

POLITECNICO DI TORINO

Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria per l'Ambiente e il  
Territorio

Tesi di Laurea Magistrale

# Dinamica stocastica delle lingue glaciali

**Relatori:**

Luca Ridolfi

Elisa Mantelli

**Candidato:**

Matteo Bertagni

ottobre 2015

*Ai miei nonni, per aver sempre creduto in me*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 La dinamica dei ghiacciai</b>	<b>4</b>
1.1 Genesi e morfologia . . . . .	5
1.2 Movimento . . . . .	6
1.3 Ice stream . . . . .	7
<b>2 Modello matematico</b>	<b>9</b>
2.1 Struttura del modello . . . . .	10
2.1.1 Bilancio di massa . . . . .	11
2.1.2 Sforzi di taglio e velocità di scivolamento . . . . .	12
2.1.3 Bilancio termico . . . . .	14
2.1.4 Processi basali e drenaggio subglaciale . . . . .	16
2.1.5 Temperatura basale . . . . .	17
2.1.6 I sistemi di equazioni . . . . .	18
2.2 Modalità di moto . . . . .	20
2.3 Biforcazione di Hopf . . . . .	24
2.3.1 Risposta del sistema a diversi valori di $T_s$ . . . . .	24
2.3.2 Risposta del sistema a diversi valori di $a_c$ . . . . .	28
<b>3 Studio sui dati delle carote di ghiaccio</b>	<b>31</b>
3.1 Paleoclimatologia terrestre . . . . .	31
3.2 Studi multiparametrici sugli <i>ice cores</i> . . . . .	32
3.2.1 Ricostruzione della temperatura tramite la determinazione del rapporto isotopico $^{18}O/^{16}O$ . . . . .	33
3.3 Dati di accumulo nevoso e temperatura . . . . .	34
3.3.1 Dome C-Antartide . . . . .	34
3.3.2 GISP2-Groenlandia . . . . .	36
3.3.3 Crosscorrelazione $a_c$ e $T_s$ . . . . .	39
<b>4 Risposta del modello ai dati GISP2</b>	<b>40</b>
4.1 Sviluppo dinamico del sistema rispetto a diversi valori di $T_s$ . . . . .	41
4.2 Sviluppo dinamico del sistema rispetto a diversi valori di $a_c$ . . . . .	44

4.3	Organizzazione dei risultati successivi . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Forzanti periodiche</b>	<b>48</b>
5.1	Introduzione . . . . .	48
5.1.1	Ciclo limite di confronto . . . . .	50
5.2	Variazione periodica dell'accumulo nevoso . . . . .	51
5.2.1	Attrazione del punto stazionario . . . . .	53
5.2.2	Alternanza stato oscillatorio e stazionario . . . . .	55
5.3	Variazione periodica della temperatura superficiale . . . . .	57
5.3.1	Ciclo limite-Punto . . . . .	58
5.3.2	Variazioni del ciclo limite . . . . .	61
5.4	Variazioni congiunte di $a_c$ e $T_s$ . . . . .	62
5.4.1	Oscillazioni in fase . . . . .	63
5.4.2	Oscillazioni in controfase . . . . .	64
5.5	Considerazioni sulla frequenza di oscillazione di $h$ e $w$ . . . . .	67
5.6	Conclusioni . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Forzanti stocastiche</b>	<b>71</b>
6.1	Introduzione . . . . .	71
6.1.1	Rumore Gaussiano colorato (CGN) . . . . .	71
6.2	Processo di Ornstein-Uhlenbeck per $a_c$ . . . . .	74
6.3	Processo di Ornstein-Uhlenbeck per $T_s$ . . . . .	81
6.4	Rumore Gaussiano bianco su $h$ e $w$ . . . . .	86
6.5	Conclusioni . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Biforcazione stocastica</b>	<b>92</b>
7.1	Introduzione . . . . .	92
7.2	Biforcazione temperatura superficiale . . . . .	92
7.2.1	Analisi dati ampiezze oscillazione $h$ . . . . .	93
7.2.2	Analisi dati periodi oscillazione $h$ . . . . .	95
7.3	Biforcazione accumulo nevoso . . . . .	97
7.3.1	Analisi dati ampiezze oscillazione $h$ . . . . .	98
7.3.2	Analisi dati periodi oscillazione $h$ . . . . .	100
7.4	Diagramma biforcazione 3D . . . . .	101
7.5	Conclusioni . . . . .	103
	<b>Conclusioni</b>	<b>104</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>107</b>

# Introduzione

Il ghiaccio dei ghiacciai continentali (Antartide e Groenlandia) non è trasportato in maniera uniforme dalle zone interne verso la costa: esistono infatti delle zone in grado di drenare una maggiore quantità di ghiaccio rispetto ad altre. In tali aree si sviluppano delle correnti, con alte velocità del flusso di ghiaccio, chiamate lingue glaciali (ice stream).

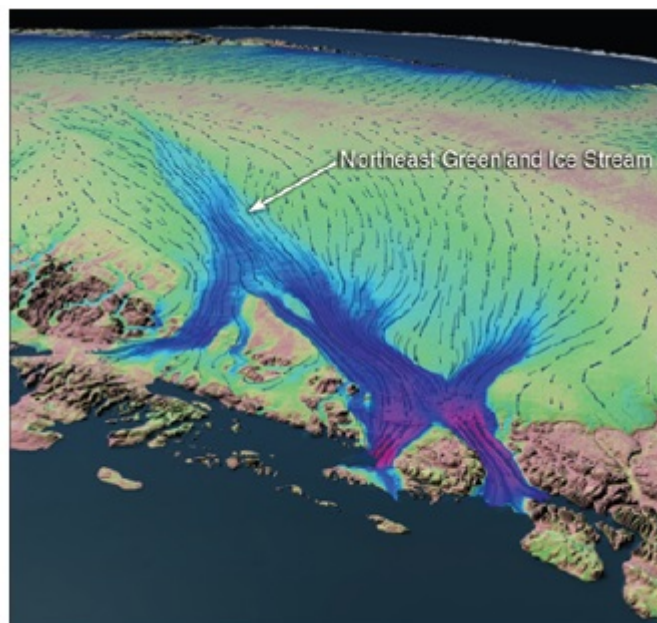


Figura 1: Immagine satellitare di un ice stream in Groenlandia. Le zone in blu rappresentano le lingue glaciali dove il moto del ghiaccio è maggiore. Immagine Nasa, disponibile su Wikipedia.

Gli ice stream defluiscono dall'interno del ghiacciaio fino alla costa, con larghezze superiori ai 20 chilometri, lunghezze superiori ai 150 chilometri e spessori che possono raggiungere anche i 2 chilometri. I margini laterali di un ice stream, chiamati margini di taglio, possono essere costituiti da limiti

topografici o da zone in cui il flusso di ghiaccio presenta velocità inferiori. In Antartide, gli ice stream sono in grado di drenare circa il 90% del ghiaccio accumulato nelle zone interne verso il mare assumendo così un ruolo molto importante nel bilancio di massa dei ghiacciai continentali (Bamber *et al.*, 2000). Inoltre, rilasciando enormi quantità di ghiaccio negli oceani, gli ice stream sono in grado di determinare variazioni della salinità e della temperatura dell'acqua e costituiscono uno dei principali responsabili dell'incremento del livello del mare. Infatti, per ogni gigatonnellata di ghiaccio, equivalente in volume a circa  $1 \text{ km}^3$ , riversata negli oceani, il livello del mare si alza di  $0,00276 \text{ mm}$  (Cuffey & Paterson, 2010). Per tali motivazioni gli ice stream rappresentano un importante argomento di studio.

Uno degli ultimi modelli matematici proposti per simulare la dinamica delle lingue glaciali è quello di Robel *et al.* (2013). Questo modello offre il vantaggio di essere composto da equazioni alle derivate ordinarie, che determinano l'evoluzione temporale, ma non spaziale, dei parametri delle lingue glaciali. In particolare il modello di Robel *et al.* (2013) individua due possibili comportamenti dinamici per l'ice stream: quello stazionario (steady mode) e quello oscillatorio (binge-purge).

Le simulazioni svolte in questi anni hanno tenuto costanti i valori dei fattori climatici, fondamentali nella determinazione della soluzione dinamica: la temperatura superficiale ( $T_s$ ) e l'accumulo nevoso ( $a_c$ ). Siccome la scala temporale di tali simulazioni è dell'ordine delle decine di migliaia di anni, l'ipotesi che  $T_s$  e  $a_c$  siano costanti nel tempo è fortemente limitante.

Alcuni studi, elaborati da diversi gruppi di ricerca, su carote di ghiaccio estratte in Antartide e Groenlandia, hanno permesso la ricostruzione temporale di tali grandezze ( $T_s$  e  $a_c$ ) negli ultimi 10'000 anni (periodo geologico dell'Olocene). In questo lavoro di tesi si è eseguita un'analisi di due di queste serie temporali, rappresentative per i due ghiacciai continentali (Antartide e Groenlandia), in modo da ottenere: la distribuzione di probabilità, l'autocorrelogramma e lo spettro nel dominio delle frequenze. Così facendo è stato possibile riprodurre numericamente serie temporali, simili a quelle registrate, con cui forzare il modello.

Lo scopo di questa tesi è infatti valutare quali effetti induce il rumore nella risposta del modello, in modo da verificare se le soluzioni dei casi deterministici (senza forzature esterne, con valori di  $a_c$  e  $T_s$  costanti) si conservino nei casi dinamici.

Le serie temporali di  $a_c$  e  $T_s$  sono state create prima con andamenti periodici, di determinati ampiezze e periodi, che permettessero di valutare quale fosse la risposta del sistema a variazioni dinamiche dei parametri, e successivamente con rumore Gaussiano colorato (processo di Ornstein-Uhlenbeck), che rappresenta più realisticamente la dinamica stocastica dei parametri clima-

tici.

Questo lavoro di tesi è strutturato come segue:

- Capitolo 1: riassume i processi che portano alla formazione di un ghiacciaio, al suo mantenimento e al suo moto
- Capitolo 2: descrive brevemente il modello matematico adottato (quello di Robel *et al.* (2013)); spiegando di quali processi fisici tiene conto, quali parametri coinvolge e quali possibili soluzioni individua
- Capitolo 3: illustra le serie temporali, e i relativi parametri statistici, delle grandezze esterne ( $a_c$  e  $T_s$ ), ricavate dagli studi sulle carote di ghiaccio
- Capitolo 4: mostra quali possibili soluzioni offre il modello nel range di valori delle grandezze esterne registrati della carota di ghiaccio GISP2 (Groenlandia)
- Capitolo 5: contiene i risultati del modello a riproduzioni periodiche dei segnali temporali delle grandezze esterne ( $a_c$  e  $T_s$ )
- Capitolo 6: mostra i risultati del modello a forzature di tipo stocastico. In particolare si considerano due tipi di rumore:
  1. rumore colorato Gaussiano sugli andamenti temporali delle grandezze esterne ( $a_c$  e  $T_s$ )
  2. rumore bianco Gaussiano nelle equazioni che definiscono l'andamento temporale dei parametri del ghiacciaio
- Capitolo 7: mostra l'influenza delle forzanti stocastiche esterne sul diagramma di biforcazione deterministico individuato dal modello di Robel *et al.* (2013)

# Capitolo 1

## La dinamica dei ghiacciai

Con il termine ghiacciaio si intende un accumulo naturale di ghiaccio dovuto alla trasformazione della neve meteorica, inizialmente soffice e porosa, dapprima in neve granulare, detta anche Firn, poi in ghiaccio con aria all'interno e infine in ghiaccio compatto. Questo processo si attua sotto l'effetto della pressione della massa nevosa sovrastante e grazie alle ripetute azioni di gelo e disgelo.

La formazione dei ghiacciai è strettamente connessa alle condizioni climatiche delle aree in cui essi si sviluppano. Zone favorevoli sono quelle presenti alle alte quote e alle alte latitudini, dove la neve caduta durante la stagione invernale non riesce a fondere completamente durante la stagione estiva, accumulandosi così fino alla completa trasformazione in ghiaccio. A questo processo è legato il cosiddetto limite delle nevi persistenti, che costituisce appunto il livello altimetrico al di sopra del quale la neve caduta non si scioglie più completamente. Tale limite varia nell'ambito di un territorio anche in funzione della temperatura dell'aria, dell'umidità e dei venti. Attualmente questo limite si trova a circa 4'500 m di altitudine nelle zone equatoriali, sale verso i 5'000 m nelle zone tropicali, mentre scende sui 3'000 m nella fascia temperata, fino a giungere a livello del mare nelle aree polari.

Una prima divisione fondamentale per i ghiacciai è quella che li separa in continentali e locali

1. i ghiacciai continentali sono caratteristici delle zone polari (Antartide e Groenlandia) e hanno dimensioni che superano i 50'000 km<sup>2</sup>. Possono raggiungere spessore di qualche km e coprono la maggior parte delle terre emerse polari, circa l'80% della Groenlandia e il 90% dell'Antartide.
2. i ghiacciai locali o montani sono invece di più piccole dimensioni e sono presenti in tutte le regioni del globo (eccezion fatta per l'Au-

stralia). Sono formazioni allungate di neve ghiacciata, accumulatasi immediatamente sotto gli elevati picchi montuosi.

Circa il 10% delle terre emerse è ricoperto dai ghiacciai e solo l'1% appartiene alla categoria dei ghiacciai continentali (Cuffey & Paterson, 2010). Tali masse di ghiaccio sono sistemi che interagiscono con l'ambiente circostante interessando sia scale temporali corte, di ore e giorni, che scale temporali molto più lunghe, migliaia di anni ed ere geologiche.

## 1.1 Genesi e morfologia

La formazione di un ghiacciaio è data da due eventi in serie:

1. l'accumulo della precipitazione nevosa
2. la trasformazione della neve in ghiaccio

Le condizioni fisiche (pressione, umidità, temperatura) a cui sono soggetti i cristalli di neve caduti al suolo, cambiano notevolmente nel passaggio da atmosfera a terreno; si instaurano così una serie di trasformazioni, detti metamorfismi, che rendono la forma del cristallo più arrotondata. Tali trasformazioni sono favorite dal peso degli strati di neve superiori generati dal continuo accumulo della precipitazione nevosa. La compattazione si esplica in un processo di aumento della densità: dalla neve con densità di circa  $100 \text{ kg/m}^3$ , si passa allo stato intermedio del Firn in cui sono ancora presenti pori pieni di acqua e aria con una densità di  $500 \text{ kg/m}^3$ , sino ad arrivare al ghiaccio compatto con densità superiore ai  $900 \text{ kg/m}^3$ .

Condizione necessaria affinché il ghiacciaio si formi è che la quantità di neve che cade e si accumula sia maggiore della quantità persa per fusione o sublimazione. Un ghiacciaio tipico (figura 1.1) è costituito sostanzialmente da due parti: una zona di alimentazione, dove si accumula neve che si trasforma in ghiaccio, e una zona di ablazione, dove lo scioglimento della neve ogni anno è quasi completo e dà così luogo alla formazione dei torrenti glaciali. L'estensione verso valle della zona di ablazione determina la formazione delle lingue glaciali, che presentano un limite detto fronte, variabile con il tempo perché soggetto a più o meno rapidi scioglimenti. Il bilancio tra quanto si accumula nella zona di alimentazione e quanto si perde in quella di ablazione permette di valutare l'evoluzione del ghiacciaio stesso: se tale bilancio è positivo, l'intero sistema aumenta di volume e ciò si traduce in un'avanzata del ghiacciaio; se invece il bilancio è negativo, si dice che il ghiacciaio arretra.

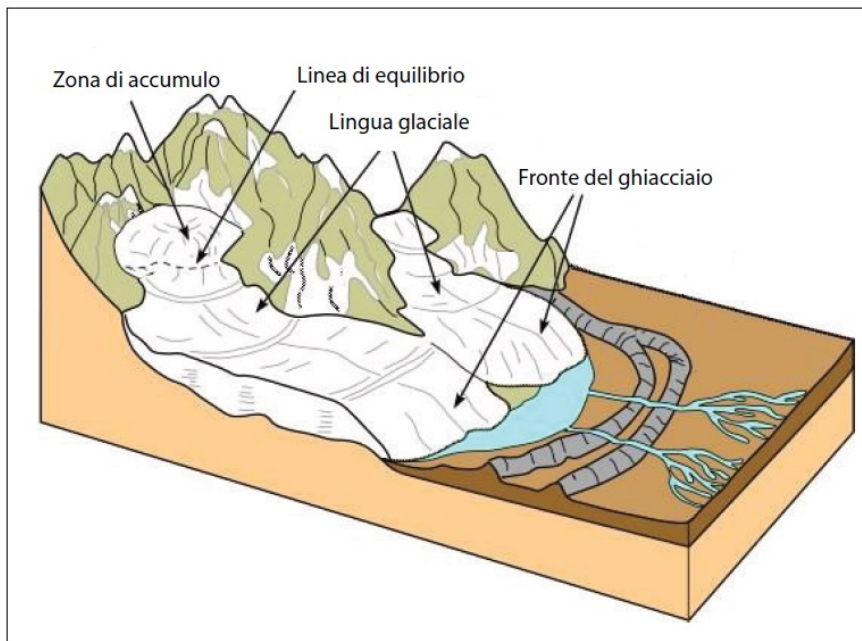


Figura 1.1: struttura morfologica di un ghiacciaio tipico. Immagine da Elba (2014)

## 1.2 Movimento

I ghiacciai locali scorrono sempre verso altitudini minori e quelli continentali verso il mare. In questo senso non bisogna confondere l'espressione di arretramento di un ghiacciaio, che spiega come il volume totale del ghiacciaio sia in riduzione, con l'effettiva avanzata del ghiacciaio che si muove sempre nella stessa direzione.

I fattori che determinano il flusso di un ghiacciaio sono molteplici (Jiskoot, 2011):

- la geometria del ghiacciaio
- la temperatura e la densità del ghiaccio
- la geometria della valle e le condizioni del terreno
- i termini di accumulo nevoso e ablazione

Il moto del ghiacciaio è operato principalmente da due fenomeni fisici

1. lo slittamento basale, che si instaura quando, a causa dell'alta pressione che si esercita sul fondo del ghiacciaio, parte del ghiaccio alla base si

scioglie, formando un sottile strato di acqua. L'acqua funge da lubrificante e permette al ghiacciaio di scivolare con maggiore facilità. La formazione di acqua sul fondo del ghiacciaio dipende da:

- lo spessore del ghiacciaio, maggiore è lo spessore e maggiore risulta l'aumento di pressione sul fondo e quindi l'aumento della temperatura di fusione
  - la temperatura esterna, poiché a temperature minori la fusione del ghiaccio è inibita
  - le caratteristiche del terreno sul fondo, perché la presenza di ostacoli e l'elevata rugosità determinano maggiori attriti e maggiori dispersioni di calore che permettono lo scioglimento del ghiaccio
2. la seconda causa principale di moto di un ghiacciaio è la deformazione interna. Questa è causata dal fatto che il ghiacciaio si deforma sotto l'effetto del proprio peso, e non avendo limiti fisici contenitivi, tende a spargersi sulla superficie disponibile.

A queste due forze motrici si oppone l'attrito che c'è fra il ghiaccio in movimento e il terreno sottostante. Come sarà maggiormente spiegato in seguito, il moto del ghiacciaio dipende quindi da disequilibri fra le forze di spinta, dette anche propulsive, (lo slittamento basale e la deformazione viscosa) e quelle di attrito.

### 1.3 Ice stream

Il ghiaccio dei ghiacciai continentali non viene trasportato in maniera uniforme dalle zone interne verso la costa, bensì esistono aree in grado di drenare una maggiore quantità di ghiaccio rispetto ad altre. Tali zone, in cui il flusso di ghiaccio raggiunge velocità decisamente più elevate rispetto alle aree circostanti, sono chiamate ice stream.

Nei ghiacciai continentali si raggiungono spessori notevoli della massa glaciale e quindi elevati sforzi propulsivi. Quando invece lo spessore della massa glaciale è minore, ad esempio ai margini del ghiacciaio continentale, lo sforzo propulsivo diminuisce decrementando quindi anche la velocità con cui il ghiaccio defluisce. Questo implica che la portata di ghiaccio in movimento si concentra nelle depressioni del letto roccioso, dove lo spessore della massa glaciale è maggiore, generando gli ice stream. In tali zone, un elevato sforzo propulsivo genera un'alta velocità di scivolamento alla base e quindi una notevole quantità di calore a causa dei fenomeni di attrito con il letto roccioso.

L'alto spessore dello strato di ghiaccio trattiene il calore alla base, non facendolo disperdere verso l'alto e causando la fusione di un'ulteriore quantità di ghiaccio. Per questa ragione negli ice stream si raggiungono velocità molto elevate (anche di diversi km l'anno) rispetto alle zone di ghiaccio circostanti, che si muovono invece più lentamente (decine di metri l'anno). Due esempi sono costituiti dai ghiacciai Lambert in Antartide e Jakobshavn Isbrae in Groenlandia, in cui le masse di ghiaccio si muovono con velocità fino ai 10 km all'anno.

# Capitolo 2

## Modello matematico

In questo capitolo sarà illustrato sinteticamente il modello matematico proposto da Robel *et al.* (2013) per la dinamica delle lingue glaciali.

Tale modello matematico presenta il vantaggio di catturare la fisica essenziale dei processi fisici, pur essendo un modello concentrato composto da equazioni alle derivate ordinarie, che descrivono i parametri del ghiacciaio nelle loro evoluzioni temporali, ma non in quelle spaziali (per cui diventerebbero necessari sistemi alle derivate parziali). In questo modo è possibile introdurre il rumore nel sistema di equazioni alle derivate ordinarie e ottenere delle soluzioni numeriche senza l'ausilio di computer ad alta potenza di calcolo. In particolare si farà riferimento a:

1. struttura del modello
2. modalità di moto
3. biforcazione

## 2.1 Struttura del modello

Nel modello di Robel *et al.* (2013) la lingua glaciale è ipotizzata come un unico blocco, di forma parallelepipedica, con lunghezza  $L$  nella direzione principale di flusso del ghiacciaio  $x$  e larghezza  $W$  nella direzione perpendicolare al flusso  $y$  (figura 2.1).

All'interno di tale dominio, l'ice stream di spessore  $h$  si muove grazie alla gravità scorrendo sopra uno strato di sedimenti non congelati di spessore  $Z_s$  costante lungo la direzione di flusso (figura 2.1). Il moto avviene lungo la direzione  $x$  assumendo trascurabili gli spostamenti lungo la direzione  $y$ .

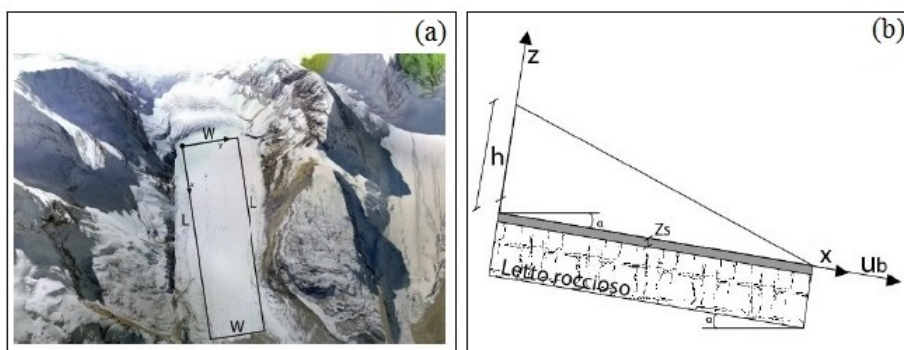


Figura 2.1: (a): dominio del modello.(b): schema della sezione longitudinale del ghiacciaio.  $Z_s$  è lo spessore dei sedimenti,  $h$  è l'altezza del ghiacciaio,  $u_b$  è la velocità di scivolamento alla base (Immagine modificata da Elba (2014))

Il modello, essendo concentrato, fornisce l'evoluzione dei parametri nel tempo, considerando fisso il punto di osservazione e valutando il flusso lungo la direzione  $x$ , in particolare lungo la linea di flusso mediana. Dato che la velocità di scivolamento alla base  $u_b$  è molto maggiore rispetto alla componente di velocità data dalla deformazione viscosa del ghiaccio (Engelhardt & Kamb, 1998), il modello non valuta le variazioni di velocità della lingua glaciale lungo la verticale, bensì considera una velocità unica media per il blocco di ghiaccio.

### 2.1.1 Bilancio di massa

Una delle equazioni fondamentali del modello riguarda la variazione dello spessore del ghiacciaio ( $h$ ). Essa è il risultato del bilancio tra la quantità di neve precipitata, che va ad aumentare l'altezza del ghiacciaio sedimentandosi sulla superficie, e la quantità di ghiaccio che viene eliminata per effetto dello stiramento del ghiacciaio nel suo moto.

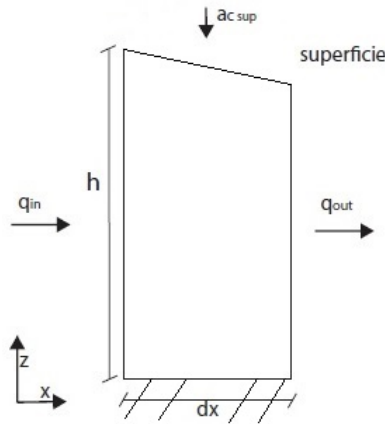


Figura 2.2: Elemento infinitesimo del ghiacciaio nel piano  $\{x, z\}$ . Il termine  $a_c$  indica il tasso di accumulo annuale di precipitazione nevosa,  $q_{in}$  e  $q_{out}$  rappresentano rispettivamente il flusso di ghiaccio entrante e uscente nelle colonne (immagine modificata da Elba (2014))

Dalla figura 2.2, si avrà che il flusso totale sarà dato dalla differenza fra il flusso in ingresso e quello in uscita:

$$q_{tot} = q_x - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + q_x \right) \quad (2.1)$$

$$q_{tot} = - \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (2.2)$$

Avendo considerato un flusso  $q_x = u_b h$  dovuto alla velocità di scivolamento alla base e considerando tale velocità uniforme nel dominio, l'equazione 2.2 diventerà:

$$q_{tot} = -u_b \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.3)$$

scritta in forma esplicita

$$q_{tot} = -u_b \frac{h_{in} - h_{out}}{dx} \quad (2.4)$$

Applicandola all'intero dominio di lunghezza  $L$ , sapendo che  $h(L)=0$  (figura 2.1), risulta:

$$q_{tot} = -\frac{u_b h}{L} \quad (2.5)$$

Considerando le variazioni dello spessore della lingua glaciale dovute sia all'accumulo annuale di precipitazione nevosa ( $a_c$ ) che al flusso di ghiaccio all'interno del dominio (figura 2.2), l'equazione di continuità del modello diventa:

$$\frac{dh}{dt} = a_c - \frac{u_b h}{L} \quad (2.6)$$

Osservando tale equazione si può notare come, in assenza di moto, la variazione dello spessore sia positiva e corrispondente al valore di  $a_c$ ; poiché il ghiacciaio ristagna e si inspessisce a causa della neve che si sedimenta in superficie.

Situazione contraria si ha invece nel caso in cui il termine di moto sia superiore a quello di accumulo, causando un assottigliamento del ghiacciaio.

## 2.1.2 Sforzi di taglio e velocità di scivolamento

### Forza motrice

La forza motrice per il movimento del ghiacciaio è la gravità: la lingua glaciale grazie alla propria forza peso e al piano inclinato sulla quale si trova, innesca il proprio moto con una velocità di scivolamento alla base  $u_b$ .

Considerando la lingua glaciale come una corrente a pelo libero in moto uniforme delimitata dai margini di taglio, essa attraverserà una sezione di area  $A = Wh$  (figura 2.3). Lo sforzo tangenziale al fondo responsabile del moto è pari a:

$$\tau_d = \gamma_i R_i i \quad (2.7)$$

dove  $\gamma_i$  indica il peso specifico del ghiaccio,  $R_i$  il raggio idraulico e  $i$  la pendenza della superficie del ghiacciaio. La sezione trasversale della lingua glaciale è interessata da un perimetro bagnato pari a  $P = w + 2h$ . Considerando trascurabile lo spessore  $h$  rispetto alla larghezza  $W$  ( $h \ll W$ ), si ottiene un perimetro  $P = W$ . Il raggio idraulico risultante sarà quindi:

$$R_i = \frac{A}{P} = \frac{hW}{W} = h \quad (2.8)$$

Per quanto concerne il termine relativo alla pendenza della superficie, sapendo che  $h_{finale} = 0$ , risulta:

$$i = \frac{h}{L} \quad (2.9)$$

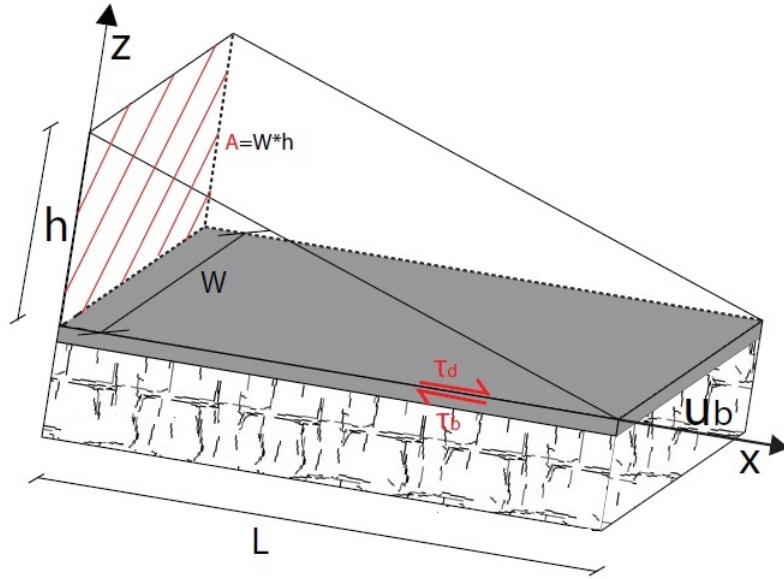


Figura 2.3: Sezione longitudinale del ghiacciaio:  $A$  è l'area della sezione trasversale,  $\tau_d$  è lo sforzo propulsivo,  $\tau_b$  è lo sforzo di taglio alla base (immagine modificata da Elba (2014))

Sostituendo le equazione 2.8 e 2.9 nella 2.7 si ottiene dunque lo sforzo tangenziale agente sul fondo

$$\tau_d = \rho_i g \frac{h^2}{L} \quad (2.10)$$

L'equazione 2.10 mostra come lo sforzo propulsivo sia direttamente proporzionale al quadrato dello spessore della lingua glaciale  $h$ , indicando che per grandi masse di ghiaccio, la spinta, che fa tendere al moto, sarà maggiore.

### Indice dei vuoti e sforzo di taglio basale

Lungo la superficie tra i sedimenti e la lingua glaciale agisce uno sforzo di taglio  $\tau_b$  che contrasta lo sforzo propulsivo. Tale sforzo, non essendo altro che una forza di attrito, dipende dalle caratteristiche geotecniche dello spessore dei sedimenti e in particolare dall'indice dei vuoti. Nel modello, l'indice dei vuoti si calcola come:

$$e = \frac{w}{Z_s} \quad (2.11)$$

dove  $w$  rappresenta il contenuto d'acqua all'interno dello spessore  $Z_s$  dei sedimenti non congelati (figura 2.1). A parità di spessore  $Z_s$ , un maggior contenuto d'acqua determina un maggiore indice dei vuoti e viceversa per minori contenuti d'acqua, fino al limite inferiore, detto critico,  $e_c$ .

La maggiore presenza di acqua nei sedimenti permette al ghiacciaio di scaricare il proprio peso sulle pressioni interstiziali dell'acqua, riducendo quello sullo scheletro solido. In questo modo si riducono gli attriti alla base, e quindi lo sforzo di taglio che si oppone al moto.

Il modello di Robel *et al.* (2013) utilizza la formula di Tulaczyk *et al.* (2000) che correla l'indice dei vuoti allo sforzo di taglio alla base secondo

$$\tau_b = \begin{cases} a' \exp(-b(e - e_c)), & w > 0 \\ \infty, & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad (2.12)$$

dove  $b$  è una costante empirica dei sedimenti ricavata dal coefficiente di compressibilità degli stessi, mentre  $a'$  è la tensione efficace che i sedimenti hanno per un indice dei vuoti pari a quello minimo ( $e_c$ ).

Si può notare come per valori nulli del contenuto d'acqua  $w$ , si avrà un valore infinito di sforzo basale, a significare che la resistenza al fondo sarà talmente elevata da non permettere il moto del ghiacciaio. Si può quindi affermare che condizione necessaria per il moto è che  $w > 0$ , ovvero che ci sia acqua non congelata all'interno dei sedimenti che diminuisca l'attrito del ghiacciaio sulla superficie di scivolamento.

### Velocità di scivolamento

Quando lo sforzo propulsivo supera lo sforzo di taglio basale, la lingua glaciale si muove con una velocità di scivolamento alla base  $u_b$  lungo la direzione  $x$  (figura 2.3). Tale velocità è valutata sulla linea mediana del flusso e considerata per l'intero blocco del dominio.

$$u_b = \frac{A_g W^{(n+1)}}{4^n (n+1) h^n} \max[\tau_d - \tau_b, 0]^n \quad (2.13)$$

dove i termini  $A_g$  e  $n$  sono costanti derivanti dalla legge di Glenn (sul rapporto tra sforzo e deformazione del ghiaccio). Dall'equazione 2.13 si evince che il moto si verifica solamente quando la forza propulsiva, data dal peso del ghiacciaio, supera quella di attrito alla base.

### 2.1.3 Bilancio termico

Il fatto che la condizione necessaria per avere moto sia che i sedimenti contengano acqua non congelata ( $w > 0$ ), implica che la temperatura alla base della lingua glaciale ( $T_b$ ) sia pari a quella di fusione del ghiaccio ( $T_m$ ). Altrimenti si avrebbe solamente ghiaccio e l'attrito impedirebbe il moto (questo è vero per le ipotesi del modello, nella realtà ci sarebbe comunque una componente

ridotta di velocità data dalla deformazione viscosa del ghiaccio). E' quindi di fondamentale importanza calcolare la quantità di calore alla base  $m$ , che è un flusso per unità di larghezza e quindi dimensionalmente una velocità, che si ottiene da un bilancio di diversi termini:

$$m = \frac{1}{\rho_i L_f} \left[ G + \frac{k_i (T_s - T_b)}{h} + \tau_b u_b \right] \quad (2.14)$$

in cui  $\rho_i$  rappresenta la densità del ghiaccio,  $L_f$  il suo calore latente di fusione,  $G$  il flusso di calore geotermico proveniente dal terreno,  $k_i$  la conducibilità termica del ghiaccio, mentre  $T_s$  e  $T_b$  rappresentano rispettivamente la temperatura in superficie e la temperatura alla base.

1. Il primo termine di produzione di calore  $G$  è assunto costante nel tempo perché le sue variazioni sono trascurabili rispetto alla scala temporale del moto dei ghiacciai.
2. Il secondo termine di dispersione del calore è dovuto al gradiente verticale di temperatura che si instaura tra sedimenti rocciosi e atmosfera lungo la verticale  $z$ , assumendo che la temperatura superficiale  $T_s$  sia sempre inferiore rispetto a quella alla base  $T_b$  (figura 2.4).
3. Il terzo termine di produzione di calore è legato all'attrito prodotto dal moto del ghiacciaio

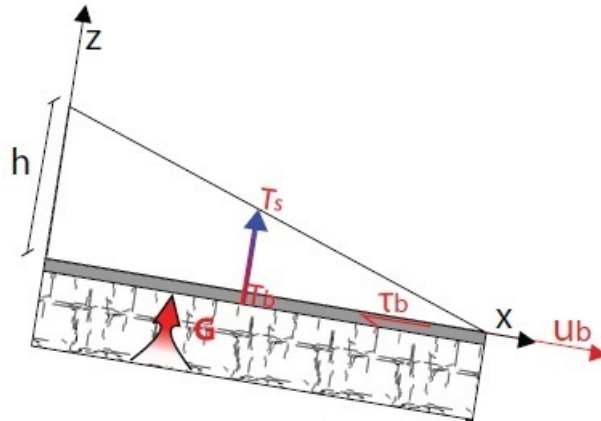


Figura 2.4: In questa sezione longitudinale del ghiacciaio si mostrano i termini che intervengono nel bilancio di calore alla base. Il flusso geotermico e l'attrito danno un apporto positivo di calore alla base, tendendo a sciogliere il ghiaccio, mentre il gradiente verticale di temperatura tende a disperdere tale calore (immagine modifica da Elba (2014))

La variabile  $m$  indica quanto velocemente il ghiaccio alla base fonde (valori positivi) o ghiaccia (valori negativi) e ha le dimensioni di una velocità [ $LT^{-1}$ ].

### 2.1.4 Processi basali e drenaggio subglaciale

I processi più importanti per il moto del ghiacciaio si instaurano alla base dello stesso, nello spessore dei sedimenti su cui la lingua glaciale scivola. In particolare il parametro più importante è il contenuto d'acqua  $w$ , che rappresenta l'altezza d'acqua presente all'interno dei sedimenti non congelati. Quando la temperatura alla base dei sedimenti  $T_b$  raggiunge quella di fusione del ghiaccio  $T_m$ , il contenuto d'acqua  $w$  ha la possibilità di aumentare secondo l'equazione:

$$\frac{dw}{dt} = m - \frac{Q_d}{LW} \quad (2.15)$$

in cui  $m$  è il flusso di calore alla base spiegata nel paragrafo 2.1.3,  $L$  e  $W$  sono lunghezza e larghezza del dominio, mentre  $Q_d$  rappresenta il flusso d'acqua scaricato attraverso condotti subglaciali situati sopra lo strato dei sedimenti. Tale flusso si instaura solamente quando il contenuto d'acqua ha raggiunto il valore di saturazione ( $w_s$ ) dei sedimenti di fondo e altro ghiaccio continua a sciogliersi. Con queste condizioni si creano dei canali situati fra ghiaccio e sedimenti che trasportano l'acqua in eccesso a valle del ghiacciaio. Questi condotti compaiono e scompaiono in maniera stagionale, su una scala temporale ridotta rispetto a quella presa in considerazione per il modello, per tale motivo li si considera costanti nel tempo.

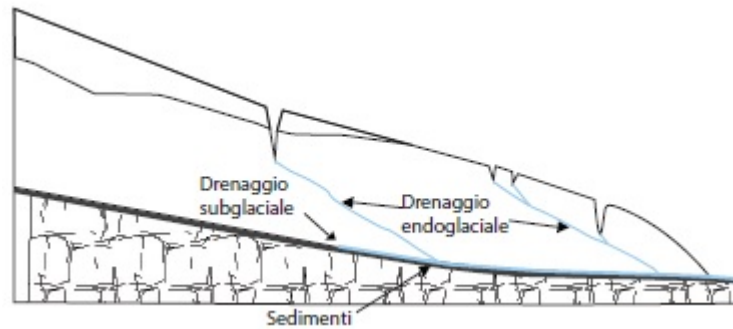


Figura 2.5: Drenaggio subglaciale ed endoglaciale (immagine da Elba (2014))

I contributi d'acqua provenienti dai condotti endoglaciali sono trascurati e la portata subglaciale si calcola:

$$Q_d = \begin{cases} 0, & \text{se } w < w_s \text{ o } m < 0 \\ mLW, & \text{altri casi} \end{cases} \quad (2.16)$$

L'attivazione del drenaggio fa sì che il contenuto d'acqua all'interno dei sedimenti non subisca variazioni: infatti sostituendo la 2.16 nella 2.15, nel caso di drenaggio non nullo, si ottiene:

$$\frac{dw}{dt} = 0 \quad (2.17)$$

con il valore di  $w$  che rimane costante e pari a  $w_s$ .

### 2.1.5 Temperatura basale

Quando l'indice dei vuoti  $e$  raggiunge il valore minimo  $e_c$ , a causa della diminuzione del contenuto d'acqua, il fronte ghiacciato comincia a propagarsi all'interno dei sedimenti, causando una diminuzione dello spessore dei sedimenti non congelati  $Z_s$ .

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{se } e > e_c \text{ o } Z_s = 0 \\ \frac{m}{e_c} & \text{se } e = e_c \text{ e } Z_0 > Z_s > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

dove  $Z_0$  indica il massimo valore dello spessore dei sedimenti non congelati iniziale. Finchè  $Z_s > 0$  lo spessore dei sedimenti non è completamente congelato, c'è ancora dell'acqua all'interno ( $w > 0$ ), quindi il valore della temperatura sul fondo  $T_b$  è pari alla temperatura di fusione del ghiaccio  $T_m$ .

Quando invece si raggiunge la condizione  $Z_s = 0$  (quindi anche  $w = 0$ ), la temperatura alla base risulta inferiore rispetto a quella di fusione e il ghiacciaio si ferma, dando origine a un processo di inspessimento dovuto all'accumulo nevoso, secondo l'equazione 2.6.

Successivamente con l'aumentare dello spessore  $h$  e l'avvicinarsi della temperatura sul fondo  $T_b$  a quella superficiale  $T_s$ , si riduce il termine di dispersione verticale nell'equazione 2.4. Così  $m$  torna ad assumere valori positivi (grazie al flusso di calore geotermico) riportando  $T_b$  al valore di  $T_m$ . Tali variazioni di temperatura sono esplicitate nel modello con le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{se } w > 0 (T_b = T_m) \text{ o } w = 0 \text{ e } m < 0 \\ \frac{\rho_i L_f}{C_i h_b} m & \text{negli altri casi} \end{cases} \quad (2.19)$$

con  $C_i$  capacità termica del ghiaccio e  $h_b$  spessore dello strato di ghiaccio interessato dalle variazioni di temperatura alla base.

## 2.1.6 I sistemi di equazioni

Nel modello di Robel *et al.* (2013) sono presenti sia relazioni algebriche che differenziali.

Grandezze con relazioni algebriche	Variabili con relazioni differenziali
$m$ quantità di calore alla base $Q_d$ drenaggio subglaciale $u_b$ velocità di scivolamento alla base $\tau_d$ sforzo di taglio propulsivo $\tau_b$ sforzo di taglio alla base $e$ indice dei vuoti	$h$ spessore lingua glaciale $w$ contenuto d'acqua nei sedimenti $Z_s$ spessore sedimenti non congelati $T_b$ temperatura alla base

Tabella 2.1: Grandezze con relazioni algebriche e variabili con relazioni differenziali nel modello. Di fatto le grandezze fisiche dipendono dalle variabili.

Le equazioni differenziali che coinvolgono i quattro parametri in tabella 2.1 costituiscono il sistema di equazioni differenziali del modello. In particolare, in base al contenuto d'acqua  $w$ , si distinguono tre famiglie di sistemi di equazioni:

1. per  $w \geq w_s$  e  $m > 0$
2. per  $0 < w < w_s$  o  $w = w_s$  e  $m < 0$
3. per  $w = 0$

### i) Sistema di equazioni per $w \geq w_s$ e $m > 0$

Nel caso in cui il contenuto d'acqua raggiunga il valore di saturazione (si è visto nel paragrafo 2.1.4 che non lo supera), l'indice dei vuoti sarà maggiore rispetto al valore critico per cui non si avranno variazioni dello spessore  $Z_s$  (equazione 2.18).

Inoltre affinché il contenuto d'acqua rimanga positivo, la temperatura alla base sarà uguale a quella di fusione del ghiaccio (equazione 2.19).

Caso con  $m > 0$

$$\begin{cases} \dot{h} = a_c - \frac{u_b h}{L} \\ \dot{w} = 0 \\ \dot{Z}_s = 0 \\ \dot{T}_b = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

**ii) Sistema di equazioni per  $0 < w < w_s$  o  $w = w_s$  e  $m < 0$**

Quando il contenuto d'acqua è pari al valore di saturazione ( $w = w_s$ ), ma  $m$  è negativo, si fermano i fenomeni di drenaggio subglaciale e parte dell'acqua contenuta nei sedimenti non congelati comincia a ghiacciare.

Quando  $w$  è positivo, ma minore di  $w_s$ , la temperatura alla base rimane uguale a quella di fusione del ghiaccio (equazione 2.19). Invece ricordando le condizioni necessarie per la variazione di  $Z_s$  (equazione 2.18) si possono differenziare due sistemi:

1. uno per quando il valore dell'indice dei vuoti è maggiore di quello critico e quindi varia solo il contenuto d'acqua, in funzione di  $m$ , ma non lo spessore dei sedimenti non congelati  $Z_s$ .

Caso con  $Z_s e_c < w < w_s$  o  $w = w_s$  e  $m < 0$

$$\begin{cases} \dot{h} = a_c - \frac{u_b h}{L} \\ \dot{w} = m \\ \dot{Z}_s = 0 \\ \dot{T}_b = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

2. il secondo sistema si ha quando l'indice dei vuoti raggiunge il valore critico facendo sì che anche lo spessore dei sedimenti non congelati subisca una variazione.

Caso con  $w \geq Z_s e_c$  e  $0 < Z_s < Z_0$

$$\begin{cases} \dot{h} = a_c - \frac{u_b h}{L} \\ \dot{w} = m \\ \dot{Z}_s = \frac{m}{e_c} \\ \dot{T}_b = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Quando lo spessore dei sedimenti non congelati raggiunge il valore nullo (il ghiaccio arriva fino allo strato roccioso superficiale), anche il contenuto d'acqua nei sedimenti si annulla creando così le condizioni di stazionarietà.

**iii) Sistema di equazioni per  $w = 0$**

Quando  $w = 0$ , anche  $Z_s = 0$  ed  $e = e_c$ . In tali condizioni il sistema assume un'unica forma:

$$\begin{cases} \dot{h} = a_c \\ \dot{w} = 0 \\ \dot{Z}_s = 0 \\ \dot{T}_b = \frac{\rho_i L_f}{C_i h_b} m \end{cases} \quad (2.23)$$

Secondo i processi spiegati nel paragrafo 2.1.5, quando la temperatura alla base  $T_b$  raggiunge il suo valore minimo e lo spessore del ghiacciaio ha subito un sufficiente aumento, il segno della quantità di calore alla base  $m$  si inverte. In questo modo la temperatura alla base cresce fino a raggiungere il valore di fusione del ghiaccio riportando così il contenuto d'acqua a valori positivi.

## 2.2 Modalità di moto

Sinora si sono valutate le equazioni che descrivono nel tempo l'andamento dei parametri del ghiacciaio.

Bisogna però tenere conto che esistono delle forzanti esterne, i cui valori determinano verso quali soluzioni tenderà il sistema.

Tali parametri sono:

- l'accumulo nevoso  $a_c$ , che definisca quanta neve si deposita sulla superficie della lingua glaciale (è un valore medio annuo)
- la temperatura superficiale  $T_s$ , che indica la temperatura atmosferica, fondamentale per la definizione del calore alla base (equazione 2.14)

In realtà ci sarebbe anche il flusso di calore geotermico  $G$  (equazione 2.14), che però, come già detto, per le scale temporali considerate, ha un valore pressoché costante.

Sulla base di queste grandezze esterne, il modello individua due possibili regimi di moto:

1. regime stazionario (steady mode)
2. regime oscillatorio (binge-purge mode)

Per i successivi risultati numerici, si riportano i valori della grandezze in gioco, presi direttamente dall'articolo di Robel *et al.* (2013).

	Descrizione	
$a'$	coefficiente empirico dei sedimenti (Pa)	$1.41 \cdot 10^6$
$A_g$	fattore della legge di Glenn ( $\text{Pa}^{-3}\text{s}^{-1}$ )	$5 \cdot 10^{-25}$
$b$	coefficiente empirico dei sedimenti	21.7
$C_d$	capacità termica volumetrica del ghiaccio ( $\text{JK}^{-1}\text{m}^{-3}$ )	$1.94 \cdot 10^6$
$e_c$	limite inferiore dell'indice dei vuoti	0.3
$h_b$	spessore del ghiaccio interessato da variazioni termiche (m)	10
$k_d$	conducibilità termica del ghiaccio ( $\text{Js}^{-1}\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ )	2.1
$L$	lunghezza della lingua glaciale(km)	500
$L_f$	calore latente di fusione ( $\text{Jkg}^{-1}$ )	$3.35 \cdot 10^5$
$n$	esponente della legge di Glen	3
$W$	larghezza della lingua glaciale(km)	40
$w_s$	limite di saturazione dei sedimenti (m)	1
$\rho_i$	densità del ghiaccio ( $\text{kg m}^{-3}$ )	917

Tabella 2.2: Grandezze fisiche costanti per le simulazione numeriche

### Modalità stazionaria

Dopo un certo transitorio, la cui durata dipende dalle condizioni iniziali, il ghiacciaio acquista un moto costante, definito dall'equilibrio tra la precipitazione nevosa che si deposita in superficie e l'assottigliamento dovuto al moto stesso (equazione 2.6). Questo tipo di moto si ha per temperature superficiali non estremamente basse, che riducono la dispersione di calore alla base (equazione 2.14), facendo sì che ci sia sempre un elevato contenuto d'acqua  $w$  che permetta il moto.

Si osserva in figura 2.6 che all'esaurirsi del transitorio iniziale si instaura un régime stazionario in cui i parametri del ghiacciaio conservano il loro valore ( $h$  e  $w$ ) e conseguentemente anche la velocità rimane la stessa (equazione 2.13). Le condizioni iniziali, come si vedrà in seguito, sono ininfluenti rispetto alla soluzione dinamica della lingua glaciale.

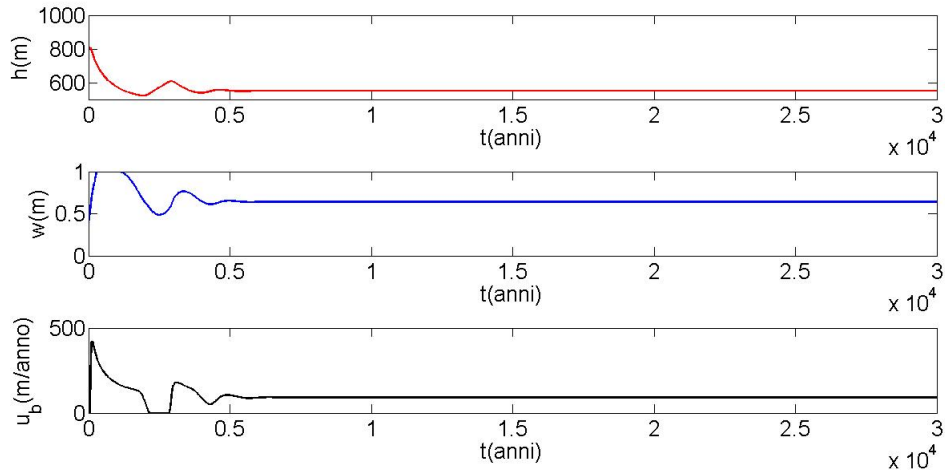


Figura 2.6: Andamento dei parametri del ghiacciaio nel tempo per un'accumulo nevoso  $a_c = 0,1$  m/anno e temperatura superficiale  $T_s = -19$  °C.

### Modalità oscillatoria

Per temperature superficiali minori, il termine di dissipazione di calore alla base (equazione 2.14) è maggiore. Accade quindi che durante il moto del ghiacciaio, parte dell'acqua alla base congela, riducendo la velocità del ghiacciaio stesso. Raggiunto il termine minimo di  $w$ , e quindi della velocità del ghiacciaio  $u_b$ , lo stiramento dovuto al moto è bilanciato e superato dall'accumulo nevoso in superficie. L'altezza del ghiacciaio quindi comincia ad aumentare per la neve che si deposita, riducendo il termine di dispersione di calore verticale. Quando lo spessore della lingua glaciale è sufficientemente alto, si raggiunge un picco nel valore dello sforzo propulsivo che permette alla velocità di aumentare.

Con alte velocità di moto l'assottigliamento torna a essere preponderante sull'accumulo nevoso superficiale e il termine di dispersione verticale di calore fa sì che parte dell'acqua alla base congeli ricominciando il ciclo.

In particolare esistono due sottosoluzioni nel dominio delle oscillazioni:

**Oscillazioni forti:** in questo caso il termine di contenuto d'acqua alla base, nella sua decrescita, raggiunge valori nulli, togliendo la condizione necessaria per il moto e dando vita a lunghi periodi di stagnazione, in cui il ghiacciaio è fermo e si accresce grazie alla precipitazione nevosa.

Questo tipo di soluzione si ha per temperature superficiali particolarmente basse che portano al congelamento dell'acqua contenuta nei sedimenti.

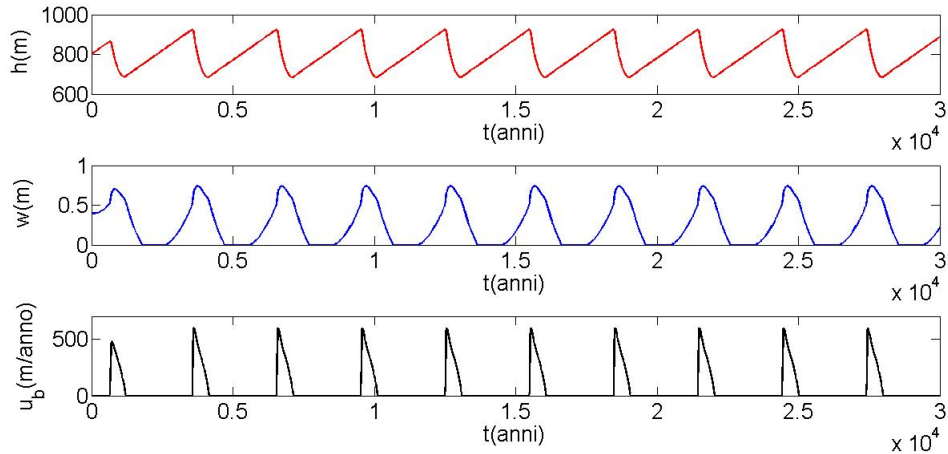


Figura 2.7: Andamento dei parametri del ghiacciaio nel tempo per un accumulo nevoso  $a_c = 0,1$  m/anno e temperatura superficiale  $T_s = -25$  °C.

La temperatura è sufficientemente bassa da congelare completamente, nei periodi di assottigliamento, l'acqua contenuta alla base ( $w=0$ ) e creare lunghi periodi di stagnazione, in cui  $u_b=0$  e  $h$  cresce secondo  $a_c$  (m/anno).

**Oscillazioni deboli:** in questo caso la temperatura superficiale non è sufficientemente bassa da annullare completamente l'acqua contenuta nei sedimenti del ghiacciaio. Bisogna tuttavia ricordare che  $w > 0$  è condizione necessaria (perché permette di avere uno sforzo di taglio non infinito), ma non sufficiente per il moto (la condizione sufficiente è che lo sforzo di taglio propulsivo sia maggiore di quello di taglio). Per cui si possono ugualmente creare dei periodi di stagnazione del ghiacciaio (figura 2.8).

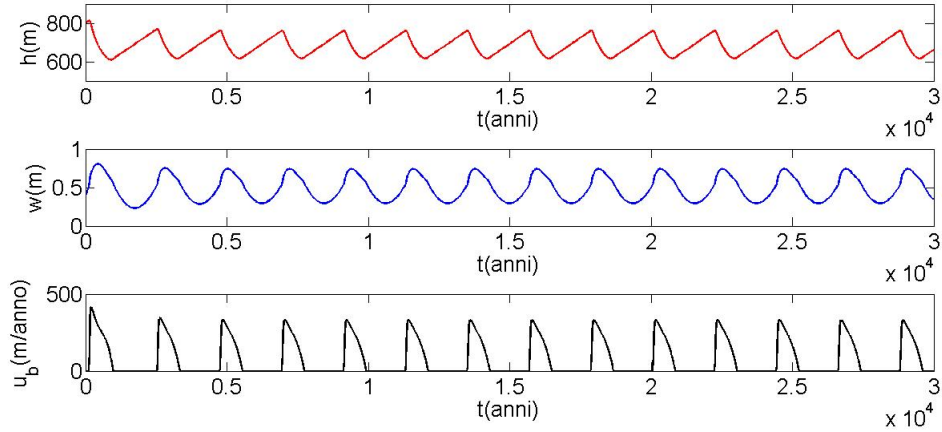


Figura 2.8: Andamento dei parametri del ghiacciaio nel tempo per un accumulo nevoso  $a_c = 0,1$  m/anno e temperatura superficiale  $T_s = -23$  °C. In questo caso il contenuto d'acqua non si annulla ( $w$  sempre maggiore di 0), ma si hanno comunque dei periodi di stagnazione del ghiacciaio (più brevi rispetto al caso precedente).

## 2.3 Biforcazione di Hopf

### 2.3.1 Risposta del sistema a diversi valori di $T_s$

Si è appena spiegato che in funzione delle grandezze esterne ( $a_c$  e  $T_s$ ) il modello è in grado di individuare due soluzioni per il sistema: quella stazionaria (steady mode) e quella oscillatoria (binge-purge).

Immaginando allora di fissare una delle due grandezze, in questo caso l'accumulo nevoso  $a_c$ , si può determinare in quale soluzione ricada il modello per ogni temperatura superficiale  $T_s$ .

Il risultato è una biforcazione di Hopf:

1. per alcuni valori di  $T_s$ , quelli maggiori, il sistema individua la soluzione stazionaria
2. per alcuni valori di  $T_s$ , quelli minori, il sistema individua la soluzione oscillatoria
3. esistono però dei valori intermedi di  $T_s$  in cui coesistono le due soluzioni e il sistema tende all'una o all'altra a seconda delle condizioni iniziali

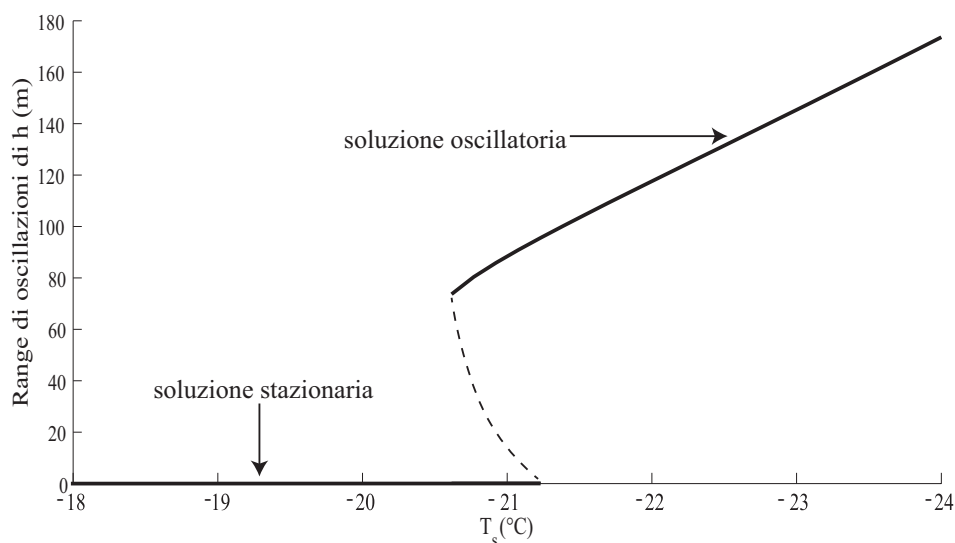


Figura 2.9: Diagramma di biforcazione al variare della temperatura superficiale per  $a_c = 0,1$  m/anno (come usato da Robel *et al.* (2013)). In ordinata c'è il range di oscillazione dell'altezza del ghiacciaio.

1. Al ramo inferiore, per range nulli, equivale la soluzione stazionaria.
2. Al ramo superiore corrisponde la soluzione oscillatoria.
3. Esiste però una zona di sovrapposizione dei due rami in cui coesistono le due soluzioni. Con la linea tratteggiata si indica il ciclo limite instabile, che separa la zona di attrazione del dominio stazionario da quello oscillatorio, come spiegato in seguito.

Al fine di mostrare il comportamento dinamico del sistema si introduce il diagramma delle fasi: un doppio piano, in cui si ha per ascisse positive il contenuto d'acqua  $w$  e per ascisse negative la temperatura alla base  $T_b$ , mentre come ordinata si ha l'altezza  $h$ .

In questo modo alla soluzione stazionaria ( $h$  e  $w$  costanti) equivale un punto attrattore, mentre alla soluzione oscillatoria ( $h$  e  $w$  che oscillano periodicamente) equivale un ciclo limite stabile.

1. punto attrattore stazionario per  $T_s = -19 \text{ }^\circ\text{C}$

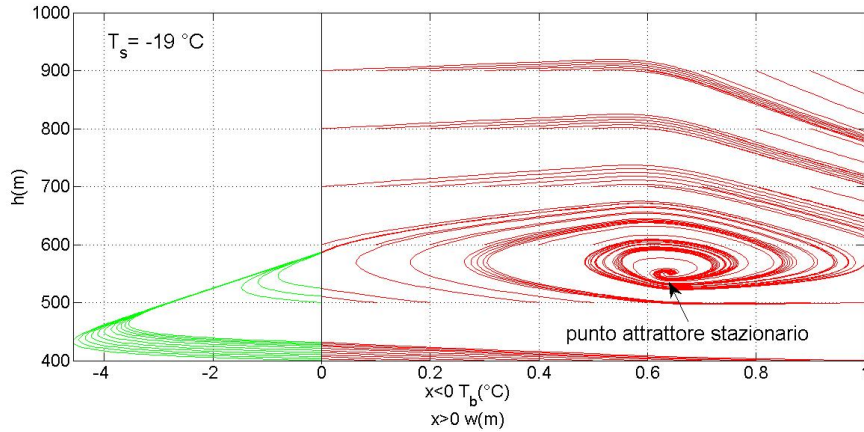


Figura 2.10: Indifferentemente dalle condizioni iniziali di  $h$  e  $w$  (i punti iniziali delle traiettorie), l'andamento nel tempo dei parametri porta a delle soluzioni che terminano sul punto attrattore stazionario. In particolare in rosso si è sul piano  $\{h, w\}$ , in cui il contenuto d'acqua alla base è positivo e la temperatura alla base ( $T_b$ ) è uguale a quella di fusione del ghiaccio ( $T_m$ ). In verde invece si è sul piano  $\{h, T_b\}$ , a cui corrispondono un contenuto d'acqua nullo ( $w = 0$ ) e una temperatura alla base minore di zero.

2. coesistenza delle due soluzioni per  $T_s = -21 \text{ }^\circ\text{C}$

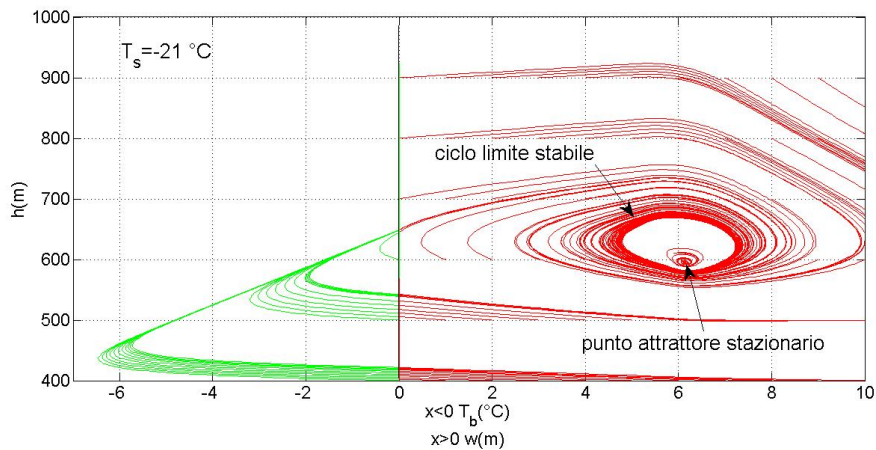


Figura 2.11: Sono presenti entrambe le soluzioni, quella stazionaria (punto) e quella oscillatoria (ciclo limite stabile) il sistema tende all'una o all'altra a seconda delle condizioni iniziali di  $h$  e  $w$ .

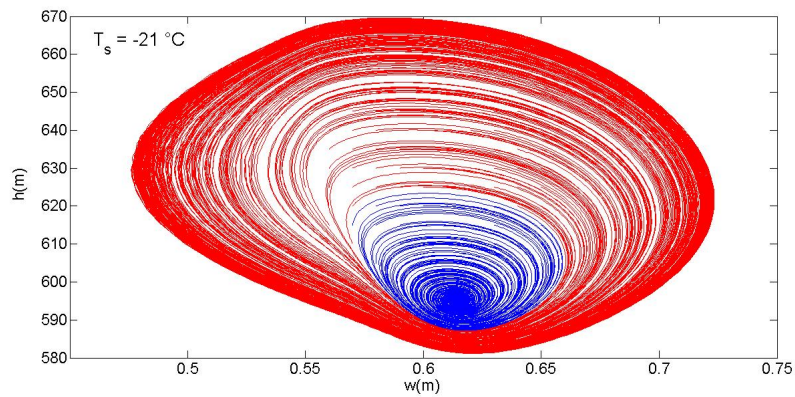


Figura 2.12: All'interno del ciclo limite stabile esiste un ciclo limite instabile che separa il dominio di attrazione del punto stazionario (traiettorie in blu) da quello del ciclo limite stabile (traiettorie in rosso).

### 3. ciclo limite stabile per $T_s = -23^\circ\text{C}$

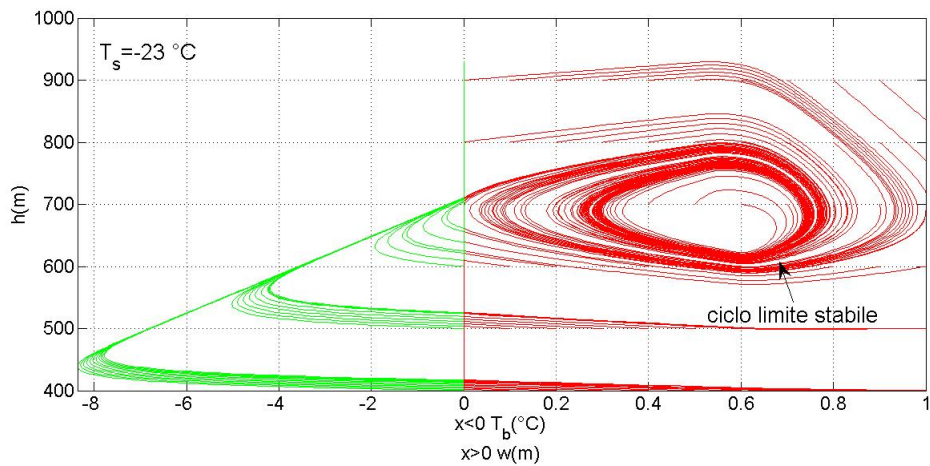


Figura 2.13: In questo caso, indifferentemente dalle condizioni iniziali, le traiettorie terminano sul ciclo limite stabile, che individua la soluzione binge-purge

### 2.3.2 Risposta del sistema a diversi valori di $a_c$

Analogamente, fissando il valore di  $T_s$  a  $-20^\circ\text{C}$ , è stato possibile trovare il diagramma di biforcazione per diversi valori dell'accumulo nevoso.

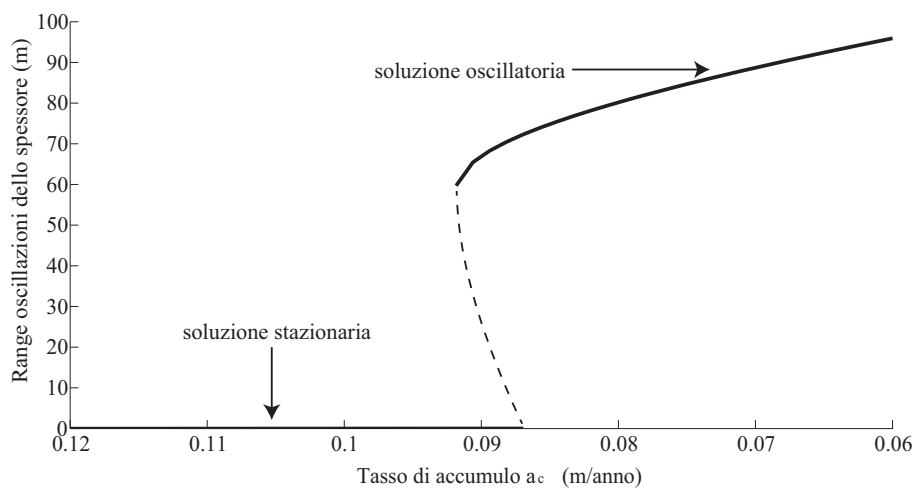


Figura 2.14: Diagramma di biforcazione per  $a_c$ . Anche in questo caso si osserva per quali valori si ha la soluzione stazionaria, per quali quella oscillatoria e per quali coesistono le due soluzioni.

Prendendo tre valori diversi di  $a_c$ , si mostra il comportamento dinamico del sistema nel diagramma delle fasi:

1. punto attrattore per  $a_c=0,1$  m/anno

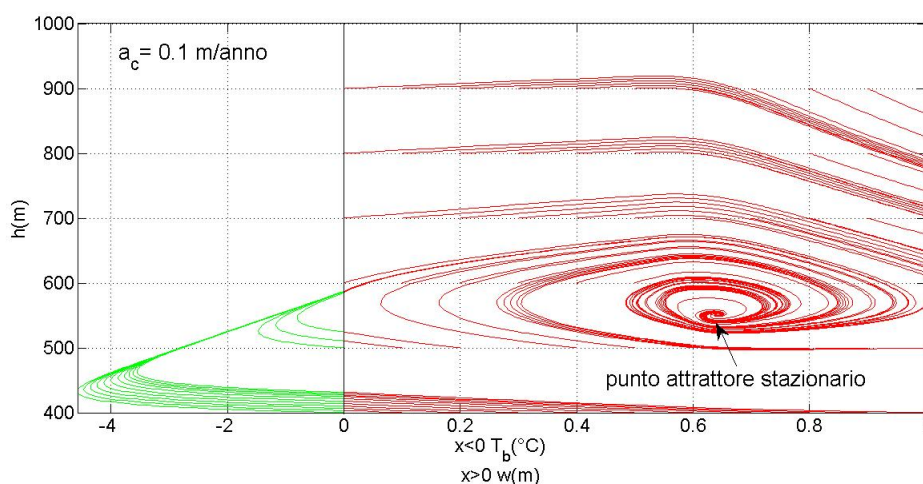


Figura 2.15: Punto stazionario attrattore

2. coesistenza delle due soluzioni per  $a_c = 0,9$  m/anno

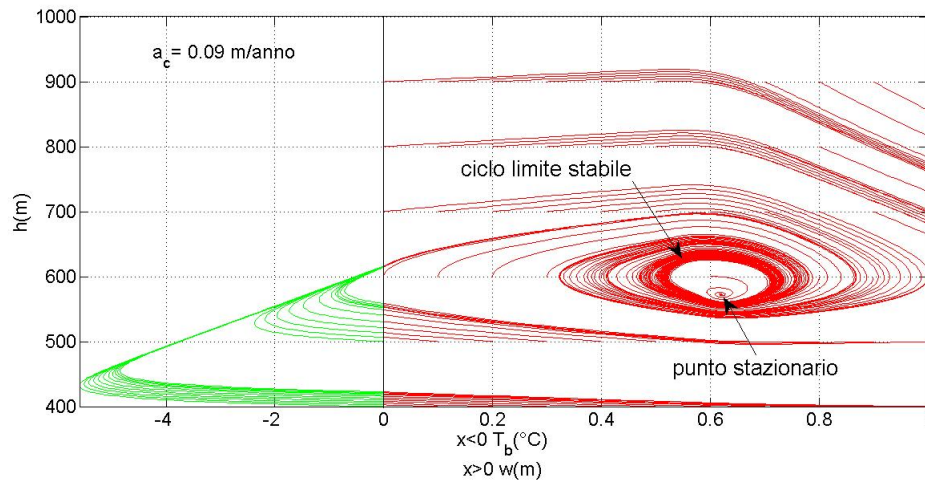


Figura 2.16: Coesistenza delle due soluzioni

Anche in questo caso è possibile evidenziare come il ciclo limite instabile separi la zona di attrazione del punto stazionario da quella del ciclo limite oscillatorio.

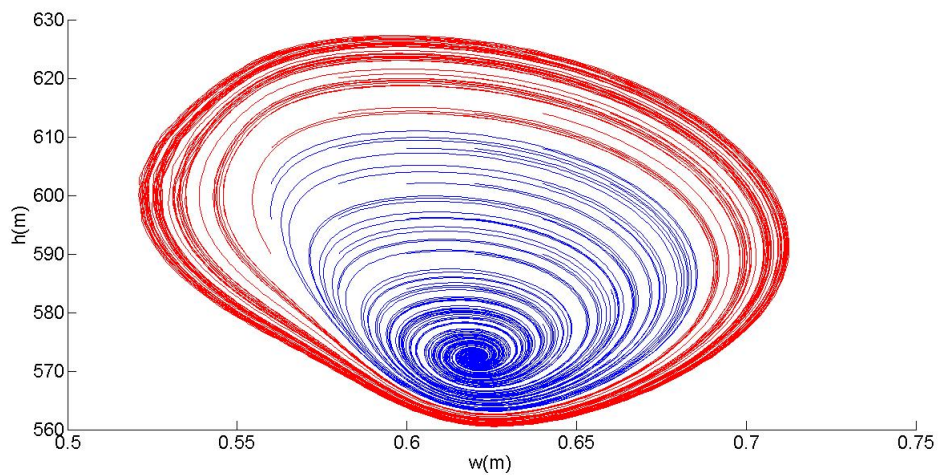


Figura 2.17: In blu sono evidenziate le traiettorie che terminano sulla soluzione stazionaria, in rosso quelle che finiscono sul ciclo limite

3. ciclo limite stabile per  $a_c = 0,08$  m/anno

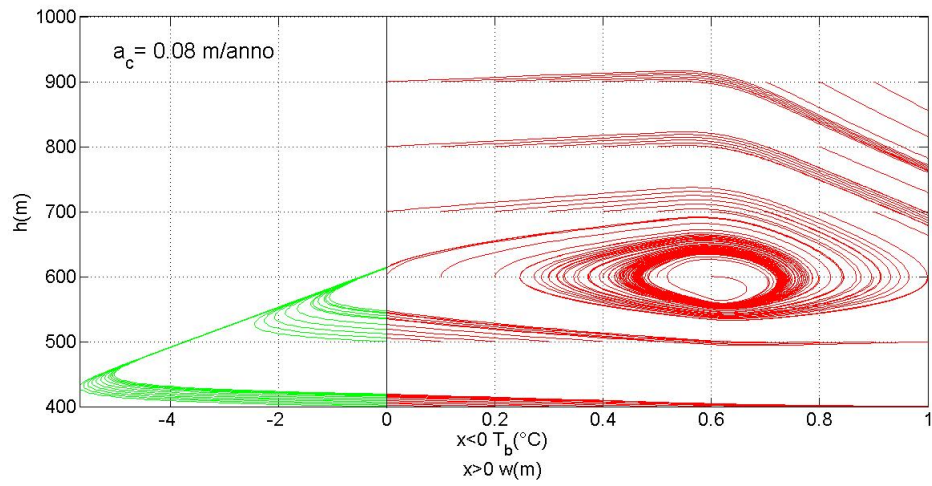


Figura 2.18: Ciclo limite stabile

## Capitolo 3

# Studio sui dati delle carote di ghiaccio

### 3.1 Paleoclimatologia terrestre

Nell'ultimo mezzo milione di anni la terra ha conosciuto quattro periodi glaciali, il cui innesco è stato dovuto in massima parte a modifiche nell'assetto orbitale della terra e alle conseguenti variazioni dell'energia solare in arrivo. La periodicità tra i diversi massimi glaciali è stata di circa 100'000 anni, secondo la teoria del matematico serbo Milankovitch (1879-1958) ed è stata confermata sia dall'analisi dei sedimenti oceanici, sia dal carotaggio della calotta glaciale antartica (Vostok ed EPICA) che da quello della Groenlandia (GISP2-Greenland Ice Sheet Project 2 e GRIP-Greenland Ice Core Project). Il contributo più rilevante di questi carotaggi è la ricostruzione del contenuto di gas serra in atmosfera e della temperatura atmosferica al momento della formazione del ghiaccio (rapporto isotopico  $O^{18}/O^{16}$ ). L'inizio della fusione dei ghiacci dell'ultima era glaciale ha avuto luogo circa 19'000 anni fa, con i maggiori eventi di deglaciazione collocabili tra 14'000 e 11'000 anni fa. Approssimandosi all'orizzonte dei 10'000 anni fa ha avuto inizio l'Olocene, periodo nel quale ci si trova tutt'ora, caratterizzato da temperature relativamente stabili. Il gruppo di Petit *et al.* (1999), dalle analisi della carota glaciale di Vostok (Antartide), ha ricostruito la variazione di temperatura negli ultimi 400'000 anni, da cui si evince l'alternarsi delle quattro Ere glaciali con i periodi caldi interglaciali (figura 3.1).

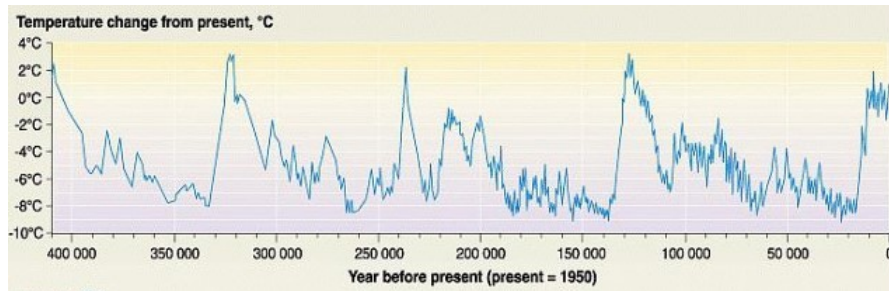


Figura 3.1: Andamento dell'anomalia di temperatura rispetto al presente negli ultimi 400'000 anni. Dalla figura si possono notare le 4 ere glaciali di diversa durata. (Immagine modificata da Petit *et al.* (1999))

Il periodo di interesse ai fini dello studio del sistema è quello degli ultimi 10'000 anni: l'Olocene. Per reperire i dati necessari allo studio si è ricorsi all'archivio dati dell'ente americano NOAA (National Oceanographic and Atmospheric Administration) che ha raccolto i risultati estrapolati dagli studi delle carote di ghiaccio in tutto il mondo. In particolare l'interesse della ricerca si è focalizzato sulle uniche due calotte glaciali<sup>1</sup> ancora presenti sulla terra: quella dell'Antartide e quella della Groenlandia.

Di seguito si farà riferimento ai seguenti *ice cores*:

- Dome C per il continente antartico
- GISP2 per la Groenlandia

### 3.2 Studi multiparametrici sugli *ice cores*

Le specie chimiche presenti in aria, di differenti origini, dopo un certo tempo di permanenza, o tempo di volo, sedimentano sulla terra, principalmente a causa dell'azione della turbolenza e della gravità. Sedimentando nelle zone glaciali tali sostanze rimangono assorbite sul ghiaccio, grazie anche alle basse temperature, e vengono progressivamente sotterrate nel tempo a causa della precipitazione nevosa. Estrahendo delle carote di ghiaccio è quindi possibile analizzare la concentrazione di tali sostanze per avere informazioni rispetto alla situazione climatica del passato. In particolare si analizzano le concentrazioni di anidride carbonica  $CO_2$ , di metano  $CH_4$ , degli isotopi di ossigeno, di deuterio, di particelle solide e in alcuni studi di  $Ca^{++}$  e  $H_2O_2$ . Le diverse specie chimiche analizzate hanno sorgenti naturali diverse e perciò mostrano i loro picchi di concentrazione in periodi diversi dell'anno. Il vantaggio di

<sup>1</sup>calotta glaciale è una massa di ghiaccio che si estende per almeno 50'000  $km^2$ .

un approccio multiparametrico è quello di permettere la corretta identificazione degli strati annuali di ghiaccio. Può infatti accadere che il segnale di una sostanza possa essere assente o debole in un anno a causa della mancata presenza della sorgente o delle diverse condizioni che hanno caratterizzato quel periodo, ma con un confronto con altri parametri è comunque possibile risalire e associare ciascuno strato di ghiaccio al suo anno storico. In questo modo, definendo gli *annual layers*, ciascuno dei parametri studiati può essere utilizzato per stimare l'accumulo nevoso annuale.

Per quanto concerne invece la ricostruzione storica della temperatura superficiale, la misura fondamentale è quella legata agli isotopi dell'ossigeno.

### 3.2.1 Ricostruzione della temperatura tramite la determinazione del rapporto isotopico $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$

Tale metodo è basato sulla misura del rapporto tra i due isotopi stabili dell'ossigeno in campioni prelevati da ghiacciai o da sedimenti oceanici. L'ossigeno è di norma composto da 8 protoni e 8 neutroni, che gli conferiscono un peso atomico pari a 16 ( $^{16}\text{O}$ ), anche detto ossigeno *leggero*. Una piccola frazione di atomi d'ossigeno, circa 1 su 500, ha 2 neutroni in più. Il peso atomico è allora 18 ( $^{18}\text{O}$ ), e si parla di ossigeno *pesante*. Il rapporto fra i due isotopi nell'acqua dipende dall'evaporazione: l'acqua con  $^{16}\text{O}$ , essendo più leggera, evapora maggiormente, ma nei periodi miti rientra nel ciclo idrologico e torna rapidamente al mare in modo che il rapporto  $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$  rimane costante; nei periodi più freddi invece il vapore d'acqua condensandosi rimane intrappolato nei ghiacciai dove la concentrazione di  $^{16}\text{O}$  aumenta rispetto a quella di  $^{18}\text{O}$  che tende a rimanere nei mari. Essendo noto il valore medio del rapporto prevalente nell'atmosfera e nell'oceano, una differenza significativa da tale valore corrisponde a una variazione di temperatura. La concentrazione degli isotopi più pesanti è così bassa che non si misura in termini di quantità assoluta con precisione, invece si opera un confronto fra le concentrazioni isotopiche del campione in esame ( $R_x$ ) e le concentrazioni isotopiche di un campione standard ( $R_{stand}$ ). I risultati della misura comparativa del campione con lo standard vengono espressi nella cosiddetta notazione delta ( $\delta$ ). Attraverso l'utilizzo degli spettrometri di massa si misura:

$$\delta = \frac{\left(\frac{^{18}\text{O}}{^{16}\text{O}}\right)_x - \left(\frac{^{18}\text{O}}{^{16}\text{O}}\right)_{stand}}{\left(\frac{^{18}\text{O}}{^{16}\text{O}}\right)_{stand}} \cdot 1000 \quad (3.1)$$

Dove  $\left(\frac{^{18}\text{O}}{^{16}\text{O}}\right)_{stand}$  è il rapporto nello standard internazionale V-SMOW (Vienna-Standard Mean Ocean Water).

A questo punto dal valore di  $\delta$  è necessario ricavare quelle che erano le temperature superficiali. Una relazione lineare che correlava la media di temperatura annuale del presente e  $\delta$  era quella proposta per climi polari da Dansgaard (1964), successivamente leggermente modificata per lo strato superficiale di ghiaccio della Groenlandia

$$T_s = 1.50\delta + 20.3 \quad (3.2)$$

In realtà questo tipo di relazione si mostra essere molto soggetta al sito in esame e viene per ciò calibrata a seconda della locazione dello studio. In questo lavoro di tesi si sono presi direttamente i dati di temperatura ricostruita dai valori di  $\delta$  per i due carotaggi in esame.

### 3.3 Dati di accumulo nevoso e temperatura

Per ogni serie temporale dei parametri di interesse ( $a_c$  e  $T_s$ ), relativamente alle due carote di ghiaccio in questione, si è estrapolato l'andamento negli ultimi 10'000 anni (periodo dell'Olocene). Sui dati così ottenuti si sono eseguite delle operazioni di studio volte a ottenere:

- Spettro del segnale in dominio di frequenza (con la trasformata di Fourier)
- Distribuzione di frequenza dei valori
- Autocorrelogramma e scala integrale

Per farlo si è reso necessario ricampionare il segnale tramite interpolazione lineare.

#### 3.3.1 Dome C-Antartide

Dome C, anche conosciuto come Dome Charlie, è il sito di ricerca della Concordia Research Station, in cui operano insieme Francia e Italia. Si trova in Antartide all'altitudine di 3233 metri sul livello del mare, a 560 km dalla stazione di ricerca russa di Vostok. E' situato in uno dei posti più freddi della terra, la temperatura infatti difficilmente sale sopra i  $-25^\circ\text{C}$  in estate e può arrivare sotto i  $-80^\circ\text{C}$  in inverno. La temperatura media è di  $-54.5^\circ\text{C}$ . L'umidità è molto bassa e il clima è particolarmente secco con poche precipitazioni nel corso dell'anno.

EPICA, *European Project for Ice Coring in Antarctica*, è un progetto europeo multinazionale per la perforazione ed estrazione di carote di ghiaccio

in Antartide. In particolare una delle sue attività si è svolta nel sito della Concordia, dove è stata estratta una carota di quasi 3'200 m che permette di ricavare dati fino a 800'000 anni fa. Dagli studi di Jouzel *et al.* (2007) e Parrenin *et al.* (2007) sono stati estrapolati rispettivamente gli andamenti della temperatura e dell'accumulo nevoso negli ultimi 10'000 anni (Olocene).

### Accumulo nevoso - Dome C

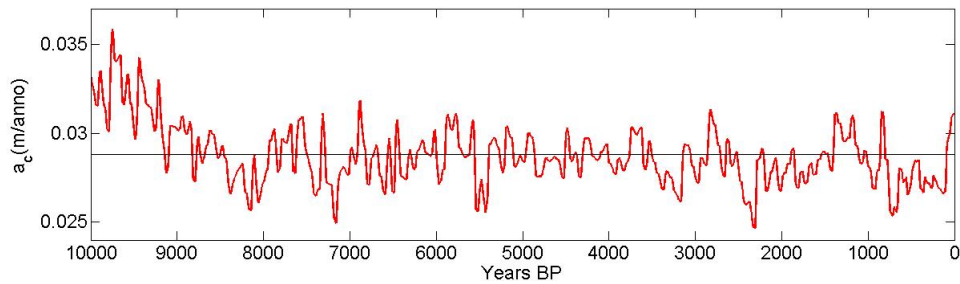


Figura 3.2: Accumulo nevoso in funzione del tempo, il valore medio è rappresentato dalla linea nera e vale 0,029 m/anno. BP=before present, dove present è 1950

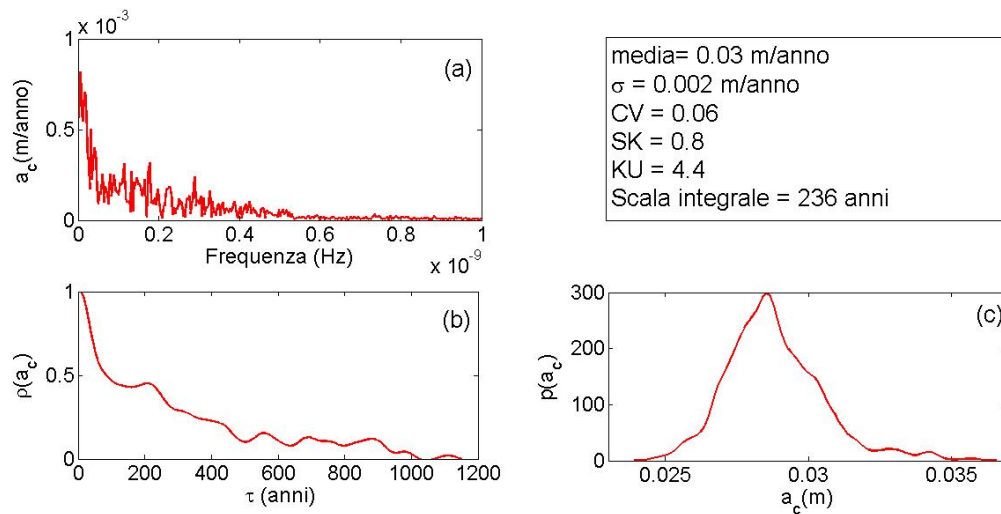


Figura 3.3: figura (a): spettro di frequenza del segnale di  $a_c$  ; lo spettro è abbastanza continuo, con una serie di frequenze dominanti decrescenti con periodi compresi fra i 3200 anni ( $0.01 \cdot 10^{-9} Hz$ ) e gli 80 anni ( $0.4 \cdot 10^{-9} Hz$ ).  
 figura (b): autocorrelogramma dell'accumulo nevoso  
 figura (c): funzione di distribuzione di probabilità

## Temperatura superficiale - Dome C

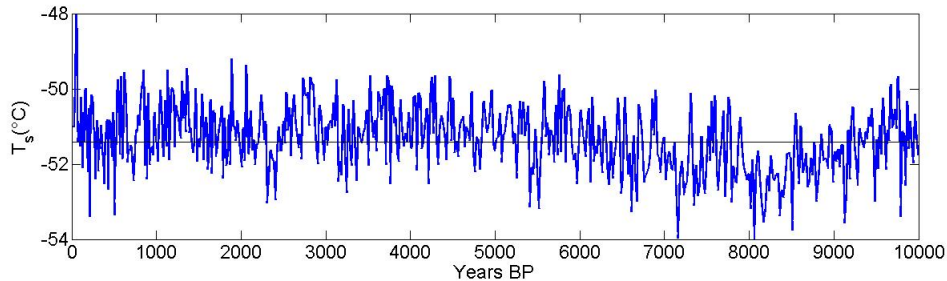


Figura 3.4: Ricostruzione dell'anomalia di temperatura superficiale rispetto alla media degli ultimi 10'000 anni. Il valore medio di tale serie è rappresentato dalla linea nera e vale  $-51.4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

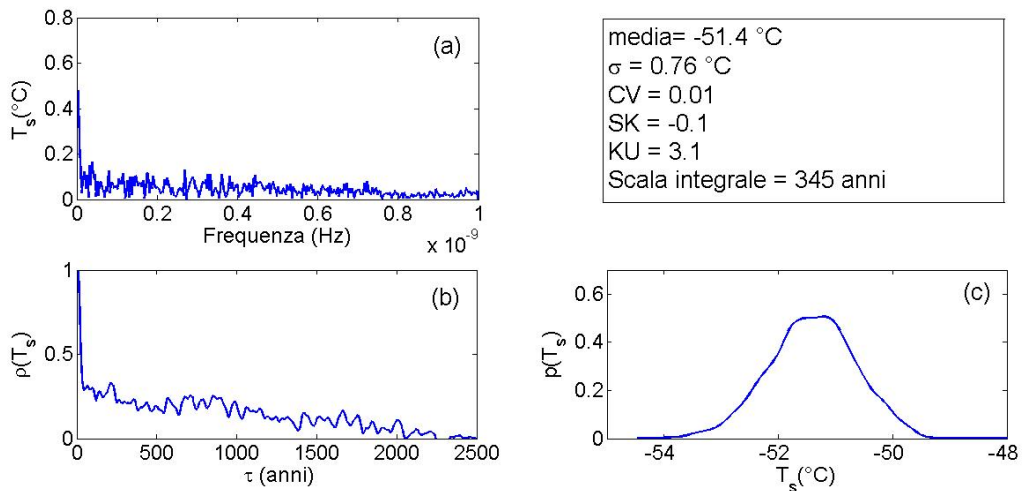


Figura 3.5: figura (a): la dominante maggiore ha una frequenza bassa ( $0.01 \cdot 10^{-9}\text{ Hz}$  che corrisponde a un periodo di circa 3200 anni) e porta a variazioni relative rispetto al valore di media dell'ordine di grandezza del 1%  
 figura (b): L'autocorrelazione della temperatura superficiale ricostruita è molto forte nei primi 100 anni, dopodichè si mantiene pressoché costante fino a  $\tau$  di mille anni mostrando una debole memoria di se stessa  
 figura (c): funzione di distribuzione di probabilità

### 3.3.2 GISP2-Groenlandia

Nel luglio del 93, dopo cinque anni di perforazione, il Greenland Ice Sheet Project Two (GISP2), ha recuperato una carota di ghiaccio di 3053 metri, all'epoca il più profondo *ice core* al mondo. Anche in questo caso sono stati

presi i dati relativi agli ultimi 10'000 anni pubblicati nello studio di Alley *et al.* (2000). In tale ricerca i dati di temperatura, ricavati da un'interpretazione degli isotopi d'ossigeno, sono stati approssimati con uno *smoothing* rispetto ai dati originari ricavati da Cuffey & Clow (1997).

### Accumulo nevoso - GISP2

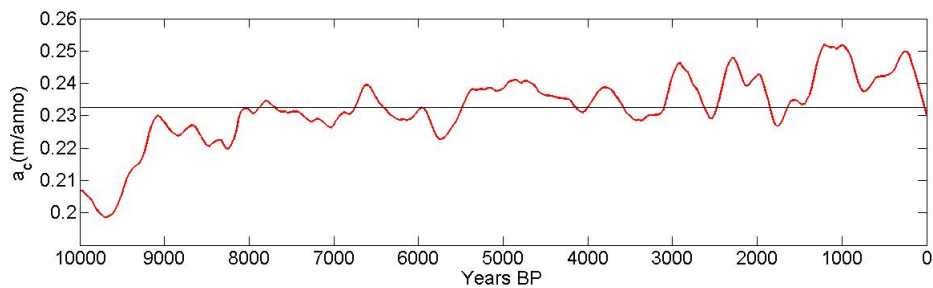


Figura 3.6: Accumulo nevoso in funzione del tempo, valor medio 0.23 m/anno

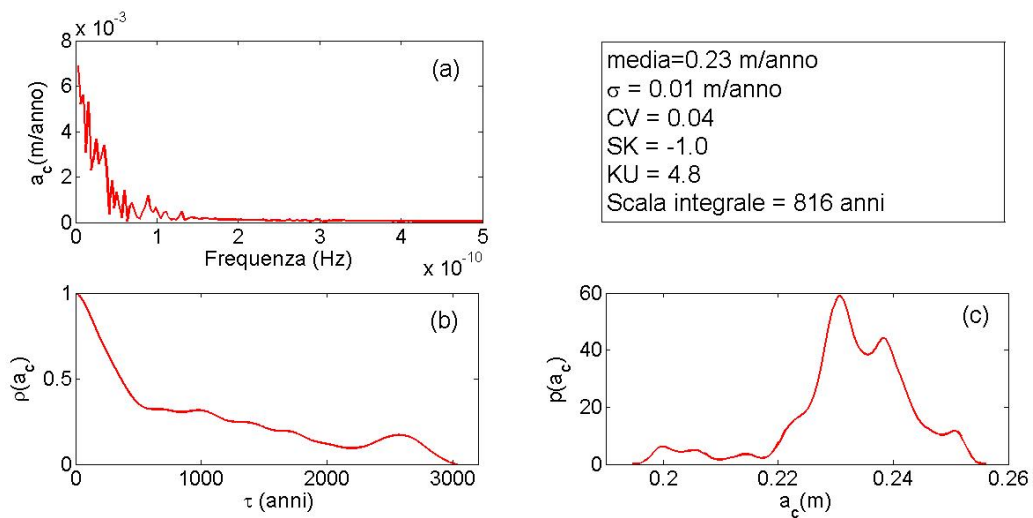


Figura 3.7: figura (a): rispetto ai risultati ottenuti per i segnali del Dome C (figura 3.3) si può notare l'assenza di frequenze maggiori a  $1 \cdot 10^{-10} Hz$ , circa 320 anni, a causa del fatto che il segnale, come stato precedentemente detto, ha subito uno *smoothing* rispetto all'andamento originario. Con questa operazione si sono probabilmente perse le frequenze maggiori.

figura (b): rispetto al Dome (figura 3.2) il segnale risulta maggiormente correlato. Ne deriva una scala integrale di 816 anni, probabilmente sempre a causa dell'operazione di *smoothing* che ha subito la serie.

figura (c): funzione di distribuzione di probabilità.

## Temperatura superficiale - GISP2

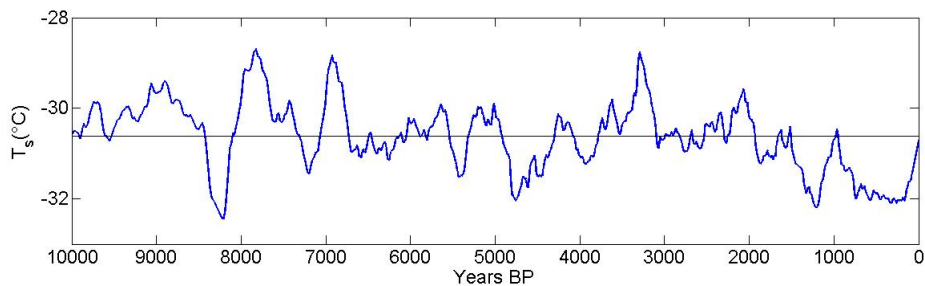


Figura 3.8: Ricostruzione della temperatura superficiale nel tempo, con valore medio  $-30.6^{\circ}\text{C}$

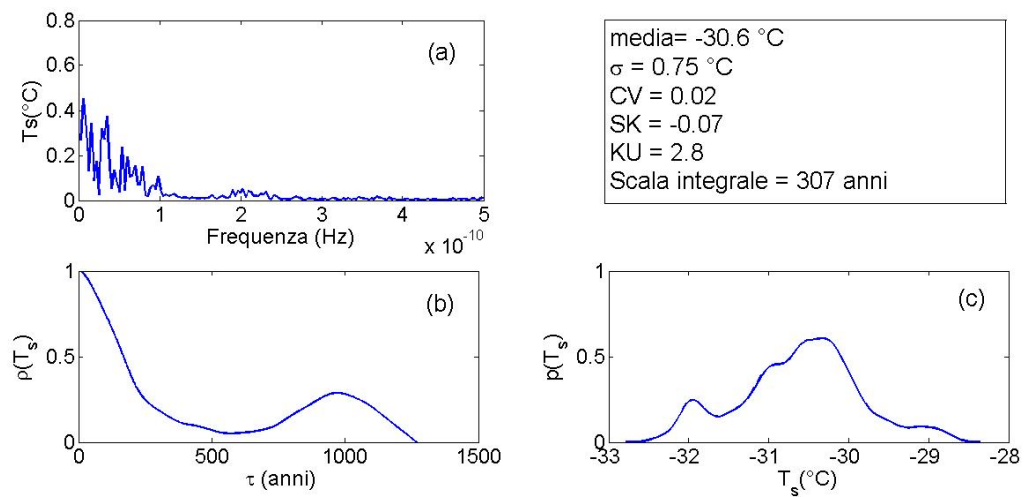


Figura 3.9: figura (a): spettro in dominio di frequenza  
 figura (b): il segnale risulta correlato fino a  $\tau$  di circa 200 anni, poi non porta più memoria di se stesso fino a  $\tau$  di 1'000 anni in cui si nota nuovamente una correlazione debole. La scala integrale è molto simile a quella osservata per la carota Dome (figura 3.5)  
 figura (c): funzione di distribuzione di probabilità.

### 3.3.3 Crosscorrelazione $a_c$ e $T_s$

Questa sezione ha lo scopo di valutare se esiste qualche legame fra l'andamento di accumulo nevoso e quello di temperatura superficiale, rispetto ai dati registrati nelle due carote. Si sono quindi calcolati i valori normalizzati delle serie:

$$a_{c,norm} = \frac{a_c - \bar{a}_c}{\bar{a}_c} T_{s,norm} = \frac{T_s - \bar{T}_s}{\bar{T}_s} \quad (3.3)$$

In maniera tale da poter procedere con una valutazione grafica e con il calcolo della cross-correlazione per entrambe le carote.

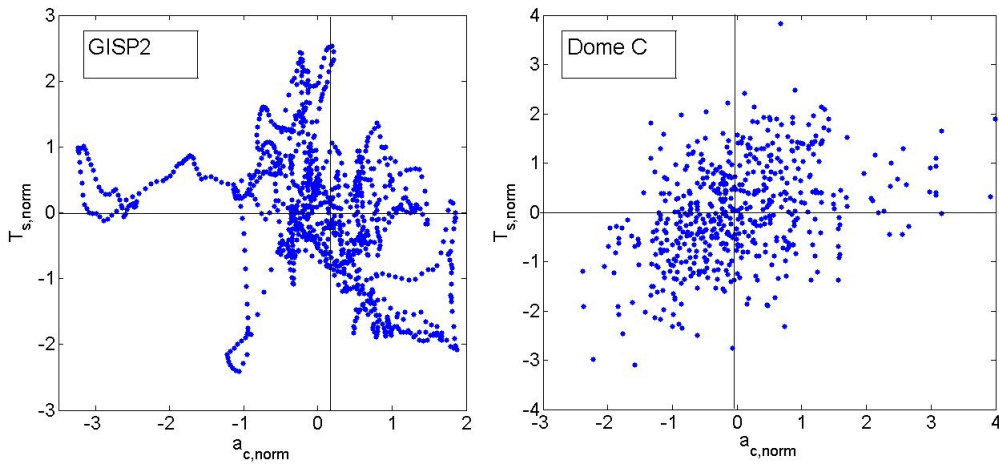


Figura 3.10: come si osserva, la distribuzione dei punti è sparsa e non correlata, infatti i coefficienti di correlazione che ne derivano sono di 0,3 (GISP2) e 0,4 (Dome C)

Si riporta qui una tabella riassuntiva dei parametri statistici delle serie temporali analizzate.

	media	$\sigma$	CV	SK	KU	$\tau$
$a_c$ GISP2	0,23 m/anno	0,01 m/anno	0,04	-1	4,8	816
$a_c$ Dome C	0,03 m/anno	0,002 m/anno	0,06	0,8	4,4	236
$T_s$ GISP2	-30,6 °C	0,75°C	0,02	-0,07	2,8	307
$T_s$ Dome C	-51,4 °C	0,76°C	0,01	-0,1	3,1	345

Tabella 3.1: tabella riassuntiva dei parametri statistici per le diverse serie temporali di  $a_c$  e  $T_s$

## Capitolo 4

# Risposta del modello ai dati GISP2

Nel capitolo 2 di tale lavoro, dove si è indagato il comportamento dinamico del sistema, si sono utilizzati i dati riportati nello studio di Robel *et al.* (2013). Al fine di rendere più verosimile questo lavoro di tesi si è però pensato di usare i dati misurati fisicamente negli *ice cores* sopra citati. In particolare la scelta è ricaduta sui dati ricavati dai vari studi in Groenlandia legati alla carota di ghiaccio del GISP2. I dati antartici, misurati nel sito della Concordia, sono poco rappresentativi poiché ricavati da una situazione climatica peculiare, particolarmente secca e fredda. Riprendendo i valori medi di temperatura superficiale e accumulo nevoso GISP2:

$$T_s = -30.6^\circ\text{C}$$

$$a_c = 0,23 \frac{m}{anno}$$

La prima operazione è stata quella di riprodurre dei diagrammi di biforcazione, che permettessero di individuare per quali valori di una delle due variabili, tenendo fissa l'altra, si potessero osservare i comportamenti del sistema:

- punto stazionario
- ciclo limite
- coesistenza fra le due soluzioni

## 4.1 Sviluppo dinamico del sistema rispetto a diversi valori di $T_s$

Fissato l'accumulo nevoso, pari al valore medio registrato negli ultimi diecimila anni dall'*ice core* GISP2, si ottiene il diagramma di biforcazione che permette di valutare per quali valore di temperatura superficiale è possibile ottenere i diversi comportamenti dinamici del modello.

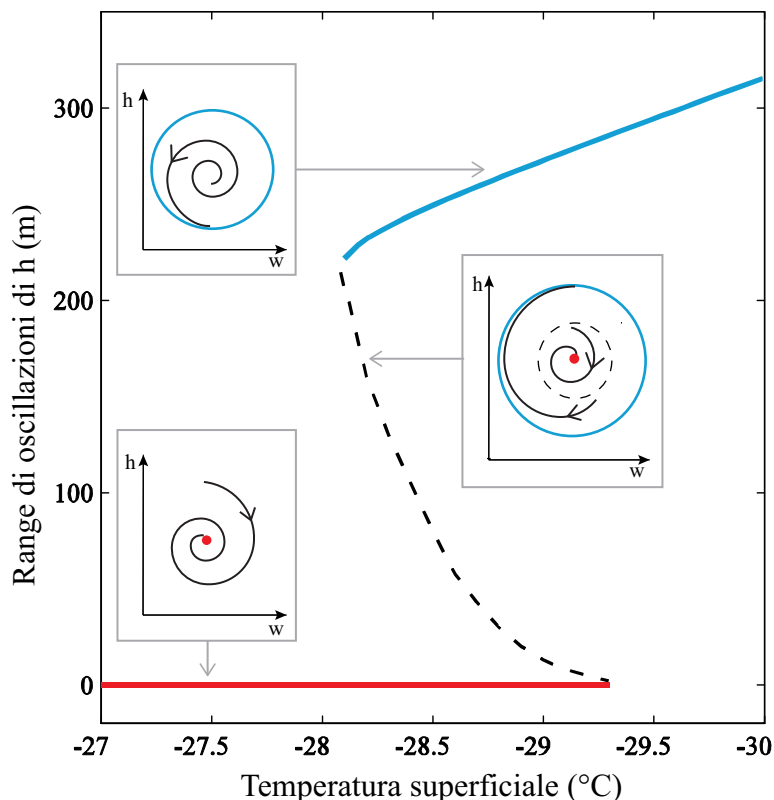


Figura 4.1: Diagramma di biforcazione al variare della temperatura superficiale con  $a_c = 0,23$  m/anno. Per ogni ramo della biforcazione è associato il relativo andamento delle traiettorie nel diagramma delle fasi (in azzurro il ciclo limite e in rosso il punto stazionario).

Dalla figura 4.1 si osserva che il sistema ha un comportamento stazionario per una temperatura superficiale di  $-26^\circ\text{C}$ , un comportamento oscillatorio per una temperatura di  $-30^\circ\text{C}$  e un comportamento che dipende dalle condizioni iniziali (biforcazione) per una temperatura superficiale di  $-28.5^\circ\text{C}$ . Si utilizza quindi lo stesso doppio piano, come nel capitolo 2, in cui l'asse delle

ascisse rappresenta il contenuto d'acqua  $w$  per valori positivi e la temperatura basale per valori negativi, mentre l'asse delle ordinate rappresenta l'altezza del ghiacciaio  $h$  (diagramma delle fasi). In questo modo si può rappresentare l'andamento dinamico del sistema in funzione delle condizioni iniziali con una serie di traiettorie.

- punto attrattore stazionario per  $T_s = -26^\circ\text{C}$

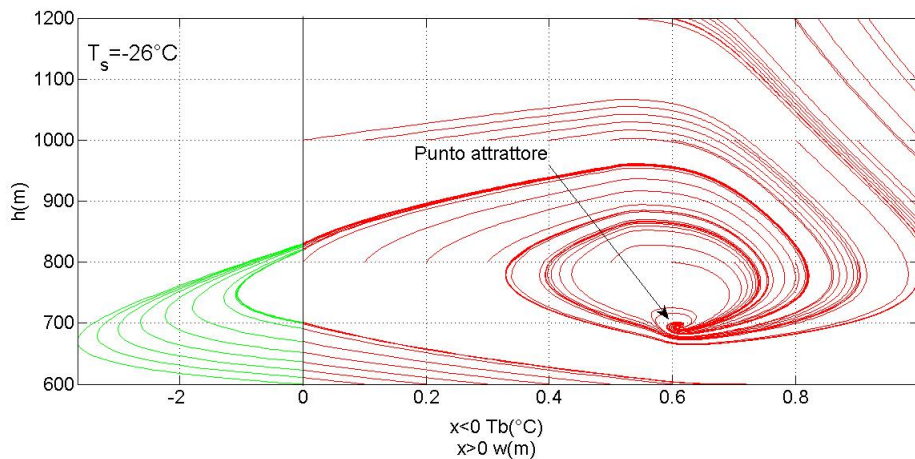


Figura 4.2: punto attrattore, la soluzione che ne deriva è l'andamento stazionario

- biforcazione di Hopf per  $T_s = -28,5^\circ\text{C}$

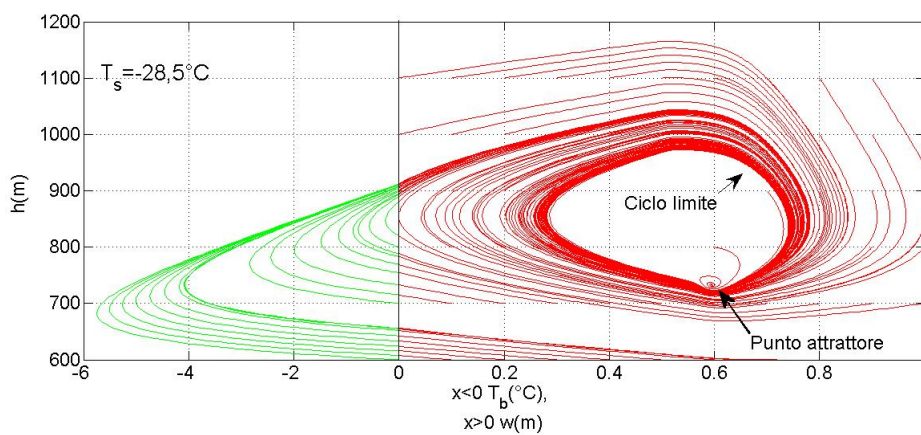


Figura 4.3: Biforcazione di Hopf: sono presenti entrambe le soluzioni, il sistema tende all'una o all'altra a seconda delle condizioni iniziali

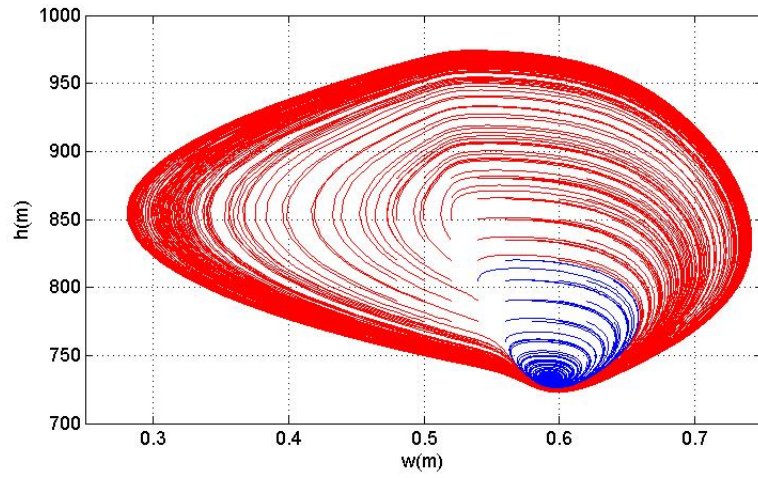


Figura 4.4: Particolare del ciclo instabile all'interno del ciclo limite. In blu sono rappresentate le traiettorie che terminano sulla soluzione stazionaria e in rosso quelle che finiscono sul ciclo limite

- ciclo limite per  $T_s = -30^\circ\text{C}$

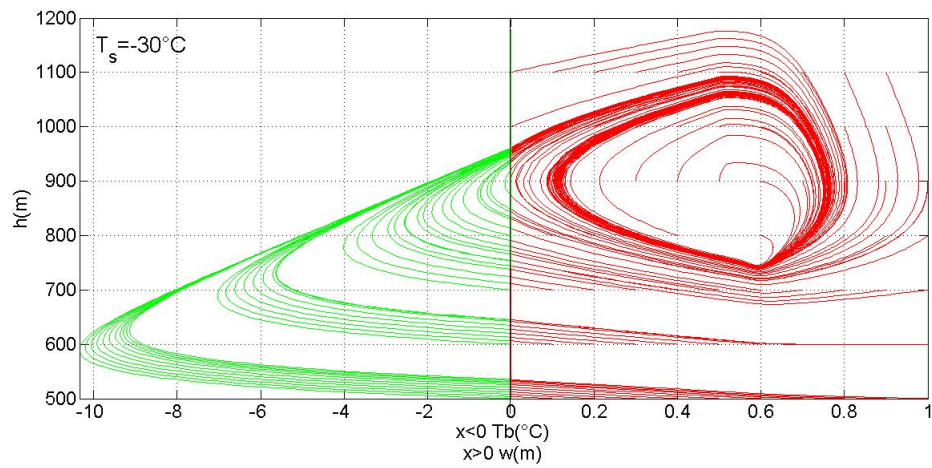


Figura 4.5: Il ciclo limite del sistema individua la soluzione Binge-Purge

## 4.2 Sviluppo dinamico del sistema rispetto a diversi valori di $a_c$

Fissata la temperatura superficiale, pari al valore medio dato dalle ricostruzioni degli ultimi diecimila anni dall'*ice core* GISP2, si ottiene il diagramma di biforcazione che permette di valutare per quali valore di accumulo nevoso è possibile ottenere i diversi comportamenti dinamici del modello.

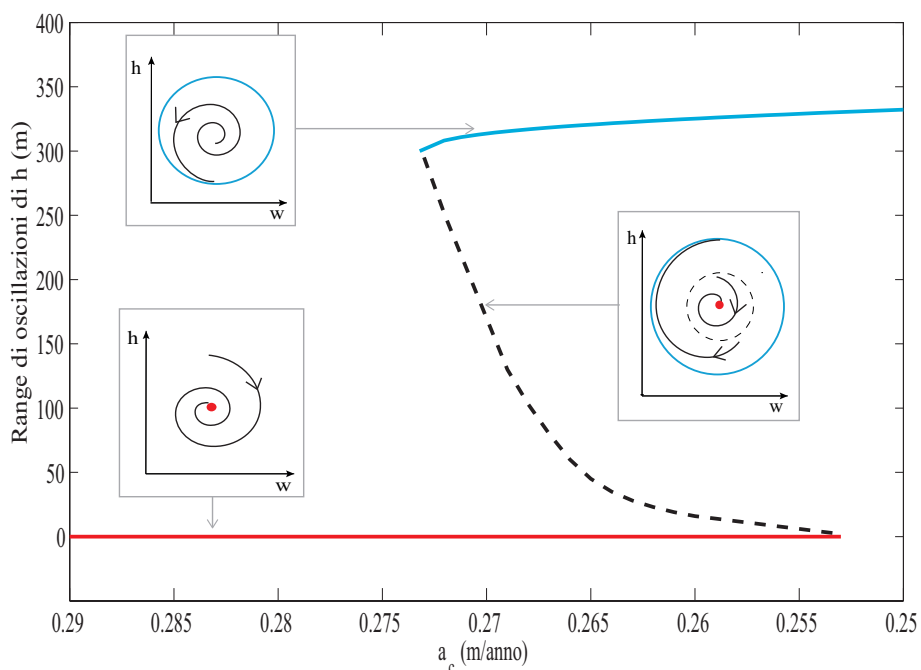


Figura 4.6: Diagramma di biforcazione per l'accumulo nevoso con  $T_s = -30,6$  °C. Anche in questo caso a ogni ramo del diagramma di biforcazione è associato il relativo comportamento delle traiettorie nel diagramma delle fasi (in azzurro il ciclo limite e in rosso il punto stazionario).

Dalla figura 4.6 si osserva che il sistema ha un comportamento stazionario per un accumulo nevoso di 0,28 m/anno, un comportamento oscillatorio per un accumulo nevoso di 0,25 m/anno e un comportamento che dipende dalle condizioni iniziali (biforcazione) per un accumulo nevoso di 0,27 m/anno. Con gli stessi algoritmi utilizzati sino ad ora si ottengono i vari comportamenti dinamici del modello.

- punto attrattore stazionario per  $a_c=0,28$  m/anno

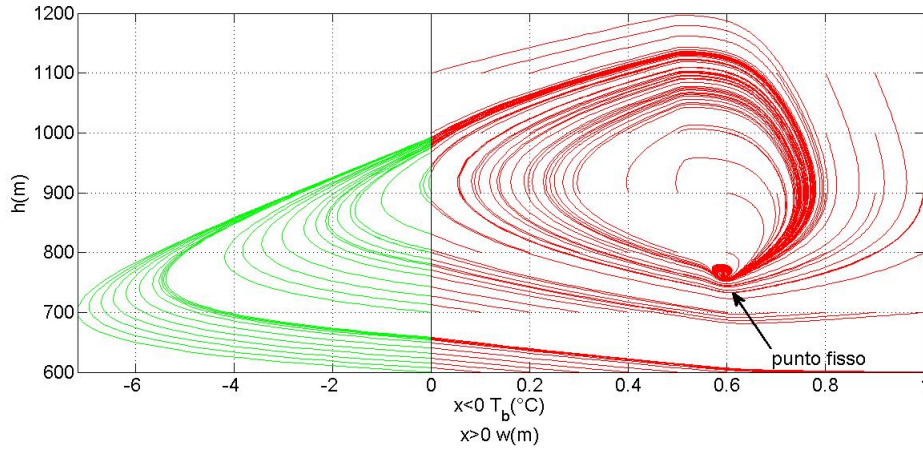


Figura 4.7: Punto attrattore, la soluzione che ne deriva è l'andamento stazionario

- biforcazione di Hopf per  $a_c=0,27$  m/anno

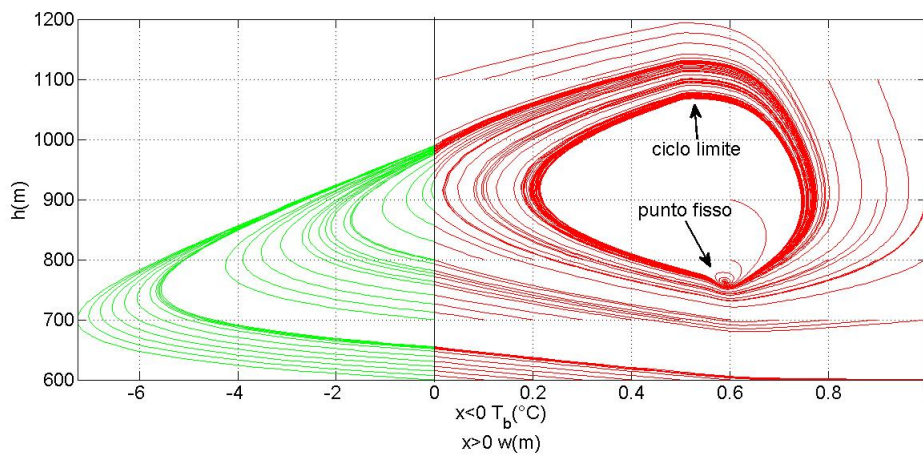


Figura 4.8: Biforcazione di Hopf: sono presenti entrambe le soluzioni, il sistema tende all'una o all'altra a seconda delle condizioni iniziali

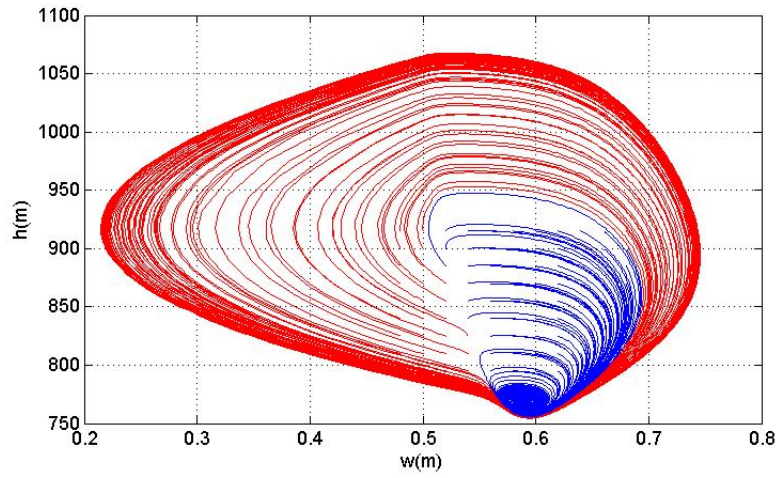


Figura 4.9: Particolare del ciclo instabile all'interno del ciclo limite. In blu sono rappresentate le traiettorie che terminano sulla soluzione stazionaria e in rosso quelle che finiscono sul ciclo limite

- ciclo limite per  $a_c=0,25$  m/anno

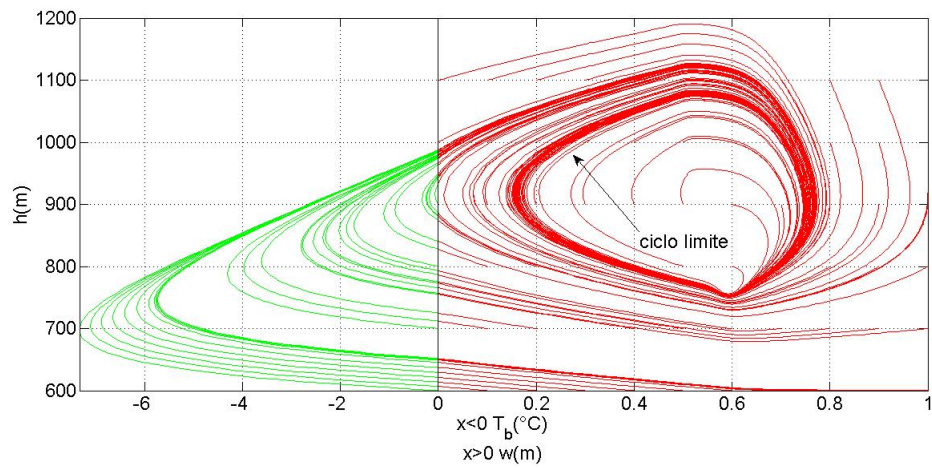


Figura 4.10: Il ciclo limite del sistema individua la soluzione Binge-Purge

### 4.3 Organizzazione dei risultati successivi

Una volta elaborati i diagrammi di biforcazione (figura 4.1 e 4.6), si è in grado di determinare per quali valori dei parametri esterni si è in condizioni stazionarie e in quale oscillatorie. Allora, studiando il sistema dal punto di vista dinamico, con forzatura esterna dei parametri climatici ( $a_c$  e  $T_s$ ), si è in grado di verificare se la risposta del modello risulti differente da quella dei casi deterministici (con valore dei parametri esterni costanti). Nei due capitoli successivi sono riassunti i risultati degli studi, organizzati in questa maniera:

1. In prima battuta (capitolo 5), allo scopo di valutare come il sistema reagisca a una forzante, si sono fatti variare i parametri ambientali in maniera periodica. Riprodurre i segnali di  $a_c$  o  $T_s$  in maniera periodica non risulta essere particolarmente realistico (poiché come evinto dalle figure 3.7 e 3.9 non esistono frequenze dominanti nello spettro), ma permette di comprendere il comportamento del sistema in situazioni dinamiche.
2. Secondariamente (capitolo 6), sfruttando i dati statistici delle serie dei parametri ambientali GISP2, è stato possibile ottenere delle serie, analoghe a quelle registrate, con rumore Gaussiano colorato (CGN). La forzatura del modello con tali serie risulta essere maggiormente realistica ed è l'obiettivo principale dello studio di questa tesi.

# Capitolo 5

## Forzanti periodiche

### 5.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti si è mostrata la risposta del modello a condizioni costanti di  $a_c$  e  $T_s$ . In questa sezione invece si vuole osservare come eventuali variazioni periodiche delle due grandezze possano portare alla nascita di fenomeni particolari nella soluzione del sistema (*noise-induced phenomena* Ridolfi *et al.* (2011)). Dal punto di vista fisico la riproduzione dei segnali di  $a_c$  e  $T_s$  in maniera periodica è poco realistica (poiché come evinto dalle figure 3.7 e 3.9 non esistono frequenze dominanti nello spettro), ma permette di comprendere il comportamento del sistema in situazioni dinamiche. Si fa in modo che la variabile oscilli periodicamente fra soluzione stazionaria e soluzione oscillatoria. Per maggiore chiarezza si riporta nuovamente il diagramma di biforcazione di  $a_c$ . Osservando la figura 5.1, immaginando di far variare l'accumulo nevoso fra i valori di 0,25 e 0,28 m/anno, il sistema si troverà per determinati intervalli di tempo nel campo della soluzione stazionaria e per altri nel campo della soluzione oscillatoria (la durata di tali intervalli dipenderà dal periodo di oscillazione di  $a_c$ ). In questo modo sarà possibile valutare se si verificheranno o meno delle risposte particolari del sistema, diverse dalla semplice soluzione stazionaria o da quella oscillatoria, con una variazione nelle oscillazioni dei valori delle grandezze associate al ghiacciaio ( $h$  e  $w$ ).

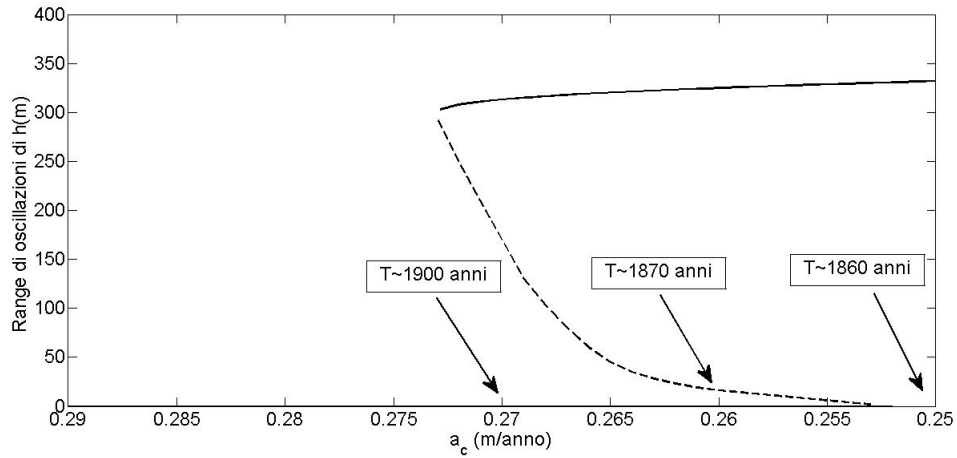


Figura 5.1: Diagramma di biforcazione per  $T_s = -30.6$  °C (media GISP2). Quando l'accumulo nevoso è nel dominio del ciclo limite, la soluzione che ne deriva è quella oscillatoria. Per ogni valore di  $a_c$ , i parametri del sistema (in particolare  $h$  e  $w$ ) oscillano con una diversa frequenza (o periodo). All'interno del grafico sono riportati i tempi caratteristici di oscillazione di  $h$  e  $w$  nel dominio del ciclo limite.

In maniera iterativa e secondo logica si sono scelti i valori con cui far variare una grandezza ( $a_c$  o  $T_s$ ) tenendo costante l'altra e successivamente si sono fatte oscillare entrambe in fase e in controfase.

Di seguito è riportato l'elenco dei casi ritenuti significativi nella risposta del sistema. Con la seguente nomenclatura:

- casi A, variazioni periodiche di  $a_c$
- casi B, variazioni periodiche di  $T_s$
- casi C, variazioni in fase sia di  $a_c$  che di  $T_s$
- casi D, variazioni in controfase sia di  $a_c$  che di  $T_s$

	$a_c$ (m/anno)	$A_{a_c}$ (m/anno)	$T_{a_c}$ (anni)	$T_s$ (°C)	$A_{T_s}$ (°C)	$T_{T_s}$ (anni)
Caso A1	0,26	0,03	1000	-30,6	-	-
Caso A2	0,25	0,03	5000	-30,6	-	-
Caso A3	0,25	0,03	10000	-30,6	-	-
Caso B1	0,23	-	-	-29,5	3	10000
Caso B2	0,23	-	-	-29,5	3	5000
Caso B3	0,23	-	-	-30,5	2	6000
Caso C1	0,23	0,02	10000	-29	2	10000
Caso D1	0,24	0,02	8000	-30	2	8000
Caso D2	0,25	0,02	4500	-31	2	4500

Tabella 5.1: Casi studio significativi per la risposta del modello alla forzatura periodica

### 5.1.1 Ciclo limite di confronto

Per ogni caso studiato di interesse si riportano i grafici contenenti:

- Variazione temporale della forzante o delle forzanti nel caso in cui a oscillare siano sia  $a_c$  che  $T_s$
- Andamento nel tempo di  $h$  e  $w$  e le relative funzioni di distribuzioni di probabilità
- Andamento della soluzione del sistema nel piano  $\{h, w\}$

Al fine di rendere più semplice e intuitivo valutare come le oscillazioni della forzante possano indurre a delle modifiche rispetto alla soluzione *binge-purge* non forzata, si è ritenuto opportuno presentare gli stessi grafici per un ciclo limite non forzato.

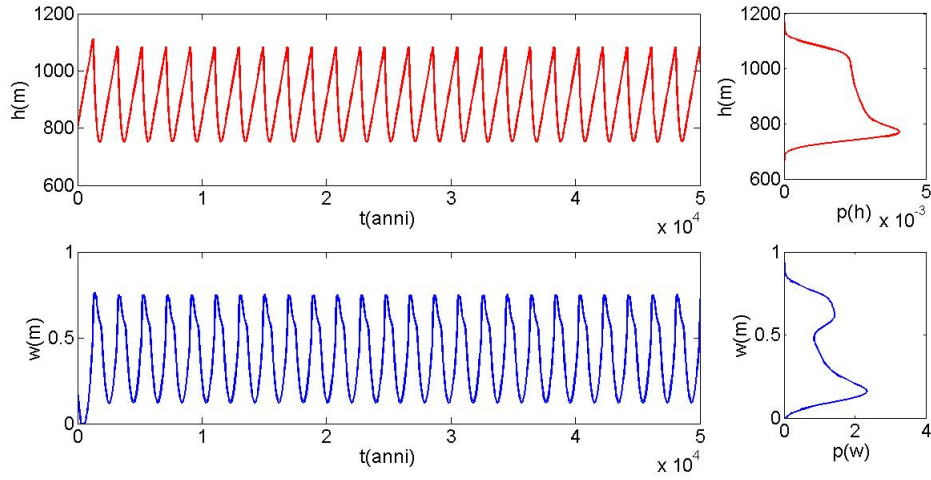


Figura 5.2: Andamento di  $h$  e  $w$  nel tempo con  $T_s = -30,6^\circ\text{C}$  e  $a_c = 0,25$  m/anno (campo soluzione oscillatoria, figura 5.1). A destra ci sono le funzioni di distribuzione di probabilità.

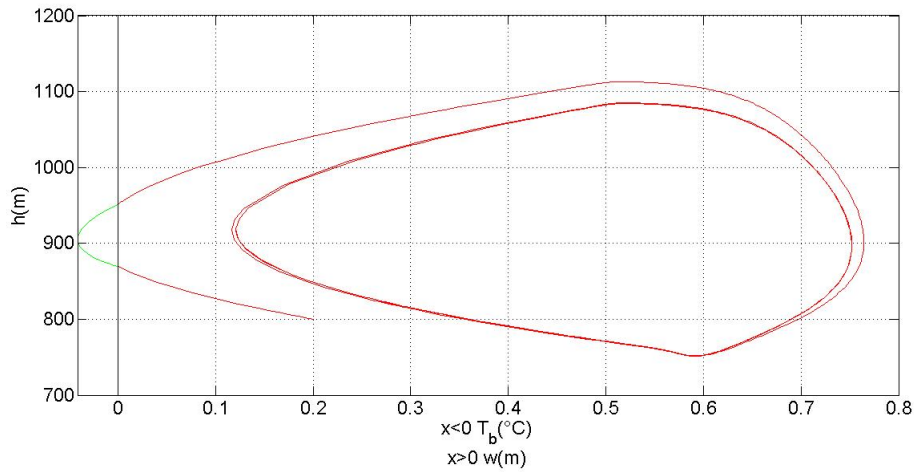


Figura 5.3: Andamento nel piano  $\{h, w\}$  del ciclo limite non forzato

## 5.2 Variazione periodica dell'accumulo nevoso

Far variare periodicamente il valore di  $a_c$ , tenendo costante quello di  $T_s$ , ha significato dal punto di vista matematico e modellistico aggiungere un'equazione differenziale al modello:

$$\frac{\partial a_c}{\partial t} = Av \cos(vt) \quad (5.1)$$

Per tale equazione sono da definire:

1.  $a_c$  iniziale, che corrisponde anche ad  $a_c$  medio
  2. l'ampiezza di oscillazione  $A$
  3. il periodo di oscillazione  $T$  che definisce  $v$  ( $= 2\pi/T$ )
1. Per quanto concerne la condizione iniziale di  $a_c$ , basandosi sulla figura 5.1 si sono assunti i seguenti valori:
    - 0,25 m/anno, e in questo caso il sistema si trova per maggiori intervalli di tempo nella soluzione del ciclo limite
    - 0,26-0,27 m/anno, così che il sistema si trovi in periodi di uguale durata nel range di soluzione stazionaria e in quello di soluzione oscillatoria
    - 0,28 m/anno, e il sistema si trova per maggiori intervalli di tempo nella soluzione con punto stazionario
  2. Sulla base dei diagrammi contenuti nel capitolo 3, si evince che le variazioni rispetto al valore medio di accumulo nevoso non superano i 0,3 m/anno, per cui l'ampiezza di oscillazione, definita dal valore  $A$ , si è fatta variare fra 0,01 e 0,03 m/anno.
  3. Il periodo, che determina  $v$ , è stato scelto in base alla duplice considerazione che debba essere simile al periodo del sistema affinché le frequenze interagiscano e che debba tenere conto di quali siano le frequenze dominanti nel segnale di accumulo nevoso misurato da GISP2 (figura 3.7):
    - Il tempo caratteristico del sistema dipende dalle variabili di accumulo nevoso e temperatura superficiale, perchè come già visto, a seconda delle condizioni esterne, le oscillazioni che ne derivano sono diverse in tempo e ampiezza (in figura 5.1 sono presenti i tempi caratteristici del sistema per i valori di  $a_c$  di interesse, ovviamente nel campo della soluzione oscillatoria, poichè nella stazionarietà non è possibile trovare un tempo caratteristico).
    - Dalle analisi di spettro di frequenza dei dati non sono spiccati particolari valori di frequenze dominanti quanto dei range di frequenze

Considerando questi elementi si è quindi proceduto in maniera iterativa con un ampio intervallo di valori per il periodo di oscillazione.

Fra tutte le combinazioni di valori sopracitati, nella tabella seguente sono riassunti i casi degni di considerazione per la risposta peculiare del modello:

	$a_c$ (m/anno)	$A_{a_c}$ (m/anno)	$T_{a_c}$ (anni)
Caso A1	0,26	0,03	1000
Caso A2	0,25	0,03	5000
Caso A3	0,25	0,03	10000

Tabella 5.2: Casi relativi alla forzatura periodica dell'accumulo nevoso

### 5.2.1 Attrazione del punto stazionario

In questa sezione si riportano due risultati (A1 e A2) che mostrano come la variazione periodica di accumulo nevoso porti il modello a una situazione instabile. Infatti la soluzione del sistema pur trovandosi nella maggior parte del tempo a ruotare attorno al ciclo limite, che però ovviamente cambia forma con il variare di  $a_c$ , risente anche dell'attrazione del punto stazionario. Con una metafora fisica si può immaginare una carica positiva  $q^+$  che si muove sul piano  $\{h, w\}$  su una traiettoria variabile nel tempo, che rappresenta il ciclo limite. In prossimità di un punto di tale traiettoria è presente una carica negativa  $q^-$ , che rappresenta l'attrazione del punto stazionario, che attrae  $q^+$  deviandola dalla propria traiettoria. La velocità della carica positiva è però tale che ruotando attorno a quella negativa non la incontra, ma ritorna sulla sua traiettoria e il ciclo si ripete con l'attrazione di  $q^-$  che si manifesta solo quando  $q^+$  le passa sufficientemente vicino.

**Caso A1**  $a_c=0,26$  m/anno,  $A_{a_c}=0,03$  m/anno,  $T=1000$  anni

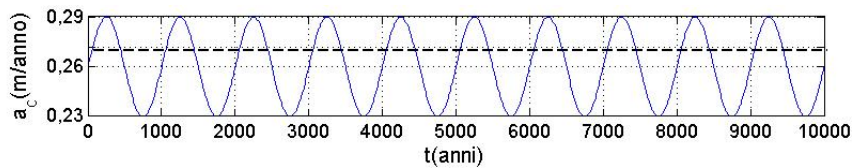


Figura 5.4: Andamento periodico di  $a_c$  con periodo 1'000 anni, mostrato su un intervallo temporale di 10'000 anni anzichè 100'000 per chiarezza. La linea tratteggiata nera indica il valore limite di biforcazione (dove ciclo limite instabile e stabile coincidono).

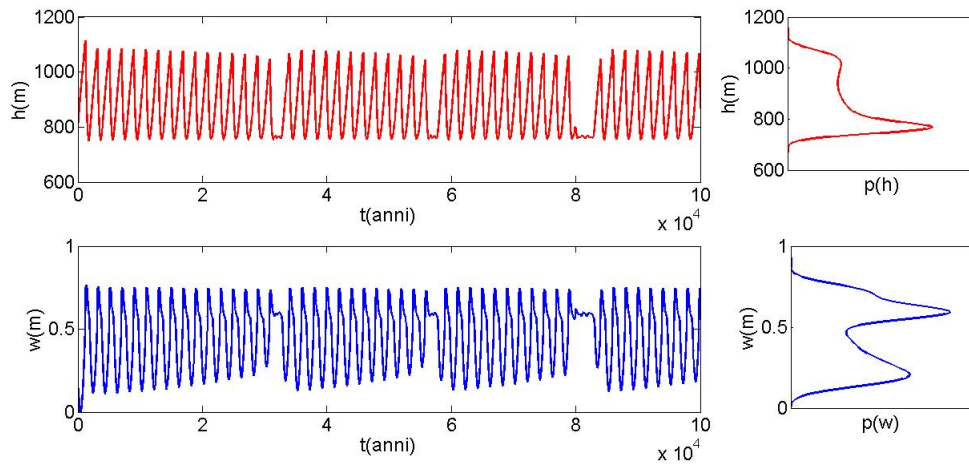


Figura 5.5: Andamento dell'altezza del ghiacciaio e del contenuto d'acqua basale nel tempo. Si osserva bene come a lunghi periodi di oscillazione, intorno ai 30'000 anni, si alternino dei periodi di quasi stazionarietà più brevi. Le PDF mostrano dei picchi in corrispondenza del punto stazionario.

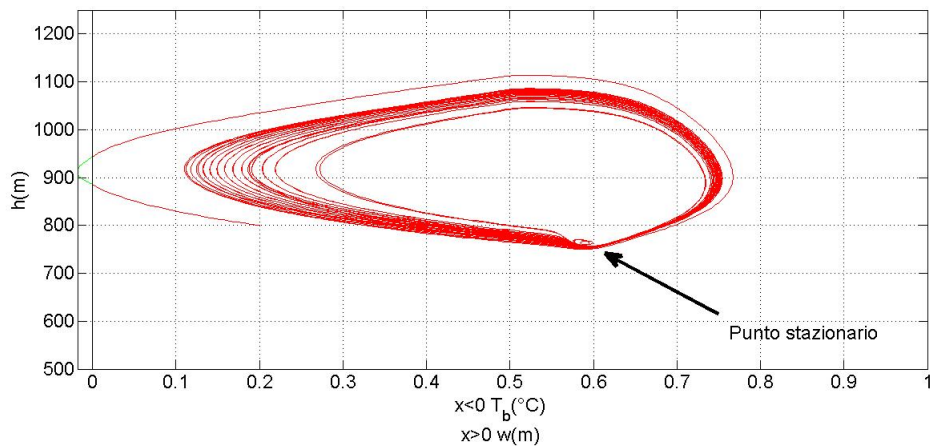


Figura 5.6: Comportamento sul piano  $\{h, w\}$  del sistema che passa la maggior parte del suo tempo attorno a un ciclo limite variabile risentendo però dall'attrazione del punto stazionario quando l'accumulo nevoso è particolarmente alto.

#### Caso A2 $a_c=0,25$ m/anno, $A_{a_c}=0,03$ m/anno, $T=5000$ anni

In questo caso il valore medio di accumulo nevoso è più basso rispetto al precedente e più spostato verso la soluzione *binge-purge* del sistema. Affinchè si risenta dell'attrazione del punto stazionario il valore di accumulo nevoso deve rimanere nell'intervallo di valori maggiori, quelli che porterebbero il

sistema a una soluzione stazionaria, per un tempo più lungo. Questo si ottiene facendo variare più lentamente il valore di accumulo nevoso.

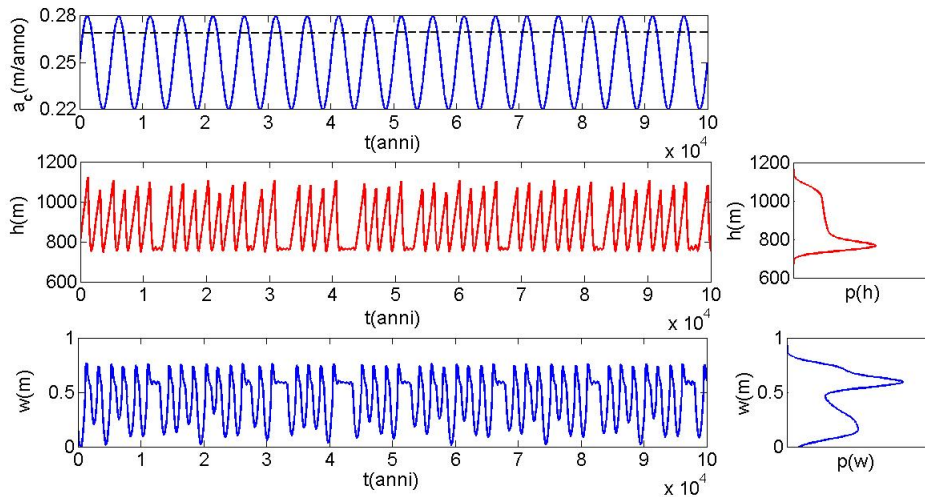


Figura 5.7: Andamento dell'altezza del ghiacciaio e del contenuto d'acqua basale in funzione del tempo. Si osserva bene come a lunghi periodi di oscillazione, che hanno perso la periodicità del caso precedente, si alternino dei periodi di quasi-stazionarietà più brevi.

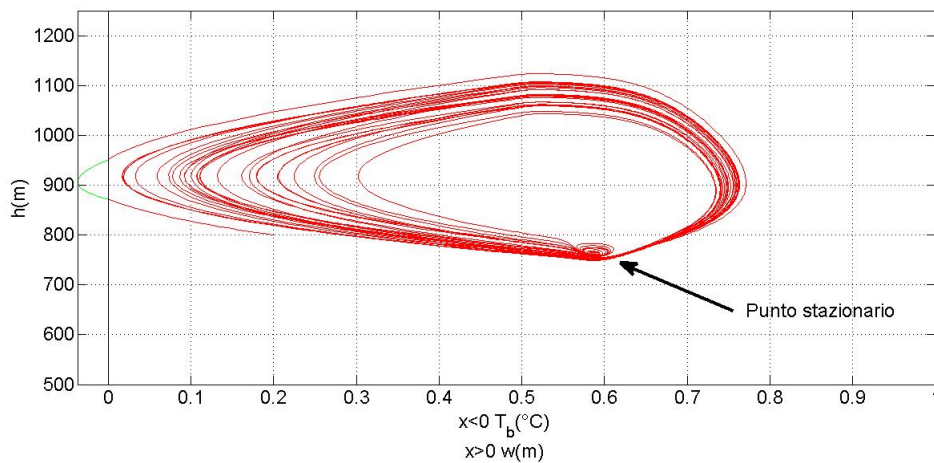


Figura 5.8: Comportamento sul piano  $\{h, w\}$  del sistema.

## 5.2.2 Alternanza stato oscillatorio e stazionario

Quando la scala temporale del rumore supera quella del sistema (che dipende dal valore di  $a_c$  come mostrato in figura 5.1), le variabili che compongono il

sistema stesso si portano in equilibrio con il rumore. Quindi con periodi di variazione dell'accumulo nevoso maggiori, il sistema ha tempo per portarsi in equilibrio con la forzante e alternare periodi di oscillazione, quando il valore di accumulo nevoso è basso, a periodi di quasi stazionarietà, quando  $a_c$  è maggiore.

**Caso A3  $a_c=0,25$  m/anno,  $A_{a_c}=0,03$  m/anno,  $T=10000$  anni**

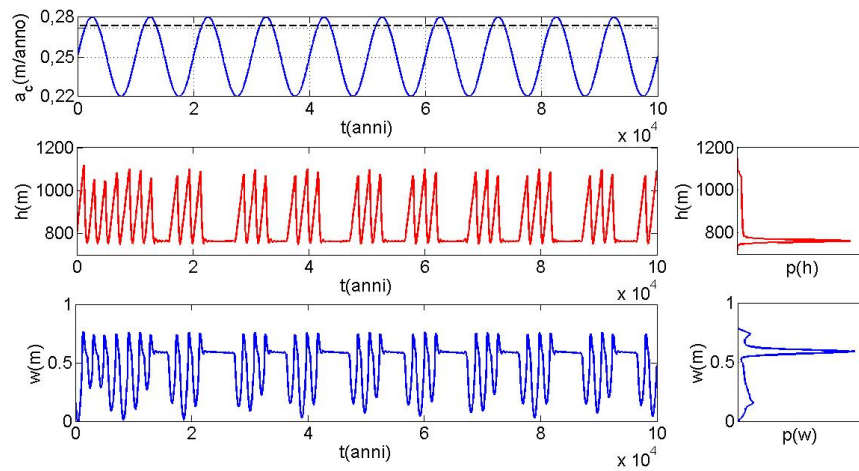


Figura 5.9: Si osserva come ogni circa 5'000 anni, il semiperiodo di oscillazione di  $a_c$  appunto, si alternano la soluzione oscillatoria e quella stazionaria.

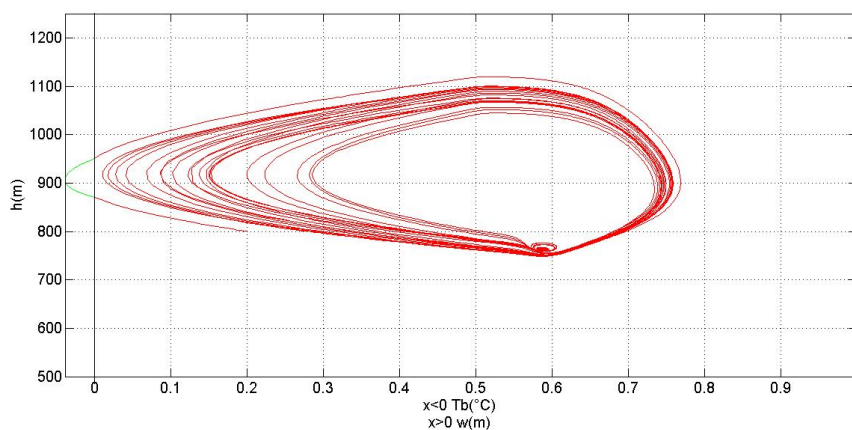


Figura 5.10: Comportamento sul piano  $\{h, w\}$  del sistema che alterna periodi attorno al ciclo limite a periodi attorno al punto stazionario

### 5.3 Variazione periodica della temperatura superficiale

Analogamente a quanto fatto per l'accumulo nevoso è stato eseguito anche per la temperatura superficiale. Si è aggiunta cioè un'equazione differenziale al modello:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = Av \cos(vt) \quad (5.2)$$

Valgono le stesse considerazioni fatte in sezione 5.2:

1. Sulla base dell'analisi di dati ottenuti dalla carota GISP2 si è ricavato come la media di temperatura degli ultimi 10'000 anni sia stata nella zona di misura di  $-30,6^\circ\text{C}$  e quella di accumulo nevoso, tenuta costante, sia di  $0,23$  m/anno. Le variazioni rispetto al valore di  $T_s$  nelle medie annuali calcolate sono di massimo due gradi. Tuttavia bisogna ricordare che i dati del GISP2 coprono solo alcuni degli anni compresi fra il presente e l'8'000 a.C. Per cui può essere ragionevole pensare che ci possano essere state temperature medie annuali che si siano discostate maggiormente dal valore medio, per esempio di 3 gradi invece che di 2. Tenendo conto di queste considerazioni e della volontà di porsi a cavallo del valore di biforcazione (figura 5.11) si sono presi dei valori medi (corrispondenti ai valori iniziali) compresi fra i  $-28,5^\circ\text{C}$  e i  $-30,5^\circ\text{C}$ .
2. I valori di  $A$ , che determinano la semiampiezza della sinusoide, sono stati fatti variare tra  $1^\circ\text{C}$  e  $3^\circ\text{C}$ .
3. I periodi di oscillazione  $T$ , che determinano  $v$ , sono stati scelti con le stesse considerazioni fatte per l'accumulo nevoso (sezione 5.2, punto 3).

Di seguito è riportata la tabella riassuntiva dei casi significativi insieme al diagramma di biforcazione per  $T_s$  :

	$T_s(^\circ\text{C})$	$A_{T_s}(^\circ\text{C})$	$T_{T_s}(\text{anni})$
Caso B1	-29,5	3	10000
Caso B2	-30,5	3	5000
Caso B3	-30,5	2	6000

Tabella 5.3: Casi relativi alla forzatura periodica della temperatura superficiale

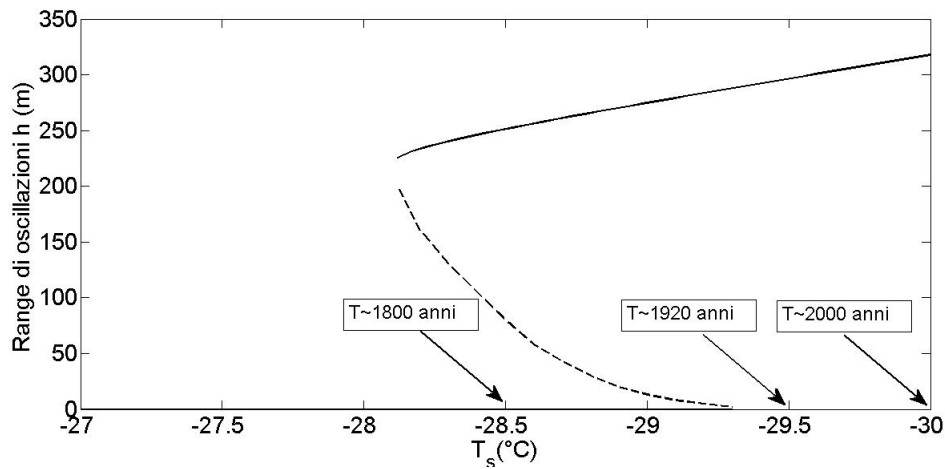


Figura 5.11: Diagramma di biforcazione per  $T_s$  con  $a_c=0,23$  m/anno. All'interno del grafico ci sono alcuni tempi caratteristici del sistema per i diversi valori di temperatura superficiale. Rispetto alla figura 5.1 si nota una maggiore influenza della temperatura sul tempo di oscillazione.

### 5.3.1 Ciclo limite-Punto

Di seguito sono riportati dei risultati che mostrano come l'alternarsi dei valori di temperatura superficiale, con un periodo maggiore rispetto alla scala temporale del sistema (*figura 5.11*), portino il sistema a trovarsi sia nelle condizioni per cui vige il regime oscillatorio sia in quelle per cui si risente dell'attrazione del punto stazionario.

**Caso B1  $T_s = -29,5^\circ\text{C}$ ,  $A_{T_s} = 3^\circ\text{C}$ ,  $T = 10000$  anni**

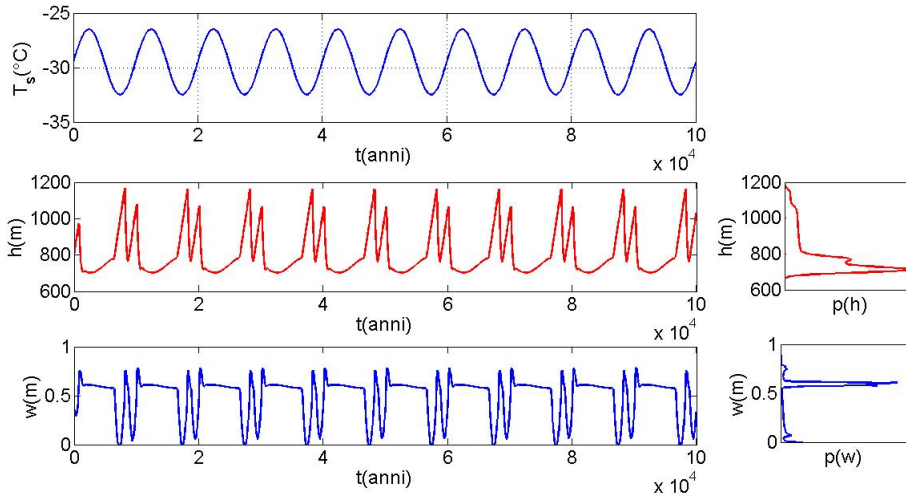


Figura 5.12: Andamento di  $h$  e  $w$  in funzione del tempo. Si possono osservare i periodi di stazionarietà in cui l'altezza del ghiacciaio aumenta a causa della neve che si accumula in superficie, seguiti dalle oscillazioni sui cicli limite.

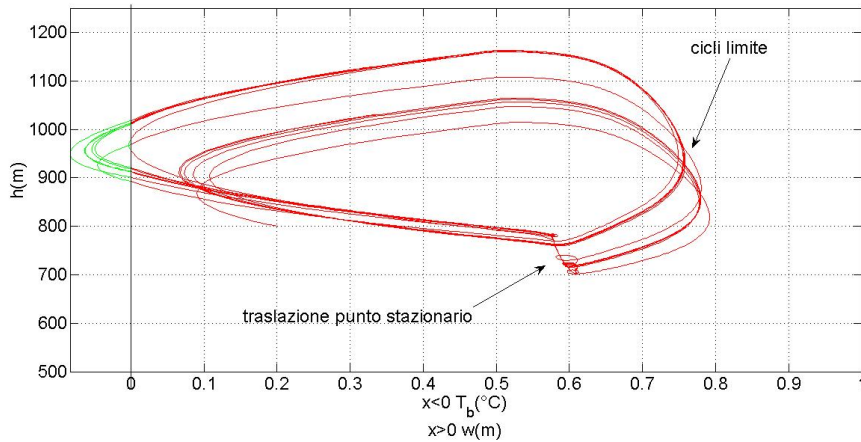


Figura 5.13: Comportamento del modello nel piano  $\{h, w\}$ . La soluzione tende a fare un primo giro sul ciclo limite per poi arrivare al punto stazionario dove le precipitazioni di neve, unite al raffreddamento, fanno sì che l'altezza del ghiacciaio aumenti (figura 5.12). A questo punto il sistema torna su un ciclo limite che però varia a causa del riscaldamento e torna alla fine sul punto stazionario periodicamente.

**Caso B2  $T_s = -30,5^\circ\text{C}$ ,  $A_{T_s} = 3^\circ\text{C}$ ,  $T = 5000$  anni**

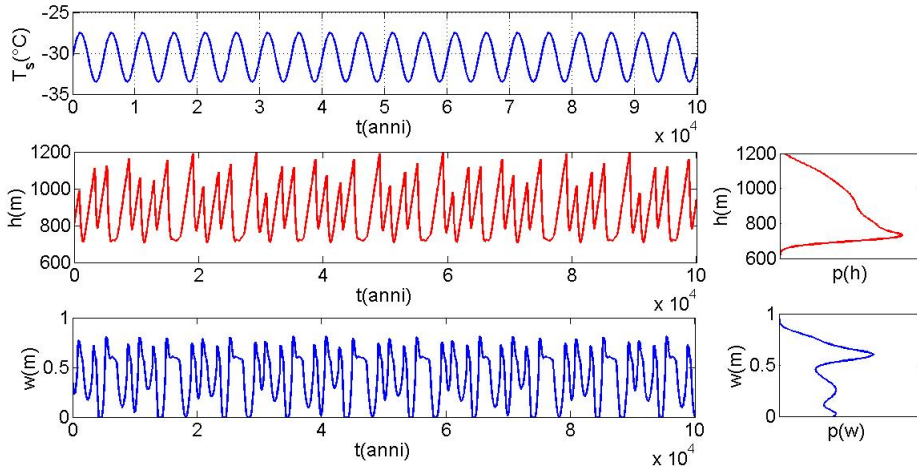


Figura 5.14: Andamento di  $h$  e  $w$  in funzione del tempo. Si alternano oscillazioni ad altezze maggiori, per i cicli limite durante le fasi di raffreddamento, a oscillazioni ad altezze minori per i cicli in fase di riscaldamento con brevi transizioni sul punto stazionario.

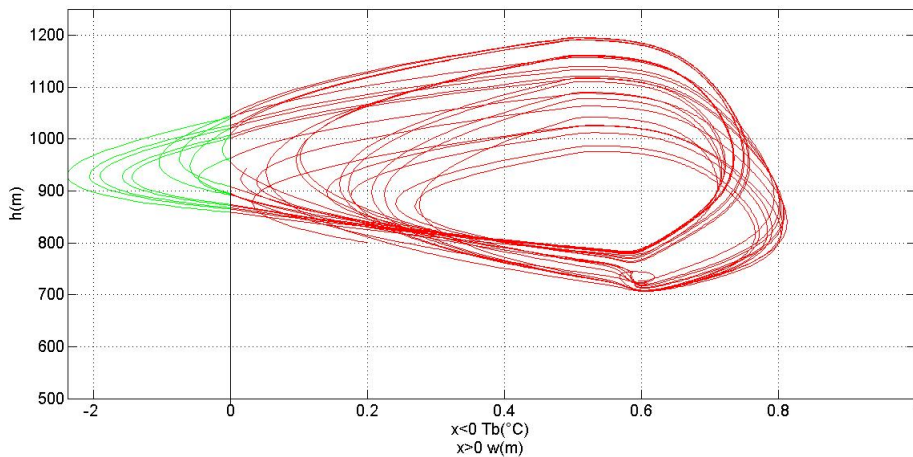


Figura 5.15: Comportamento del modello nel piano  $\{h, w\}$

Come si osserva in *figura 5.15* la frequenza adottata per la variazione di temperatura superficiale porta a delle grandi modifiche nel ciclo limite. In particolare quando la temperatura superficiale è maggiore il sistema risente dell'attrazione del punto stazionario e si hanno i cicli limite più in basso

nel piano. Quando invece la temperatura è più bassa il sistema si allontana dal punto stazionario e si hanno addirittura dei cicli limite che non sono interamente contenuti nel piano  $\{h, w\}$  perchè parte di questi si ha con un contenuto d'acqua nullo e quindi nel piano  $\{h, T_b\}$ .

### 5.3.2 Variazioni del ciclo limite

Nell'ultimo esempio riportato si è notato come la variazione di temperatura superficiale sia molto più influente sulla forma e la posizione del ciclo limite di quanto non lo sia la variazione di accumulo nevoso.

A prova di questo si illustra un ulteriore caso in cui il ciclo limite subisce notevoli modifiche a causa dell'oscillazione di  $T_s$ .

#### Caso B3 $T_s = -30,5^\circ\text{C}$ , $A_{T_s} = 2^\circ\text{C}$ , $T = 6000$ anni

Da questo esempio risulta maggiormente evidente come il raffreddamento della temperatura esterna porti da dei cicli limiti minori a dei cicli limite sempre più grandi (figura 5.17) con variazioni di altezza e contenuto d'acqua del ghiacciaio maggiori (figura 5.16).

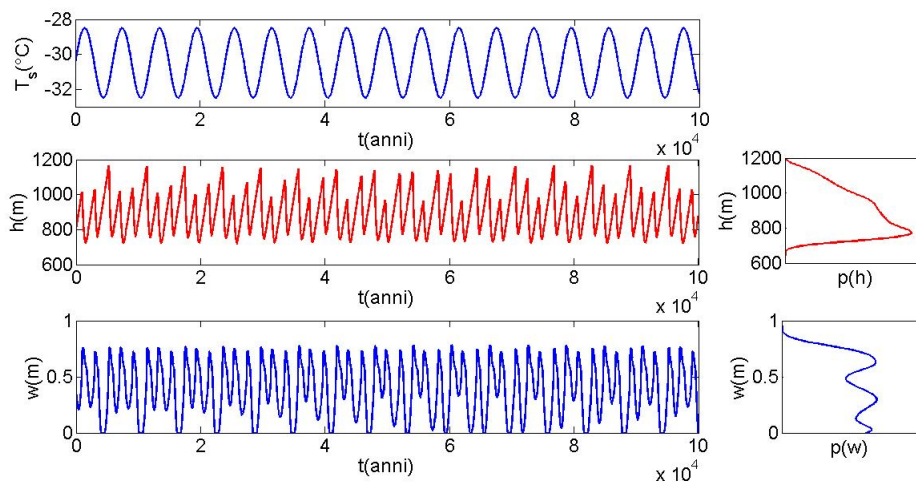


Figura 5.16: Andamento di  $h$  e  $w$  in funzione del tempo.

La moda  $w=0$  la si può osservare anche dal fatto che il sistema non è sempre contenuto nel piano  $\{h, w\}$ , ma anzi passa parte del tempo nel piano  $\{T_b, h\}$  (figura 5.17).

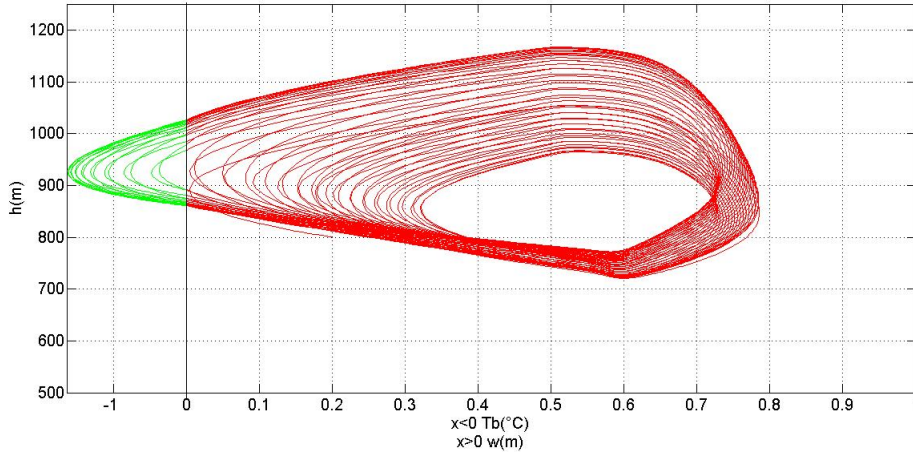


Figura 5.17: Comportamento del modello nel piano  $\{h, w\}$

## 5.4 Variazioni congiunte di $a_c$ e $T_s$

Questa sezione ha lo scopo di indagare la risposta del sistema a una variazione periodica di entrambe le grandezze. Riprendendo le considerazioni fatte sin'ora, le oscillazioni vengono fatte intorno a dei valori medi basati sui dati misurati nella carota di ghiaccio GISP2 con ampiezze di  $2^\circ\text{C}$  per la temperatura esterna e di  $0,02$  m/anno per l'accumulo nevoso.

Le possibilità di combinazione temporale delle due funzioni sono infinite, poichè infiniti possono essere gli sfasamenti fra i due seni. D'altronde sono infiniti anche i periodi delle due funzioni e le loro eventuali combinazioni nel caso si vogliano avere periodi diversi per le due grandezze. Per la scelta dei periodi si sono ripetute le valutazioni contenute nella prima sezione del capitolo, considerando che le due funzioni abbiano lo stesso periodo. Per quanto riguarda le fasi si sono scelti innanzitutto i due casi più semplici e intuitivi, per cui i due segnali sono:

- in fase (caso C1)
- in controfase (casi D1 e D2)

	$a_c$ (m/anno)	$A_{a_c}$ (m/anno)	$T_s$ ( $^\circ\text{C}$ )	$A_{T_s}$ ( $^\circ\text{C}$ )	T(anni)
Caso C1	0,23	0,02	-29	2	10000
Caso D1	0,24	0,02	-30	2	8000
Caso D2	0,25	0,02	-31	2	4500

### 5.4.1 Oscillazioni in fase

**Caso C1**  $T_s = -29^\circ\text{C}$ ,  $A_{T_s} = 2^\circ\text{C}$ ,  $a_c = 0,23 \text{ m/anno}$ ,  $A_{a_c} = 0,02$ ,  $T = 10000$  anni

In questo caso, similmente a esempi visti precedentemente (casi A3 e B1), si instaura un'alternanza periodica fra la soluzione stazionaria e quella oscillatoria (figura 5.18).

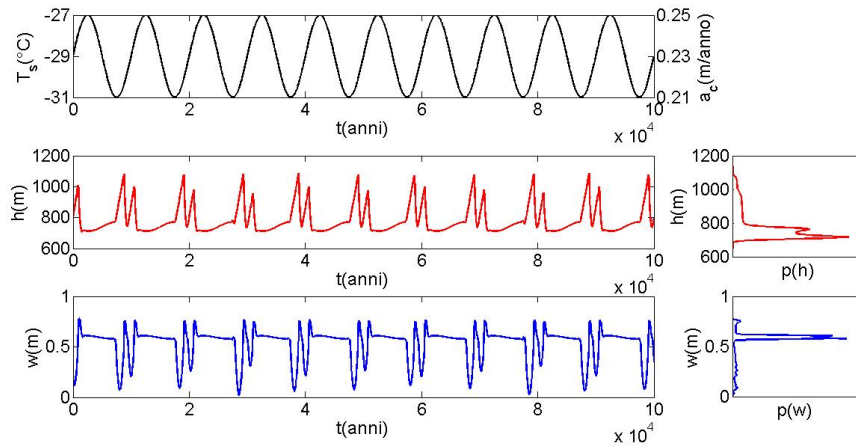


Figura 5.18: Quando la temperatura scende e nevica di meno il ghiacciaio tende a un regime oscillatorio, quando la temperatura cresce e nevica di più si raggiunge la stazionarietà di moto

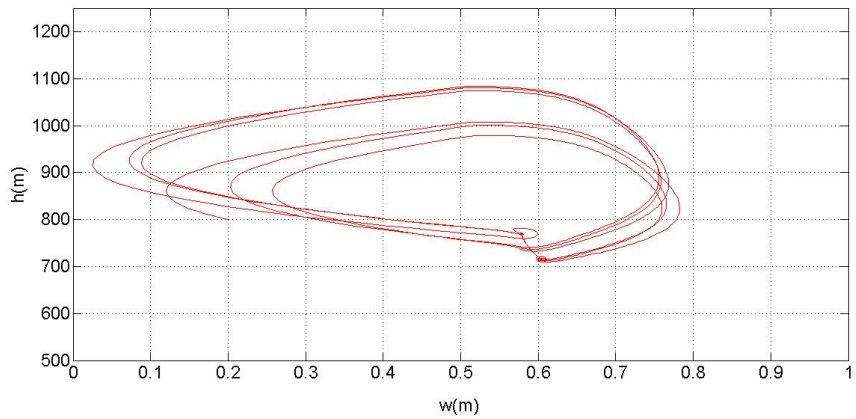


Figura 5.19: Comportamento del modello nel piano  $\{h, w\}$ . Il ciclo limite varia nel tempo così come il punto stazionario che si muove quasi con una traslazione verso altezze maggiori quando il sistema si raffredda.

## 5.4.2 Oscillazioni in controfase

**Caso D1**  $T_s = -30^\circ\text{C}$ ,  $A_{T_s} = 2^\circ\text{C}$ ,  $a_c = 0,24 \text{ m/anno}$ ,  $A_{a_c} = 0,02$ ,  $T = 8000$  anni

Con queste caratteristiche il sistema risponde con delle oscillazioni non periodiche attorno a un ciclo limite che varia fortemente nel tempo e in particolari condizioni di  $h, w, a_c$  e  $T_s$  risente dell'attrazione del punto stazionario (figura 5.21).

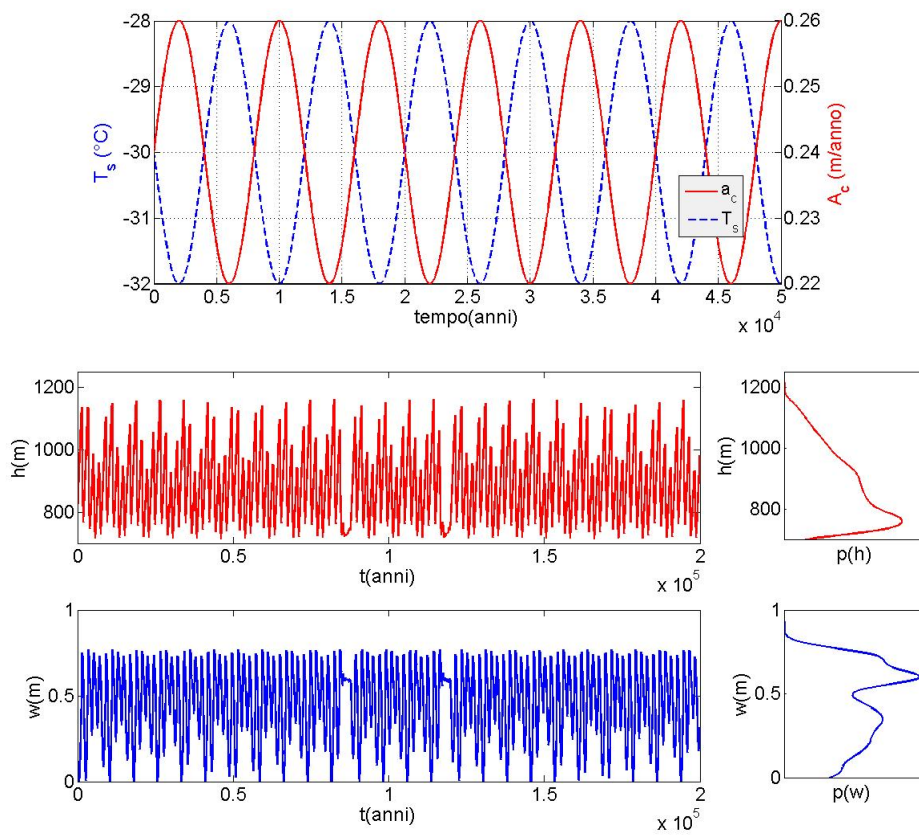


Figura 5.20: Andamento di  $h$  e  $w$  in funzione del tempo. Si nota come dopo 80'000 anni di oscillazioni non periodiche dell'altezza ci sia un intervallo di tempo molto minore in cui l'altezza del ghiacciaio rimane pressochè costante per poi tornare ad oscillare per ulteriori 40'000 anni.

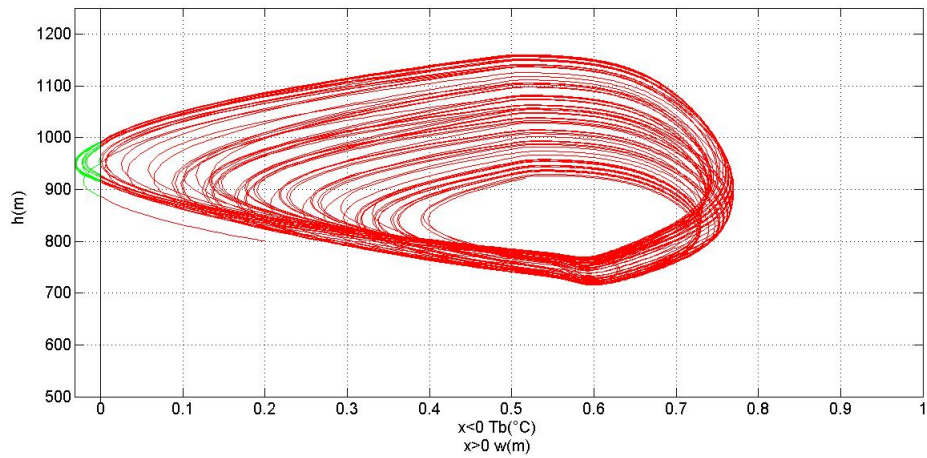


Figura 5.21: Nel piano  $\{h, w\}$  si può vedere come vari nel tempo il ciclo limite, probabilmente soprattutto a causa delle variazioni di  $T_s$  più che quelle di  $a_c$ .

**Caso D2  $T_s = -31^\circ\text{C}$ ,  $A_{T_s} = 2^\circ\text{C}$ ,  $a_c = 0,24 \text{ m/anno}$ ,  $A_{a_c} = 0,02$ ,  $T = 4500$  anni**

Anche in questo caso il sistema mostra delle oscillazioni non periodiche a cui si alternano in minor quantità dei periodi di stazionarietà. Rispetto al caso precedente i momenti di ristagno del ghiacciaio sono più frequenti.

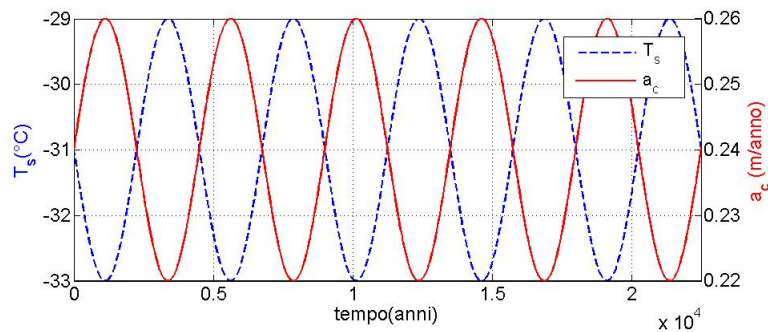


Figura 5.22: Variazione periodica dell'accumulo nevoso e della temperatura superficiale con periodo 4500 anni.

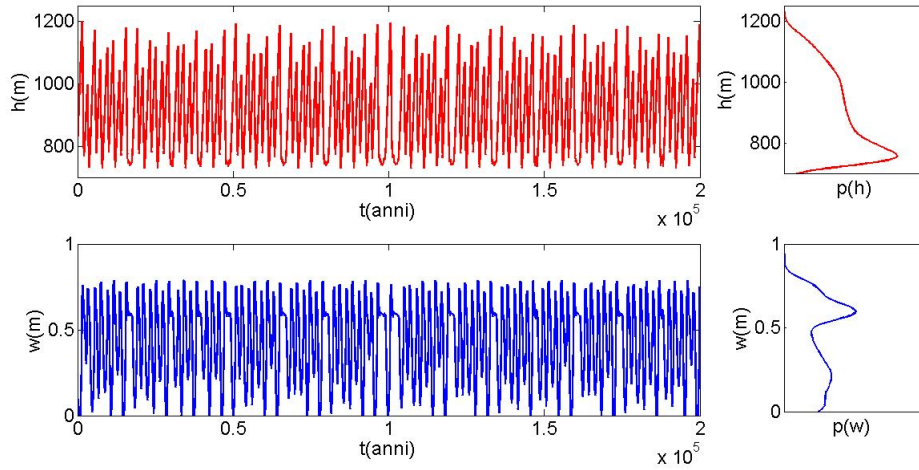


Figura 5.23: Andamento di  $h$  e  $w$  in funzione del tempo. Con presenza di brevi periodi di tempo nel campo stazionario.

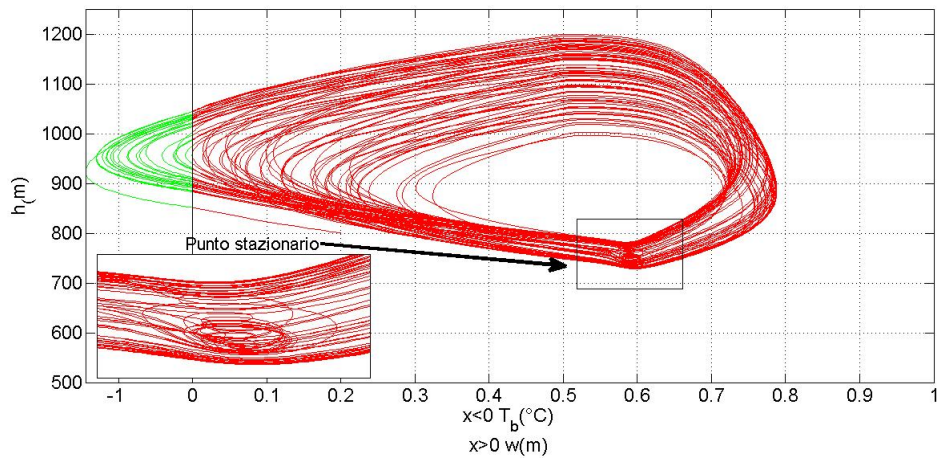


Figura 5.24: Nel piano  $\{h, w\}$  si può vedere come vari nel tempo il ciclo limite, probabilmente soprattutto a causa delle variazioni di  $T_s$  più che quelle di  $a_c$ . Lo zoom mostra la zona in cui è presente il punto stazionario sotto le traiettorie del ciclo limite.

## 5.5 Considerazioni sulla frequenza di oscillazione di $h$ e $w$

Lo scopo di tale sezione è quello di valutare quale sia l'influenza della variazione periodica di accumulo nevoso nell'oscillazione di  $h$  e  $w$ . Si è visto che per ogni valore di  $a_c$ , all'interno dell'intervallo di valori che porta a una soluzione *binge-purge*, esiste una frequenza, e quindi un periodo, con il quale le due grandezze glaciali oscillano (figura 5.1). Allora rimane la questione di valutare come la variazione di  $a_c$  nel tempo influenzi la frequenza di oscillazione di  $h$  e  $w$ . Prendendo a esempio il caso maggiormente verosimile dal punto di vista fisico, quello basato sui dati di  $a_c$  registrati da GISP2, con valore medio 0,23 m/anno e oscillazioni attorno a tale valore di 0,02 m/anno con periodo di 3'000 anni.

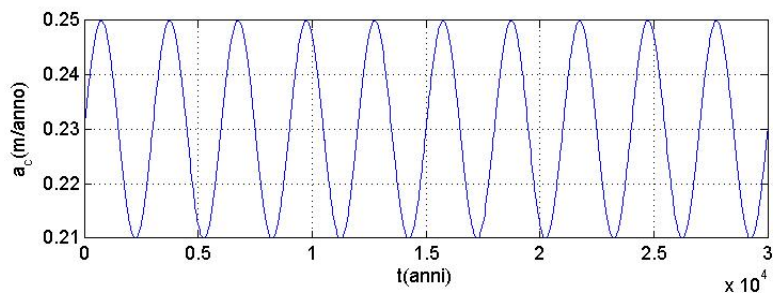


Figura 5.25: Andamento periodico dell'accumulo nevoso nel tempo

La frequenza con cui  $h$  e  $w$  oscillano in una soluzione data dal ciclo limite è dipendente dal valore di accumulo nevoso. Calcolando la distribuzione di probabilità di  $a_c$ , considerando che questo varia sinusoidalmente, si ottengono dei valori discretizzati di probabilità di appartenenza a ciascun intervallo di valori come rappresentato in figura 5.26.

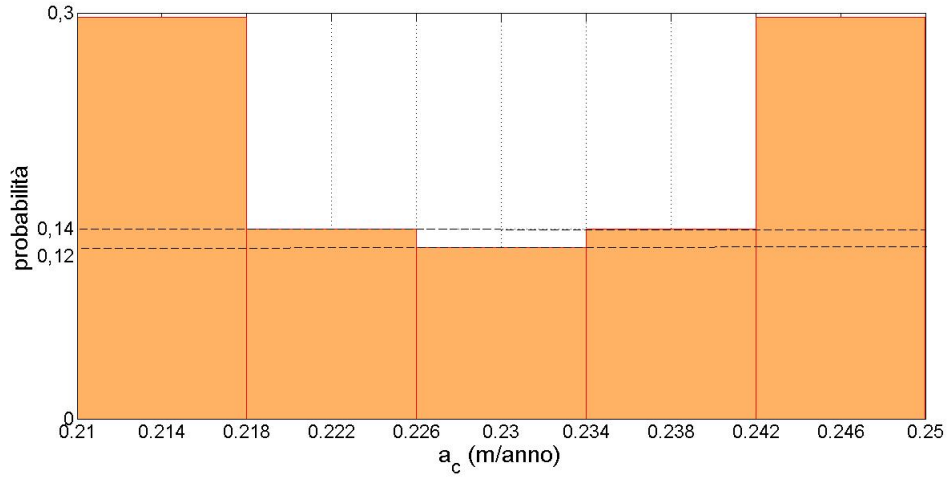


Figura 5.26: Distribuzione di probabilità del valore di accumulo nevoso discretizzata in cinque classi

A questo punto per ciascun valore medio degli intervalli di figura 5.26 è stato possibile calcolare la frequenza di oscillazione di  $h$  e  $w$  associata, risolvendo il sistema per un intervallo di tempo sufficientemente lungo e calcolando gli spettri in dominio di frequenza delle due variabili.

Si sono ottenuti i seguenti valori:

$a_c(\text{m/anno})$	0.214	0.222	0.23	0.238	0.246
Probabilità	0.3	0.14	0.12	0.14	0.3
Frequenza( $10^{-11}\text{Hz}$ )	1.44	1.49	1.54	1.56	1.61
Periodo(anni)	2200	2128	2059	2032	1970

Tabella 5.4: Frequenze e periodi di oscillazioni di  $h$  e  $w$  rispetto ai diversi valori di  $a_c$

Ad accumuli nevosi maggiori corrispondono periodi di oscillazioni minori poiché il tempo necessario alla crescita del ghiacciaio è più breve. Facendo la media ponderata delle frequenze, con i pesi dati dalle probabilità di valori di  $a_c$ , si trova:

$$f = 1,52 \cdot 10^{-11} \text{Hz} \quad (5.3)$$

Facendo l'analisi spettrale dei due segnali ( $h$  e  $w$ ) ottenuti dinamicamente dal sistema forzato con  $a_c$  di figura 5.25, si trova che la frequenza dominante del segnale coincide con quella appena calcolata come media ponderata (figura 5.27).

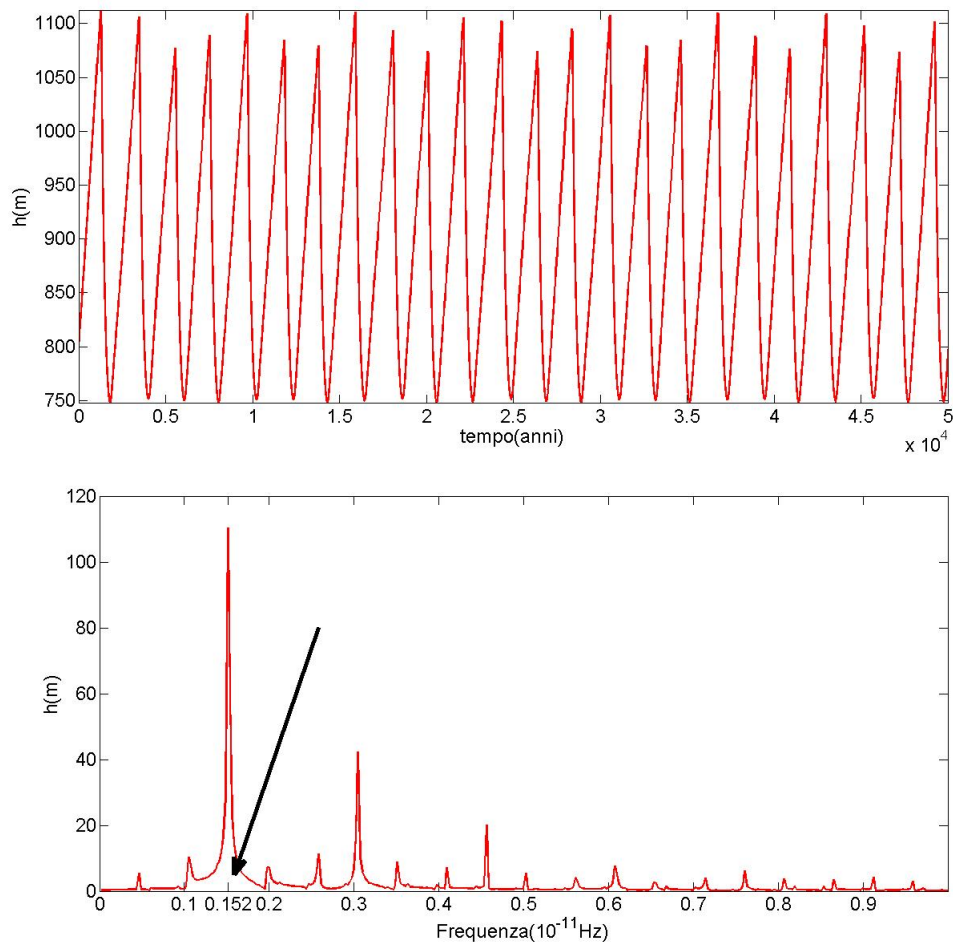


Figura 5.27: Spettro in dominio di frequenza del segnale  $h$  nel tempo. La freccia in nero indica dove si trova la frequenza dominante che è uguale al valore ottenuto come media ponderata. Discorso analogo vale per il segnale di  $w$ .

## 5.6 Conclusioni

Rispetto a quelli che erano gli obiettivi del capitolo si possono fare diverse valutazioni:

1. Innanzitutto si può osservare che i comportamenti più interessanti, in cui il sistema passa da una soluzione all'altra, si hanno quando la forzante passa maggior parte del proprio tempo nel campo di soluzione oscillatoria. Quindi con  $T_s = -30,6^\circ\text{C}$  risulta  $a_c < 0,27$  m/anno e con  $a_c = 0,23$  m/anno  $T_s < -28,5^\circ\text{C}$ .  
Infatti i vari casi studio riportati hanno valore medio della forzante tale da rispettare questa condizione. Si sono studiati anche altri casi in cui la forzante avesse valore medio nel campo stazionario, ma il sistema difficilmente perdeva la sua condizione stazionaria.
2. L'influenza dell'attrazione del punto stazionario può manifestarsi in maniera non periodica o con periodi molto lunghi (dell'ordine delle decine di migliaia di anni) rispetto sia a quelli del sistema ( $\sim 2'000$  anni) che a quelli della forzante periodica. A esempio si cita il caso A1 dove una variazione periodica di  $a_c$  con periodo 1'000 anni porta a delle condizioni stazionarie ogni 30'000 anni che durano circa 2'000 anni. Simili sono i casi A2, D1 e D2.
3. Se la scala temporale della forzatura ( $a_c$  o  $T_s$ ), definita dal periodo della sinusoide, supera quella del modello ( $\sim 2'000$  anni), il sistema ha tempo sufficiente per portarsi in equilibrio con la forzante e alternare periodicamente soluzione stazionaria e oscillatoria. Come nei casi A3, B1.  
Però i periodi di oscillazione di  $a_c$  e  $T_s$  ( $> 10'000$  anni) non sono verosimili rispetto ai dati registrati da GISP2 in cui si osservano andamenti con periodo massimo 3'000 anni.
4. Un'ultima considerazione si può fare sull'importanza relativa di  $T_s$  rispetto a quella di  $a_c$ . Si è notato infatti che all'interno dell'intervallo di valori che portano al passaggio da soluzione stazionaria a oscillatoria, variazioni nella temperatura superficiale sono più influenti nella deformazione del ciclo limite (caso B3) e nella traslazione del punto stazionario (caso B1) di quanto non lo siano le equivalenti oscillazioni di accumulo nevoso.

# Capitolo 6

## Forzanti stocastiche

### 6.1 Introduzione

Lo scopo di questo capitolo è valutare l'influenza del rumore ambientale sulla risposta del modello, verificando l'instaurarsi di comportamenti particolari (*noise-induced phenomena*, Ridolfi *et al.* (2011)), in maniera analoga a quanto visto nel capitolo precedente. In particolare si considerano due tipi di rumore:

1. Rumore Gaussiano colorato (CGN) che agisce sui valori delle forzanti esterne (accumulo nevoso e temperatura superficiale)
2. Rumore Gaussiano bianco che interviene direttamente sui parametri del ghiacciaio (altezza e contenuto d'acqua alla base)

#### 6.1.1 Rumore Gaussiano colorato (CGN)

Quando la scala integrale del rumore (in questo caso del segnale di  $a_c$  e di  $T_s$ , GISP2, rispettivamente di 800 e 300 anni) è comparabile con la scala temporale tipica della dinamica del sistema (vedi figura 2.14, circa 2'000 anni), la correlazione del rumore ha un ruolo fondamentale nella dinamica stocastica delle grandezze del sistema e non può essere trascurata (Ridolfi *et al.*, 2011). Nonostante ci siano diversi tipi di rumore correlato, solamente alcuni hanno risultati analitici esatti (condizione necessaria per poterli implementare nel sistema di equazioni differenziali) e fra questi c'è solo una forma di rumore colorato Markoviano e questo rumore è noto come processo di Ornstein-Uhlenbeck (O-U).

Tale processo è descritto dalle equazioni:

$$\xi(t + dt) = \xi(t) - \frac{1}{\tau}\xi(t)dt + c^{1/2}N(t)(dt)^{1/2} \quad (6.1)$$

$$Y(t + dt) = Y(t) + X(t)dt \quad (6.2)$$

Dove:

- $\tau$  e  $c$  sono costanti positive chiamate rispettivamente *relaxation time* e *diffusion constant*
- $N(t)$  è una variabile casuale non correlata con media 0 e varianza 1
- $Y(t)$  è l'integrale nel tempo del processo O-U  $\xi$

Costruire un algoritmo che simuli numericamente il processo  $\xi$  significa trovare una formula che permetta di calcolare a partire dal valore di  $\xi$  di un dato istante  $t$ , il valore di  $\xi$  al tempo  $t+dt$ .

A partire dalle equazioni (6.1) e (6.2) si possono costruire formule approssimate semplicemente sostituendo l'infinitesimo positivo  $dt$  con una variabile positiva finita  $\Delta t$ .

Tali formule sarebbero però accurate solo per  $\Delta t$  sufficientemente piccoli. Invece il fatto che le equazioni (6.1) e (6.2) siano risolvibili analiticamente rende possibile derivare formule esatte per qualsiasi valore di  $\Delta t$ . Ai fini di questo lavoro interessa la formula sul processo O-U  $\xi$ , data da Gillespie (1996)

$$\xi(t + dt) = \xi(t)\mu + \sigma_x n_1 \quad (6.3)$$

$$\mu = e^{-\Delta t/\tau} \quad (6.4)$$

$$\sigma_x^2 = (c\tau/2)(1 - \mu^2) \quad (6.5)$$

con  $n_1$  (formula (6.3)) numero casuale estratto da una distribuzione normale. Rimangono quindi da determinare i valori delle due costanti:

1.  $\tau$  è definita come la scala integrale dell'autocorrelogramma del segnale. Basandosi su i grafici 3.7 e 3.9 del GISP2 è stato quindi possibile ricavare i valori di  $\tau$  necessari alla simulazione numerica.
2.  $c$  è ricavata invertendo la formula che descrive la varianza del processo O-U in condizioni di stazionarietà (per  $t \rightarrow \infty$ )

$$\sigma_x^2 = \frac{c\tau}{2}(1 - e^{-2(t-t_0)/\tau}) \quad (6.6)$$

$$c = \frac{2\sigma_x^2}{\tau} \quad (6.7)$$

Quindi una volta ottenuti i valori di  $\tau$  e conoscendo i valori di varianza dei segnali di  $a_c$  e  $T_s$  GISP2, è stato possibile ricavarli i valori di  $c$ .

	valore medio	Deviazione standard	$\tau$	$c$
$a_c$	0,23 m/anno	0,01 m/anno	800 anni	$2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{anno}^3$
$T_s$	-30,6°C	0,76 °C	300 anni	0,0039 °C <sup>2</sup> /anno

Tabella 6.1: valori delle costanti associate alle serie temporali di accumulo nevoso e temperatura superficiale GISP2

Si riportano di seguito due riproduzioni del segnale di  $a_c$  e  $T_s$  attraverso le formule e i dati trattati sinora.

### CGN-accumulo nevoso

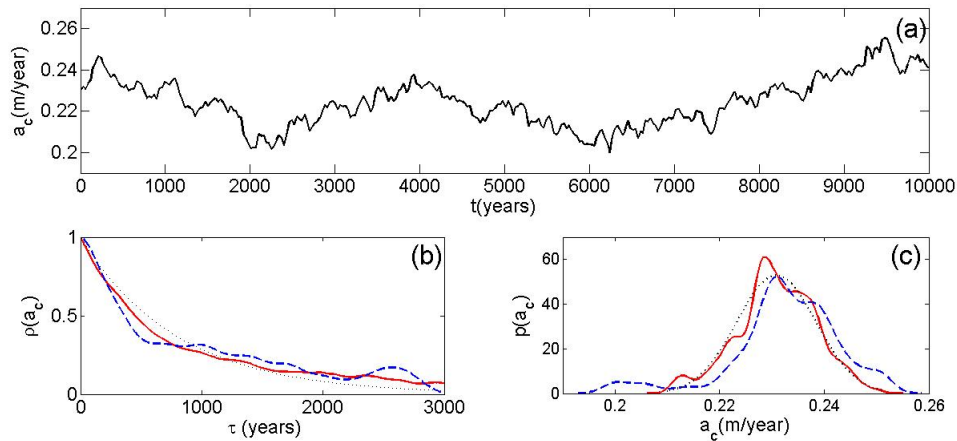


Figura 6.1: Riproduzione del segnale di  $a_c$  con processo O-U, con relativi autocorrelogramma e distribuzione di frequenza.

(a) descrive l'andamento nel tempo dell'accumulo nevoso riprodotto numericamente secondo un processo O-U con un  $\Delta t$  (equazioni (6.3) e (6.4)) di 10 anni.

(b) mostra l'autocorrelazione del segnale di  $a_c$ . In particolare confronta l'autocorrelazione teorica ( $\rho(t) = e^{-t/\tau}$ ) in linea tratteggiata nera, l'autocorrelazione numerica in linea rossa continua e quella derivata dai dati sperimentali in linea blu tratteggiata.

(c) mostra la distribuzione di probabilità del campione numerico (linea rossa continua), confrontandola con l'andamento teorico (Gaussiana in linea nera tratteggiata) e quello derivante dai dati sperimentali (linea blu tratteggiata).

## CGN-Temperatura superficiale

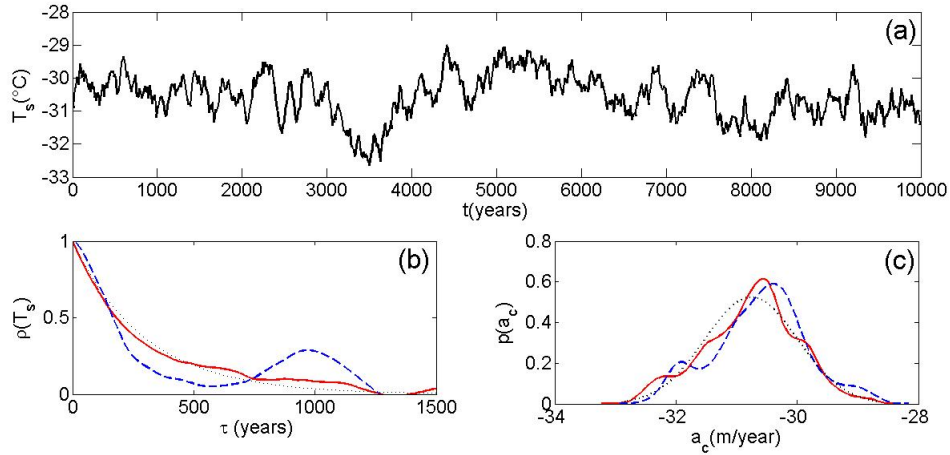


Figura 6.2: Riproduzione del segnale di  $T_s$  con processo O-U, con relativi autocorrelogramma e distribuzione di frequenza. Valgono le stesse considerazioni fatte per la figura 6.1

Di seguito è riportato l'elenco dei casi simulati, ritenuti significativi per la risposta del sistema. Con la seguente nomenclatura:

- casi E, valore di  $T_s$  fissato alla media GISP2 e processo O-U per  $a_c$
- casi F, valore di  $a_c$  fissato e processo O-U per  $T_s$
- casi G, processo O-U sia per  $a_c$  che per  $T_s$

In particolare sono presenti i valori medi di  $a_c$  e  $T_s$  ( $\bar{a}_c$  e  $\bar{T}_s$ ) e i valori di  $c$  e  $\tau$ .

Il  $\Delta t$  associato al processo O-U (equazioni 6.3 e 6.4) è sempre lo stesso, pari a 1 anno.

## 6.2 Processo di Ornstein-Uhlenbeck per $a_c$

Similmente a quanto visto nel capitolo precedente, fissando la temperatura e mettendosi a cavallo dei valori di biforcazione per  $a_c$  (figura 6.3), si può valutare la risposta del sistema alla forzante che si trova in certi periodi nel campo di soluzione stazionaria e in altri nel campo di soluzione oscillatoria.

	$\bar{a}_c$ (m/anno)	$\tau$ (anni)	$\sigma_{a_c}$ (m/year)	$\bar{a}_c/a_{c,bif}$	$T_s$ (°C)	$\tau$ (anni)	$\sigma_{T_s}$ (°C)	$T_s/T_{s,bif}$
Caso E1	0,28	0,01	800	1,03	-30,6	-	-	-
Caso E2	0,27	0,01	800	0,99	-30,6	-	-	-
Caso E3	0,26	0,01	800	0,95	-30,6	-	-	-
Caso E4	0,25	0,01	800	0,92	-30,6	-	-	-
Caso F1	0,23	-	-	-	-25	0,76	300	0,89
Caso F2	0,23	-	-	-	-27	0,76	300	0,96
Caso F3	0,23	-	-	-	-28,2	0,76	300	1
Caso F4	0,23	-	-	-	-29	0,76	300	1,03
Caso G1	0,29	800	$7,7 \cdot 10^{-4}$	-30,6	300	0,0039		
Caso G2	0,23	800	$7,7 \cdot 10^{-4}$	-27	300	0,0039		

Tabella 6.2: Casi studio significativi per la risposta del modello alle forzature con rumore Gaussiano colorato

	$\bar{a}_c$ (m/year)	$\sigma_{a_c}$ (m/year)	$\tau$ (years)	$\bar{a}_c/a_{c,bif}$
E1	0.28	0.01	800	1.03
E2	0.27	0.01	800	0.99
E3	0.26	0.01	800	0.95
E4	0.25	0.01	800	0.92

Tabella 6.3: Casi relativi alla forzatura periodica di accumulo nevoso, con serie simulate con rumore Gaussiano colorato

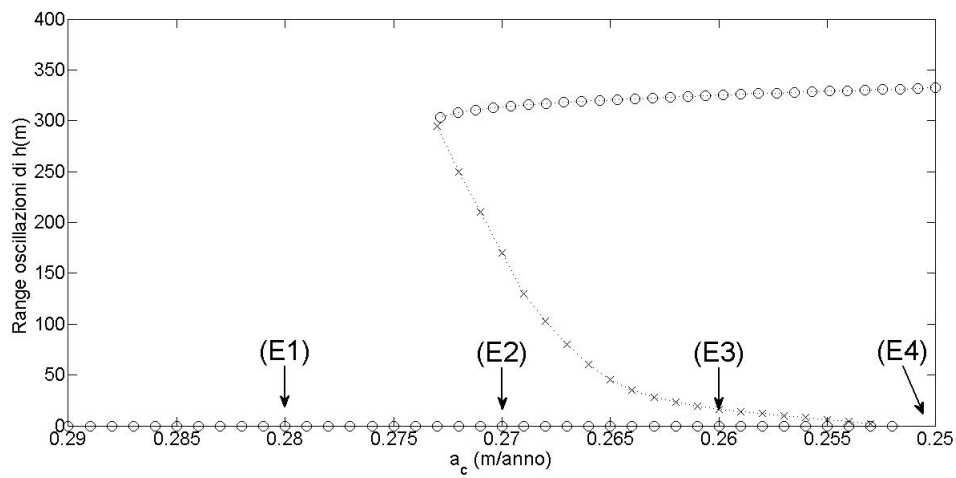


Figura 6.3: Diagramma di biforcazione per  $T_s = -30,6^\circ\text{C}$ .

Il risultato è particolare poiché il sistema mostra un'inerzia forte rispetto alle variazioni di accumulo nevoso nel passare da uno stato all'altro. Infatti nonostante il valore di  $a_c$  possa trovarsi nel campo di soluzione stazionaria, se il ghiacciaio ha un régime di moto oscillatorio, non è detto che lo abbandoni istantaneamente per la stazionarietà.

**E1** ( $\bar{a}_c/a_{c,bif} = 1.03$ )

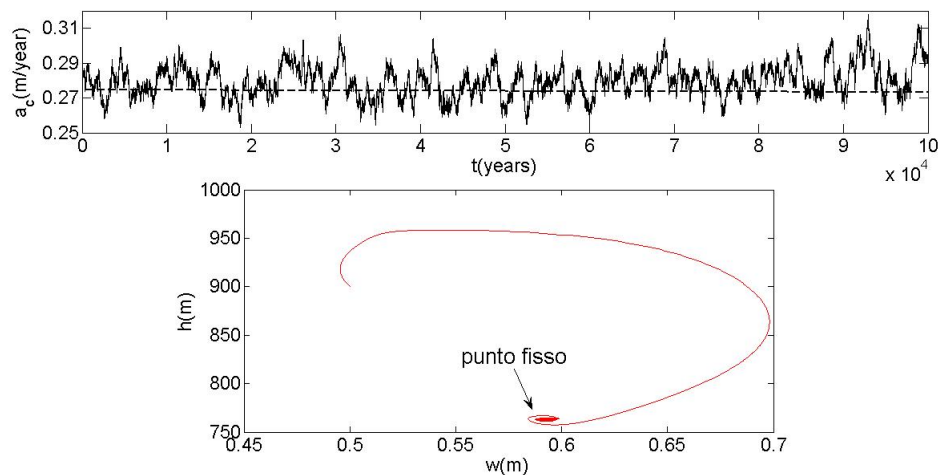


Figura 6.4: Nonostante il valore di  $a_c$  sia per alcuni periodo sotto il valore limite di biforcazione (linea tratteggiata), l'unica soluzione che appare è quella stazionaria.

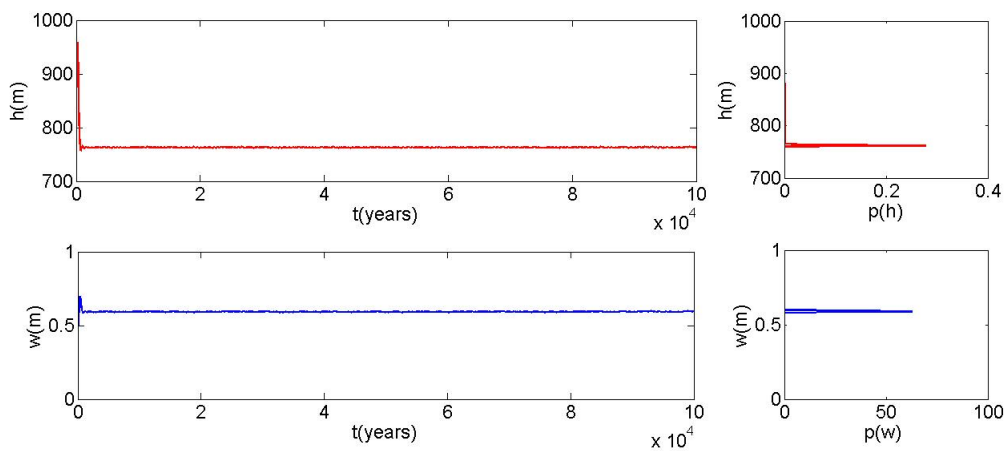


Figura 6.5: Serie temporali dei parametri  $h$  e  $w$  e relative funzioni di distribuzioni di probabilità.

**E2** ( $\bar{a}_c/a_{c,bif} = 0.99$ )

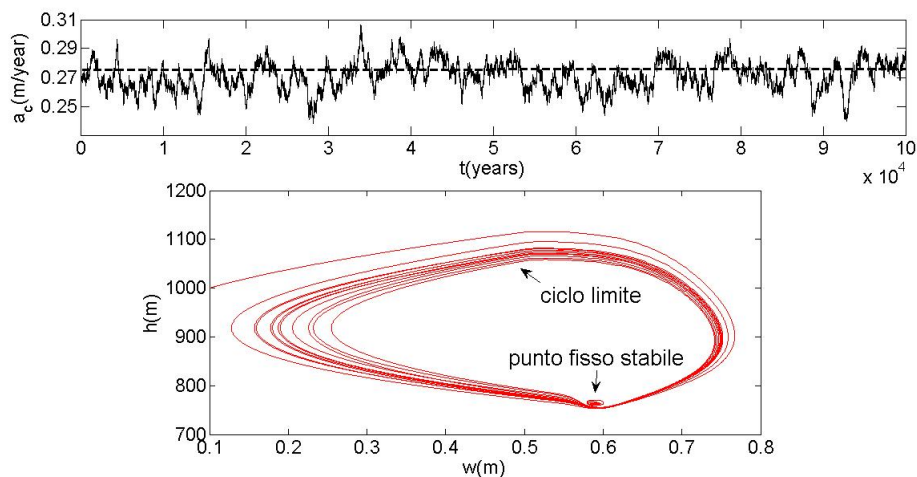


Figura 6.6:  $\bar{a}_c$  è vicino a  $a_{c,bif}$  (rapporto 0.99), ma dopo il transitorio iniziale sul ciclo limite, il sistema è attratto dal punto stazionario.

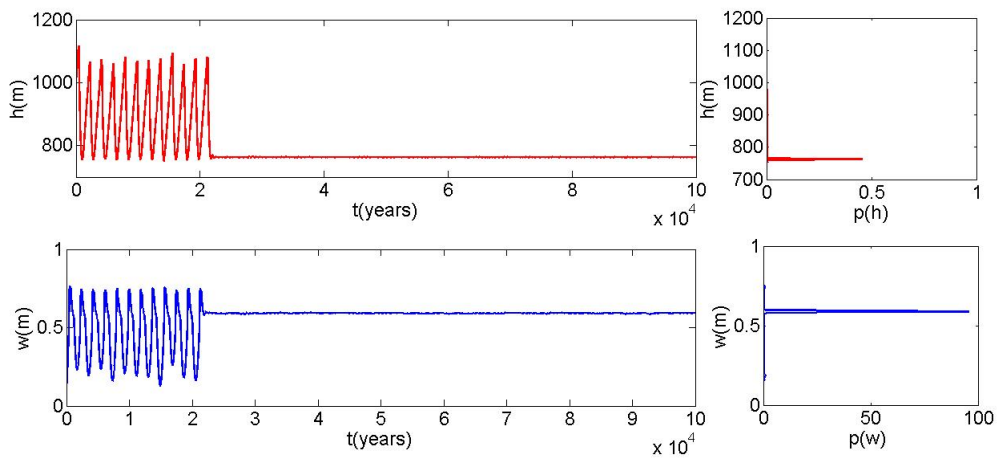


Figura 6.7: Serie temporali dei parametri  $h$  e  $w$  e relative funzioni di distribuzioni di probabilità.

**E3** ( $\bar{a}_c/a_{c,bif} = 0.95$ )

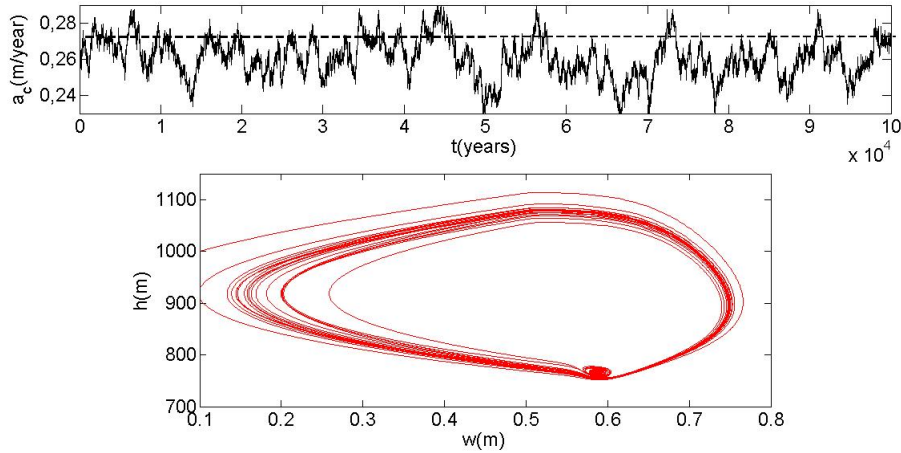


Figura 6.8: Dipendentemente dal valore di  $a_c$  il sistema risponde con oscillazioni o stazionarietà con una forte inerzia nel passaggio fra soluzioni. Non c'è una corrispondenza istantanea fra il valore di  $a_c$ , che varia con alta frequenza attorno al valore limite di biforcazione, e la risposta del sistema.

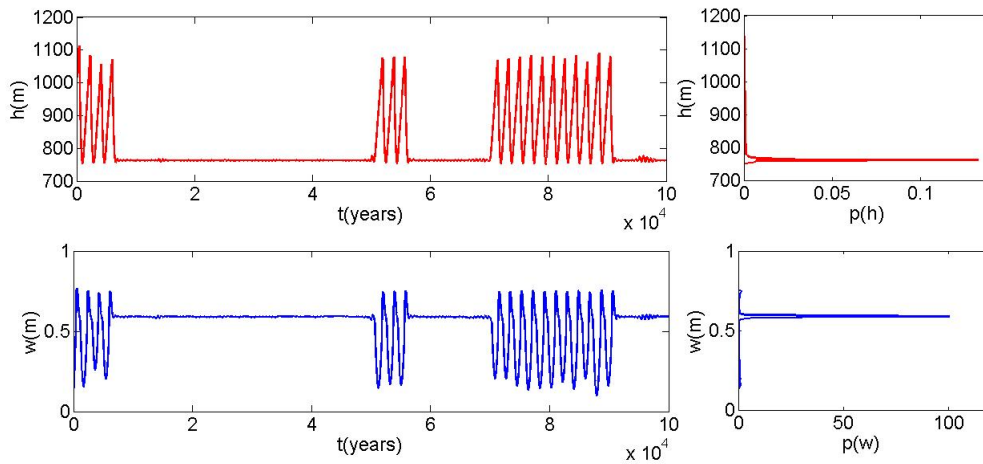


Figura 6.9: Serie temporali dei parametri  $h$  e  $w$  e relative funzioni di distribuzioni di probabilità, da cui risulta più chiara l'alternanza fra periodi di oscillazione e stazionarietà. Anche allungando temporalmente la serie si conserva questa alternanza fra soluzioni, senza che nessuna prevalga sull'altra.

**E4** ( $\bar{a}_c/a_{c,bif} = 0.92$ )

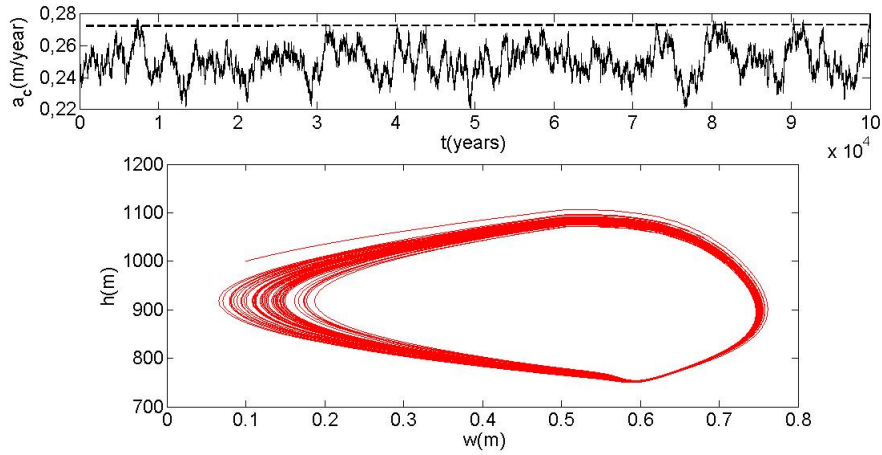


Figura 6.10: In questo caso il valore istantaneo di  $a_c$  si trova sotto il limite di biforcazione, salvo brevi periodi, e il sistema risponde con oscillazioni attorno al ciclo limite.

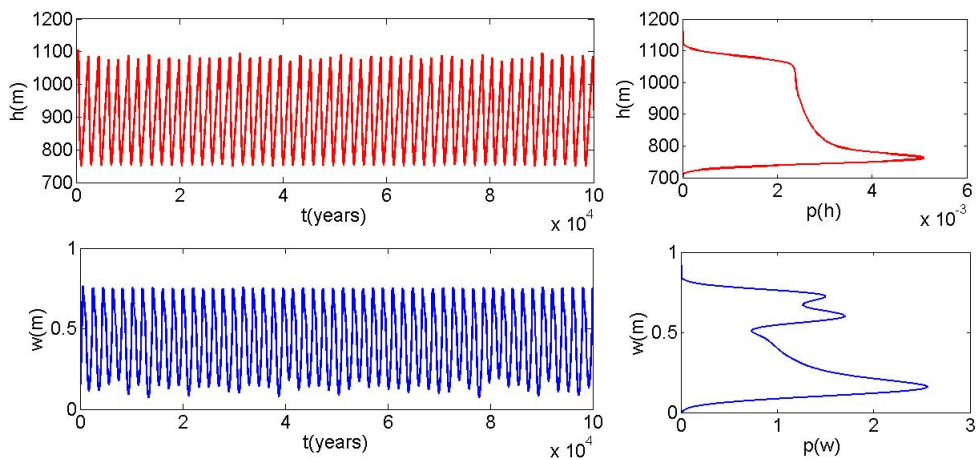


Figura 6.11: Serie temporali dei parametri  $h$  e  $w$  e relative funzioni di distribuzioni di probabilità. Le PDF rispetto ai casi precedenti hanno assunto una forma maggiormente a U tipica dei regimi oscillatori, lasciando però intravedere l'attrazione del punto stazionario che rende più lente le variazioni temporali di  $h$  e  $w$  quando questi si trovano nel suo campo di attrazione.

### 6.3 Processo di Ornstein-Uhlenbeck per $T_s$

Le variazioni di temperatura superficiale sono molto più influenti sulla dinamica del sistema rispetto alle variazioni di accumulo nevoso. In particolare non si presenta più l'inertza dei casi E2 ed E3 nel cambiare il régime dell'ice stream, poiché il sistema tende a portarsi in equilibrio con il continuo variare di  $T_s$ . Dato che la temperatura superficiale varia in maniera casuale secondo il processo O-U, le soluzioni che ne derivano non presentano alcun tipo di ordine.

Per la scelta di quali valori medi di  $T_s$  adottare ci si basa sempre sul diagramma di biforcazione (figura 6.12).

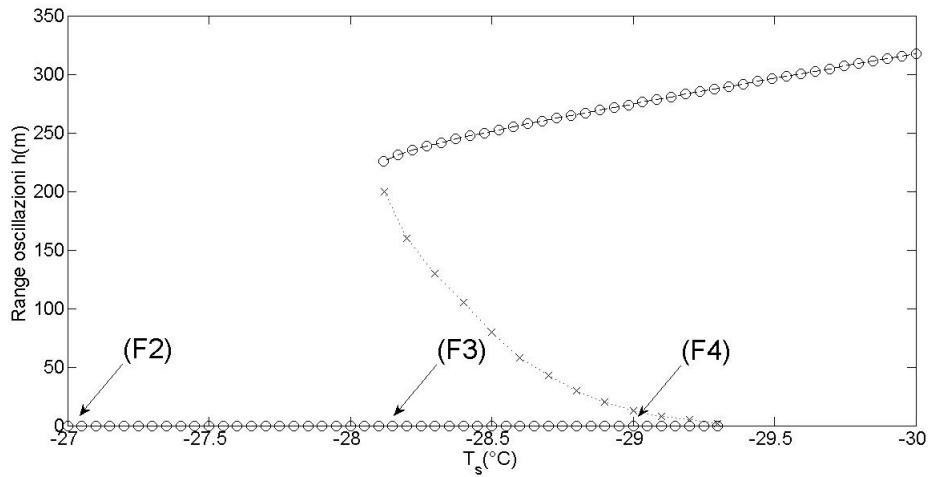


Figura 6.12: Diagramma di biforcazione per  $T_s$  con  $a_c=0,23$  m/anno. I casi studio sono maggiormente spostati verso le soluzioni deterministiche stazionarie perchè, come si vedrà in seguito, il diagramma di biforcazione subisce una traslazione a causa del processo stocastico, facendo sì che ci siano oscillazioni anche per valori medi di  $T_s$  che deterministicamente sono nel campo della stazionarietà.

	$\bar{T}_s$ (°C)	$\sigma_{T_s}$ (°C)	$\tau$ (years)	$\bar{T}_s/T_{s,bif}$
F1	-25	0.76	300	0.89
F2	-27	0.76	300	0.96
F3	-28,2	0.76	300	1
F4	-29	0.76	300	1.03

Tabella 6.4: Casi relativi a forzatura periodica di temperatura superficiale, con serie simulate con rumore Gaussiano colorato

**F1** ( $\bar{T}_s/T_{s,bif} = 0.89$ )

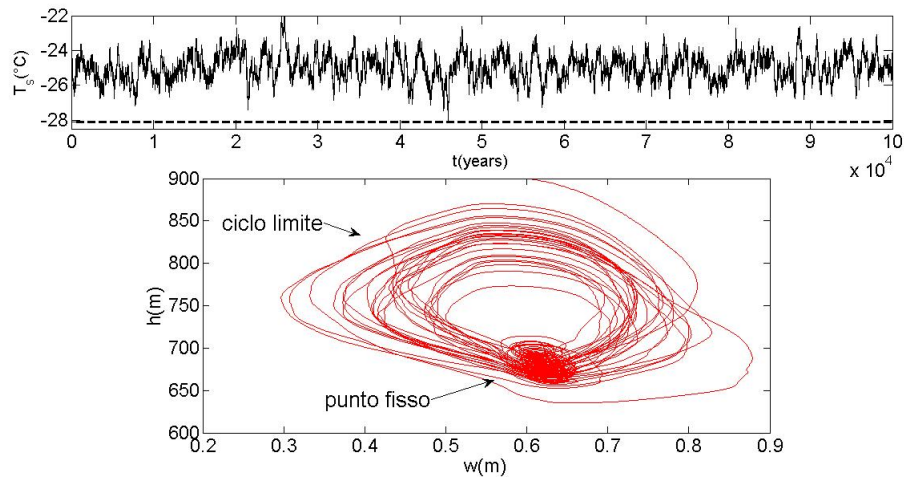


Figura 6.13: Da questo primo caso si possono trarre due considerazioni:  
 1. L'influenza delle variazioni di  $T_s$  è maggiore rispetto a quella legata alle variazioni di  $a_c$ .  
 2. Anche se  $T_s$  è sempre maggiore rispetto al valore limite di biforcazione (per cui dovrebbe esserci solo soluzione stazionaria), in realtà si osservano delle oscillazioni. Questo a causa del fatto che il diagramma di biforcazione stocastico è diverso da quello deterministico (figure 6.12).

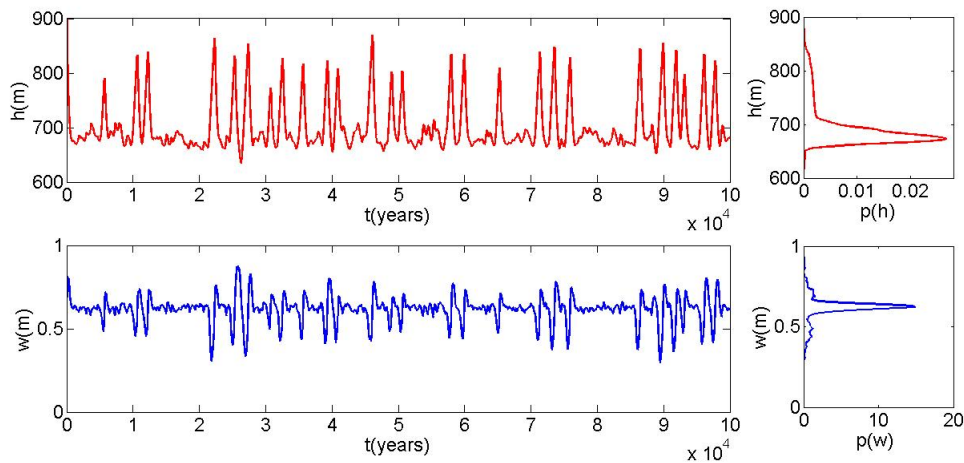


Figura 6.14: Serie temporali dei parametri del ghiacciaio  $h$  e  $w$  e le relative distribuzioni di probabilità.

**F2** ( $\bar{T}_s/T_{s,bif} = 0.96$ )

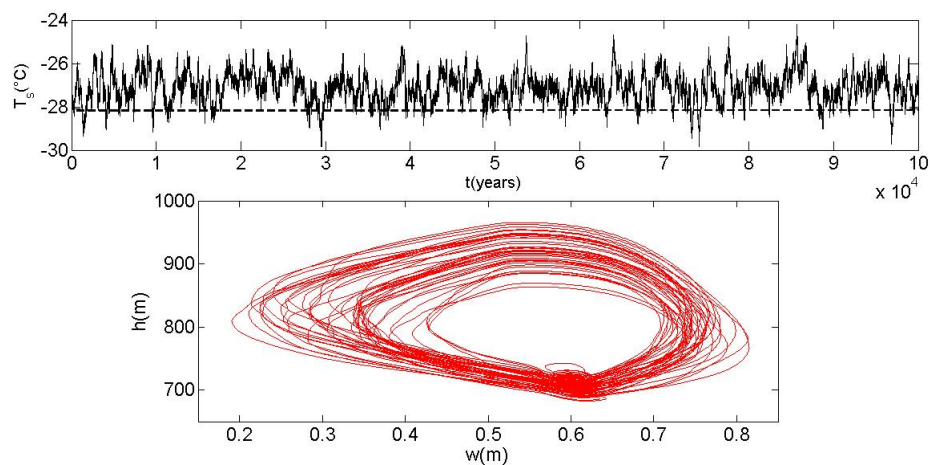


Figura 6.15: Avvicinandosi con il valore medio di temperatura superficiale al valore limite di biforcazione deterministico, la soluzione oscillatoria diventa più frequente.

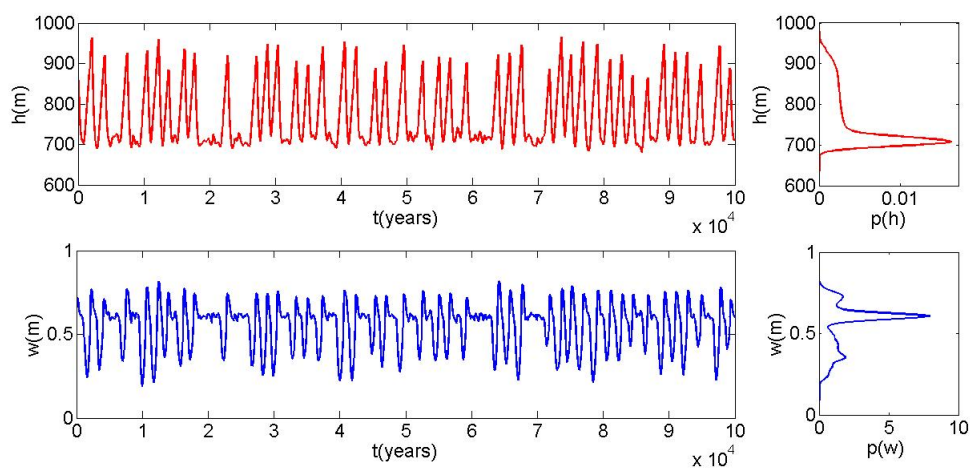


Figura 6.16: Serie temporali dei parametri del ghiacciaio  $h$  e  $w$  e relative distribuzioni di probabilità.

**F3** ( $\bar{T}_s/T_{s,bif} = 1$ )

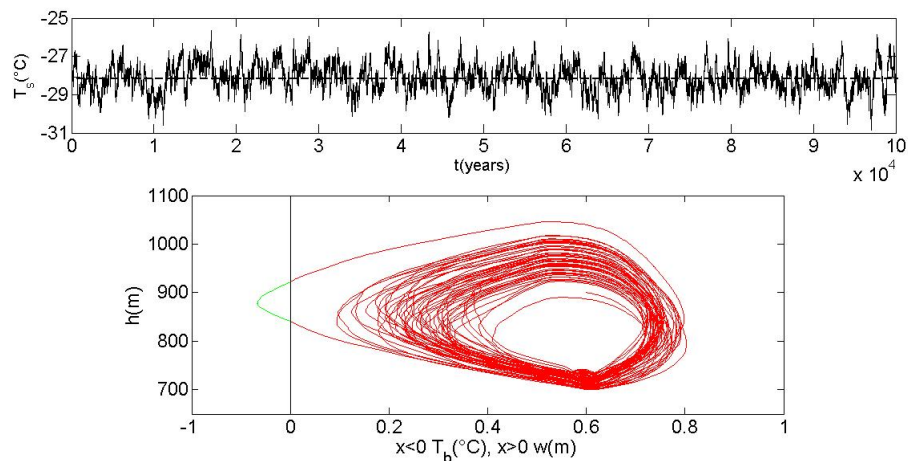


Figura 6.17: Nei periodi in cui  $T_s$  è maggiore del valore limite di biforcazione non c'è una corrispondenza con il regime stazionario, a casua delle stesse considerazioni fatte in figura 6.13.

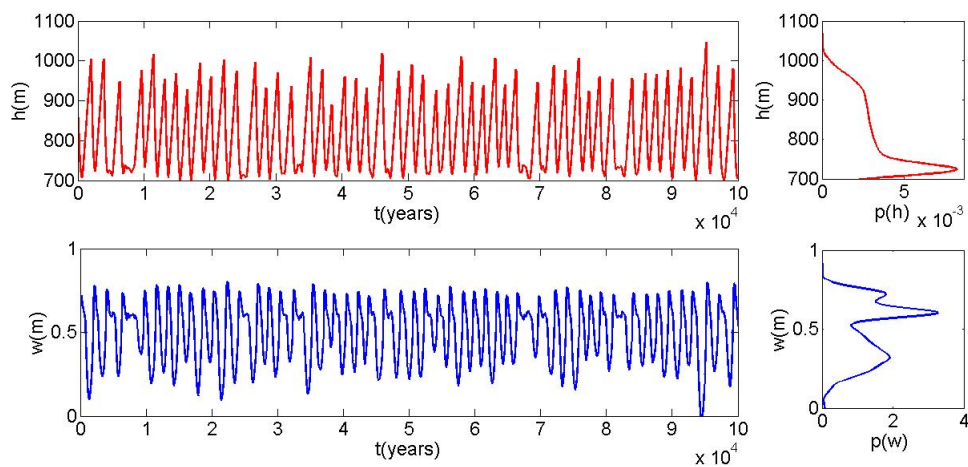


Figura 6.18: Serie temporali dei parametri del ghiacciaio  $h$  e  $w$  e le relative distribuzioni di probabilità.

F4 ( $(\bar{T}_s/T_{s,bif} = 1.03)$ )

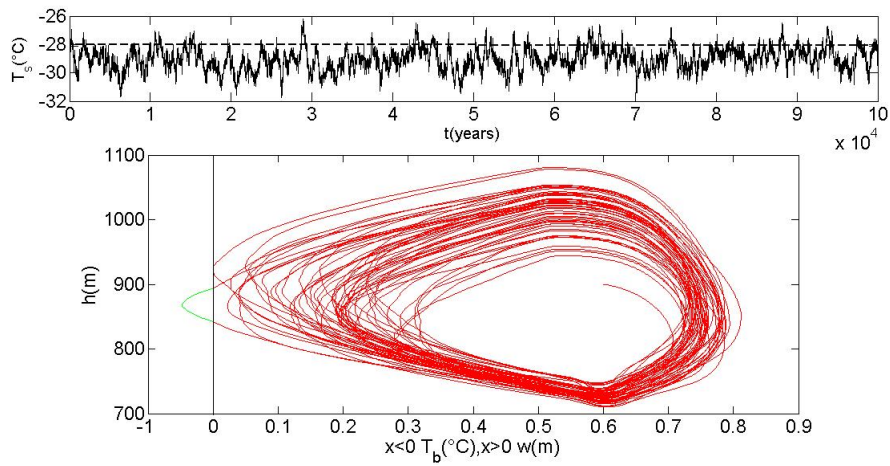


Figura 6.19: In questo caso, sebbene il valore di  $T_s$  sia in certi periodi al di sopra del valore limite di biforcazione, il modello risponde univocamente con un regime oscillatorio.

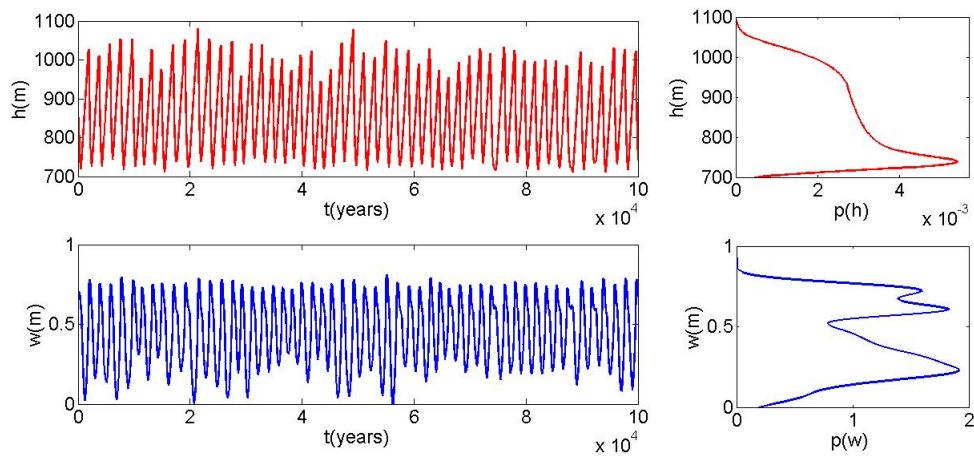


Figura 6.20: Serie temporali dei parametri del ghiacciaio  $h$  e  $w$  e relative distribuzioni di probabilità.

## 6.4 Rumore Gaussiano bianco su $h$ e $w$

In questo caso il rumore non influisce sul valore delle grandezze esterne ( $T_s$  e  $a_c$ ), ma si trova dentro le equazioni differenziali che descrivono il comportamento nel tempo di  $h$  e  $w$ .

$$\frac{dh}{dt} = f(x) + \xi_1(t) \quad (6.8)$$

$$\frac{dw}{dt} = g(x) + \xi_2(t) \quad (6.9)$$

sia  $\xi_1$  che  $\xi_2$  rappresentano il termine di rumore Gaussiano bianco (quindi non correlato).

Questo tipo di rumore si prefigge lo scopo di rappresentare tutti gli agenti esterni che a livello ambientale possono influire sulle equazioni che descrivono i parametri. Non è possibile trovare una relazione matematica esatta fra tutte le potenziali cause di perturbazione e la fisica del processo. Per cui quella qui proposta va considerata come una simulazione approssimata del possibile rumore ambientale sui parametri del ghiacciaio.

Ciò che è venuto alla luce è che per valori delle grandezze esterne vicini al valore limite di biforcazione (figura 6.3), nelle condizioni di  $T_s = -30,6^\circ\text{C}$  e  $a_c = 0,27$  m/year, il rumore, in funzione della sua intensità, permette al sistema di passare fra le due soluzioni (stazionaria e oscillatoria). Infatti il contributo stocastico è sufficiente a far saltare il modello fra i due possibili regimi, in maniera casuale, secondo il valore del contributo stesso.

L'algoritmo per riprodurre il rumore Gaussiano bianco è lo stesso utilizzato per il CGN con le formule di Gillespie (1996), con il termine di autocorrelazione nullo. L'intensità del rumore ( $\sigma_\xi$ ) la si è valutata a partire dalla deviazione standard ( $\sigma$ ) delle distribuzioni di valori delle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  in condizioni deterministiche (cioè senza considerare l'effetto del rumore). In questo modo si rispetta la fisica del processo, introducendo dei rumori che non stravolgono i valori delle funzioni deterministiche, ma vi apportano solamente delle perturbazioni. Per questo motivo l'intensità del rumore è riportata in termini di frazione:  $1/5$  sta per  $\sigma_\xi = \sigma_{f(x)}/5$ . Mentre il termine di autocorrelazione  $\tau$ , essendo il rumore bianco, è sempre nullo.

	$\tau_{\xi_1}$	$\sigma_{\xi_1}$	$\tau_{\xi_2}$	$\sigma_{\xi_2}$
Caso C1	0	1/5	0	1/5
Caso C2	0	1/3	0	1/3
Caso C3	0	1/2	0	1/2
Caso C4	0	1	0	1

Tabella 6.5: Intensità del rumore Gaussiano bianco nei diversi casi studio

**Caso C1** ( $\sigma_{\xi_1} = 0.2 \cdot \sigma_{f_x}$ ,  $\sigma_{\xi_2} = 0.2 \cdot \sigma_{g_x}$ )

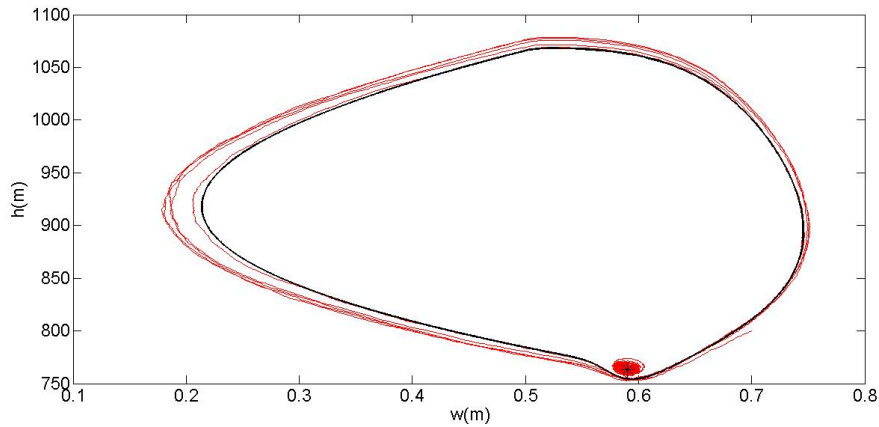


Figura 6.21: Le soluzioni deterministiche (ciclo limite e punto fisso) sono in nero, mentre il comportamento stocastico è in rosso.

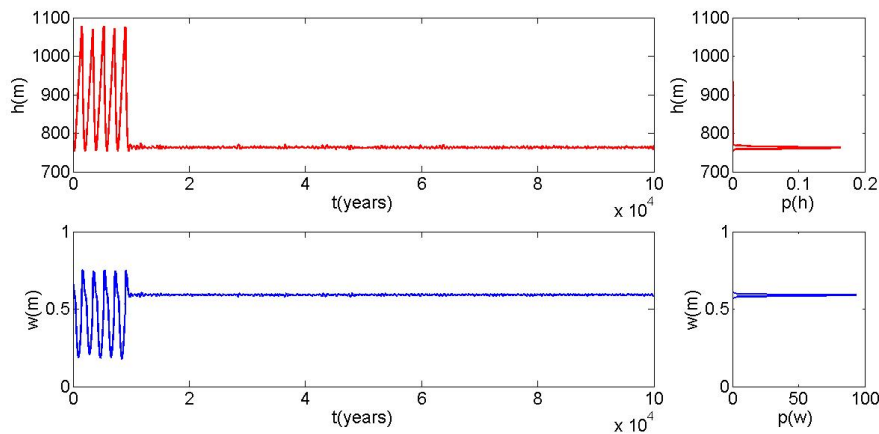


Figura 6.22: Serie temporali di  $h$  e  $w$  e relative distribuzioni di probabilità. Dopo un certo transitorio che dipende dalle condizioni iniziali, le variabili risentono dell'attrazione del punto stazionario

**Caso C2** ( $\sigma_{\xi_1} = 0.33 \cdot \sigma_{f_x}$ ,  $\sigma_{\xi_2} = 0.33 \cdot \sigma_{g_x}$ )

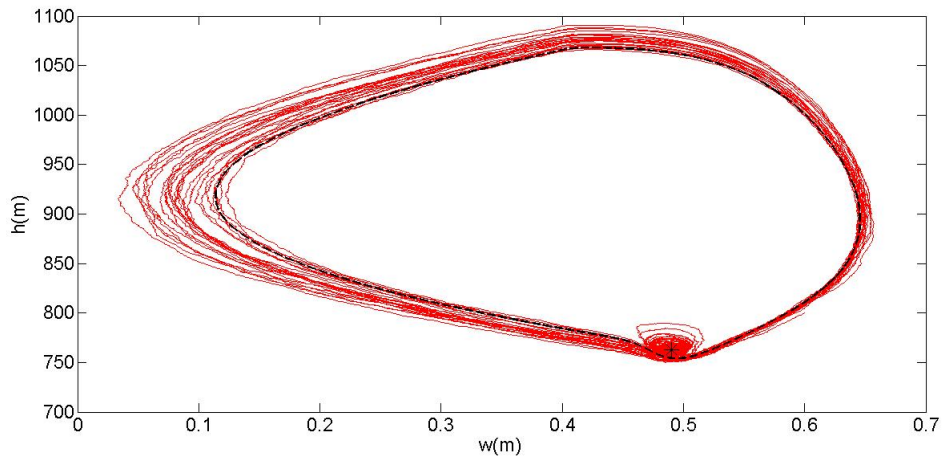


Figura 6.23: Le soluzioni deterministiche (ciclo limite e punto fisso) sono in nero, mentre il comportamento stocastico è in rosso.

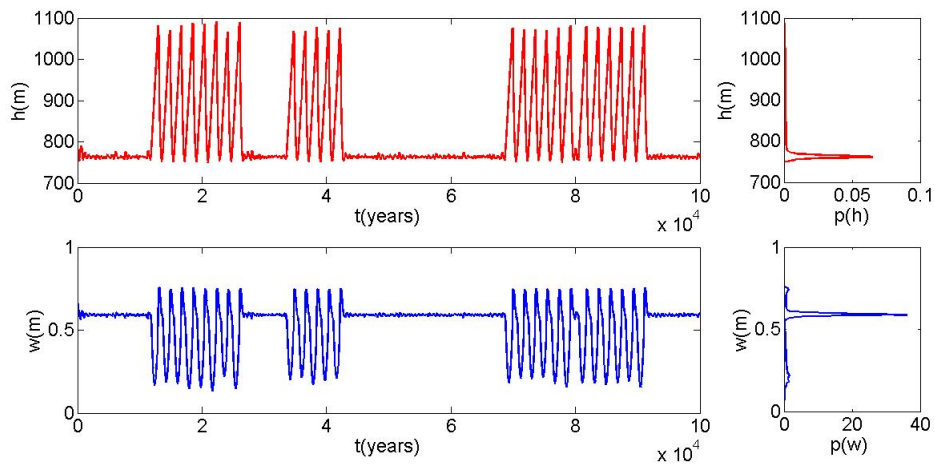


Figura 6.24: Serie temporali di  $h$  e  $w$  e relative distribuzioni di probabilità. Aumentando l'intensità del rumore il sistema è in grado di passare da una soluzione all'altra (anche in questo caso sono riportati per chiarezza solamente i primi 100'000 anni della serie).

**Caso C3** ( $\sigma_{\xi_1} = 0.5 \cdot \sigma_{f_x}$ ,  $\sigma_{\xi_2} = 0.5 \cdot \sigma_{g_x}$ )

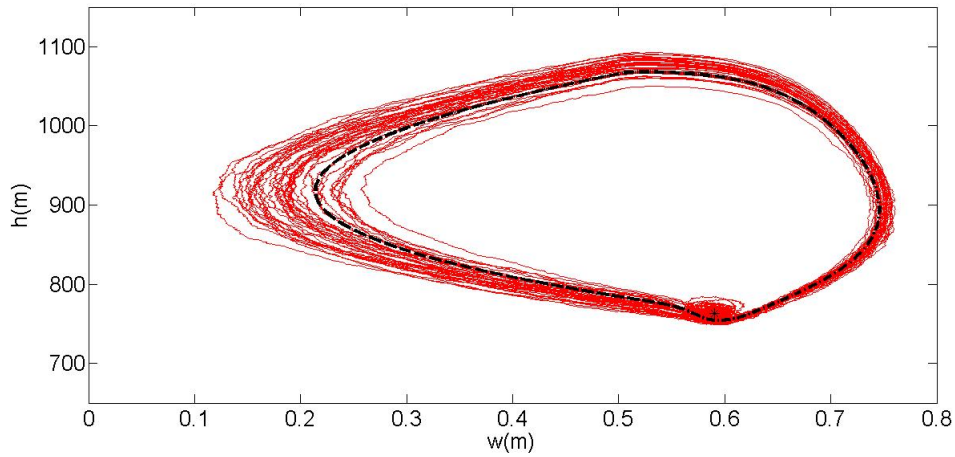


Figura 6.25: Le soluzioni deterministiche (ciclo limite e punto fisso) sono in nero, mentre il comportamento stocastico è in rosso.

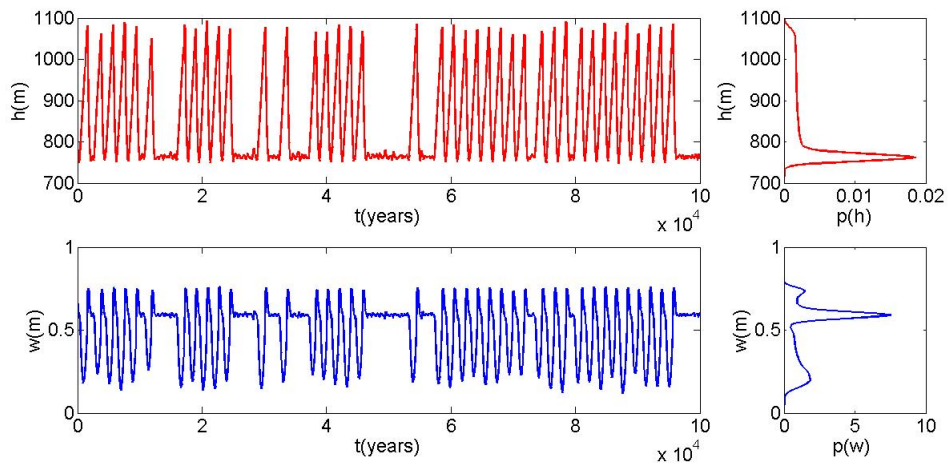


Figura 6.26: Serie temporali di  $h$  e  $w$  e relative distribuzioni di probabilità. Il passaggio fra le due soluzioni è più frequente.

**Caso C4** ( $\sigma_{\xi_1} = \sigma_{f_x}$ ,  $\sigma_{\xi_2} = \sigma_{g_x}$ )

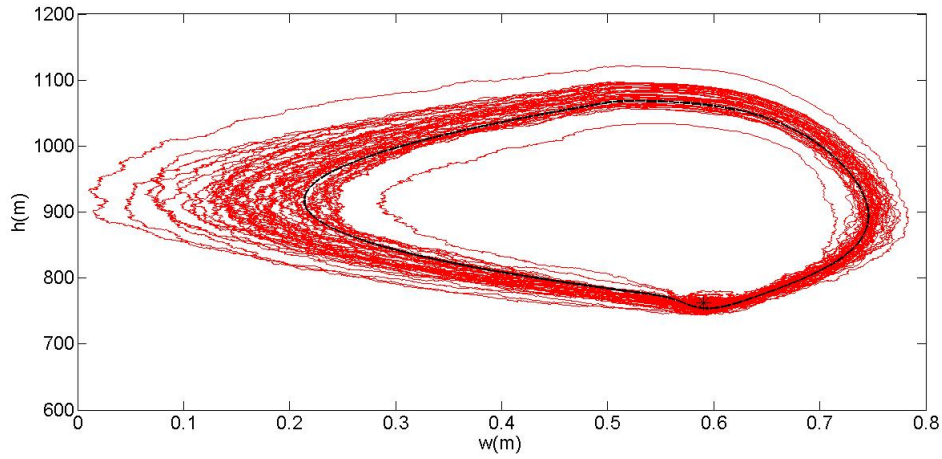


Figura 6.27: Le soluzioni deterministiche (ciclo limite e punto fisso) sono in nero, mentre il comportamento stocastico è in rosso.

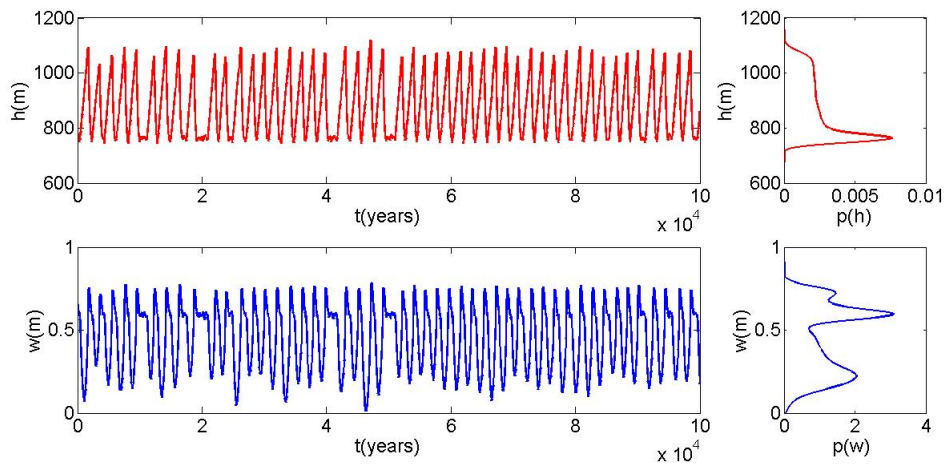


Figura 6.28: Serie temporali di  $h$  e  $w$  e relative distribuzioni di probabilità. Il rumore è troppo forte perchè il sistema rimanga nel dominio di attrazione del punto stazionario a lungo, per questo motivo si osserva una maggiore frequenza di periodi di oscillazione.

## 6.5 Conclusioni

Rispetto a quelli che erano gli obiettivi del capitolo si possono fare alcune valutazioni.

1. Le variazioni di  $a_c$  possono portare ad alternanze ben definite tra i due regimi: con lunghi periodi di permanenza nei domini delle soluzioni e transitori molto brevi nel passaggio fra i regimi.
2. Le variazioni di  $T_s$  sono molto più influenti sulla dinamica del sistema di quanto non lo siano quelle di accumulo nevoso. Il modello tende a portarsi in equilibrio con il valore istantaneo di  $T_s$  causando un comportamento fortemente irregolare nella soluzione. Inoltre la temperatura superficiale causa una non validità del diagramma di biforcazione deterministico, come osservato dai diversi casi F (questo punto è analizzato nel capitolo successivo).
3. Il rumore Gaussiano bianco nelle equazioni differenziali del modello è in grado di far alternare le soluzioni del sistema con una frequenza che dipende dalla sua intensità (con condizioni di  $a_c$  e  $T_s$  tali da trovarsi sul limite di biforcazione).

# Capitolo 7

## Biforcazione stocastica

### 7.1 Introduzione

Dagli studi sui casi stocastici (capitolo 6) si è osservato come il diagramma di biforcazione deterministico non sia rappresentativo per i risultati del modello nelle condizioni dinamiche: infatti la componente stocastica introdotta con la forzante  $T_s$  fa sì che il sistema mostri oscillazioni anche per valori per cui ci aspetteremmo, in condizioni deterministiche, la stazionarietà. L'obiettivo della seguente sezione è quello di studiare come le variazioni stocastiche influenzino qualitativamente e quantitativamente i diagrammi di biforcazione.

### 7.2 Biforcazione temperatura superficiale

Sviluppando diverse serie temporali del parametro  $h$ , per diversi valori medi di  $T_s$ , è stato possibile calcolare il valore medio delle oscillazioni di  $h$ .

In questo modo si è valutata la variazione del diagramma di biforcazione dalle condizioni deterministiche a quelle stocastiche.

Come si osserva in figura 7.1 non si ha più un brusco passaggio fra le condizioni di oscillazione e quelle di stazionarietà, bensì una decrescita graduale del valore medio di oscillazione di  $h$ . In particolare, come evinto dal capitolo 6: nel dominio di oscillazione, il rumore non induce a comportamenti dinamici peculiari (prima serie all'interno della figura 7.1); nel range di sovrapposizione delle soluzioni, il rumore porta uno stato di alternanza dei comportamenti dinamici (seconda serie); nel dominio di stazionarietà, il rumore è in grado di indurre a delle oscillazioni (terza serie).

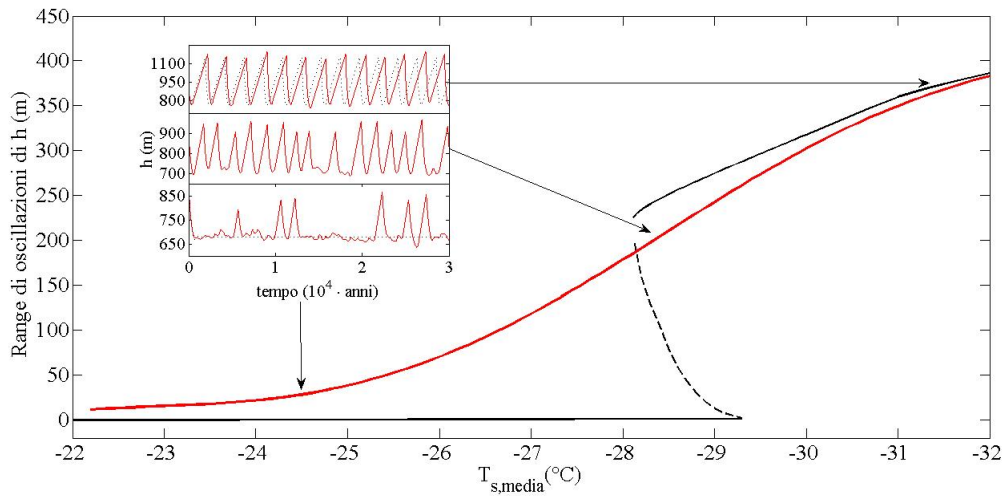


Figura 7.1: Confronto diagramma di biforcazione stocastico (linea rossa) e deterministico (linee nere) per  $a_c=0,23$  m/anno.

### 7.2.1 Analisi dati ampiezze oscillazione $h$

Per completezza rispetto allo studio si è deciso inoltre di valutare come la temperatura superficiale influenzi anche le funzioni di distribuzione di probabilità delle ampiezze di oscillazione di  $h$  (figura 7.2).

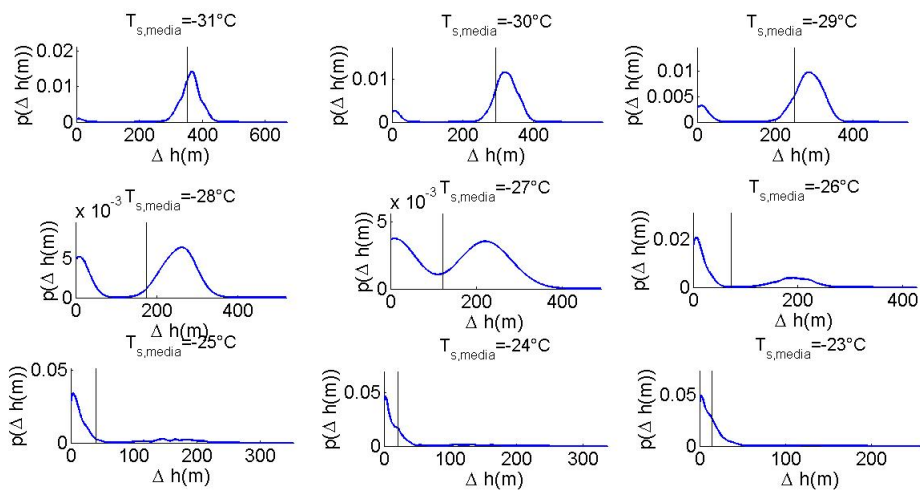


Figura 7.2: Funzioni di distribuzioni di probabilità delle oscillazioni di  $h$

Per temperature basse vige il régime oscillatorio con una distribuzione delle ampiezze unimodale intorno al valore medio associato (ramo stocastico figura 7.1); per temperature intermedie la pdf assume distribuzione bimodale con oscillazioni attorno al ciclo limite e attorno al punto stazionario; mentre per temperature maggiori rimangono solamente le oscillazioni attorno al punto stazionario.

Per ciascuna serie si sono inoltre calcolati la moda (o le mode nel caso di distribuzioni bimodali), la deviazione standard ( $\sigma$ ) e il coefficiente di Kurtosis (figura 7.4)

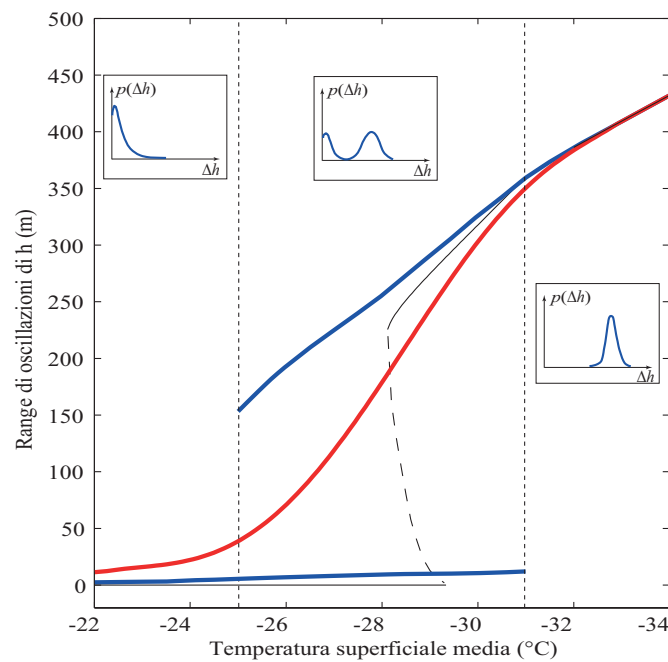


Figura 7.3: In figura è mostrato (in blu) l'andamento delle mode delle pdf (figura 7.2), sovrapposto all'andamento del diagramma di biforcazione stocastico (rosso) e a quello del diagramma di biforcazione deterministico (nero). Sono inoltre presenti delle pdf schematiche rappresentative delle distribuzioni della ampiezze di oscillazione di  $h$ .

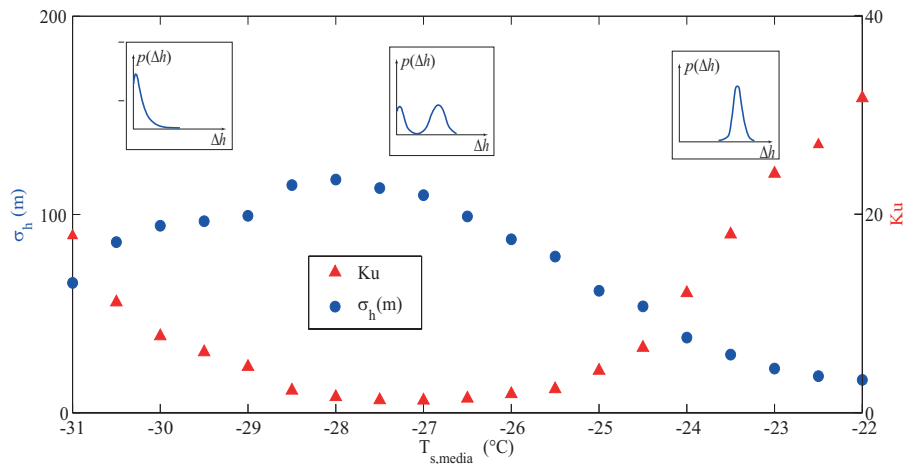


Figura 7.4: Quando si hanno le distribuzioni bimodali si osservano i maggiori valori di  $\sigma$  e i minori di  $Ku$ , poi nelle condizioni di stazionarietà invece è l'opposto.

## 7.2.2 Analisi dati periodi oscillazione $h$

Gli stessi studi fatti per le ampiezze di oscillazione di  $h(m)$ , sono stati eseguiti per i periodi di oscillazione (anni).

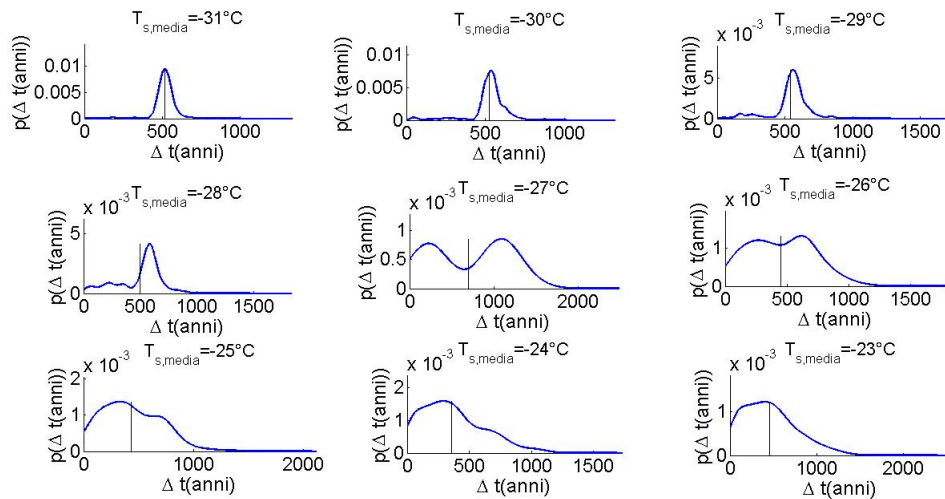
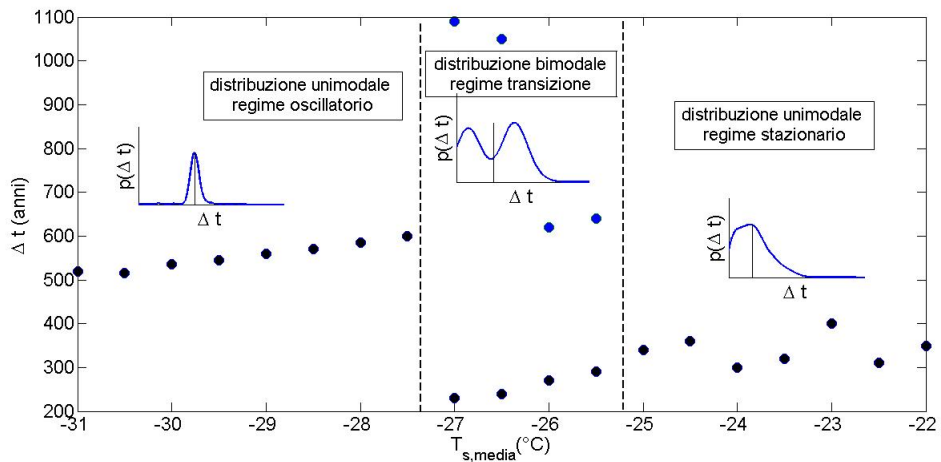
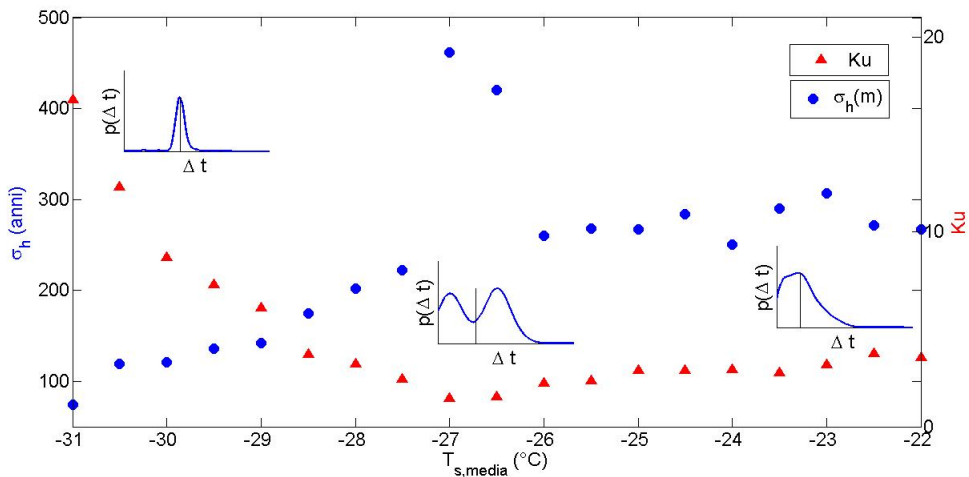


Figura 7.5: Funzioni di distribuzione di probabilità per i periodi di oscillazione di  $h$  rispetto ai diversi valori medi di  $T_s$ .

Per le temperature più basse i periodi di oscillazione si distribuiscono secondo pdf unimodali; per temperature intermedie ( $-27\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) si hanno distribuzioni bimodali con periodi di oscillazione maggiori; per temperature maggiori le pdf non sono più distribuite attorno a un valore centrale, ma sono maggiormente allargate. Si osserva che raggiunta la stazionarietà i periodi di oscillazione del punto stazionario rimangono dello stesso ordine di grandezza di quelli del precedente caso oscillatorio (circa 500 anni).



(a) Mode delle funzioni di distribuzione di probabilità per i periodi di oscillazione



(b) Valori di  $\sigma$  e Ku

Figura 7.6

I periodi di oscillazione di  $h$  sono maggiori per la soluzione oscillatoria

e minori per quella stazionaria, anche se dello stesso ordine di grandezza (figura 7.6(a)).

Quando si hanno le distribuzioni bimodali si osservano i maggiori valori di  $\sigma$ , dato che la distribuzione è molto più allargata, e i minori valori di  $Ku$  (figura 7.6(b)). Rispetto alla figura 7.4 si osserva che la  $\sigma$  non tende a decrescere, con l'aumentare della temperatura, perché la distribuzione non si concentra attorno a un valore (figura 7.5).

### 7.3 Biforcazione accumulo nevoso

Sebbene le particolarità indotte dalle variazioni di  $T_s$  non si ripresentino per le simulazioni di  $a_c$ , sono comunque state eseguite le stesse operazioni sul parametro accumulo nevoso al fine di valutare come si modifichi il diagramma di biforcazione. Il risultato riscontrato è che il comportamento deterministico è in gran parte conservato, con un passaggio molto rapido fra soluzione stazionaria e oscillatoria, per cui è sufficiente variare di poco il valore di  $a_c$  per cambiare la risposta del sistema (figura 7.7).

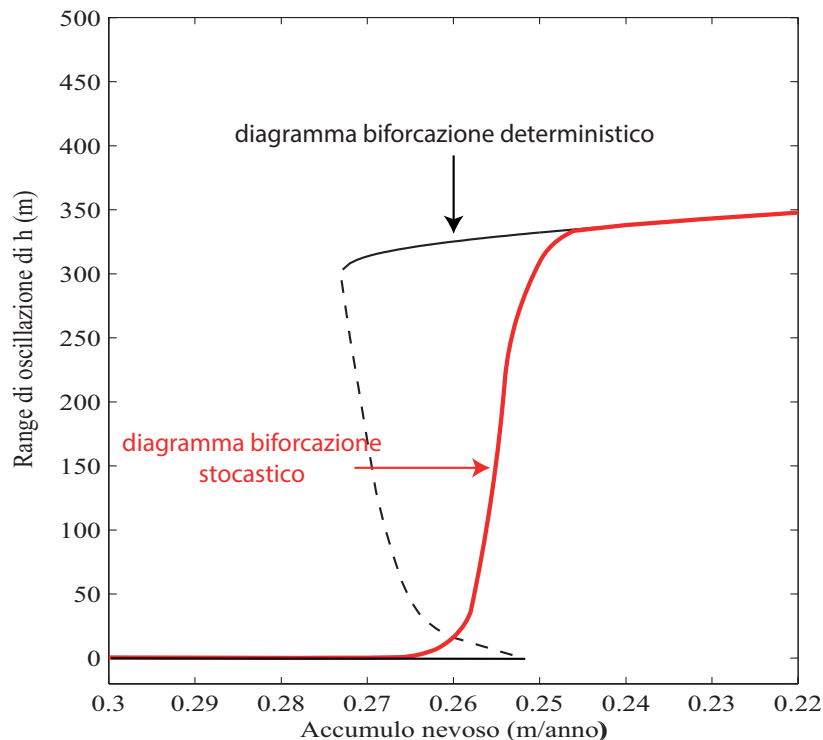


Figura 7.7: Confronto diagramma di biforcazione stocastico e deterministico per  $T_s = -30,6^\circ\text{C}$ .

### 7.3.1 Analisi dati ampiezze oscillazione $h$

Anche in questo caso si è valutato come le variazioni di accumulo nevoso influenzino anche le funzioni di distribuzione di probabilità delle ampiezze di oscillazione di  $h$  (figura 7.8).

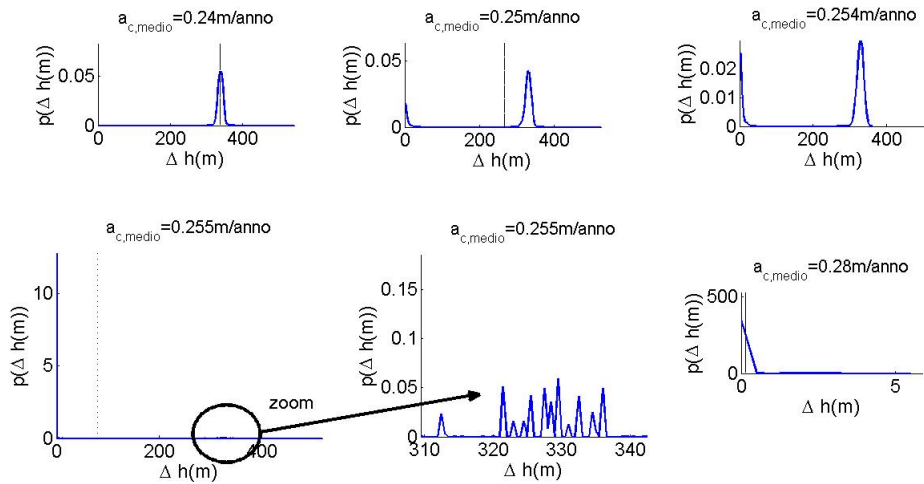


Figura 7.8: Funzioni di distribuzione di probabilità delle oscillazioni di  $h$  per diversi valori di  $a_c$

Per bassi valori di accumulo nevoso (0,24 m/anno, figura 7.8) vige il regime oscillatorio. Dopodiché, facendo crescere il valore di  $a_c$ , si osserva il comportamento bimodale (0,254 m/anno), fino a un valore limite, in cui si verifica un passaggio brusco: i periodi di stazionarietà sono molto maggiori rispetto alle oscillazioni e ne deriva una pdf con picco sullo 0 e bassi valori di probabilità per le ampiezze di oscillazione (come mostrato nello zoom per  $a_c = 0,255$  m/anno, figura 7.8). Oltre tale limite vige la stazionarietà. Per cui diagrammando il tutto è possibile osservare in sequenza il comportamento unimodale del regime oscillatorio, poi quello bimodale per la transizione e infine una distribuzione delle ampiezze di oscillazione nuovamente unimodale per la stazionarietà (figura 7.9, con delle pdf di esempio per facilitare la comprensione).

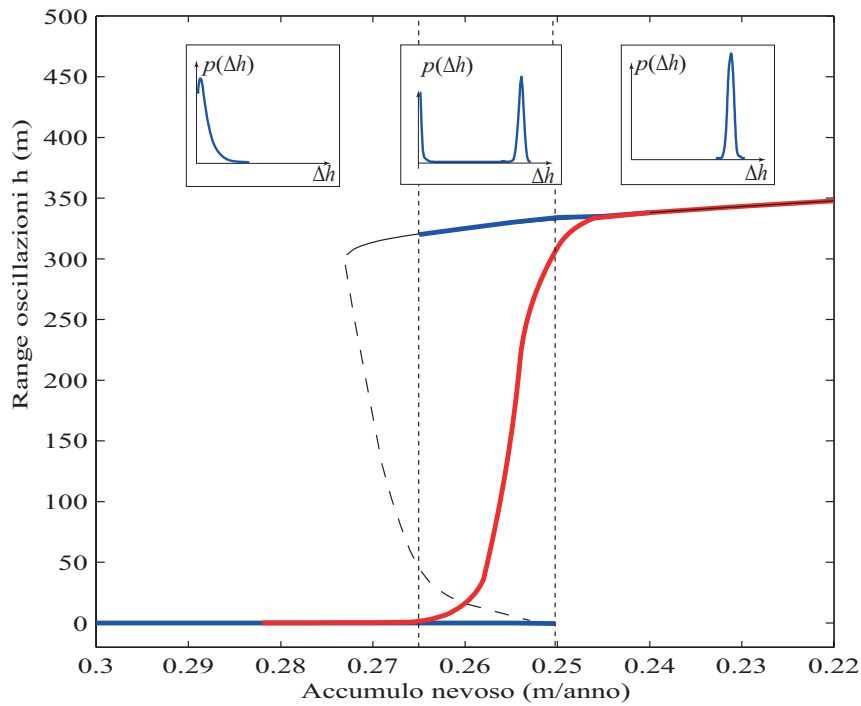


Figura 7.9: Diagramma di biforcazione deterministico (nero), stocastico (rosso), mode delle pdf delle ampiezze di oscillazioni (blu). Rispetto alla figura 7.3, bisogna fare la considerazione aggiuntiva che la curva della moda stazionaria (blu) e quella della media (rosso) non terminano sullo zero (come nel caso deterministico), ma le oscillazioni sono talmente ridotte da creare l'effetto grafico di sovrapposizione delle curve.

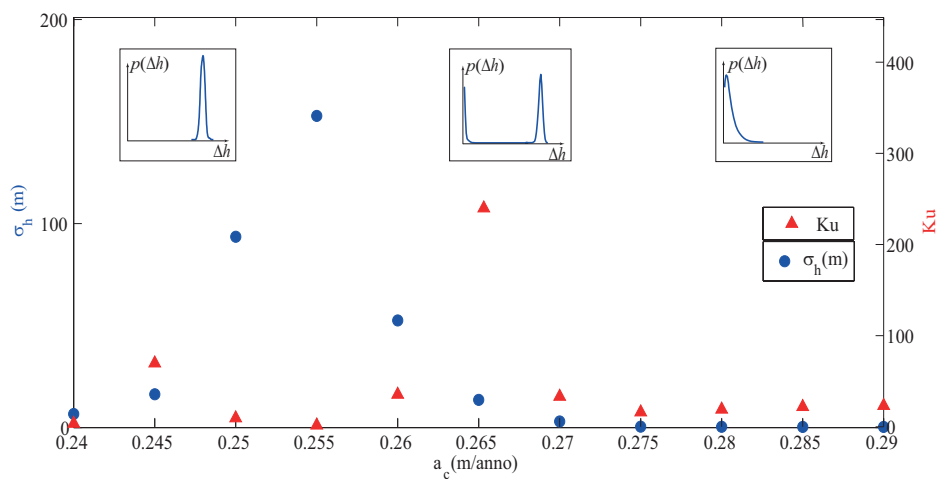


Figura 7.10: Valori di  $\sigma$  e  $Ku$  per ogni serie di ampiezze

### 7.3.2 Analisi dati periodi oscillazione $h$

Gli stessi studi fatti per le ampiezze di oscillazione di  $h(m)$ , sono stati eseguiti per i periodi di oscillazione (anni).

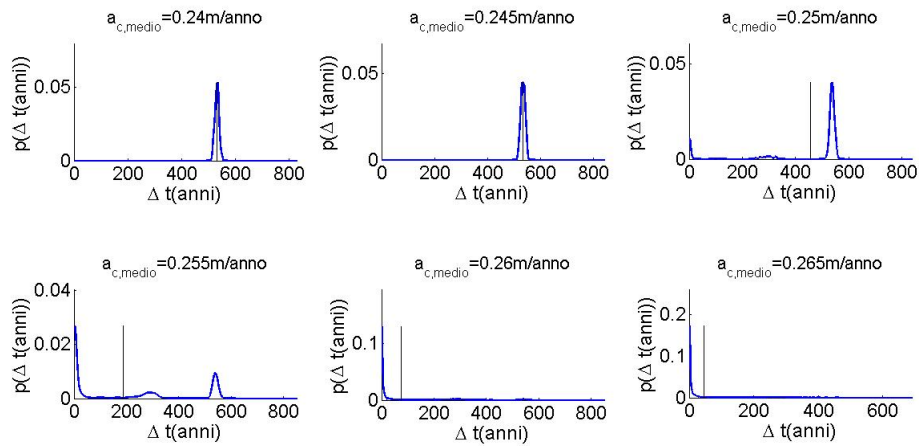


Figura 7.11: Rispetto alla figura 7.11 c'è una considerazione aggiuntiva: in condizioni di stazionarietà i periodi di oscillazione sono molto più brevi e sono dovuti ai piccoli spostamenti ad alta frequenza del punto stazionario in equilibrio con il valore istantaneo di  $a_c$ .

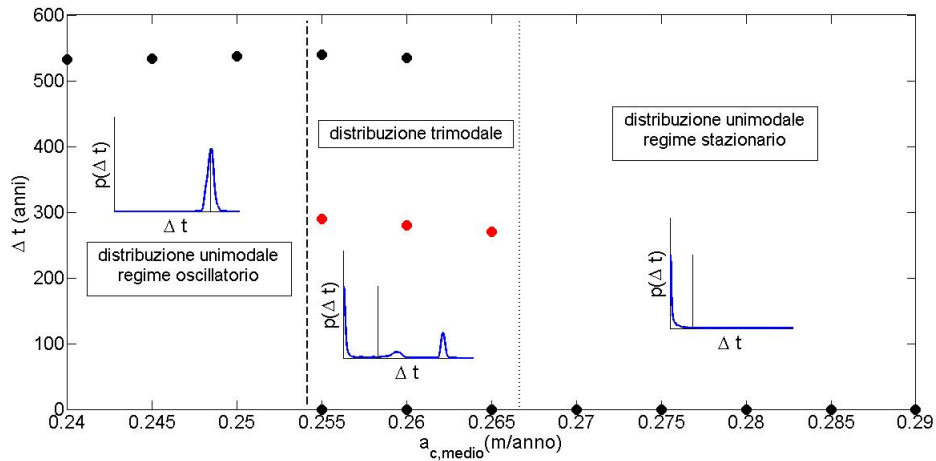


Figura 7.12: In questo caso nel intervallo di transizione fra i due regimi esistono delle oscillazioni di  $h$  con periodi intermedi fra quelli tipici del regime oscillatorio e quelli tipici del regime stazionario. La pdf è infatti trimodale, come si osserva in figura 7.11 per il caso  $a_c = 0,255$  m/anno

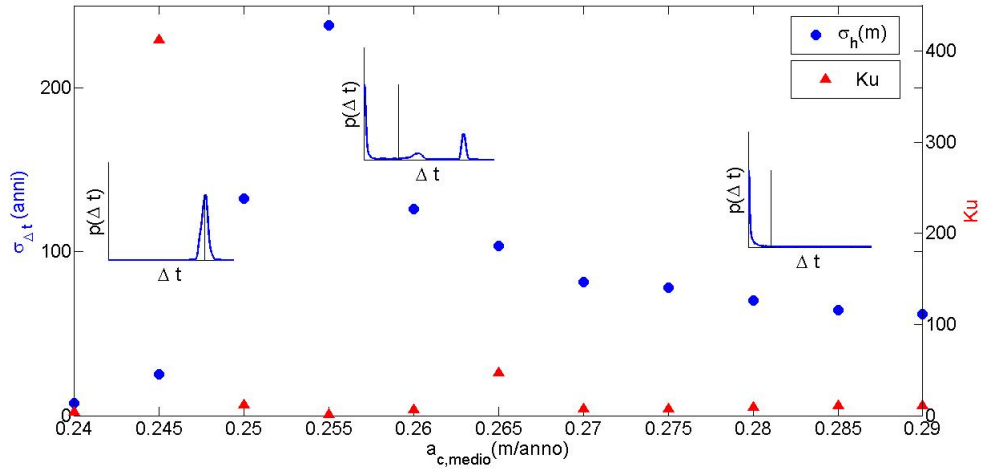


Figura 7.13: Valori di  $\sigma$  e  $Ku$  per ogni serie di periodi di oscillazione

## 7.4 Diagramma biforcazione 3D

Sinora si sono considerati dei diagrammi di biforcazione che, tenuto costante uno dei due parametri ( $a_c$  o  $T_s$ ), mostrassero come al variare dell'altro cambiasse la soluzione del sistema.

Nella realtà i due parametri hanno la possibilità di variare assieme (in maniera scorrelata secondo gli studi sui dati GISP2), individuando un diagramma di biforcazione non più nel piano, bensì nello spazio.

Simulando come rumore colorato Gaussiano le serie dei due parametri è stato possibile per ogni coppia di valori medi ( $\bar{a}_c, \bar{T}_s$ ) calcolare l'ampiezza di oscillazione media del parametro  $h$ .

In questo modo attraverso un'interpolazione lineare si è ottenuto il diagramma di biforcazione nelle tre dimensioni.

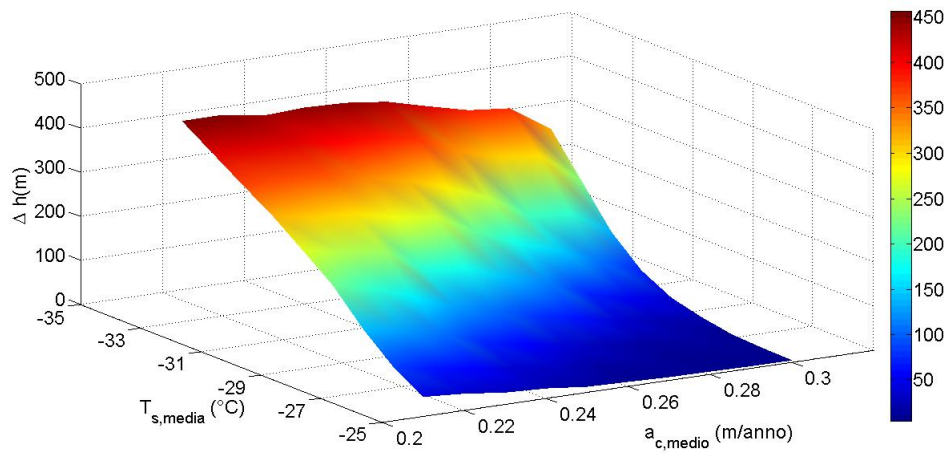


Figura 7.14: Diagramma di biforcazione tridimensionale. Le zone rosse rappresentano il regime oscillatorio con alti valori medi di oscillazioni di  $h$ . Mentre le zone blu rappresentano le condizioni di stazionarietà.

Riducendo il diagramma appena visto a un piano e sfruttando i diversi colori come terza dimensione risulta più semplice e intuitivo capire quali sezioni sono state considerate nei calcoli svolti sinora.

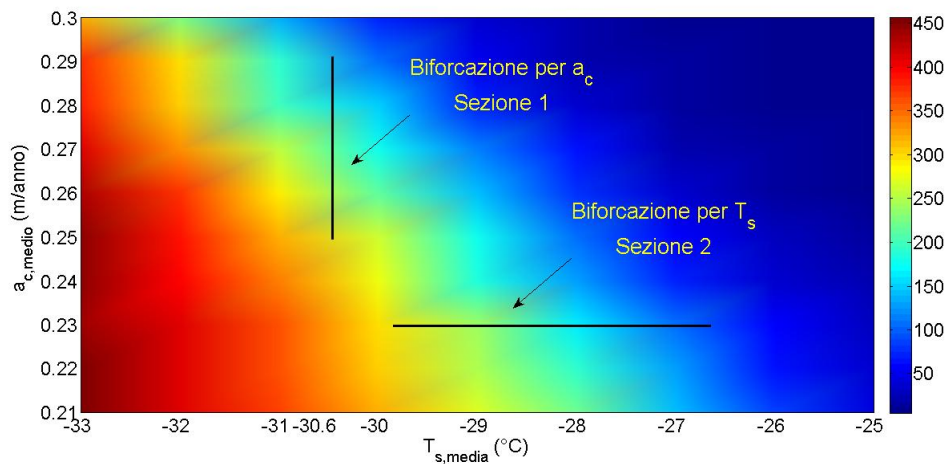


Figura 7.15: Questo grafico sfrutta la stessa sequenza di colori usata per figura 7.14 e permette di osservare quali due sezioni di transizione fra i due regimi siano state utilizzate. Infatti la biforcazione per  $a_c$  (figura 7.7) non è che la sezione 1 e la biforcazione per  $T_s$  (figura 7.1) è la sezione 2. Con la consapevolezza che nei diagrammi di biforcazione piani uno dei parametri era fisso e costante, non riferito a un valore medio come in figura.

## 7.5 Conclusioni

Questo capitolo aveva lo scopo di mostrare gli effetti della forzatura stocastica, con rumore Gaussiano colorato, sul diagramma di biforcazione deterministico. A conclusione di ciò si possono fare diverse considerazioni:

1. per quanto concerne la  $T_s$  (sezione 7.2), si può affermare che le modifiche al diagramma di biforcazione deterministico siano sostanziali: infatti nel corrispettivo diagramma stocastico non esiste più un valore limite di biforcazione (figura 7.1), né una zona di sovrapposizione delle due soluzioni; bensì un passaggio graduale delle oscillazioni medie dello spessore della lingua glaciale, che dal ramo deterministico del ciclo limite va asintoticamente al ramo deterministico del punto stazionario. Tuttavia, anche nelle soluzioni stocastiche, si possono intravedere le due soluzioni deterministiche (punto e ciclo limite) dalle analisi statistiche delle oscillazioni di  $h$ , che mostrano un andamento bimodale delle pdf per valori di  $T_s$  intermedi (figura 7.3). La stessa considerazione è anche valida per i periodi di oscillazione e le loro pdf bimodali (periodi minori per oscillazioni attorno al punto e maggiori attorno al ciclo limite, figura 7.6(a)).
2. L'accumulo nevoso  $a_c$  comporta delle risposte diverse rispetto a  $T_s$ : infatti conserva per gran parte del suo dominio il comportamento deterministico, tranne che per i valori vicini al valore limite di biforcazione dove si osserva un brusco passaggio fra le due soluzioni (figura 7.7). Questo riduce l'intervallo di valori di  $a_c$  per cui esiste la bimodalità delle oscillazioni di  $h$  (figura 7.9) e implica che per variazioni anche ridotte del valore di  $a_c$ , il sistema possa passare da una soluzione all'altra.
3. Le variazioni congiunte di  $a_c$  e  $T_s$  hanno permesso di ottenere un diagramma di biforcazione stocastico in tre dimensioni (figura 7.14). In tale diagramma si può osservare come l'influenza della forzatura di  $T_s$  sia preponderante rispetto a quella di  $a_c$ , tanto che ne risulta un andamento simile a quello della biforcazione stocastica per la  $T_s$ , non più nel piano, bensì nello spazio.

# Conclusioni

La dinamica temporale degli ice stream è di fondamentale importanza nel bilancio di massa dei ghiacciai continentali: comprendere i processi fisici che ne regolano il moto può favorire una miglior comprensione della dinamica delle masse glaciali dell'Antartide e della Groenlandia e delle loro interazioni con le variazioni climatiche. Lo scopo di questa tesi era quello di valutare quali influenze dinamiche portasse la forzatura con rumore Gaussiano colorato (CGN) nel modello di Robel *et al.* (2013).

Tale modello matematico individua, nel caso deterministico, due tipologie di moto: quella stazionaria e quella oscillatoria. In seguito agli studi eseguiti si può affermare che il CGN sia responsabile di modifiche sostanziali nella risposta del modello: infatti le soluzioni dinamiche possono essere costituite da un'alternanza di periodi di stazionarietà e oscillazione (ad esempio casi E2 ed E3), o da oscillazioni che variano nel tempo (caso F4), il tutto in funzione dei valori dei parametri ( $a_c$  e  $T_s$ ) e dell'intensità del rumore. Le due soluzioni deterministiche rimangono lo scheletro delle risposte del sistema, ma in alcuni casi possono risultare difficili da intravedere (casi F3 e F4), tanto da rendersi necessarie analisi di tipo statistico (capitolo 7).

In particolare la temperatura superficiale causa delle sostanziali modifiche nel diagramma di biforcazione deterministico, che non ha più validità nel caso dinamico, dando vita a un diagramma di biforcazione stocastico in cui sono presenti oscillazioni dei parametri della lingua glaciale anche per valori di  $T_s$  che deterministicamente si trovano all'interno del dominio di soluzione stazionaria (figura 7.1).

Invece la forzatura con accumulo nevoso conserva per buona parte del dominio il comportamento deterministico, tranne che per i valori vicini al limite del valore di biforcazione, dove si osserva un brusco passaggio fra le due soluzioni. Quindi anche per piccole variazioni di  $a_c$ , il sistema è in grado di passare da un dominio all'altro (figura 7.7).

Il lavoro di ricerca svolto, si è basato su serie temporali relative agli ultimi 10'000 anni (periodo geologico dell'Olocene) estrapolate dalla carota di ghiaccio GISP2 in Groenlandia. Differenti analisi in altre carote registrano valori

dei parametri climatici notevolmente differenti. Infatti nei ghiacciai continentali tali parametri variano notevolmente spostandosi da un luogo all'altro in funzione di vento, altitudine, umidità. Potrebbe quindi essere interessante valutare come il sistema risponda ad altre serie temporali dei parametri esterni, per verificare se si instaurano nuovi comportamenti dinamici o se si ripetono quelli trovati in questo lavoro di tesi.

# Bibliografia

- ALLEY, R.B. *et al.* 2000 The younger Dryas cold interval as viewed from central Greenland. *Quaternary Science Reviews* (19), 213–226.
- BAMBER, J.L., VAUGHAN, D.G. & JOUGHIN, I. 2000 Widespread complex flow in the interior of the Antarctic Ice Sheet. *Science* (287.5456), 1248–1250.
- CUFFEY, K.M. & CLOW, G.D. 1997 Temperature, accumulation, and ice sheet elevation in central Greenland through the last deglacial transition. *Journal of Geophysical Research* (102), 26–383.
- CUFFEY, K.M. & PATERSON, W.S.B. 2010 *The Physics of Glaciers, 4th edition*. Academic Press.
- DANSGAARD, W. 1964 Stable isotopes in precipitation. *Tellus A* (16.4).
- ELBA, L. 2014 Dinamica temporale delle lingue glaciali: modellazione matematica, biforcazioni e isteresi. Tesi di laurea magistrale, Politecnico di Torino.
- ENGELHARDT, H. & KAMB, B. 1998 Basal sliding of Ice Stream B, West Antarctica. *Journal of Glaciology* (44), 223–230.
- GILLESPIE, D.T. 1996 Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral. *Physical Review E* (54.2), 2084.
- JISKOOT, H. 2011 Glacier Surging. *Encyclopedia of Snow, Ice and Glaciers. Springer Netherlands*. pp. 415–428.
- JOUZEL, J. *et al.* 2007 EPICA Dome C Ice Core 800 KYr Deuterium Data and Temperature Estimates. *Tech. Rep.*. World Data Center for Paleoclimatology.
- PARRENIN, F. *et al.* 2007 1-d-ice flow modelling at EPICA Dome C and Dome Fuji, East Antarctica. *Climate of the Past* (3.2), 243–259.

- PETIT, J.R. *et al.* 1999 Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from Vostok ice core, Antarctica. *Nature* (399), 429–436.
- RIDOLFI, L., D'ODORICO, P. & LAIO, F. 2011 *Noise-Induced Phenomena in the Environmental Sciences*. Cambridge University Press.
- ROBEL, A.A., DEGIULI, E., SCHOOF, C. & TZIPERMAN, E. 2013 Dynamics of ice stream temporal variability: Modes, scales and hysteresis. *Journal of Geophysical Research* (118), 1–12.
- TULACZYK, S., BARCLAY, W. & ENGELHARDT, H. 2000 Basal mechanics of Ice Stream B, West Antarctica. *Journal of Geophysical Research* (105), 463–481.

# Ringraziamenti

Come ogni lavoro scientifico, anche questo ha una storia alle spalle che non comincia con me: per questo vorrei innanzitutto ringraziare il professor Luca Ridolfi, per come mi ha sostenuto e incoraggiato. La sua passione scientifica coniugata alla sua dimensione di sensibilità umana è stata per me fonte di ispirazione e insegnamento. Ringrazio poi la dottoranda Elisa Mantelli, per essere sempre stata disponibile e per avermi seguito personalmente nell'avanzare del lavoro.

Ringrazio poi i miei genitori, per avermi dato gli strumenti necessari a intraprendere questo percorso, e Airin, per avermici accompagnato.