Calcoli con gli Operatori

Calcoli con gli Operatori

Amelia Carolina Sparavigna

Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino

Si propongono alcuni problemi legati al calcolo con operatori, che si trovano nel testo "Problems in Theoretical Physics", di L. G. Grechko et al., edito da MIR. Il calcolo con gli operatori è fondamentale per la meccanica quantistica.

Torino, 6 Marzo 2020. DOI: 10.5281/zenodo.3700074

Questo lavoro propone alcuni problemi legati al calcolo con operatori. I problemi sono ispirati a quelli proposti nel testo "Problems in Theoretical Physics", di L. G. Grechko et al. [1]. I calcoli sono fondamentali per la meccanica quantistica.

Trovate le espressioni esplicite dei seguenti operatori:

(a) $\left(\frac{d}{dx}+x\right)^2$; (b) $\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^3$; (c) $\left(x\frac{d}{dx}\right)^2$; (d) $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$;

(e) $\left(i\hbar\nabla+\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2$; (f) $(\hat{L}-\widehat{M})(\hat{L}+\widehat{M})$; (g) $(\hat{L}-\widehat{M})(\widehat{M}-\hat{L})$; (h) $(\hat{L}-\widehat{M})^2$

Sia ψ una funzione arbitraria. A tale funzione applichiamo gli operatori.

(a)
$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)\left(\frac{d}{dx}+x\right)\psi=\left(\frac{d}{dx}+x\right)\left(\frac{d\psi}{dx}+x\psi\right)$$

$$=\frac{d^2\psi}{dx^2}+\psi+x\frac{d\psi}{dx}+x\frac{d\psi}{dx}+x^2\psi=\left(\frac{d^2}{dx^2}+2x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d}{dx}+1\right)\psi$$

Calcoliamo ora: $\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^2\psi$. Si ha: $\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)^2\psi=\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)\psi=\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{d\psi}{dx}+\frac{\psi}{x}\right)$

$$=\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\psi}{dx}-\frac{\psi}{x^2}+\frac{\psi}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{d\psi}{dx}=\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d\psi}{dx}$$

(b) Calcoliamo $(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})^3\psi$.

$$(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})^3\psi=(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x})(\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d\psi}{dx}) \quad = \quad (\frac{d^3}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2}{dx^2})\psi$$

(c) $$(x\frac{d}{dx})(x\frac{d}{dx})\psi=(x\frac{d}{dx})(x\frac{d\psi}{dx})=x\frac{d\psi}{dx}+x^2\frac{d^2\psi}{dx^2}=(x^2\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx})\psi$$

(d) $$(\frac{d}{dx}x)^2\psi=(\frac{d}{dx}x)(\frac{d}{dx}(x\psi))=(\frac{d}{dx}x)(\psi+x\frac{d\psi}{dx})=\frac{d}{dx}(x\psi+x^2\frac{d\psi}{dx})$$

$$= \quad \psi+x\frac{d\psi}{dx}+2x\frac{d\psi}{dx}+x^2\frac{d^2\psi}{dx^2}=x^2\frac{d^2\psi}{dx^2}+3x\frac{d\psi}{dx}+\psi=(x^2\frac{d^2}{dx^2}+3x\frac{d}{dx}+1)\psi$$

(e) $$(i\hbar\nabla+\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2\psi=(i\hbar\nabla+\mathbf{A}(\mathbf{r}))\cdot(i\hbar\nabla+\mathbf{A}(\mathbf{r}))\psi$$

$$= \quad (i\hbar\nabla+\mathbf{A}(\mathbf{r}))\cdot(i\hbar\nabla\psi+\mathbf{A}(\mathbf{r})\psi)=-\hbar^2\Delta\psi+i\hbar\nabla\cdot(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi)+i\hbar(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\psi+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\psi$$

$$= \quad -\hbar^2\Delta\psi+i\hbar\psi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+2i\hbar(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\psi+\boldsymbol{A}^2\psi$$

Si ha che [2]:

$$i\hbar\nabla\cdot(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi)=i\hbar(\psi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\psi)$$

Quindi

$$(e)=-\hbar^2\Delta+i\hbar\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+2i\hbar(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)+\boldsymbol{A}^2$$

(f) $$(\hat{L}-\widehat{M})(\hat{L}+\widehat{M})=\hat{L}^2+\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}-\hat{M}^2=\hat{L}^2-\hat{M}^2+(\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L})$$

(g) $$(\hat{L}-\widehat{M})(\widehat{M}-\hat{L})=\hat{L}\hat{M}-\hat{L}^2+\hat{M}\hat{L}-\hat{M}^2=-\hat{M}^2-\hat{L}^2+(\hat{L}\hat{M}+\hat{M}\hat{L})$$

(h) $$(\hat{L}-\widehat{M})(\hat{L}-\widehat{M})=\hat{L}^2-\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}+\hat{M}^2$$

Dato che gli operatori sono legati alle grandezze fisiche corrispondenti, le espressioni date sopra devono essere dimensionalmente corrette.

Discutere le dimensioni di $(e)=-\hbar^2\Delta+i\hbar\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+2i\hbar(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)+\boldsymbol{A}^2$.

La costante di Planck ridotta $\hbar$ ha le dimensioni di energia x tempo, oppure lunghezza x quantità di moto. L'espressione *(e)* deve essere quindi una quantità di moto al quadrato. Di conseguenza anche $\boldsymbol{A}$ deve rappresentare una quantità di moto.

Più avanti incontriamo proprio la quantità di moto (momento) $\hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx}$.

Trovare le espressioni degli operatori: $(\hat{L}-\hat{M})^2$, $(\hat{L}-\hat{M})^3$, dove *L* ed *M* sono grandezze omogenee (se così non fosse, avremmo problemi con le dimensioni).

$$(\hat{L}-\hat{M})^2=(\hat{L}-\hat{M})(\hat{L}-\hat{M})=\hat{L}^2-\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}+\hat{M}^2$$

$$(\hat{L}-\hat{M})^3=(\hat{L}-\hat{M})^2(\hat{L}-\hat{M})=(\hat{L}^2-\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}+\hat{M}^2)(\hat{L}-\hat{M})$$

$$=\hat{L}^3-\hat{L}\hat{M}\hat{L}-\hat{M}\hat{L}^2+\hat{M}^2\hat{L}-\hat{L}^2\hat{M}+\hat{L}\hat{M}^2+\hat{M}\hat{L}\hat{M}-\hat{M}^3$$

Oppure: $(\hat{L}-\hat{M})^3=(\hat{L}-\hat{M})(\hat{L}-\hat{M})^2=(\hat{L}-\hat{M})(\hat{L}^2-\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}+\hat{M}^2)$

$$=\hat{L}^3-\hat{L}^2\hat{M}-\hat{L}\hat{M}\hat{L}+\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}\hat{L}^2+\hat{M}\hat{L}\hat{M}+\hat{M}^2\hat{L}-\hat{M}^3$$

Sia noto il commutatore $[\hat{L},\hat{M}]=c$ **, si calcoli** $(\hat{L}-\hat{M})(\hat{L}+\hat{M})$.

$$(\hat{L}-\hat{M})(\hat{L}+\hat{M})=\hat{L}^2+\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}-\hat{M}^2=\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}+\hat{L}^2-\hat{M}^2=c+\hat{L}^2-\hat{M}^2$$

Nota
Il commutatore riveste un ruolo fondamentale nella meccanica quantistica. I commutatori godono delle seguenti proprietà:

$$[\hat{A},\hat{A}]=0 \quad ; \quad [\hat{A},\hat{B}]=-[\hat{B},\hat{A}]$$

$$[\hat{A},c]=0,\forall c\in C \quad ; \quad [\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]]+[\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]]+[\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]]=0 \quad \text{identità di Jacobi}$$

Da queste proprietà si ha che l'insieme dei commutatori è un'algebra sugli spazi di Hilbert. Questa è un'algebra di derivazione che ha come prodotto il commutatore. Ricordiamo che un anello differenziale è un anello *R* equipaggiato di una operazione di derivazione, cioè di una funzione *D*, tale che soddisfi le proprietà di additività e la regola di Leibniz:

$$D(r+s)=D(r)+D(s)$$

$$D(rs)=D(r)s+r\,D(s)$$

Occorre fare attenzione alla scrittura della seconda identità, in quanto l'anello potrebbe non essere commutativo.

Il commutatore compare anche nell'algebra di Lie. Essa è un'algebra non associativa a cui obbediscono gli oggetti che sono le parentesi di Lie (il commutatore $[a,b]=ab-ba$ corrisponde al prodotto di Lie).

Sia l'operatore momento dato da $\hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx}$ **, trovare il commutatore** con $\hat{x}$.

$$[\hat{x},\hat{p}]=x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)-\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)x$$

$$[\hat{x},\hat{p}]\psi=x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi-\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)x\psi$$

$$=\quad -i\hbar x\frac{d\psi}{dx}+i\hbar\frac{dx}{dx}\psi+i\hbar x\frac{d\psi}{dx}=i\hbar\psi$$

Come già detto, la costante di Planck ridotta ha le dimensioni energia x tempo. Ed in effetti, anche il prodotto $x\,p$ ha le stesse dimensioni.

$$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$$

Altre relazioni importanti sono:

$$[\hat{x},\hat{p}^n]=i\hbar n\,\hat{p}^{n-1}\qquad [\hat{x}^n,\hat{p}]=i\hbar n\,\hat{x}^{n-1}$$

$$[\hat{x},f(\hat{p})]=i\hbar\frac{\partial f}{\partial p}\qquad [g(\hat{x}),\hat{p}]=i\hbar\frac{\partial g}{\partial x}$$

Verificare che $[\hat{x},\hat{p}^2]=i\hbar 2\hat{p}$.

$$[\hat{x},\hat{p}\,\hat{p}]=\hat{x}\,\hat{p}\,\hat{p}-\hat{p}\,\hat{p}\,\hat{x}+\hat{p}\,\hat{x}\,\hat{p}-\hat{p}\,\hat{x}\,\hat{p}=[\hat{x},\hat{p}]\,\hat{p}+\hat{p}[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar 2\,\hat{p}$$

Verificare che $[\hat{x}^2, \hat{p}] = i\hbar 2\hat{x}$.

$$[\hat{x}\,\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\,\hat{x}\,\hat{p} - \hat{p}\,\hat{x}\,\hat{x} + \hat{x}\,\hat{p}\,\hat{x} - \hat{x}\,\hat{p}\,\hat{x} = \hat{x}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x} = i\hbar 2\hat{x}$$

Queste relazioni sono state dedotte nel caso unidimensionale. Altrimenti:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

dove $i, j, k = x, y, z$, e δ_{ij} è la delta di Kronecker;

Sia $f(\boldsymbol{r})$ **una funzione del vettore posizione.** Trovare il commutatore tra $\hat{\boldsymbol{p}}$ e $f(\boldsymbol{r})$ [3].

$$(\hat{\boldsymbol{p}} f - f\,\hat{\boldsymbol{p}})\psi = -i\hbar[\nabla f\,\psi - f\,\nabla\,\psi] = -i\hbar\psi\,\nabla f$$

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, f] = -i\hbar\nabla f$$

Analogamente:

$$[f(\hat{\boldsymbol{p}}), \boldsymbol{r}] = -i\hbar\frac{\partial f}{\partial\,\boldsymbol{p}}$$

Trovare le relazioni di commutazione tra i seguenti operatori:

(a) $\frac{d}{dx}$ e x ; (b) $i\hbar\nabla$ e $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$; (c) $\frac{\partial}{\partial\phi}$ e $f(r,\theta,\phi)$.

(a) $$\left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\right)\psi = \frac{d}{dx}(x\,\psi) - x\frac{d\psi}{dx} = \psi \quad \text{quindi} \quad \left[\frac{d}{dx}, x\right] = \left(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\right) = 1$$

(b) $$(i\hbar\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - i\hbar\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\psi = i\hbar\nabla\cdot(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi) - i\hbar\,\boldsymbol{A}\cdot\nabla\,\psi$$

$$= \quad i\hbar\psi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + i\hbar\,\boldsymbol{A}\cdot\nabla\,\psi - i\hbar\boldsymbol{A}\cdot\nabla\,\psi = i\hbar\psi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$$

$$\text{da cui} \quad [i\hbar\nabla, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})] = i\hbar\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$$

dove si è usato $i\hbar\nabla\cdot(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\psi) = i\hbar(\psi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\,\psi)$.

(c) $$\frac{\partial}{\partial\phi}(f\psi)-f\frac{\partial}{\partial\phi}(\psi)=\frac{\partial f}{\partial\phi}\psi+f\frac{\partial\psi}{\partial\phi}-f\frac{\partial\psi}{\partial\phi}=\frac{\partial f}{\partial\phi}\psi$$

$$[\frac{\partial}{\partial\phi},f]=\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

Nota I commutatori compaiono nelle soluzioni della seguente equazione: $e^X e^Y=e^Z$ dove X,Y sono due elementi non commutativi dell'algebra del gruppo di Lie. La più nota formula di soluzione viene detta di Baker-Campbell-Hausdorff.

$$Z=X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]+\frac{1}{12}[Y,[Y,X]]-\frac{1}{24}[Y,[X,[X,Y]]]+\ldots$$

Supponiamo che Y sia un operatore di creazione e X di distruzione della stessa particella.

Si ha $[X,Y]=1$, ed allora: $Z=X+Y+\frac{1}{2}$. Caso analogo possiamo ottenere con gli operatori momento e posizione.

Trovare gli operatori traslazione che mappano (a) $\psi(x)$ in $\psi(x+a)$ e (b) $\psi(\boldsymbol{r})$ in $\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})$. Trovare l'operatore che ruota lo spazio di un angolo α.

(a) $$\hat{T}_{\alpha}\psi(x)=\psi(x+a)$$

Sviluppo in serie di *a*: $\psi(x+a)=\psi(x)+a\frac{d\psi}{dx}+\frac{1}{2}a^2\frac{d^2\psi}{dx^2}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{d^n\psi}{dx^n}$

Poiché $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ si ha che $\hat{T}_a=\exp(a\frac{d}{dx})$.

Si procede nella stessa maniera per gli altri due casi: $\hat{T}_{\boldsymbol{a}}=\exp(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)$, $\hat{T}_{\alpha}=\exp(\alpha\frac{d}{d\phi})$

Trovare l'operatore che è hermitiano coniugato a (a) $\frac{d}{dx}$ e (b) $\frac{d^n}{dx^n}$.

L'operatore hermitiano coniugato è quell'operatore tale che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^+ \psi_1 \right]^* dx$$

dove gli integrali: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1|^2 dx$; $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_2|^2 dx$ si intende che esistano.

Vuol dire che ψ_1 e ψ_2 vanno a zero se $x \to \pm\infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx} dx = \psi_1^* \psi_2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \frac{d\psi_1^*}{dx} dx$$

ossia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left(- \frac{d\psi_1}{dx} \right)^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^+ \psi_1 \right]^* dx$$

Si ha quindi che: $\left(\frac{d}{dx}\right)^+ = -\frac{d}{dx}$. L'hermitiano coniugato di (b) $\left(\frac{d}{dx}\right)^n = \frac{d^n}{dx^n}$ è pari a $(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}$

Trovare l'operatore che è hermitiano coniugato all'operatore della traslazione nello spazio del vettore **a**.

Applico la definizione:

$$\int \psi_1^*(\vec{r})\, \hat{T}_{\vec{a}}\, \psi_2(\vec{r})\, d\tau = \int \psi_2(\vec{r})\, \hat{T}_{\vec{a}}^+\, \psi_1(\vec{r})\, d\tau$$

Usiamo un cambiamento di variabile: $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}'$.

$$\begin{aligned} I &= \int \psi_1^*(\vec{r})\, \hat{T}_{\vec{a}}\, \psi_2(\vec{r})\, d\tau = \int \psi_1^*(\vec{r})\, \psi_2(\vec{r}+\vec{a})\, d\tau \\ &= \int \psi_1^*(\vec{r}\,'-\vec{a})\, \psi_2(\vec{r}\,')\, d\vec{\tau}\,' \\ &= \int \left[\hat{T}_{-\vec{a}}\, \psi_1(\vec{r}\,') \right]^* \psi_2(\vec{r}\,')\, d\vec{\tau}\,' \\ &= \int \psi_2(\vec{r}) \left[\hat{T}_{-\vec{a}}\, \psi_1(\vec{r}) \right]^* d\tau \\ &= \int \psi_2(\vec{r}) \left[\hat{T}_{\vec{a}}^+\, \psi_1(\vec{r}) \right]^* d\tau \end{aligned}$$

Abbiamo che l'operatore è pari a $\hat{T}_{-\vec{a}}$. E' quindi l'operatore che comporta la traslazione del vettore opposto ad **a**.

Trovare l'operatore hermitiano coniugato di $i\frac{d}{dx}$.

Seguo la stessa via fatta in precedenza per l'operatore $\frac{d}{dx}$. Si trova che: $(i\frac{d}{dx})^{+}=i\frac{d}{dx}$.

Inoltre, l'hermitiano coniugato di $(i\frac{d}{dx})^{n}$ è pari a $(i\frac{d}{dx})^{n}$.

Nota
Un operatore $\hat{O}$ che goda della proprietà di coincidere con $\hat{O}^{+}$ è definito hermitiano [4]. Gli operatori $\hat{q},\hat{p}$ sono hermitiani.

Verificare che l'operatore $\exp(i\alpha\frac{\partial}{\partial\phi})$ è hermitiano.

Intanto notiamo che, dato che l'operatore è hermitiano, deve essere α reale.

Per definizione:

$$\exp(i\alpha\frac{\partial}{\partial\phi})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\frac{\partial}{\partial\phi})^{n}}{n!}\quad .$$

Si ha però, come visto prima:

$$[\frac{\partial^{n}}{\partial\phi^{n}}]^{+}=(-1)^{n}\frac{\partial^{n}}{\partial\phi^{n}}$$

Quindi:

$$[(i\frac{\partial}{\partial\phi})^{n}]^{+}=(-i)^{n}(-\frac{\partial}{\partial\phi})^{n}=(i\frac{\partial}{\partial\phi})^{n}$$

L'hermitiano coniugato è uguale all'operatore. Esso è pari a $\exp(i\alpha\frac{\partial}{\partial\phi})$, nel caso α reale. L'operatore è hermitiano.

Trovare l'hermitiano coniugato del prodotto degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

$$\int\psi_{1}\hat{A}\hat{B}\psi_{2}d\tau=\int\psi_{2}[(\hat{A}\hat{B})^{+}\psi_{1}]^{*}d\tau$$

$$\int \psi_1 \hat{A} \psi_3 \, d\tau = \int \psi_3 (\hat{A}^+ \psi_1)^* \, d\tau$$

dove $\psi_3 = \hat{B}\psi_2$. Introduco $\psi_4 = \hat{A}^+ \psi_1$:

$$\int \psi_3 (\hat{A}^+ \psi_1)^* \, d\tau = \int \psi_4^* \hat{B} \psi_2 \, d\tau$$

$$\int \psi_2 (\hat{B}^+ \psi_4)^* \, d\tau = \int \psi_2 (\hat{B}^+ \hat{A}^+ \psi_1)^* \, d\tau$$

da cui: $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$.

Mostrare che, se $\hat{L}$ e $\hat{M}$ sono hermitiani, lo sono anche gli operatori: $\hat{F} = \frac{1}{2}(\hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L})$, $\hat{f} = \frac{i}{2}(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L})$.

Utilizziamo il risultato dell'esercizio precedente.

Dato che gli operatori $\hat{L}$ e $\hat{M}$ sono hermitiani, allora: $\hat{L}^+ = \hat{L}$, $\hat{M}^+ = \hat{M}$.

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\hat{F}_1 + \frac{1}{2}\hat{F}_2 \rightarrow \hat{F}^+ = \frac{1}{2}\hat{F}_1^+ + \frac{1}{2}\hat{F}_2^+$$

Usando il risultato del calcolo precedente, ossia $(\hat{L}\hat{M})^+ = \hat{M}^+ \hat{L}^+$ e $(\hat{M}\hat{L})^+ = \hat{L}^+ \hat{M}^+$:

$$\hat{F}^+ = \frac{1}{2}\hat{M}^+ \hat{L}^+ + \frac{1}{2}\hat{L}^+ \hat{M}^+ = \frac{1}{2}\hat{L}\hat{M} + \frac{1}{2}\hat{M}\hat{L} = \hat{F}$$

Stessa cosa per l'altro operatore: $\hat{f} = \frac{1}{2}\hat{f}_1 + \frac{1}{2}\hat{f}_2 \rightarrow \hat{f}^+ = \frac{1}{2}\hat{f}_1^+ + \frac{1}{2}\hat{f}_2^+$

$$\hat{f}^+ = \frac{i^*}{2}\hat{M}^+ \hat{L}^+ - \frac{i^*}{2}\hat{L}^+ \hat{M}^+ = \frac{i}{2}\hat{L}\hat{M} - \frac{i}{2}\hat{M}\hat{L} = \hat{f}$$

Provare che il valore d'aspettazione del quadrato di un'osservabile è sempre positivo.

In meccanica quantistica una osservabile è una grandezza legata allo stato quantico. Nell'approccio matematico, un'osservabile viene rappresentata da un operatore lineare hermitiano, che opera su un vettore di stato del sistema.
Il valore d'aspettazione è definito come: $<\hat{O}> = \int \psi^* \hat{O} \psi \, d\tau$. Inoltre stiamo parlando del quadrato dell'osservabile.

Quindi $(\hat{O}\hat{O})^+=\hat{O}^+\hat{O}^+$.

Ricordo che: $\int \psi^* \hat{O}\psi \, d\tau=\int \psi (\hat{O}^+\psi)^* d\tau$. Uso $\psi_1=\hat{O}\psi$.

$$<\hat{O}^2>=\int \psi^* \hat{O}^2\psi \, d\tau=\int \psi (\hat{O}^+\hat{O}^+\psi)^* d\tau$$

$$\int \psi^* \hat{O}\hat{O}\psi \, d\tau=\int \psi^* \hat{O}\psi_1 d\tau=\int \psi_1^* (\hat{O}^+\psi)^* d\tau=\int \psi_1 (\hat{O}\psi)^* d\tau=\int \psi_1\psi_1^* d\tau>0$$

Per gli operatori $\hat{L}$ e $\hat{M}$ che soddisfano la condizione $\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}=1$,

trovare $\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}^2\hat{L}$.

$$\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}^2\hat{L}+\hat{M}\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}\hat{M}$$

$$= (\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L})\hat{M}+\hat{M}(\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L})=\hat{M}+\hat{M}=2\hat{M}$$

Passiamo a calcolare $\hat{L}\hat{M}^3-\hat{M}^3\hat{L}$, sempre nelle stesse condizioni del caso precedente.

$$\hat{L}\hat{M}^3-\hat{M}^3\hat{L}+\hat{M}^2\hat{L}\hat{M}-\hat{M}^2\hat{L}\hat{M}$$

$$= (\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}^2\hat{L})\hat{M}+\hat{M}^2(\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L})=2\hat{M}\hat{M}+\hat{M}^2=3\hat{M}^2$$

Iterando:

$$\hat{L}\hat{M}^4-\hat{M}^4\hat{L}+\hat{M}^3\hat{L}\hat{M}-\hat{M}^3\hat{L}\hat{M}$$

$$= (\hat{L}\hat{M}^3-\hat{M}^3\hat{L})\hat{M}+\hat{M}^3(\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L})=3\hat{M}^3+\hat{M}^3=4\hat{M}^3$$

Si arriva quindi al risultato che $\hat{L}\hat{M^n}-\hat{M^n}\hat{L}=n\hat{M}^{n-1}$.

Per gli operatori $\hat{L}$ e $\hat{M}$ che soddisfano la condizione $\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}=1$,

trovare $f(\hat{L})\hat{M}-\hat{M}f(\hat{L})$.

Notiamo che: $\hat{M}\hat{L^n}-\hat{L^n}\hat{M}=-n\hat{L}^{n-1}$. Infatti: $\hat{M}\hat{L}-\hat{L}\hat{M}=-1$. Poi:

$$\hat{M}\hat{L^2}-\hat{L^2}\hat{M}=\hat{M}\hat{L^2}-\hat{L^2}\hat{M}+\hat{L}\hat{M}\hat{L}-\hat{L}\hat{M}\hat{L}=(\hat{M}\hat{L}-\hat{L}\hat{M})\hat{L}+\hat{L}(\hat{M}\hat{L}-\hat{L}\hat{M})=-2\hat{L}$$

e così via. Scriviamo anche: $\hat{M}\hat{L}^{n+1}-\hat{L}^{n+1}\hat{M}=-(n+1)\hat{L}^{n}$.

Ricordiamo che: $f(\hat{L})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\hat{L}^{n}$.

$$
\begin{aligned}
f(\hat{L})\hat{M}-\hat{M}f(\hat{L}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\hat{L}^{n}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}^{n}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}\hat{L}^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

Se si pone $n-1=n_1$, si scrive:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{f^{(n_1+1)}(0)}{(n_1)!}\hat{L}^{n_1}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{[f'(0)]^{(n_1)}}{(n_1)!}\hat{L}^{n_1}=f'(\hat{L})$$

quindi $f(\hat{L})\hat{M}-\hat{M}f(\hat{L})=f'(\hat{L})$.

Per qualsiasi due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ che non commutano, provare che:

(a) $\hat{A}^{-1}\hat{B}^{2}\hat{A}=(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^{2}$

(b) $\hat{A}^{-1}\hat{B}^{n}\hat{A}=(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^{n}$ dove *n* è un intero.

(c) $\hat{A}^{-1}f(\hat{B})\hat{A}=f(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})$

Si ammetta che esiste $\hat{A}^{-1}$, dove , e *I* è l'operatore identità. Ricordiamo che: $\hat{B}^{2}=\hat{B}\hat{A}\hat{A}^{-1}\hat{B}$

(a) $$\hat{A}^{-1}\hat{B}^{2}\hat{A}=\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}=(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^{2}$$

(b) Calcoliamo poi

$$\hat{A}^{-1}\hat{B}^{3}\hat{A}=\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}=(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^{3}$$

Iterando si trova: $\hat{A}^{-1}\hat{B}^{n}\hat{A}=(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})^{n}$.

Per (c) si usa $f(\hat{B})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\hat{B}^n$ e si applicano le formule precedenti e si trova:

$$\hat{A}^{-1}f(\hat{B})\hat{A}=f(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A})$$

Provare che $\exp(\zeta\hat{A})\hat{B}\exp(-\zeta\hat{A})=\hat{B}+c\zeta$, dove $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=c$.

Ricordiamo che $\exp(-\zeta\hat{A})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\zeta)^n}{n!}\hat{A}^n$.

$$\hat{B}\exp(-\zeta\hat{A})-\exp(-\zeta\hat{A})\hat{B}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\zeta)^n}{n!}(\hat{B}\hat{A}^n-\hat{A}^n\hat{B})$$

Si ha che $\hat{B}\hat{A}^n-\hat{A}^n\hat{B}=n\hat{A}^{n-1}c$.

$$\hat{B}\exp(-\zeta\hat{A})-\exp(-\zeta\hat{A})\hat{B}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\zeta)^n}{n!}n\hat{A}^{n-1}c=c\zeta\exp(-\zeta\hat{A})$$

$$\exp(\zeta\hat{A})(\hat{B}\exp(-\zeta\hat{A})-\exp(-\zeta\hat{A})\hat{B})=\exp(\zeta\hat{A})c\zeta\exp(-\zeta\hat{A})$$

$$\exp(\zeta\hat{A})\hat{B}\exp(-\zeta\hat{A})=\hat{B}+c\zeta$$

Provare che: $\exp(i\zeta\hat{p}/\hbar)F(\hat{q})\exp(-i\zeta\hat{p}/\hbar)=F(\hat{q}+\zeta)$ dove $\hat{p},\hat{q}$ sono gli operatori momento e posizione.

Definiamo $\hat{A}=\exp(-i\zeta\hat{p}/\hbar)$ e $\hat{A}^{-1}=\exp(i\zeta\hat{p}/\hbar)$.

Abbiamo visto che:

$$\hat{A}^{-1}F(\hat{B})\hat{A}=F(\hat{A}^{-1}\hat{B}\hat{A}) \quad \text{e} \quad \exp(\zeta\hat{A})\hat{B}\exp(-\zeta\hat{A})=\hat{B}+c\zeta \quad ,$$

dove c è il commutatore. Quindi:

$$\hat{A}^{-1}F(\hat{q})\hat{A}=F(\hat{A}^{-1}\hat{q}\hat{A})$$

$$\hat{A}^{-1}\hat{q}\hat{A}=\hat{q}-i\zeta[\hat{p},\hat{q}]/\hbar=\hat{q}+\zeta$$

Infatti $[\hat{p},\hat{q}]=-i\hbar$. Quindi $\exp(i\zeta\hat{p}/\hbar)F(\hat{q})\exp(-i\zeta\hat{p}/\hbar)=F(\hat{q}+\zeta)$.

Trovare la relazione di commutazione tra gli operatori di annichilazione e creazione di una particella.

Tali operatori siano definita da:

$$\hat{a}=\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q}+i\frac{\hat{p}}{m}) \quad ; \quad \hat{a}^{+}=\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q}-i\frac{\hat{p}}{m})$$

dove *m* è la massa e *ω* la pulsazione.

$$[\hat{a},\hat{a}^{+}]=\hat{a}\hat{a}^{+}-\hat{a}^{+}\hat{a}$$

Calcoliamo:

$$(\omega\hat{q}+i\hat{p}/m)(\omega\hat{q}-i\hat{p}/m)-(\omega\hat{q}-i\hat{p}/m)(\omega\hat{q}+i\hat{p}/m)$$

Ricordiamo che: $[\hat{q},\hat{p}]=i\hbar$. Sviluppiamo il prodotto, si trova che:

$$(\omega\hat{q}+i\hat{p}/m)(\omega\hat{q}-i\hat{p}/m)-(\omega\hat{q}-i\hat{p}/m)(\omega\hat{q}+i\hat{p}/m)=2\hbar\omega/m$$

da cui: $[\hat{a},\hat{a}^{+}]=1$.

Trovare la relazione di commutazione tra le componenti dell'operatore momento angolare.

Si ha che $\hat{x}\hat{y}=\hat{y}\hat{x}$; $\hat{p}_x\hat{p}_y=\hat{p}_y\hat{p}_x$; $\hat{p}_x\hat{y}-\hat{y}\hat{p}_x=-i\hbar\delta_{xy}$.

Calcolo un caso:

$$\hat{L}_y\hat{L}_z-\hat{L}_z\hat{L}_y=(\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z)(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x)-(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x)(\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z)$$

$$= \hat{z}\hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_y-\hat{x}\hat{p}_z\hat{x}\hat{p}_y-\hat{z}\hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_x+\hat{x}\hat{p}_z\hat{y}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_y\hat{z}\hat{p}_x+\hat{y}\hat{p}_x\hat{z}\hat{p}_x+\hat{x}\hat{p}_y\hat{x}\hat{p}_z-\hat{y}\hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_z$$

$$= \hat{z}\hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_y+\hat{x}\hat{p}_z\hat{y}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_y\hat{z}\hat{p}_x-\hat{y}\hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_z$$

$$= \hat{z}\hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_y-\hat{x}\hat{p}_y\hat{z}\hat{p}_x+\hat{x}\hat{p}_z\hat{y}\hat{p}_x-\hat{y}\hat{p}_x\hat{x}\hat{p}_z$$

$$= \hat{z}\hat{p}_y(\hat{p}_x\hat{x}-\hat{x}\hat{p}_x)-\hat{p}_z\hat{y}(\hat{p}_x\hat{x}-\hat{x}\hat{p}_x)$$

$$= -i\hbar(\hat{z}\hat{p}_y-\hat{p}_z\hat{y}) \quad = \quad i\hbar(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y)$$

Usando le relazioni date sopra si ha quindi:

$$\hat{L}_y\hat{L}_z-\hat{L}_z\hat{L}_y=i\hbar(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y)=i\hbar\hat{L}_x$$

e così per le altre componenti.

$$\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_x \hat{L}_y = i\hbar \hat{L}_z \quad , \quad \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z = i\hbar \hat{L}_y$$

Dimostrare che $\hat{L}^2$ commuta con ogni componente di $\hat{L}$.

Ricordiamo che $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$.

Calcoliamo:

$$[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z] = \hat{L}_z \hat{L}_z \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{L}_z \hat{L}_z = 0$$

$$[\hat{L}_y^2, \hat{L}_z] = \hat{L}_y \hat{L}_y \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{L}_y \hat{L}_y$$

$$\hat{L}_y \hat{L}_y \hat{L}_z - \hat{L}_y \hat{L}_z \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_z \hat{L}_y - \hat{L}_z \hat{L}_y \hat{L}_y = \hat{L}_y [\hat{L}_y, \hat{L}_z] + [\hat{L}_y, \hat{L}_z] \hat{L}_y = i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_x + i\hbar \hat{L}_x \hat{L}_y$$

$$[\hat{L}_x^2, \hat{L}_z] = \hat{L}_x \hat{L}_x \hat{L}_z - \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_x$$

$$\hat{L}_x \hat{L}_x \hat{L}_z - \hat{L}_x \hat{L}_z \hat{L}_x + \hat{L}_x \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_z \hat{L}_x \hat{L}_x = \hat{L}_x [\hat{L}_x, \hat{L}_z] + [\hat{L}_x, \hat{L}_z] \hat{L}_x = -i\hbar \hat{L}_x \hat{L}_y - i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_x$$

Quindi $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$.

References

[1] Grechko, L.G., Sugakov, V.I., Tomasevich, O.F., & Fedorchenko, A.M. (1977). Problems in Theoretical Physics. Mir Publishers, Moscow.
[2] Sparavigna, Amelia Carolina. (2020, January 17). Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica. Zenodo. http://doi.org/10.5281/zenodo.3611419
[3] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšits (1976). Meccanica quantistica. Teoria non relativistica. Edizioni Mir.
[4] Cesare Rossetti (1980). Metodi matematici della fisica. Levrotto & Bella.