Zenodo - 17 Dec 2019, DOI 10.5281/zenodo.3581302 - 18 Dec 2019, DOI 10.5281/zenodo.3583296

La divergenza del prodotto vettoriale ed il vettore di Poynting

Amelia Carolina Sparavigna
Politecnico di Torino

Torino, 17 Dicembre 2019, aggiunti esercizi 18 Dicembre 2019

Abstract: Si vuole discutere il legame tra una formula del calcolo vettoriale e l'equazione di continuità dell'energia che coinvolge il vettore di Poynting. Il motivo è il seguente: evitare formulazioni di problemi di fisica che possono originare ambiguità.

Alcune formule dell'analisi vettoriale sono molto utili in fisica. Abbiamo ad esempio che:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0 \qquad (1)$$
$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = 0 \qquad (2)$$

La (1) è evidentemente importante per i campi conservativi (f è uno scalare), la (2) per i campi solenoidali, quali il campo magnetico. Altre relazioni le troviamo in Smirnov V. I., Corso di Matematica Superiore, Editori Riuniti, 1978, Volume 2, Pagina 391.

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \Delta\,\boldsymbol{A} \qquad (3)$$
$$\mathrm{div}(f\,\boldsymbol{A}) = f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\, f \cdot \boldsymbol{A} \qquad (4)$$
$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} \qquad (5)$$
$$\mathrm{rot}(f\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{A} + f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \qquad (6)$$

La (5) è alquanto interessante per l'utilizzo che ne possiamo fare col vettore di Poynting.

Sia $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ dove il vettore **E** è il campo elettrico e **B** il campo magnetico.

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}) \quad (7)$$

Per le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=-\frac{1}{\mu}\left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\mu\epsilon\,\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}[u_B+u_E] \quad (8)$$

dove $u=u_B+u_E$ è l'energia per unità di volume dei campi elettrici e magnetici.
Quindi si ha la ben nota:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{S})=-\frac{\partial u}{\partial t} \quad (9)$$

La (9) è stata scritta in assenza di densità di corrente. Quindi, utilizzando la relazione vettoriale (5) e le equazioni di Maxwell, abbiamo ricavato l'equazione di continuità dell'energia.
La (9) esprime in forma locale il fatto che il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie chiusa è pari alla variazione rispetto al tempo, cambiata di segno, dell'energia contenuta nel volume racchiuso dalla suddetta superficie.
Consideriamo ora due casi particolari.
Sia il campo **B** *uniforme* nel volume considerato e che si mantenga uniforme con passar del tempo. Il suo rotore è nullo. Per la (7) e la (8):

$$\frac{1}{\mu}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}) \;=\; -\frac{1}{\mu}\left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}[u_B] \quad (10)$$

Come mai non compare più la variazione rispetto al tempo dell'energia legata al campo elettrico?
Usiamo Maxwell. Si ha che $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\mu\epsilon\,\partial\boldsymbol{E}/\partial t$. Se il campo magnetico è uniforme, e nel tempo resta sempre uniforme, il suo rotore è sempre nullo; il campo elettrico deve essere costante nel tempo e quindi l'energia ad esso legata non cambia. In sostanza il campo elettrico non assorbe o cede energia. La sua densità di energia resta costante. Attenzione ancora. Dato che il campo **E** è

costante nel tempo, la relazione $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ impone che la variazione del campo magnetico sia costante e che quindi **B** sia funzione lineare del tempo.

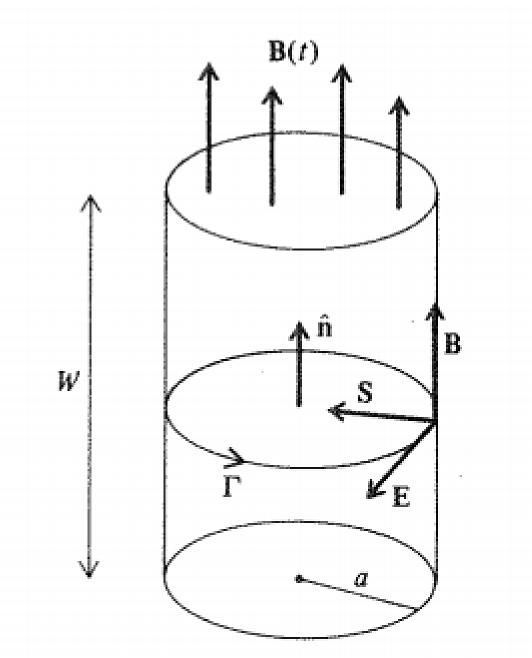
Passiamo al caso di un campo elettrico uniforme, che permanga uniforme al passar del tempo. Esso ha rotore nullo; allora, usando nuovamente $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, si ha che è ora il campo magnetico a non variare nel tempo. Quindi:

$$\frac{1}{\mu}\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=-\frac{1}{\mu}(\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) = -\epsilon\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}[u_E] \quad (11)$$

Siccome il campo **B** non cambia col tempo, sempre per Maxwell, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}=\mu\epsilon\,\partial\boldsymbol{E}/\partial t$, abbiamo che il campo **E** uniforme deve essere funzione lineare del tempo.

Queste relazioni spiegano alcune difficoltà inerenti ad esercizi che si trovano su libri di testo ed internet, e che riguardano volumi con campi uniformi elettrici (in condensatori piani) e magnetici (solenoidi o traferri), ma che sono variabili nel tempo. Si deve quindi prestare molta attenzione alla formulazione dei problemi.

Vediamo due esempi. Il primo è un tema d'esame che si trova nel testo dal titolo Fisica 2. Problemi d'esame svolti (1993-1995) di Luigi Quartapelle, Cristina Lenardi, Martino Travagnin, pagina 66.



"Una opportuna distribuzione di correnti provoca in una regione dello spazio avente forma cilindrica con raggio a e lunghezza W l'insorgere di un campo magnetico uniforme diretto come l'asse del cilindro e avente modulo variabile nel tempo. Si determini il campo elettrico sulla superficie laterale del cilindro supponendo che la densità di carica elettrica netta sia nulla in tutto lo spazio. Si mostri inoltre che la variazione nel tempo dell'energia del campo magnetico nella regione considerata è uguale al flusso del vettore di Poynting attraverso la sua superficie laterale."

La figura a lato è data ad illustrare il problema.

Applicando le legge di Faraday-Lenz si arriva all'espressione del campo elettrico indotto, che sulla superficie del cilindro ha la forma:

$$\boldsymbol{E}=-\frac{a}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\boldsymbol{u}_{\phi} \qquad (12)$$

$\boldsymbol{u}_{\phi}$ è il versore tangente la curva Γ, nel verso della figura. Calcolando il flusso del vettore di Poynting si arriva facilmente a vedere che esso è pari a:

$$\Phi_S=\pi\epsilon C^2 a^2 W B\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (13)$$

Se si calcola l'energia del campo magnetico all'interno del cilindro si ha $U_{\boldsymbol{B}}=\frac{\pi}{2}\epsilon C^2 a^2 W B^2$, che derivata rispetto al tempo porta alla (13).

Per quanto visto prima però, la formulazione del problema con campo magnetico uniforme è perfetta se **B**(t) è una funzione lineare nel tempo. In questo modo, la derivata rispetto al tempo del campo elettrico è nulla e l'energia relativa al campo elettrico è costante.

Se il campo magnetico fosse una funzione non lineare rispetto al tempo, il problema risulterebbe mal posto, se si chiede che esso sia anche uniforme. Il rotore di **B** nullo darebbe infatti un campo elettrico costante nel tempo, che invece, per la (12), sarebbe dipendente dal tempo. Il flusso del vettore di Poynting non potrebbe essere pari solo alla variazione dell'energia magnetica. Dovrebbe anche coinvolgere la variazione dell'energia che ha sede nel campo elettrico.

Passiamo ad un altro problema, questa volta coinvolgente un campo elettrico. Il problema è tratto da Problemi di Fisica Generale, Elettromagnetismo Ottica, di Massimo Nigro e Cesare Voci. 1986, pagina 359.

"Un condensatore piano con armature circolari, caricato alla d.d.p. V_o, viene lasciato scaricare attraverso un resistore di resistenza R_o. Calcolare il flusso totale di energia dall'interno all'esterno del condensatore durante la scarica". La soluzione recita: "Dobbiamo calcolare i campi **E** e **B** e da questi il vettore di Poynting **S** durante la scarica".

La soluzione proposta non dice che il campo **E** nel condensatore sia uniforme, ma tale deve essere, data la forma del modulo del campo **B** indotto, dato a pagina 359, $B=\frac{\mu\epsilon R}{2}\frac{\partial E}{\partial t}$. Il testo della soluzione dice che questo è il modulo del campo magnetico sulla superficie laterale cilindrica del condensatore, a sezione circolare di raggio R. Il modulo del vettore di Poynting è:

$$S=\frac{EB}{\mu}=\epsilon\frac{R}{2}E\frac{\partial E}{\partial t} \quad (14)$$

Questo modulo è pari, dice il testo, alla variazione dell'energia relativa alla presenza del campo elettrico.

Il problema deve quindi essere affrontato con cautela. Nel processo di scarica del condensatore, la variazione del campo elettrico rispetto al tempo non è lineare. La derivata del campo elettrico rispetto al tempo non è una costante e di conseguenza il campo magnetico è funzione del tempo. Se questo campo è funzione del tempo, anche la sua energia entra in gioco insieme all'energia dovuta alla presenza del campo elettrico. Essendo la variazione dell'energia legata al flusso del vettore di Poynting, la (14) è valida solo se la variazione dell'energia dovuta al campo magnetico è nulla, oppure se la consideriamo trascurabile. Del resto, anche l'assumere il campo elettrico nel condensatore come uniforme è una approssimazione.