

Comportamento elastoplastico e danneggiativo di gusci sottili soggetti a spostamenti e rotazioni finite

Original

Comportamento elastoplastico e danneggiativo di gusci sottili soggetti a spostamenti e rotazioni finite / Janna, C.; Majorana, C. E.; Zavarise, G.. - ELETTRONICO. - (2004), pp. 1-4. (Intervento presentato al convegno XV Convegno Italiano di Meccanica Computazionale tenutosi a Genova, Italy nel 2004).

Availability:

This version is available at: 11583/2700699 since: 2018-04-18T14:56:36Z

Publisher:

Univ. di Genova

Published

DOI:

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

COMPORTAMENTO ELASTOPLASTICO E DANNEGGIATIVO DI GUSCI SOTTILI SOGGETTI A SPOSTAMENTI E ROTAZIONI FINITE

C. JANNA¹, C. E. MAJORANA², G. ZAVARISE¹

¹ *Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Politecnico di Torino, Torino*

² *Dipartimento di Costruzioni e Trasporti, Università di Padova, Padova*

SOMMARIO

Si presenta l'implementazione di due leggi costitutive non lineari valide per elementi a guscio: una legge di elasto-danneggiamento ed una legge elastoplastica. Entrambi questi modelli sono stati studiati, messi a punto ed implementati in un elemento shell in spostamenti e rotazioni finite, proposto da J.C. Simo nel 1989. Entrambi i modelli costitutivi sono formulati direttamente sui risultanti della tensione e sono validi per l'acciaio.

1. DESCRIZIONE DELL'ELEMENTO SHELL

L'elemento è assimilato ad una superficie di Cosserat, e questo implica che la sua configurazione è determinata: (i) dalla posizione della superficie media (in R^3), (ii) dall'orientamento di un campo di direttori inestensibili (il cui modulo cioè rimane costante). La funzione del campo dei direttori è quella di *rappresentare* l'orientamento della superficie media e quindi di realizzare le rotazioni all'interno dell'elemento. Ogni punto del guscio è determinato quindi dalla funzione:

$$\mathbf{x} = \Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) := \boldsymbol{\varphi}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{t}(\xi^1, \xi^2) \quad (1.1)$$

con $\boldsymbol{\varphi}$ posizione della superficie media e \mathbf{t} campo dei direttori. Nella formulazione adottata si è scelto di trascurare la deformabilità lungo lo spessore del guscio e sono quindi sufficienti due parametri alla sua completa descrizione. La parametrizzazione locale dell'elemento avviene quindi a partire dal quadrato biunitario con l'utilizzo di funzioni di forma isoparametriche bilineari. L'aggiornamento del campo dei direttori nodali, che non è uno spazio additivo, avviene applicando la mappa esponenziale di Rodriguez:

$$\exp_{\mathbf{t}}[\bar{\boldsymbol{\theta}}] = \cos\|\bar{\boldsymbol{\theta}}\| \mathbf{t} + \frac{\sin\|\bar{\boldsymbol{\theta}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\theta}}\|} \bar{\boldsymbol{\theta}} \quad (1.2)$$

dove $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ è un vettore ortogonale al direttore \mathbf{t} ed $\exp_{\mathbf{t}}[\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ è una rotazione finita.

L'elemento è formulato in spostamenti per quanto riguarda il comportamento membranale e flessionale, mentre per quanto riguarda il taglio è stata impiegata una formulazione di tipo ANS (Assumed Natural Strain) per evitare fenomeni di "shear locking". Questo tipo di formulazione

discende dall'applicazione del principio variazionale misto di Hu-Washizu e, nel caso in questione, sono state impiegate le interpolazioni proposte da Bathe e Dvorkin. Di seguito sono riportate le espressioni delle deformazioni membranali, taglianti e flessionali, rispettivamente:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\beta} - \boldsymbol{\varphi}_{0,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{0,\beta}) \quad (1.3)$$

$$\bar{\delta}_1 = \frac{1}{2}[(1-\eta)(\gamma_1^B - \gamma_{01}^B) + (1+\eta)(\gamma_1^D - \gamma_{01}^D)] \quad \begin{aligned} \gamma_2^A &= \boldsymbol{\varphi}_{,2}^A \cdot \mathbf{t}^A \\ \gamma_1^B &= \boldsymbol{\varphi}_{,1}^B \cdot \mathbf{t}^B \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\bar{\delta}_2 = \frac{1}{2}[(1-\xi)(\gamma_2^A - \gamma_{02}^A) + (1+\xi)(\gamma_2^C - \gamma_{02}^C)] \quad \begin{aligned} \gamma_2^C &= \boldsymbol{\varphi}_{,2}^C \cdot \mathbf{t}^C \\ \gamma_1^D &= \boldsymbol{\varphi}_{,1}^D \cdot \mathbf{t}^D \end{aligned}$$

$$k_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{,\beta} - \boldsymbol{\varphi}_{0,\alpha} \cdot \mathbf{t}_{0,\beta}) \quad (1.5)$$

Per quanto riguarda il modello costitutivo di partenza, definito direttamente sui risultanti della tensione, si è scelta la forma più semplice che possa soddisfare alla disuguaglianza di Clausius-Duhem e cioè il modello lineare elastico isotropo.

$$\begin{aligned} \tilde{n}^{\beta\alpha} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} H_0^{\beta\alpha\gamma\delta} \varepsilon_{,\gamma\delta} \quad , \\ \tilde{q}^\alpha &= KGh a_0^{\alpha\beta} \delta_\beta \quad , \\ \tilde{m}^{\beta\alpha} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} H_0^{\beta\alpha\gamma\delta} \rho_{,\gamma\delta} \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. MODELLO COSTITUTIVO DI ELASTO-DANNEGGIAMENTO

Il modello di danneggiamento adottato è quello di Kachanov. Data una sezione di un elemento di volume di materiale danneggiato, questa presenta imperfezioni e micro-cavità, generate dai fenomeni danneggiativi, che complessivamente occupano un'area S_D ; viene allora definita la variabile di danneggiamento D come il rapporto tra quest'area e l'area totale della sezione:

$$D = \frac{S_D}{S} \quad , \quad \text{con } 0 \leq D \leq 1 \quad (2.1)$$

Si è considerato un danneggiamento isotropo, cioè si è assunta la variabile D indipendente dall'orientamento della sezione considerata. Si è fatto in seguito riferimento agli stress effettivi ed al principio di equivalenza delle deformazioni:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{(1-D)S} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (2.2)$$

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

Visto il particolare ambito di lavoro, riguardante le strutture sottili soggette a grandi spostamenti e grandi rotazioni, si è deciso di utilizzare un modello costitutivo valido per l'acciaio, scegliendo di far dipendere la variabile di danneggiamento dalla radice quadrata della densità di energia di deformazione $D = g(\tau)$, ottenendo così un comportamento simmetrico a trazione e a compressione

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.4)$$

La legge di evoluzione del danno adottata presenta l'espressione:

$$D = g(\tau) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau} \right), \quad \text{per } \tau_0 \leq \tau \leq \alpha \tau_0 \quad (2.5)$$

con τ_0 soglia minima di danneggiamento. A partire dalle ipotesi sopra esposte è stata poi ricavata l'espressione del modulo tangente algoritmico:

$$\left[\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right] = \mathbf{C}_t = (1-D) \mathbf{C} - \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = (1-D) \mathbf{C} - \frac{1}{2\tau} \frac{dg}{d\tau} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon})^t = (1-D) \mathbf{C} - \frac{1}{2\tau} \frac{dg}{d\tau} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^t \quad (2.6)$$

3. MODELLO COSTITUTIVO ELASTO-PLASTICO

Per quanto riguarda il modello costitutivo elasto-plastico, si è scelto di far uso di un potenziale iperelastico e di un potenziale di hardening strettamente quadratici con una decomposizione additiva tra deformazioni plastiche e deformazioni elastiche:

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) := \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)^t \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \nabla \mathbf{W}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{R}^8 \quad (3.1)$$

$$H(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \mathbf{p} = -\nabla H(\boldsymbol{\alpha}) = -\mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{D} \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^9 \quad (3.2)$$

Si è tenuto conto di un Hardening sia cinematico che isotropico, come è evidente dal numero di variabili impiegate (8 per l'Hardening cinematico e 1 per quello isotropico).

La scelta della superficie di plasticità è caduta sul modello proposto da Ilyushin e Shapiro. Era necessario avere una superficie di plasticità formulata direttamente sui risultanti della tensione e questa offriva una buona approssimazione del criterio di Von-Mises. In notazione matriciale:

$$\phi_\mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) \equiv (\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}})^t \mathbf{A}_\mu (\boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}}) - \frac{(k_0 + k' \mathbf{p})^2}{k_0^2} \leq 0, \quad \mu \in (1, 2) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{A}_\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_0^2} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{q_0^2} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \frac{\text{sign}(\mu)}{2\sqrt{3}n_0 m_0} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \frac{1}{m_0^2} \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad \text{sign}(\mu) := \begin{cases} +1, & \text{se } \mu = 1 \\ -1, & \text{se } \mu = 2 \end{cases} \quad (3.4)$$

In quest'espressione $\{n_0, q_0, m_0\}$ rappresentano la soglia di plasticità dell'elemento per condizioni elementari di carico, e cioè rispettivamente trazione monoassiale, puro taglio e flessione cilindrica. Si tratta di una superficie di plasticità doppia ed è stato necessario impiegare una procedura di "return mapping" multisuperficie. Anche in questo caso si è ricavata l'espressione del modulo tangente algoritmico $\left[\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right]_{n+1}$ tenendo conto di hardening cinematico ed isotropico.

4. ESEMPI NUMERICI

La realizzazione degli esempi numerici è stata ottenuta grazie all'utilizzo del codice di calcolo FEAP, sviluppato a Berkley dal prof. Taylor, ed in particolare delle subroutines relative all'elemento shell sviluppate dallo stesso Simo. Queste subroutines che inizialmente realizzavano un modello costitutivo lineare elastico sono state opportunamente modificate per simulare fenomeni danneggiativi e plastici. Gli esempi proposti vogliono porre a confronto il differente comportamento strutturale dei modelli costitutivi presentati.

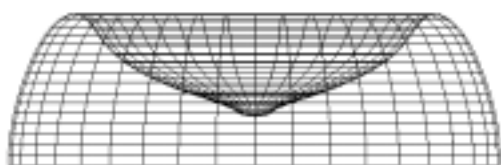


Fig. 1: Calotta elastica

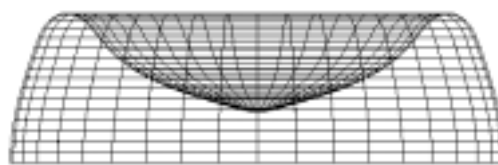


Fig. 2: Calotta danneggiata

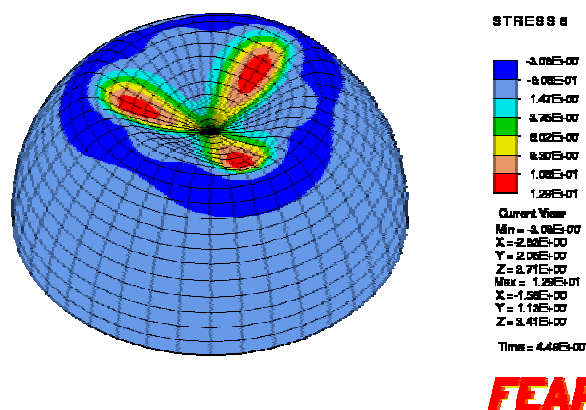


Fig. 3: Sollecitazioni flessionali in caso di instabilità elastoplastica

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. A. Crisfield, Ivanov's yield criterion for thin plates and shells using finite element, Transports and Roads Res. Lab. Report, Crowthorne (1979)
- [2] E.N. Dvorkin, K.J. Bathe, A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis, Eng. Comput., Vol. 1, March, 77-88 (1984)
- [3] J.C. Simo, D.D. Fox, *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I-II-III-V*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 72, 267-304 (1989), 73, 53-92 (1989), 79, 21-70 (1990), 96, 133-171 (1992)
- [4] J.C. Simo, J.G. Kennedy, S. Govindjee, *Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms*, Int. J. for Numer. Meth. Engrg. 26, 2161-2185 (1988)