dello spazio-tempo curvo viene, per così dire, aggirato"[6] (Mario Rasetti).

Tullio Regge introdusse l'uso di insieme di entità matematiche discrete, che trasformano le equazioni di Einstein in un'algebra trattabile anche numericamente. "Questi oggetti, i «complessi simpliciali» - aggregati di elementi di dimensioni crescenti (i simplessi: segmenti, triangoli, tetraedri…) - sono affascinanti nella loro eleganza e i vincoli che li definiscono sono semplici", spiega Rasetti nel suo articolo. "I simplessi sono come i pezzi di un Lego a dimensioni variabili e le proprietà combinatorie delle varietà «lineari a tratti» che ne seguono racchiudono la ricchezza di forme possibili dello spazio-tempo di Einstein. E anche la curvatura, come dimostrò Regge, basandosi sul «theorem egregium» di Gauss e ottenendo i cosiddetti «cardini di Regge», i quali esprimono la curvatura come funzione delle lunghezze dei lati dei simplessi stessi"[7]. L'idea di base del calcolo di Regge è in sostanza quella di trattare porzioni di spazio-tempo approssimandole con tasselli costituiti da simplessi. L'approssimazione viene fatta per varietà lorentziana dotata di un tensore metrico del tipo $(n-1,1)$ e si può estendere, applicandola al problema dello spazio-tempo quadridimensionale curvo.

Per fornire un esempio semplice dell'approccio si Regge, prendiamo una superficie superficie bidimensionale, una superficie sferica quindi. I tasselli sono 2-simplessi, che sono dei triangoli, che intersecandosi determinano i loro vertici in comune. La somma degli angoli che insistono su un vertice è legata alla curvatura: se è inferiore a 2π, la curvatura è positiva, viceversa la curvatura è negativa. Dato che simplessi sono rigidi, la curvatura finisce nei "cardini" che li legano.

6 https://www.lastampa.it/tuttoscienze/2015/11/26/news/con-einstein-e-regge-la-relativita-si-spinge-fino-ai-segreti-del-cervello-1.37452916

7 Come dall'articolo al link nella nota precedente.

La cartografia e Gauss

Concludiamo con alcune doverose parole su Gauss e la cartografia. Nel 1818 fu chiesto a Gauss di compiere la rilevazione geodetica del Regno di Hannover. Gauss accettò il compito, utilizzando anche l'eliotropo, uno strumento da lui inventato, costituito da un piccolo telescopio e da una serie di specchi che riflettevano i raggi solari a grandi distanze, per poter effettuare le misure. La cartografia dell'Hannover portò Gauss ad interessarsi di geometria differenziale. Da tale interesse, scaturì la sua curvatura gaussiana, e nel 1828, al theorema egregium. La nozione principale è che la curvatura di una superficie può essere interamente determinata dalla misura degli angoli e delle distanze sulla superficie.
In cartografia, il nome di Gauss è associato alle proiezioni cilindriche. La proiezione Gauss-Boaga ad esempio proietta ciascun punto della superficie dell'ellissoide dal centro verso un cilindro tangente all'ellissoide stesso. Mentre la proiezione di Mercatore utilizza un cilindro tangente all'equatore, la proiezione Conforme di Gauss (o proiezione trasversa di Mercatore, UTM) utilizza un cilindro tangente ad un meridiano, detto meridiano di riferimento.

Bibliografia

K. Brown (2011). Reflections on Relativity, Lulu.

D. L. Ferrario (2019). Note del corso di Geometria 2. Sprinkler.

L. Landau e E. Lifšits (1976). Teoria dei Campi, Editori Riuniti.

V. I. Smirnov (1978). Corso di Matematica Superiore 2, Editori Riuniti.

S. Weinberg (1972), Gravitation and Cosmology, Wiley.