Lagrange ci offre un test per Einstein

Una verifica della relatività generale usando i punti lagrangiani del sistema terra-sole

Angelo Tartaglia

Premessa

Nella seconda metà dell'800, dopo la completa formalizzazione dell'elettromagnetismo classico, c'era chi notava una sorta di asimmetria tra le equazioni di Maxwell e quelle della gravitazione universale di Newton. L'interazione elettromagnetica consta di una parte attrattiva o repulsiva tra cariche elettriche (quella appunto descritta dal campo elettrico) e, se le cariche sono in movimento una rispetto all'altra, compare un campo magnetico il quale agisce sulle cariche stesse (che sono appunto in movimento) applicando loro una forza in direzione perpendicolare tanto alla velocità istantanea quanto al campo (forza di Lorentz).

In condizioni statiche, la forza con cui interagiscono due cariche (forza di Coulomb) ha la stessa forma della forza di Newton tra due masse, salvo il fatto che la forza elettrostatica può essere attrattiva o repulsiva a seconda che le due cariche abbiano segno opposto oppure uguale, mentre la forza della gravità è sempre attrattiva. Se una carica, muovendosi, genera un campo magnetico che agisce come abbiamo detto più su, perché non dovrebbe succedere lo stesso con delle masse in movimento?

C'è un altro argomento più sottile per chiedersi se anche in gravitazione non dovrebbe esistere l'analogo del campo magnetico ad affiancare il campo newtoniano. Nella teoria di Maxwell è la presenza delle due componenti, elettrica e magnetica, combinate appunto nell'elettromagnetismo, a far sì che la velocità di propagazione dell'interazione (la velocità della luce) sia altissima, certo, ma non infinita. Nella gravitazione universale di Newton, viceversa, la propagazione dell'interazione avviene apparentemente a velocità infinita, cosa che disturbava anche lo stesso Newton.

Con queste considerazioni alle spalle ci fu chi, come Heaviside, alla fine del XIX secolo, provò a includere nella teoria della gravitazione una componente *gravito-magnetica* confezionata sul modello di quella magnetica delle equazioni di Maxwell. Questi tentativi però non approdarono a nulla.

Quando sulla scena si affacciò Einstein con la sua relatività speciale (1905) e poi generale (1915-16) la questione trovò una soluzione, non direttamente cercata. In effetti la descrizione geometrica, in quattro dimensioni, dell'interazione gravitazionale comporta il fatto che al campo contribuisca non solo la massa della sorgente, ma anche il suo momento angolare (più in generale: il suo moto rispetto all'osservatore). In condizioni di campo debole (cioè quasi sempre) le equazioni generali di Einstein assumono una forma che ricalca quelle di Maxwell, con termini analoghi al campo elettrico (la forza peso cui siamo abituati) e altri che corrispondono al campo magnetico e che sono battezzati *gravito-magnetici*. La velocità di propagazione dell'interazione non è più infinita, ma coincide con quella stessa, *c*, che vale per la luce.

La questione è così elegantemente risolta, però all'atto pratico una verifica sperimentale circa l'effettiva esistenza del campo gravito-magnetico si presenta molto difficile: se la forza di attrazione della gravità è piccola rispetto alle altre interazioni, quella dovuta al campo gravito-magnetico è piccolissima. Ci sono stati e sono in corso esperimenti volti a misurare l'intensità del campo gravito-magnetico della terra: Gravity Probe B, della NASA; l'analisi delle orbite dei satelliti LAGEOS e LAGEOS 2; il satellite LARES, attualmente in orbita e continuamente monitorato. A terra è in via di sviluppo un test, GINGER, che utilizza dei laser ad anello e di cui abbiamo già parlato su questa stessa rivista (2016, n. 152).

Fin qui tutto è stato concentrato nell'ambiente terrestre, ma ci sono in giro anche altre sorgenti di gravito-magnetismo, in primis il sole. Il momento angolare del sole è qualche miliardo di volte più grande di quello della terra e dunque anche gli effetti gravito-magnetici vengono intensificati di conseguenza. Quella che verrà esposta nel seguito è una idea su come verificare l'entità reale di questi effetti con un esperimento spaziale che si basi sui punti lagrangiani del sistema terra-sole.

I punti lagrangiani

Data una coppia di corpi massicci che orbitano intorno al baricentro comune, i punti lagrangiani individuano quelle posizioni nelle le quali la forza di attrazione esercitata su di una piccola massa dai due corpi è controbilanciata dalla forza centrifuga lungo l'orbita. Nel caso del sistema terra-sole la sproporzione fra le masse fa sì che il baricentro si trovi in pratica all'interno del sole. I punti giacciono nel piano dell'orbita e sono cinque. La Fig. 1 indica la loro posizione e classificazione tradizionale.

Una proprietà importate dei punti lagrangiani è che essi occupano posizioni fisse rispetto alla coppia di corpi cui si riferiscono. In pratica, nel nostro caso, possiamo dire che i punti lagrangiani orbitano insieme alla terra alla stessa sua velocità angolare. Gli L_i costituiscono così un sistema di riferimento "fisso" rispetto alla terra e ad una scala astronomica: L_4 ed L_5 si trovano davanti e dietro la terra ad una distanza pari a quella del nostro pianeta dal sole (150 milioni di km); L_1 ed L_2 sono a circa un milione e mezzo di km dalla terra, rispettivamente all'interno e all'esterno della congiungente terra-sole; L_3 è il più lontano, trovandosi in posizione simmetrica a quella della terra, dall'altra parte del sole.

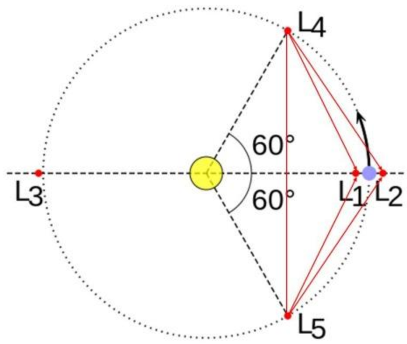

Figura 1: I dischetti rossi indicano la posizione dei punti lagrangiani del sistema terra (azzurrina) sole (giallo). La linea punteggiata è l'orbita (quasi) circolare della terra. Le linee continue rosse indicano possibili percorsi di segnali elettromagnetici. La figura non è in scala.

Queste caratteristiche hanno già fatto sì che i punti lagrangiani venissero presi in considerazione e siano stati e siano utilizzati per diversi esperimenti scientifici, valga per tutti la missione Gaia col suo osservatorio stellare collocato in L_2.

Pulsar artificiali nei punti lagrangiani

Che c'entrano i punti lagrangiani con la misura del gravito-magnetismo solare? Secondo la relatività generale, quando una massa ruota su se stessa essa, oltre a curvare lo spazio-tempo, lo trascina parzialmente con sé (Fig.2). Immaginiamo un oggetto immerso in un liquido; se l'oggetto ruota su se stesso, trascinerà con sé anche il liquido circostante in una sorta di vortice e tutto quanto si muova dentro quel liquido ne risentirà. In realtà ci vuole molta prudenza nell'usare analogie come questa, ma l'esempio quanto meno rende l'idea di massima di ciò che succede.

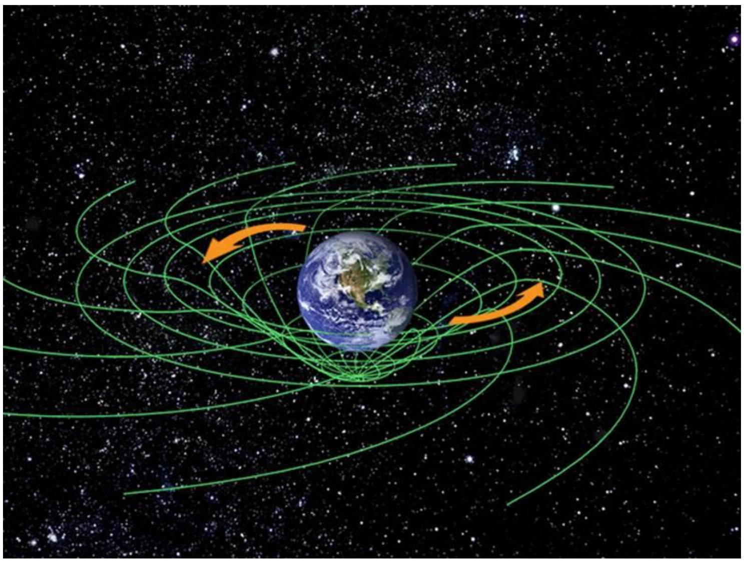

Figura 2. Rappresentazione visiva della curvatura dello spazio-tempo intorno alla terra. L'andamento vorticoso delle linee che vanno verso il centro esprime la presenza del campo gravito-magnetico.

Se pensiamo a qualcosa che si muova con una velocità localmente ben definita e che percorra un circuito chiuso nello spazio troviamo che il tempo impiegato a fare un giro completo e tornare al punto di partenza sarà diverso a seconda che si giri nello stesso senso della massa centrale oppure in senso opposto. Potremo dire che, se lo spazio (il "liquido") intorno a noi gira nello stesso verso in cui giriamo noi ci vorrà di più per tornare al punto di partenza, se in verso opposto ci vorrà di meno. Tutto ciò vale anche per i segnali elettromagnetici e non contrasta col fatto che localmente la velocità della luce risulti rigorosamente la stessa in entrambi i casi. Questa asimmetria è la base dell'esperimento GINGER.

Torniamo ai nostri punti lagrangiani e immaginiamo di collocare in ciascuno di essi (meno L_3 scarsamente accessibile da terra) delle stazioni in grado sia di emettere degli impulsi elettromagnetici a cadenza regolare (delle vere e proprie pulsar artificiali), sia di rinviare prontamente i segnali che ricevono. Avremo potenzialmente di fronte a noi una "pista" come quella degli stadi di atletica, lungo la quale possono correre in senso opposto gli impulsi elettromagnetici emessi dalle nostre stazioni. Facendo partire allo stesso istante due "corridori", ugualmente veloci, in versi opposti e misurando la differenza tra i rispettivi tempi di ritorno in corrispondenza dell'emettitore potremo verificare se la relatività generale ha ragione o no a questo riguardo.

Considerando le previsioni della teoria, si vede che la differenza tra i tempi di volo "destro" e "sinistro" è proporzionale all'area contornata dal percorso chiuso dei segnali utilizzati, oltreché al momento angolare della sorgente (nel nostro caso il sole). Così stando le cose, un circuito a scala di sistema solare comporta, date le sue dimensioni, un moltiplicatore geometrico molto grande; per altro resta vero che l'effetto cercato è estremamente piccolo e inoltre il campo gravito-magnetico, anche se quello solare, a parità di condizioni, è molto più grande di quello terrestre, decade con il cubo della distanza (raddoppiando la distanza dalla sorgente l'intensità si divide per otto). Facendo riferimento, a titolo di esempio, al triangolo $L_1 – L_4 – L_5$ (Fig. 1) il tempo di volo necessario alla luce per descrivere l'intero perimetro è dell'ordine di 2000 secondi (poco più di mezz'ora); la differenza tra i tempi di percorrenza orario ed antiorario, Δt, è dell'ordine di 10^{-13} secondi.

10^{-13} secondi sono tanti o sono pochi? E soprattutto: è un intervallo misurabile o no? Ci servono dei termini di paragone. Prendiamo ad esempio la luce visibile: la durata di una oscillazione del corrispondente campo elettromagnetico (il periodo della luce) è dell'ordine di 10^{-15} secondi, per cui il nostro intervallo copre un centinaio di oscillazioni. Se consideriamo l'esperimento GINGER, che utilizza una tecnica diversa alla radice della quale c'è però comunque una differenza di tempo di volo, vediamo che l'effetto cercato corrisponde ad un Δt dell'ordine niente meno che di 10^{-29} secondi, sedici ordini di grandezza più piccolo di quanto ottenibile nello spazio con i punti lagrangiani, ciononondimeno l'effetto è considerato misurabile.

Sulla terra ci sono orologi atomici ottici che si avvicinano a sensibilità, valutate su un paio di migliaia di secondi, di poco superiori a una parte in 10^{18} che in pratica vuol dire misurare il tempo di volo che ci interessa entro il femtosecondo (10^{-15} secondi). Sono stati misurati intervalli anche molto più brevi, fino a 10^{-18} secondi. Naturalmente il problema è che nel nostro caso la misura dovrebbe essere effettuata nello spazio.

In concreto

L'idea che abbiamo descritta è semplice nella sua logica, ma naturalmente il mondo reale è sempre più complicato degli schemi semplificati cui ci si appoggia nel ragionamento. Per esempio, abbiamo immaginato di collocare dei ripetitori di segnali nei punti lagrangiani, ma in concreto potremmo farlo? L_4 ed L_5 sono stabili, il che significa che un oggetto che venisse allontanato dalla posizione ideale da una piccola perturbazione tenderebbe a tornarvi spontaneamente; in pratica i nostri ripetitori descriverebbero delle orbite stabili intorno al punto lagrangiano e noi siamo in grado di descrivere tali orbite. L_1 ed L_2 viceversa sono posizioni debolmente instabili, il che significa che un oggetto che venisse allontanato dalla posizione ideale da una piccola perturbazione tenderebbe ad allontanarsi sempre più. Questo problema è ben noto e viene gestito senza difficoltà dalle missioni che sono o sono state dislocate in quelle zone (oltre a Gaia, Planck, WMAP e svariate altre): in pratica le sonde si muovono attorno ai punti lagrangiani lungo particolari orbite dette di Lissajous e vengono mantenute su tali traiettorie per alcuni anni grazie a piccoli motori ionici. Anche in questo caso siamo in gradi di descrivere formalmente il comportamento dell'oggetto.

Un punto cruciale rimane quello della misura del tempo, ma abbiamo visto che a terra un intervallo di 10^{-13} secondi, che ci piacerebbe misurare con una accuratezza dell'1%, non è un problema. Una misura fatta nello spazio non sarebbe facile, ma la tecnologia di misura del tempo è in rapida evoluzione per cui si può affermare che l'obiettivo è raggiungibile. Aggiungiamo che, considerando i quattro punti citati e la stessa terra (che ha solo l'inconveniente di ruotare su se stessa e quindi periodicamente perdere di vista questo o quel punto lagrangiano) si possono realizzare molte configurazioni alternative generando una utile ridondanza nelle misure. Insomma, varrebbe la pena di provare.

Per altro un sistema di ripetitori di segnali collocati nei punti lagrangiani avrebbe una serie di interessanti applicazioni aggiuntive.

- I radiofari a impulsi collocati nel sistema lagrangiano consentirebbero di mettere in piedi un sistema di posizionamento relativistico per la guida di missioni nel sistema solare.
- Tra le diverse opzioni di percorso chiuso dei segnali ce ne sono di idonee a rivelare il passaggio di onde gravitazionali in un modo complementare rispetto al progetto E-LISA.
- In L_4 ed L_5 potrebbero trovarsi degli asteroidi "Troiani" come quelli che accompagnano a migliaia Giove nella sua orbita, e per la verità si sa già che almeno uno in L_5 c'è: varrebbe la pena di andare a dare una occhiata da vicino …

Ma queste sono altre storie.