

Politecnico di Torino
Facoltà di Ingegneria
Dottorato di Ricerca in Ingegneria Aerospaziale
XV Ciclo, triennio 2000-2002

Tesi di Dottorato

**"Comportamento meccanico
di strutture multistrato:
modelli analitici
e formulazioni FEM"**

Tutori
Prof. Marco Di Sciuva
Prof. Ugo Icardi

Candidato
Marco Gherlone

Ringraziamenti

Prima di tutto un sincero ringraziamento va ai **Proff. Marco Di Sciuva e Ugo Icardi**, miei tutori per l'attività di dottorato. Il loro non è stato solo un aiuto nel merito degli argomenti trattati, ma anche spesso nel metodo, cioè nella filosofia con la quale affrontare i problemi. Inoltre impagabile è la loro capacità di riuscire a dare un'indicazione, uno spunto, una soluzione su problemi molto diversi tra loro e a partire anche solo da poche informazioni.

Ringrazio poi l'**Ing. Aldo Ruotolo** per alcuni chiarimenti in materia di dinamica delle strutture, informazioni rivelatisi utili nello studio dei modelli di impatto.

Nei confronti dell'**Ing. Daniele Lomario** sono debitore di alcune utilissime dritte sull'uso di MATLAB e di EXCEL e lo ringrazio per la felice e fruttuosa collaborazione relativa alla preparazione degli articoli scritti insieme sui problemi di ottimizzazione.

Con l'**Ing. Massimiliano Mattone** ho proficuamente condiviso buona parte della mia attività didattica e gli devo moltissime preziose informazioni sull'uso di PATRAN e NASTRAN e, in generale, su problemi informatici di vario tipo.

Ringrazio poi il Dottore di Ricerca **Ing. Carlo Frola** che mi ha iniziato all'uso di DYTRAN e mi ha seguito nei primi passi dello studio dei problemi di impatto.

Anche se distante nel merito dell'attività di ricerca, con il Dottore di Ricerca **Ing. Germana Vinelli** ho condiviso il comune impegno di rappresentante dei dottorandi del DIASP e le relative piccole e grandi battaglie.

L'**Ing. Stefano Chiavazza** mi ha aiutato a sveltire in modo notevole molti dei miei recenti calcoli con NASTRAN, grazie alle informazioni sull'uso dei file di sessione.

Sono onorato di aver conosciuto personalmente e di aver collaborato per un articolo con il **Prof. Liviu Librescu** del Virginia Polytechnic Institute and State University (Blacksburg, Virginia, USA).

Sono inoltre debitore del **Prof. Serge Abrate** della Southern Illinois University (Carbondale, Illinois, USA) che, alcune volte di persona e più spesso per corrispondenza, è

stato sollecito ed esauriente nel rispondere ad alcuni miei quesiti su problematiche di impatto.

Ringrazio poi l'**Ing. Alexander Tessler** del NASA Langley Research Center (Hampton, Virginia, USA) che mi ha fornito informazioni e materiali preziosi per la determinazione della tensione trasversale normale.

Anche i **Proff. Elena Bozhevolnaya** (Aalborg University, Aalborg, Danimarca) e **Vitaly Skvortsov** (State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia) hanno sollecitamente risposto alle mie richieste di chiarimento su alcuni loro lavori sui fenomeni di instabilità a scatto.

Anche i **Proff. Wilfried Becker, Ken Evans, Ahmed Yigit e Tarun Kant** hanno offerto la loro collaborazione per chiarirmi alcuni aspetti delle loro ricerche.

Ringrazio il **Prof. Ettore Antona**, coordinatore del Dottorato in Ingegneria Aerospaziale, per la collaborazione e la disponibilità dimostrate durante i tre anni di attività.

Ancora un sentito grazie al **personale tecnico e amministrativo del DIASP** per la pazienza dimostrata in più occasioni nel venire incontro alle difficoltà piccole e grandi dei miei colleghi e mie.

Ai **miei genitori**, che hanno condiviso la mia scelta e l'hanno difesa nei confronti di alcuni, che una vita tutta dedicata alla ricerca del guadagno, ha reso gretti e invidiosi.

Tutto il resto, lo giuro, è farina del mio sacco.

Marco Gherlone

Indice

Simbologia	iv
Sommario	vi
1 Teorie per lo studio di travi e piastre in materiale composito	1
1.1 Introduzione.....	1
1.2 Teorie Equivalent Single Layer (ESL).....	5
1.2.1 Classical Laminated Plate Theory (CLPT).....	6
1.2.2 First-order Shear Deformation Theory (FSDT).....	7
1.2.3 Higher-order Shear Deformation Theories (HSDT).....	8
1.3 Teorie Discrete Layer	9
1.4 Teorie Multiple Model	14
2 Equazioni costitutive per materiali ortotropi; strati ortotropi equivalenti per cuori di pannelli sandwich	16
2.1 Introduzione.....	16
2.2 Equazioni costitutive per materiali ortotropo	16
2.2.1 Costanti ingegneristiche.....	17
2.2.2 Equazioni costitutive in assi non principali	20
2.2.3 Equazioni costitutive in forma mista; stati piani di deformazione e tensione in (x_1^*, x_2^*)	21
2.2.4 Equazioni costitutive per problemi uni-dimensionali; stati piani di deformazione e tensione in (x_1^*, x_3^*)	24
2.2.5 Equazioni costitutive termo-meccaniche	26
2.3 Strati ortotropi equivalenti per cuori di pannelli sandwich	28
2.3.1 Modelli per cuori honeycomb.....	28
2.3.1.1 Costanti ingegneristiche nel piano $(E_1, E_2, \nu_{12}$ e $G_{12})$	30

2.3.1.2	Costanti ingegneristiche di taglio trasversale (G_{13} e G_{23}).....	32
2.3.1.3	Le altre costanti ingegneristiche (E_3 , ν_{13} e ν_{23}).....	33
2.3.1.4	Densità (ρ_{eq})	33
2.3.2	Modelli per cuori corrugati	33
3	I modelli zig-zag classici per gusci multistrato; trattazione comune con alcune teorie ESL.....	37
3.1	Introduzione.....	37
3.2	Geometria del guscio, notazioni e ipotesi.....	38
3.3	Derivazione del campo di spostamenti.....	40
3.3.1	Condizione di continuità delle tensioni di taglio trasversale	41
3.3.2	I campi di spostamento dei modelli zig-zag lineare e zig-zag cubico ..	44
3.3.3	I campi di spostamento dei modelli ESL e zig-zag in un'unica forma.	46
3.4	Equazioni del moto e condizioni al contorno	48
4	Il modello zig-zag Hermitiano per piastre multistrato; deformabilità trasversale e carichi tangenziali.....	51
4.1	Introduzione.....	51
4.2	Geometria della piastra, notazioni e ipotesi.....	52
4.3	Derivazione del campo di spostamenti.....	53
4.3.1	Condizione di continuità delle tensioni di taglio trasversale	53
4.3.2	I gradi di libertà Hermitiani	54
4.3.3	Condizioni al contorno sulle facce estreme	56
4.3.4	Il campo di spostamenti del modello zig-zag Hermitiano	57
4.3.5	Determinazione della tensione trasversale normale σ_{33}	59
4.4	Equazioni del moto e condizioni al contorno	62
5	Formulazioni dei modelli zig-zag classici; soluzioni analitiche per travi e piastre e elementi finiti trave.....	66
5.1	Introduzione.....	66
5.2	Soluzione esatta delle equazioni non-lineari di equilibrio per la trave.....	66
5.3	Elementi finiti trave	73
6	Formulazioni del modello zig-zag Hermitiano; l'elemento finito trave	75
6.1	Introduzione.....	75
6.2	Il modello HZZ nel caso della trave	76
6.3	Formulazione dell'elemento finito trave	78
6.4	Discretizzazione secondo l'approccio dei sublaminati.....	82
7	Aspetti della modellizzazione; funzioni di forma Hermitiane, valutazione della σ_{33} e slip-locking.....	84
7.1	Introduzione.....	84
7.2	Le funzioni di forma Hermitiane del modello HZZ	85
7.3	Valutazione della tensione trasversale normale σ_{33}	88

7.4	Valutazione dello scorrimento interlaminare; il fenomeno dello slip-locking.	100
8	Risultati numerici	113
8.1	Introduzione.....	113
8.2	Analisi statiche non-lineari.....	113
8.3	Analisi statiche lineari	119
8.4	Calcolo di frequenze proprie	128
8.5	Calcolo di carichi critici	132
8.6	Analisi di impatti a bassa velocità	135
	Conclusioni	141
	Dati numerici	144
	Bibliografia	146
	Pubblicazioni	151

Simbologia

Precisiamo qui di seguito alcuni dei simboli, delle notazioni e delle convenzioni che saranno maggiormente usati nel testo. Tali precisazioni sono sempre valide salvo diversa specifica indicazione.

Gli indici espressi con lettere greche assumono i valori 1 e 2 mentre gli indici in lettere latine assumono i valori 1, 2 e 3.

Usiamo la classica notazione di Einstein per la sommatoria espressa dalla ripetizione di indici. Per esempio

$$F_{\alpha\beta}R_{\beta} = F_{\alpha 1}R_1 + F_{\alpha 2}R_2$$

Per quanto riguarda la derivazione, useremo la seguente notazione sintetica

$$F_{,x} \equiv \frac{\partial F}{\partial x}$$

e, nel caso di derivazione rispetto agli assi x_i

$$F_{,i} \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

L'integrazione su tutto lo spessore ($x_3 \in [0;h]$) di un generico laminato viene indicata come segue

$$\langle F \rangle \equiv \int_0^h F dx_3$$

Sarà usato inoltre il simbolo di Kronecker

$$\delta_{\alpha\beta} \equiv \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$$

Per quanto riguarda le notazioni geometriche e cinematiche relative alle piastre multistrato, con x_i indichiamo gli assi di riferimento e con V_i i relativi spostamenti.

Sommario

Lo studio di modelli analitici e FEM per l'analisi di strutture multistrato in materiale composito è un argomento di interesse sempre crescente in campo aeronautico. La letteratura è vasta per cui è prima di tutto necessario classificare i principali modelli usati per lo studio dei multistrati (**Capitolo 1**). I modelli più utilizzati sono quelli che usano come incognite gli spostamenti; anche di notevole interesse le teorie di tipo misto che introducono come ulteriori incognite le componenti di tensione (trasversale).

In ogni caso, i materiali compositi sono introdotti nel modello secondo l'astrazione matematica dei materiali ortotropi; le equazioni costitutive, anche in presenza di effetti termici, sono quindi uno degli ingredienti fondamentali nell'analisi delle travi e delle piastre composite (**Capitolo 2**). Se pensiamo, poi, che i cuori di pannelli sandwich (honeycomb e corrugati) sono ricondotti a monostrati ortotropi equivalenti tramite opportuni modelli analitici, l'importanza delle citate relazioni costitutive è ulteriormente confermata.

Per approfondire lo studio dei campi di spostamento di ordine superiore, abbiamo considerato i modelli zig-zag di Di Sciuva (**Capitolo 3**). La formulazione è stata lievemente modificata in modo che la superficie di riferimento possa essere posizionata ovunque lungo lo spessore; con questa generalizzazione sono state derivate le equazioni del moto non-lineari e le relative condizioni al contorno.

Come contributo originale al vasto insieme dei campi di spostamento, abbiamo proposto il modello zig-zag Hermitiano, caratterizzato da uno spostamento trasversale lineare, dall'uso degli spostamenti e delle tensioni di taglio trasversale delle due facce esterne come gradi di libertà, dalla possibilità di valutare la deformabilità trasversale normale anche grazie alla relativa tensione σ_{33} , supposta costante lungo lo spessore (**Capitolo 4**). Anche per questo nuovo modello riportiamo equazioni del moto e condizioni al contorno.

Molte sono le formulazioni e implementazioni numeriche dei modelli zig-zag classici realizzate durante l'attività di ricerca (**Capitolo 5**). Tra soluzioni esatte, approssimate secondo Rayleigh-Ritz e agli elementi finiti, in questa tesi ci siamo soffermati sulla

soluzione esatta delle equazioni di equilibrio non-lineari per le travi e sullo sviluppo di elementi finiti trave.

Per quanto riguarda il modello zig-zag Hermitiano, la formulazione presentata è quella agli elementi finiti (**Capitolo 6**). Grazie al fatto che i gradi di libertà del modello sono spostamenti e tensioni di taglio trasversale delle facce esterne del laminato, è possibile usare tali elementi secondo l'approccio dei sublaminati; alla classica discretizzazione delle travi nel senso della lunghezza, si sovrappone, così, la divisione dello spessore in un numero opportuno di sublaminati.

Sono di notevole interesse alcuni aspetti legati allo sviluppo del modello zig-zag Hermitiano (**Capitolo 7**). In primo luogo, le funzioni di forma lungo lo spessore sono una generalizzazione dei classici polinomi cubici di Hermite (da cui il nome del modello). Inoltre, sono presentati alcuni risultati che forniscono una spiegazione dei problemi incontrati (e delle soluzioni adottate) per la corretta valutazione della tensione trasversale normale. Infine, si fa vedere come l'approccio dei sublaminati, usato con gli elementi finiti trave del modello Hermitiano, permetta di studiare multistrati con scorrimenti interlaminari anche molto gravosi; nelle stesse condizioni, invece, i classici modelli zig-zag falliscono perché affetti dal fenomeno dello slip-locking.

Sono infine presentati alcuni risultati numerici relativi all'applicazione dei modelli zig-zag classici ed Hermitiano (**Capitolo 8**). Analisi statiche (lineari e non), modali, di buckling e di transitorio (risposte ad impatti a bassa velocità) permettono di effettuare confronti tra le varie teorie e di valutarne le prestazioni nei vari casi.

Capitolo 1

Teorie per lo studio di travi e piastre multistrato in materiale composito

1.1 Introduzione

In questo capitolo introduttivo, passeremo in rassegna le principali teorie¹ usate per lo studio di piastre e travi in materiale composito multistrato. Considereremo, da un lato, i modelli classici di ordine inferiore e, dall'altro, i più recenti sviluppi, soprattutto in termini di teorie di ordine superiore e approcci quasi tridimensionali. Da questo punto di vista è ricco di informazioni interessanti un testo recente di Reddy [1] che in parte seguiremo, almeno per quanto riguarda la classificazione dei diversi modelli, in questo capitolo introduttivo. Per quanto riguarda le osservazioni sui metodi variazionali misti, facciamo riferimento ad un lavoro, completo ed efficace, dovuto a Carrera [2]. Sono infine tratte da un report di Di Sciuva [3] alcune riflessioni sui modelli classici di ordine inferiore.

L'impiego sempre più massiccio di strutture multistrato in materiale composito ha comportato notevoli problemi di modellizzazione; le classiche teorie, valide per le piastre isotrope, non potevano essere più applicate con successo, e la sfida principale degli studiosi è diventata quella di convertire tali teorie secondo le nuove esigenze. Vediamo, allora, quali sono i comportamenti caratteristici delle strutture multistrato in materiale composito che possono rendere difficoltoso il loro studio con i modelli classici (pensati per i materiali isotropi) [2]:

- **anisotropia trasversale:** le strutture multistrato, realizzate tipicamente con materiali diversi per ogni strato, sono caratterizzate da una variazione anche notevole delle caratteristiche meccaniche lungo lo spessore;
- **elevata deformabilità trasversale:** rispetto ai materiali isotropi, i multistrati in composito hanno spesso una deformabilità trasversale (sia al taglio che normale) elevata rispetto a quella membranale;

¹ Quelli che presenteremo nel seguito dovrebbero essere più correttamente chiamati “modelli”; dato che, però, è ormai invalso l'uso del termine “teoria”, noi utilizzeremo anche quest'ultimo.

- **sensibilità al danno:** durante la fabbricazione e/o nel corso dell'uso è possibile che i materiali compositi subiscano dei danni di vario tipo; tra questi sono tipici gli scorrimenti interlaminari legati al non perfetto incollaggio tra strati adiacenti.

Per poter studiare in modo efficace tali comportamenti è richiesto ai modelli proposti che siano in grado di garantire alcune fondamentali capacità di modellizzazione:

- **effetto zig-zag:** la discontinuità trasversale delle proprietà meccaniche causa (soprattutto nei laminati piuttosto spessi) un andamento degli spostamenti con discontinuità della derivata rispetto allo spessore in corrispondenza alle interfacce;
- **scorrimenti interlaminari:** nel caso in cui alcune interfacce presentino un non perfetto incollaggio, gli spostamenti tangenziali dei due strati adiacenti possono non essere gli stessi; per le componenti tangenziali dello spostamento, allora, va prevista anche una discontinuità della funzione stessa;
- **continuità interlaminare:** come conseguenza del Teorema di Cauchy, le tensioni trasversali (di taglio e normale) devono essere continue lungo l'intero spessore del laminato.

Note le caratteristiche delle strutture multistrato e gli aspetti critici della loro modellizzazione, vediamo qual è attualmente lo stato dell'arte delle teorie per il loro studio. E' possibile effettuare due classificazioni parallele, (i) in base al tipo di incognite che la teoria presenta e (ii) in base all'andamento lungo x_3 che per esse è ipotizzato (per l'intero spessore o strato per strato). Prima di vedere la classificazione (i), dobbiamo ricordare che i due fondamentali principi variazionali per l'analisi strutturale sono il **Principio degli Spostamenti Virtuali** (PVD) e il **Principio delle Forze Virtuali** (PVF). Senza entrare in eccessivi dettagli [2], ricordiamo che il PVD presuppone l'assunzione di un campo di spostamenti compatibile e permette di ottenere le equazioni del moto in termini di risultanti e le condizioni al contorno di trazione, mentre il PVF parte da un sistema di tensioni equilibrate e fornisce le equazioni di compatibilità e le condizioni al contorno in termini di spostamenti. E' poi possibile usare dei metodi variazionali misti nei quali si assumono a priori opportuni andamenti sia per gli spostamenti sia per le tensioni. Tra questi principi, quello di maggior successo nell'analisi dei multistrati compositi è il **Principio Variazionale Misto di Reissner** (RMVT) [4],[5] che mette in gioco le sole tensioni trasversali. E' a questo punto possibile richiamare la classificazione (i), basata sui due principi variazionali più usati:

- **teorie basate sugli spostamenti:** come anticipato, si ipotizza un opportuno andamento lungo lo spessore del campo di spostamenti e si ricavano le equazioni del moto e le condizioni al contorno meccaniche a partire dalla seguente uguaglianza integrale

$$\delta\phi = \delta L_{in} + \delta L_e \quad (1.1)$$

dove $\delta\phi$ è la variazione virtuale dell'energia di deformazione, δL_{in} è il lavoro virtuale delle forze di inerzia e δL_e il lavoro virtuale dei carichi esterni. La (1.1) è l'espressione del già citato PVD; esplicitando i primi due termini, questo diventa

$$\int_V (\sigma_{\alpha\beta}^e \delta \epsilon_{\alpha\beta}^u + \tau_{\alpha 3}^e \delta \gamma_{\alpha 3}^u + \sigma_{33}^e \delta \epsilon_{33}^u) dV = - \int_V (\rho \ddot{v}_i \delta v_i) dV + \delta L_e \quad (1.2)$$

dove l'apice "ε" indica che le tensioni sono ottenute a partire dalle deformazioni con le equazioni costitutive (Cap. 2), mentre l'apice "u" ricorda che le deformazioni sono calcolate a partire dagli spostamenti con le classiche relazioni geometriche [2];

- **teorie miste (spostamenti e tensioni trasversali):** nell'ambito di questa categoria di teorie noi facciamo in particolare riferimento al principio variazionale di Reissner che possiamo scrivere nel seguente modo

$$\int_V (\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^u + \tau_{\alpha 3}^m \delta \gamma_{\alpha 3}^u + \sigma_{33}^m \delta \varepsilon_{33}^u + \underline{(\gamma_{\alpha 3}^u - \gamma_{\alpha 3}^\sigma)} \delta \tau_{\alpha 3}^m + \underline{(\varepsilon_{33}^u - \varepsilon_{33}^\sigma)} \delta \sigma_{33}^m) dV = - \int_V (\rho \ddot{V}_i \delta V_i) dV + \delta L_e \quad (1.3)$$

dove l'apice "σ" indica che le deformazioni sono calcolate a partire dalle tensioni con le equazioni costitutive inverse, mentre l'apice "m" accompagna le tensioni trasversali ipotizzate a priori dal modello. Le incognite della teoria sono, infatti, gli spostamenti e le tensioni trasversali stesse. Si noti che rispetto al PVD espresso dalla (1.2), nel caso del RMVT abbiamo aggiunto (termini sottolineati) la condizione di compatibilità delle deformazioni trasversali (quelle ottenute a partire dagli spostamenti e quelle ricavate dalle tensioni)

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3}^u &= \gamma_{\alpha 3}^\sigma \\ \varepsilon_{33}^u &= \varepsilon_{33}^\sigma \end{aligned} \quad (1.4)$$

Le condizioni (1.4) sono contenute nella (1.3) come condizioni di vincolo con moltiplicatori di Lagrange le stesse tensioni trasversali. La difficoltà di trattare una teoria nella quale coesistono, come incognite, spostamenti e tensioni, ha portato alla ricerca di versioni semplificate [2] del principio (1.3) che permettano di "eliminare" le tensioni. Invece di trasformare il PVD (1.2) nel RMVT (1.3), abbiniamo al primo le seguenti condizioni

$$\left. \begin{aligned} \langle (\gamma_{\alpha 3}^u - \gamma_{\alpha 3}^\sigma) F_{\alpha 3}^n \rangle &= 0 \\ \langle (\varepsilon_{33}^u - \varepsilon_{33}^\sigma) F_{33}^n \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

dove F_{i3}^n sono le funzioni utilizzate per lo sviluppo delle corrispondenti tensioni trasversali. Le (1.5) sono l'equivalente, nel senso dei residui pesati e integrato solo lungo lo spessore, dei termini sottolineati nella (1.3) che esprimono la compatibilità delle deformazioni trasversali. Se, nelle (1.5), sostituiamo gli spostamenti ai termini con apice "u" e le tensioni ai termini con apice "σ", possiamo alla fine esprimere le tensioni trasversali in funzione degli spostamenti che rimangono, così, le uniche incognite del problema, e possono essere introdotte nel PVD.

Parallelamente alla classificazione fatta sopra, ne esiste un'altra (ii) basata sul tipo di assunzione che viene fatta per le incognite del modello [1]:

- teorie **Equivalent Single Layer** o **Smeared** (ESL): sono basate su opportune assunzioni iniziali sugli spostamenti o sullo stato tensionale lungo l'intero spessore del laminato, permettendo, in questo modo, la riduzione del problema da un livello tridimensionale ad uno bidimensionale. Precisiamo qui che l'assunzione degli spostamenti lungo l'intero spessore è da intendersi almeno di classe C^1 , cioè con la derivata prima rispetto ad x_3 sempre continua;
- teorie **Discrete-Layer** o **Layerwise** (LW): le stesse assunzioni che nel caso delle teorie smeared erano estese a tutto lo spessore sono, in questo caso, valide strato per strato e, in questo modo, il modello ha una spiccata caratterizzazione tridimensionale;
- teorie **Multiple Model** (MM): sono basate sull'uso delle teorie smeared e layerwise in diverse regioni della stessa struttura, a seconda del livello di accuratezza dell'analisi che si vuole ottenere.

Vediamo ora come le diverse tipologie di modelli si comportano rispetto alle esigenze di modellizzazione descritte all'inizio del paragrafo [2]. Le teorie ESL basate sugli spostamenti sono normalmente i classici modelli sviluppati per le piastre isotrope e poi estesi a quelle multistrato. Tali teorie, però, non sono in grado di prevedere l'effetto zig-zag, gli scorrimenti interlaminari e la continuità delle tensioni trasversali; quest'ultima condizione è normalmente recuperata a posteriori con l'integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio. Le teorie LW con gli spostamenti come incognite sono nati soprattutto per poter descrivere l'effetto zig-zag (e, successivamente, anche per valutare l'effetto degli scorrimenti interlaminari); alcuni di questi modelli, come quello zig-zag di Di Sciuva [6], sono in grado di garantire a priori la continuità delle tensioni di taglio trasversale anche se le incognite del problema sono gli spostamenti. Per quanto riguarda le teorie basate sugli spostamenti e le tensioni trasversali, è necessario che siano anche di tipo LW per poter garantire le tre condizioni richiamate sopra.

Il panorama delle problematiche e delle teorie è vasto e complesso; per approfondire gli argomenti solo accennati in questo paragrafo, si rimanda ai già citati lavori di Reddy [1], Carrera [2] e Di Sciuva [3]. La nostra attività di ricerca si è soffermata sulle teorie di tipo ESL e LW basate sugli spostamenti; di queste teorie diamo ulteriori dettagli ed alcuni esempi nel seguito di questo capitolo² (nella Tab. 1.1 è riportato un quadro riassuntivo dei diversi modelli). Come detto, tali teorie difettano dal punto di vista del soddisfacimento della continuità delle tensioni trasversali; in realtà il modello zig-zag di Di Sciuva [6], dal quale siamo partiti, risolve il problema per le componenti di taglio trasversale (Cap. 3), mentre, una delle motivazioni del nostro lavoro è stata appunto estendere le potenzialità del modello alla tensione trasversale normale. Questo risultato (modello HZZ, Cap.4), è stato ottenuto nello spirito dei modelli misti, ma nella versione che riconduce tutte le incognite agli spostamenti (vedere la (1.5)).

Prima di passare alla rassegna delle varie teorie occorre ancora una precisazione. Fino ad ora abbiamo presentato una "fotografia" dello stato dell'arte; problemi e modelli sono stati elencati in maniera sintetica, senza particolari riferimenti alla successione storica con i

² D'ora in poi, quindi, se non altrimenti specificato, si intende che le teorie di cui si parla sono basate sugli spostamenti.

quali i primi si sono presentati ed i secondi sono stati elaborati. Nel seguito, invece, cercheremo di dare anche conto di tali aspetti storici; perseguendo tale scopo, molti concetti già accennati dovranno essere ripresi ed approfonditi con il rischio, di cui ci scusiamo, di incorrere in qualche ripetizione.

ESL		LW				MM	
Lineari	Higher-order	GDL=f(N)		GDL≠f(N)		Sequenziali	Simultanei
		Parziali	Completi	Parziali	Completi		
CLPT Par. 1.2.1	Reddy Par. 1.2.3	Lu-Liu Par. 1.3	Reddy Par. 1.3	LZZ Par. 1.3		Par. 1.4	Par. 1.4
FSDT Par. 1.2.2	Tessler Par. 1.2.3		Averill Par. 1.3	CZZ Par. 1.3			
			HZZ Par. 1.3				

Tabella 1.1: Quadro riassuntivo dei modelli basati sugli spostamenti che verranno presentati nei Parr. 1.2-1.4; per gli acronimi e la simbologia si vedano gli stessi paragrafi.

1.2 Teorie Equivalent Single Layer (ESL)

Le teorie **Equivalent Single Layer** (ESL), dette anche **Smeared**, sono quelle nelle quali una piastra multistrato (e quindi eterogenea, almeno nello spessore) è ridotta a un monostrato equivalente con opportune relazioni costitutive (cioè legami tra le risultanti di tensione e le componenti di deformazione).

Il punto di partenza è l'assunzione dell'andamento lungo lo spessore delle componenti di spostamento. Se φ è uno spostamento, l'assunzione iniziale è normalmente nella forma

$$\varphi(x_j; t) = \sum_{i=0}^N f_i(x_3) \cdot \varphi_i(x_\alpha; t) \quad (1.6)$$

dove l'aver assunto l'andamento lungo lo spessore, con l'introduzione delle funzioni f_i (tipicamente $f_i = x_3^i$), permette di avere come incognite del problema, al posto della più complessa $\varphi(x_j; t)$, le $\varphi_i(x_\alpha; t)$. Tali incognite sono contenute nelle equazioni del moto, ricavabili, per esempio, con il PVD. Per applicare tale principio è necessario calcolare le variazioni virtuali dell'energia di deformazione, del lavoro delle forze esterne e del lavoro delle forze di inerzia; sono grandezze ottenibili calcolando integrali nel volume, come visto con la (1.2). Grazie però all'assunzione (1.6) tali integrali si semplificano notevolmente. Infatti è possibile scrivere

$$\int_V F(\varphi(x_j; t)) dV = \int_\Omega \langle F(\varphi(x_j; t)) \rangle d\Omega \quad (1.7)$$

dove Ω è la superficie di riferimento della piastra nella condizione indeformata ed F è un opportuno funzionale di φ . Visto che l'andamento di $\varphi(x_3)$ è noto, è possibile determinare esplicitamente l'integrale di F nello spessore; anche da questo punto di vista il problema si riduce al livello bidimensionale della superficie di riferimento in quanto rimane incognito (o per meglio dire, funzione delle incognite φ_i) l'integrale di F in Ω .

Vedremo nel seguito una rapida rassegna delle principali teorie ESL, senza soffermarci sui dettagli delle rispettive derivazioni (riprese poi nel Cap. 3). Di ogni modello cercheremo di fornire alcuni brevi riferimenti bibliografici, il campo di spostamenti e i principali pregi e difetti. Le teorie descritte non sono le uniche proposte in letteratura ma, certamente, sono quelle che hanno dato inizio ad ulteriori sviluppi. Si osserverà come il passaggio da teorie meno complicate a più elaborate viene sempre introdotto come risposta ad una nuova esigenza di modellizzazione; così come sempre più complesse sono man mano diventate le strutture da studiare, così sempre più affinati sono diventati i modelli per la loro analisi. Possiamo comunque anticipare qualche osservazione di carattere generale sulle teorie del tipo ESL. Oltre alla loro semplicità di implementazione, forniscono buoni risultati in termini di grandezze globali (risposte statiche, frequenze fondamentali e carichi critici) in molti casi ($l/h > 10$). Quando però si debbano studiare piastre di spessori notevoli, anche tali grandezze globali vengono valutate con minore precisione. Inoltre, anche per piastre più sottili ma magari con laminazioni complesse, tali teorie non sono in grado di fornire accurate valutazioni degli andamenti di spostamenti, deformazioni e tensioni trasversali lungo lo spessore. Il motivo di tale carenza è da ricercare, essenzialmente, nell'incapacità di tali modelli di descrivere i comportamenti peculiari dei multistrati (effetto zig-zag, scorrimenti interlaminari e continuità delle tensioni trasversali).

1.2.1 Classical Laminated Plate Theory (CLPT)

La **Classical Laminated Plate Theory** (CLPT) [7] è una semplice estensione alle piastre multistrato della **Classical Plate Theory** (CPT).

Le ipotesi cinematiche di partenza sono quelle classiche di Kirchhoff:

- i segmenti di spessore, inizialmente rettilinei, rimangono tali a deformazione avvenuta;
- i segmenti di spessore, inizialmente perpendicolari alla superficie di riferimento, rimangono tali a deformazione avvenuta;
- i segmenti di spessore non variano la loro lunghezza a deformazione avvenuta.

Il campo di spostamenti che deriva da queste assunzioni è il seguente:

$$\begin{aligned} V_\alpha(x_i; t) &= V_\alpha^0(x_\beta; t) - x_3 \cdot V_{3,\alpha}^0(x_\beta; t) \\ V_3(x_i; t) &= V_3^0(x_\alpha; t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le incognite cinematiche (dette anche **spostamenti generalizzati**) sono V_i^0 , cioè, gli spostamenti della superficie di riferimento (tipicamente la superficie media del laminato).

Si tratta comunque della più semplice approssimazione del comportamento delle piastre multistrato visto che i modi di deformazione previsti sono solo quelli membranale e flessionale. In generale è possibile dire che [3] la capacità del modello di calcolare le risposte globali dei multistrati dipende dal rapporto tra lato minore e spessore (l/h) e dal grado di anisotropia trasversale; per le piastre isotrope la deformabilità al taglio trasversale è trascurabile se $l/h > 30$ mentre, nel caso dei multistrati compositi, anche per elevati valori di l/h è limitativo fare tale assunzione.

1.2.2 First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

Un primo affinamento della modellizzazione delle piastre è stato ottenuto con l'introduzione della **First-order Shear Deformation Theory** (FSDT), normalmente associata ai nomi di Mindlin e Reissner (anche se è stato Timoshenko [8] il primo a sottolineare l'importanza del taglio trasversale nella flessione delle travi). In effetti, Mindlin [9] ha introdotto una teoria basata sugli spostamenti per piastre isotrope mentre Reissner [10] la corrispondente basata sulle tensioni; in seguito altri autori (in particolare Whitney e Pagano [11]) hanno esteso tali modelli al caso di piastre composite multistrato.

Le ipotesi cinematiche della teoria sono le stesse ipotesi di Kirchhoff, tranne quella relativa alla perpendicolarità tra segmento di spessore e superficie di riferimento:

- i segmenti di spessore, inizialmente rettilinei, rimangono tali a deformazione avvenuta;
- i segmenti di spessore non variano la loro lunghezza a deformazione avvenuta.

Il campo di spostamenti diventa quindi il seguente

$$\begin{aligned} V_{\alpha}(x_i; t) &= V_{\alpha}^0(x_{\beta}; t) + x_3 \cdot \theta_{\alpha}(x_{\beta}; t) \\ V_3(x_i; t) &= V_3^0(x_{\alpha}; t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si noti che oltre alle tre incognite già presenti nel caso della CLPT, compaiono qui in più le due variabili θ_1 e θ_2 che sono (a meno un segno nel caso di θ_2) le rotazioni dei segmenti di spessore intorno ai due assi x_2 e x_1 rispettivamente. In questo modello è data una grossolana approssimazione della deformazione di taglio trasversale: gli scorrimenti di taglio trasversale sono, infatti, costanti lungo tutto lo spessore, mentre le corrispondenti tensioni sono costanti a tratti (per piastre multistrato). Sappiamo, invece, che nel caso di piastre isotrope le tensioni di taglio trasversale hanno una distribuzione quadratica lungo lo spessore; nel caso di più strati la dipendenza quadratica si mantiene strato per strato. Per correggere, almeno in termini integrali, la discrepanza tra la soluzione della FSDT e il corretto andamento delle tensioni di taglio trasversale, vengono allora introdotti dei **fattori correttivi del taglio**; non ci soffermiamo sulla loro introduzione (ci torneremo al Cap. 3) ma ricordiamo solo che tali fattori intervengono nella definizione delle risultanti delle tensioni di taglio trasversale e sono determinati in modo che l'energia di deformazione associata al taglio trasversale sia la stessa di quella calcolata con la teoria dell'elasticità.

La valutazione, anche grossolana, della deformabilità per taglio trasversale, rende la FSDT più precisa anche nello studio di piastre più spesse e di pannelli sandwich; uno dei

grossi limiti di tale teoria è, però, il fatto che i fattori correttivi sono difficili da determinare e, soprattutto, variabili secondo la laminazione, le condizioni di vincolo e il tipo di carico. Solo in primissima approssimazione si può usare il classico valore 5/6 per laminazioni, vincoli e carichi diversi.

1.2.3 Higher-order Shear Deformation Theories (HSDT)

Il termine Higher-order riferito alle teorie per le piastre composite è associato all'ordine di sviluppo degli spostamenti nel piano in termini della coordinata di spessore x_3 . Tali contributi di ordine superiore al primo sono molto importanti per lo studio delle piastre di spessore elevato. In questi casi, infatti, i segmenti di spessore deformati si discostano in modo rilevante dall'andamento rettilineo dando origine ad una distorsione della sezione trasversale; il contributo della deformabilità per taglio trasversale, inoltre, è notevole e l'approssimazione ottenibile con la FSDT non è più sufficiente. Tra le teorie di questo tipo hanno certamente avuto maggiore successo quelle del terzo ordine; sulla paternità di tali modelli esiste, in letteratura, una qualche incertezza che Reddy ha poi risolto in suo favore [12]. Reddy afferma che la sua teoria del terzo ordine è stata la prima [13], nella forma che vedremo tra poco nella (1.11), e di cui siano poi state fornite le equazioni del moto ricavate con il principio degli spostamenti virtuali; in realtà egli stesso riconosce [12] che altri autori prima di lui (Vlasov, Jemielita, Schmidt e Krishna Murty) avevano introdotto i termini di ordine fino al terzo nello sviluppo degli spostamenti nel piano. Ci permettiamo di aggiungere, seguendo [3], che Giavotto, già nel 1969 [14], aveva ipotizzato un campo di spostamenti del tipo

$$V_\alpha(x_i; t) = V_\alpha^0(x_\beta; t) - x_3 V_{3,\alpha}^0(x_\beta; t) + \chi x_3 \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right) \theta_\alpha(x_\beta; t) \quad (1.10)$$

$$V_3(x_i; t) = V_3^0(x_\alpha; t)$$

Giavotto pone $\chi=5/4$ ma per valori diversi di tale parametro si ottengono molte delle altre teorie del terzo ordine (come la stessa di Reddy che vedremo sotto con la (1.11), nella quale $\chi=1$ e $\theta_\alpha = \mathbf{t}_\alpha + V_{3,\alpha}^0$). Nel seguito faremo comunque riferimento alla teoria del terzo ordine di Reddy, seguendo una tradizione ormai consolidata. Nella teoria del terzo ordine di Reddy rimane valida la sola ipotesi di lunghezza invariata dei segmenti di spessore

$$V_\alpha(x_i; t) = V_\alpha^0(x_\beta; t) + x_3 \cdot \left(\mathbf{t}_\alpha(x_\beta; t) - \frac{4}{3} \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 (\mathbf{t}_\alpha(x_\beta; t) + V_{3,\alpha}^0(x_\beta; t)) \right) \quad (1.11)$$

$$V_3(x_i; t) = V_3^0(x_\alpha; t)$$

dove sono ancora 5 gli spostamenti generalizzati e con τ_1 e τ_2 che rappresentano ancora le rotazioni dei segmenti di spessore intorno ai due assi x_2 e x_1 rispettivamente, ma solo per $x_3=0$ (cioè sulla superficie di riferimento). E' facile rendersi conto che gli scorrimenti di taglio trasversale sono parabolici lungo lo spessore e si annullano in corrispondenza alle due facce estreme del laminato, come previsto dalla teoria dell'elasticità se non sono presenti carichi tangenziali su tali due facce. Anche le tensioni di taglio trasversale sono paraboliche (almeno strato per strato) e si annullano sulle due facce esterne; tale comportamento più realistico del modello permette di evitare l'introduzione dei fattori correttivi.

L'impiego sempre più massiccio di compositi nel progetto aeronautico ha comportato la necessità di studiare piastre multistrato di notevole complessità; soprattutto per spessori elevati e quando ci sono notevoli variazioni nei moduli di taglio trasversale dei vari strati, la teoria di Reddy è inadeguata. Quello che succede è, infatti, che se gli scorrimenti di taglio trasversale sono continui, mentre i corrispondenti moduli non lo sono, le tensioni di taglio trasversale risulteranno discontinue; questo risultato contravviene una delle tre condizioni ricordate all'inizio del Par. 1.1. Inoltre, la teoria di Reddy fornisce risultati sufficientemente corretti soprattutto per laminati simmetrici giacché le grandezze di taglio trasversale che fornisce sono simmetriche rispetto alla superficie media del laminato.

Sempre nell'ambito delle teorie higher-order, un modo (già sperimentato per quelle di ordine inferiore, come in [10]) per cercare di risolvere i problemi di continuità delle tensioni trasversali, è quello di usare teorie miste. A questo proposito vogliamo ricordare in particolare i lavori di Tessler e Cook [15]-[17]. Si tratta di teorie del tipo ESL ma di ordine superiore, almeno per quanto riguarda lo spostamento trasversale che è sempre parabolico nello spessore; in [16] e [17] viene proposta una teoria che è anche cubica negli spostamenti tangenziali. La peculiarità di questi lavori è che il problema della continuità delle tensioni trasversali viene risolto secondo l'approccio del principio variazionale misto nella forma semplificata (1.5). Questo accade almeno per la tensione trasversale normale σ_{33} ; si suppone per essa un andamento cubico ed i coefficienti di questo sviluppo sono poi determinati in diversi modi. Due coefficienti si determinano con l'uso delle equazioni indefinite di equilibrio; gli altri due con la seconda delle (1.5). Lo stesso principio non viene impiegato per le tensioni di taglio trasversale che, quindi, in generale, non sono continue. Per compensare questo limite e anche per migliorare i risultati relativi alla σ_{33} , vengono poi introdotti degli opportuni fattori correttivi [16] la cui determinazione non è, purtroppo, così immediata. Come si vede, cercare di ottenere dalle teorie ESL, anche di ordine elevato, prestazioni superiori a quelle delle teorie cubiche, comporta in generale delle complicazioni tali che diventa confrontabile la complessità delle teorie cosiddette discrete-layer.

1.3 Teorie Discrete-Layer

Come già anticipato, le teorie ESL iniziano a fallire quando [1] si considerino (i) piastre multistrato dalla complessa e/o eterogenea laminazione o comunque (ii) piastre con

notevoli spessori. Per quanto riguarda (i), va ricordato che l'eterogeneità nella sequenza degli strati rende i vari modi di deformazione (membranale, flesso-torsionale e di taglio trasversale) nelle piastre multistrato più complessamente accoppiati che nel caso isotropo. Inoltre, avendo normalmente i materiali compositi un rapporto tra i moduli di Young e quelli di taglio trasversale più alto dei materiali isotropi, la deformabilità al taglio trasversale di piastre multistrato in composito anche sottili non è trascurabile. Si devono infine ricordare l'effetto zig-zag relativo alla deformazione dei segmenti di spessore e il problema della continuità delle tensioni trasversali; tali aspetti sono più critici proprio nel caso di laminazioni molto eterogenee. Sempre più sovente, poi, si devono studiare multistrati dallo spessore elevato (ii) dato che sempre più i materiali compositi sono utilizzati anche per strutture primarie (normalmente più spesse); allo stesso tempo, per tali strutture, diventa indispensabile una corretta valutazione degli stati di deformazione e tensione, al fine di prevedere con precisione quali saranno i modi ed i carichi di cedimento.

Proprio perché il problema dei modi di cedimento delle strutture multistrato in materiale composito è di sempre maggiore attualità, bisogna elaborare modelli in grado di valutare il comportamento di strutture già danneggiate. Uno dei casi più tipici è quello dello **scorrimento interlaminare**. Il metodo classico con il quale viene modellizzato è quello di prevedere delle discontinuità negli spostamenti tangenziali in corrispondenza delle interfacce danneggiate. In termini anche solo matematici, un campo di spostamenti nel piano con discontinuità può essere ottenuto solo se si ragiona strato per strato, secondo l'approccio tipico dei modelli **layerwise** (LW) o **discrete-layer**.

Si tratta, quindi, di sviluppare modelli in grado di valutare (più) correttamente la deformabilità a taglio trasversale e, se possibile, di comprendere la deformabilità dello spessore (per pannelli spessi lo spostamento trasversale non è più costante), l'effetto zig-zag e le conseguenze dei danni interlaminari. Di fondamentale importanza è soprattutto il primo aspetto; abbiamo concluso il Par. 1.2.3 sulle teorie ESL di ordine superiore, notando come le tensioni di taglio trasversale non risultino in generale continue nello spessore, come invece richiesto dalla teoria dell'elasticità (anche per la tensione trasversale normale)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (1.12)$$

dove gli apici (k) e (k+1) indicano l'appartenenza agli strati k-esimo e (k+1)-esimo. Si intende inoltre che la continuità espressa dalla (1.12) sia valida all'interfaccia tra i due strati (nell'ambito di ogni strato la continuità delle tensioni trasversali è automaticamente garantita). E' ovvio, quindi, che, se due strati adiacenti hanno diverse rigidità, dovranno avere anche diverse deformazioni trasversali, in modo che valgano le (1.12)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{33} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix} \epsilon_{33} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \quad (1.13)$$

Procedendo con il ragionamento, per rispettare le (1.13) dobbiamo ipotizzare che gli spostamenti siano solo continui³ nello spessore ma senza che tale continuità si estenda anche alla derivata prima rispetto ad x_3 . In questo modo è possibile avere delle discontinuità di derivata degli spostamenti rispetto allo spessore ed in corrispondenza delle interfacce tra strati; ed è proprio questa la principale caratteristica delle teorie discrete-layer.

In pratica, le teorie discrete-layer sono caratterizzate dall'assunzione di un certo andamento del campo di spostamenti strato per strato; quello che è garantito sempre (a meno dei casi di danni interlaminari, sui quali torneremo) è la continuità degli spostamenti da strato a strato e, quindi, lungo l'intero spessore. La continuità della derivata può non esserci ad una particolare interfaccia tra strati, qualora sia necessario che le deformazioni trasversali siano discontinue per avere le corrispondenti tensioni continue. Senza entrare subito nei dettagli, possiamo per ora dire che teorie di questo tipo sono caratterizzate da un certo numero di spostamenti generalizzati per ogni strato.

Una prima classificazione delle teorie discrete-layer può essere fatta in base agli spostamenti descritti strato per strato [1]

- teorie discrete-layer **parziali**: solo gli spostamenti nel piano sono descritti da andamenti strato per strato;
- teorie discrete-layer **complete**: tutte le componenti di spostamento sono caratterizzate dalla descrizione "layerwise".

E' chiaro che, nel caso delle teorie parziali, è possibile ottenere solo tensioni di taglio trasversale continue mentre, nel caso delle teorie complete, tale possibilità si estende anche alla tensione trasversale normale. Beninteso, anche nel caso delle teorie parziali possiamo introdurre la valutazione della deformabilità trasversale normale (con uno spostamento trasversale non solo costante) ma con la conseguenza di una tensione trasversale normale discontinua.

Una seconda classificazione (che si sovrappone alla prima) viene più tipicamente fatta in base alla seguente considerazione [18]; se per ogni strato ci sono M spostamenti generalizzati, allora il numero totale di questi dipenderà certamente da M ed, eventualmente, anche da N (numero di strati). Va precisato che il numero totale di spostamenti generalizzati non è $N \times M$, ma inferiore; questo perché, normalmente, alcuni gradi di libertà vengono espressi in funzione di altri per garantire le continuità degli spostamenti e delle tensioni trasversali. La classificazione è per l'appunto questa:

- numero totale di spostamenti generalizzati dipendente da N ;
- numero totale di spostamenti generalizzati non dipendente da N .

Dato che l'eccessivo costo computazionale è uno dei principali difetti delle teorie discrete-layer, il vantaggio della seconda categoria di modelli sulla prima è evidente.

Non è certamente questa la sede per una rassegna completa delle teorie discrete-layer proposte in letteratura; cercheremo solo di ricordare i principali contributi in questo campo e di soffermarci un po' di più su quei modelli che verranno approfonditi e sviluppati nell'ambito di questa tesi.

³ A parte il caso in cui siano presenti scorrimenti interlaminari.

Tra le teorie per le quali il numero di gradi di libertà dipende dal numero di strati, ricordiamo quelle di Reddy [19], Toledano e Murakami [20] e Lu e Liu [21]. Per quanto riguarda la teoria di Reddy (di tipo “completo”), dobbiamo immaginare [19] di suddividere lo spessore del laminato in un certo numero P di intervalli (con P che può essere maggiore, minore o uguale a N , numero di strati). In ogni intervallo si suppone che le tre componenti di spostamento abbiano un andamento nello spessore esprimibile in termini di polinomi di Lagrange di grado n e dei corrispondenti $(n+1)$ coefficienti-valori degli spostamenti. E' possibile scegliere i sottodomini in modo che siano frazioni degli strati, corrispondano agli strati o siano dei gruppi di strati (**sublaminati**); è poi possibile scegliere il grado di approssimazione n in ogni sottodominio indipendentemente dagli altri. In pratica, la teoria può essere affinata sia incrementando i sottodomini (affinamento di tipo “ h ”) sia aumentando il grado n (affinamento di tipo “ p ”). Dato che tra sottodominio e sottodominio non è garantita la continuità delle derivate degli spostamenti, si possono ottenere deformazioni trasversali discontinue e corrispondenti tensioni continue. Questo è vero in teoria ma praticamente la teoria di Reddy non prevede l'imposizione di condizioni di continuità delle tensioni trasversali. Chiaramente un modello di questo tipo si avvicina del tutto ad un modello tri-dimensionale; inoltre rende molto più semplice e naturale il passaggio dalla trattazione analitica all'implementazione FEM [1]. Il modello di Lu e Liu [21], invece, è di tipo parziale perché l'approssimazione strato per strato vale solo per gli spostamenti nel piano (lo spostamento trasversale è costante lungo lo spessore). L'andamento degli spostamenti tangenziali è cubico in ogni strato; viene quindi espresso in funzione del valore e della derivata prima rispetto ad x_3 alle due interfacce estreme dello stesso strato, grazie all'uso, come funzioni di forma nello spessore, dei polinomi di Hermite cubici. In questo modo i gradi di libertà complessivi del modello sono, almeno inizialmente, $8N+1$ con N numero di strati; questo perché, per ogni spostamento tangenziale, ci sono 4 gradi di libertà per strato. Senza entrare in ulteriori dettagli, è facile rendersi conto che le tensioni di taglio trasversale sono funzione dei gradi di libertà “derivate” rispetto ad x_3 ; imponendo la continuità di tali tensioni alle interfacce e l'annullamento delle stesse sulle due facce esterne, si introducono $2(N+1)$ condizioni, per cui i gradi di libertà si riducono a $6N-1$. Nel caso in cui le interfacce non presentino incollaggi imperfetti tra strato e strato, anche gli spostamenti tangenziali sono continui per cui altre 2 condizioni per interfaccia si aggiungono; anche nel caso di incollaggi imperfetti e, quindi, di scorrimenti interlaminari, alle interfacce danneggiate dovremo introdurre un legame tra la discontinuità degli spostamenti tangenziali e le tensioni di taglio trasversale (ancora 2 condizioni per interfaccia). Si tratta, quindi, di aggiungere comunque $2(N-1)$ condizioni, per cui il numero finale di gradi di libertà è $4N+1$. Come si nota nel caso delle piastre monostrato i gradi di libertà sono 5 come nelle teorie ESL di Mindlin e Reddy; quando il numero di strati è almeno 2, però, il numero di spostamenti generalizzati del modello cresce notevolmente. Inoltre, rispetto alla complessità della descrizione degli spostamenti tangenziali, appare limitativo in molte applicazioni dover supporre uno spostamento trasversale costante. Ci sono, comunque, notevoli pregi in questa teoria: prima di tutto il rispetto della condizione di continuità delle tensioni di taglio trasversale in ogni caso di laminazione e, inoltre, la possibilità di studiare strutture con danni interlaminari (peraltro, tale possibilità c'è anche nel modello di Reddy).

Se passiamo a considerare le teorie discrete-layer nelle quali il numero di gradi di libertà non dipende dal numero N di strati, possiamo ricordare i modelli dovuti a Di Sciuva [6],[22]-[28]. La discussione dettagliata dei modelli di Di Sciuva sarà fatta nel Cap. 3; qui cerchiamo solo di inquadrare i suoi lavori nell'ambito della rassegna di teorie che stiamo proponendo. Il concetto fondamentale alla base dei modelli di Di Sciuva è ottenere la continuità delle tensioni di taglio trasversale, senza incrementare eccessivamente il numero di gradi di libertà rispetto alle classiche ESL. In pratica possiamo dire che il modello **Zig-Zag Lineare (LZZ)** [6],[22]-[24] è ottenuto a partire dalla FSDT in modo che, invece di avere gli scorrimenti di taglio trasversali continui e costanti e le tensioni discontinue (costanti a tratti), si ottenga esattamente l'opposto, come richiesto dalla teoria dell'elasticità (vedere le (1.12) e (1.13)). La stessa cosa accade per la teoria **Zig-Zag cubica (CZZ)** [25]-[28] che si può considerare ottenuta a partire dalla HSDT di Reddy; in questo caso, essendo gli spostamenti nel piano cubici, si ottengono tensioni di taglio trasversale paraboliche, continue e con valore nullo sulle due facce estreme del laminato. In entrambi i casi (LZZ e CZZ), il numero di gradi di libertà è 5 (indipendente quindi dal numero di strati) proprio come per le corrispondenti teorie ESL. La forma generale delle teorie zig-zag di Di Sciuva è la seguente

$$\begin{aligned} V_{\alpha}(x_i; t) &= V_{\alpha}^0(x_{\beta}; t) - x_3 \cdot V_{3,\alpha}^0(x_{\beta}; t) + \Pi_{\alpha\beta}(x_3) \cdot \theta_{\beta}(x_{\gamma}; t) \\ V_3(x_i; t) &= V_3^0(x_{\alpha}; t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si nota, prima di tutto, che le teorie zig-zag sono discrete-layer di tipo parziale; il campo di spostamenti tangenziali ha una forma abbastanza simile a quella delle teorie ESL citate (vedere (1.8)-(1.11)). Questa proprietà verrà sfruttata nel Cap. 3 per raggruppare tali teorie in una trattazione unica. La complessità del modello viene a concentrarsi tutta nella funzione matriciale $\Pi_{\alpha\beta}$; si tratta di una funzione cubica strato per strato, con discontinuità nella derivata prima alle interfacce tra strati con diverse rigidità al taglio trasversale. Ancora più complessa diventa la $\Pi_{\alpha\beta}$ nel caso in cui [28] vengano introdotti gli effetti dello scorrimento interlaminare; la possibilità che ci siano salti negli spostamenti tangenziali in corrispondenza alle interfacce danneggiate, comporta che la $\Pi_{\alpha\beta}$ sia anch'essa discontinua a tali interfacce. Il modello così ottenuto in [28] da Di Sciuva risulta una generalizzazione di analoghi modelli per piastre danneggiate, sviluppati negli stessi anni ([29] per quanto riguarda la teoria zig-zag lineare, [30] nel caso zig-zag cubico). A partire dagli stessi modelli zig-zag, ulteriori ricerche sono state effettuate da Icardi ([31]-[33]).

Come si può comprendere dalla breve rassegna di teorie discrete-layer presentata, il vero problema è se i gradi di libertà aumentano o meno con il numero di strati. Nel caso in cui tale dipendenza ci sia, abbiamo solitamente a che fare con teorie che derivano la loro accuratezza proprio dal fatto che, in un certo senso, la discretizzazione dello spessore è fatta a livello di ogni strato, anche se magari i campi di spostamento supposti non sono localmente di ordine elevato [19]. Nel caso in cui si riesca a svincolare i gradi di libertà dal numero di strati, questo è dovuto al fatto che la continuità delle tensioni trasversali si ottiene attraverso complesse funzioni di forma lungo lo spessore [28]. Recentemente, in alcuni suoi lavori, Averill ha proposto una serie di modelli che si basano su un approccio di

tipo nuovo; si tratta, in un certo senso, di un compromesso tra le due filosofie prima brevemente richiamate. In particolare in [34], Averill propone un modello del tipo zig-zag cubico alla Di Sciuva dove, però, gli spostamenti generalizzati scelti sono gli spostamenti e le tensioni di taglio trasversale delle facce estreme del laminato. Questo vale anche per lo spostamento trasversale che è supposto lineare nello spessore. E questa sarebbe l'unica piccola modifica rispetto ai classici lavori di Di Sciuva. L'idea nuova consiste nell'utilizzare tale campo di spostamento non per l'intero spessore della piastra ma solo per un certo gruppo di strati (al limite anche per uno strato singolo o parte di esso), cioè per quello che si chiama sublaminato. La continuità degli spostamenti (Averill non prevede scorrimenti interlaminari) e delle tensioni di taglio trasversale all'interno di un singolo sublaminato è automaticamente garantita dalle caratteristiche del modello; per quello che riguarda il passaggio da sublaminato a sublaminato, tali continuità si ottengono imponendo l'uguaglianza degli opportuni gradi di libertà, visto che questi sono, per l'appunto, spostamenti e tensioni di taglio trasversale delle facce estreme. Chiaramente sono possibili due estreme situazioni [34]:

- il sublaminato è unico, comprendendo tutto il laminato; è il caso della teoria zig-zag cubica con gradi di libertà indipendenti dal numero di strati;
- ogni singolo strato è un sublaminato; in tal caso ricadiamo praticamente nello schema della teoria di Reddy [19].

Il vero vantaggio dell'approccio dei sublaminati di Averill consiste nel fatto che si ha tutta la libertà di scegliere il miglior compromesso tra i due opposti. Un altro interessante lavoro sull'applicazione del metodo dei sublaminati alle teorie di tipo zig-zag, è dovuto ad Icardi [35]; il modello prevede, all'interno di ogni sublaminato, spostamenti tangenziali cubici e trasversale di quarto grado in x_3 , con possibilità di garantire a priori la continuità delle tensioni trasversali (di taglio e normale).

A prima vista sembrerebbe che la metodologia dei sublaminati sia solo una nuova versione della teoria discrete-layer di Reddy [19]; c'è, però, un grosso vantaggio legato alla garanzia della continuità delle tensioni di taglio trasversale. Anche su queste problematiche torneremo quando, nel Cap. 4, tratteremo il modello zig-zag Hermitiano come sviluppo del classico modello cubico zig-zag.

1.4 Teorie Multiple Model

Le teorie **multiple model** cercano di rappresentare un compromesso tra la semplicità computazionale delle teorie ESL e l'accuratezza delle teorie discrete-layer. Le due categorie di modelli, infatti, non sarebbero in grado da sole di rappresentare la migliore scelta per l'analisi di tutti i tipi di problemi relativi alle piastre multistrato.

L'idea di base è che, se in una struttura ci sono regioni particolari nelle quali è necessario valutare con maggiore precisione lo stato deformativo e tensionale, non possiamo usare ovunque teorie troppo complesse. Bisogna allora trovare il modo di limitare l'impiego di modelli più accurati alle sole regioni di interesse. Naturalmente, la messa in pratica di tale

proposito non è immediata; si tratta, infatti, di far coesistere modelli con caratteristiche diverse. Due sono le strade possibili [1]:

- multiple models di tipo **sequenziale** o **multi-passo**; inizialmente l'intera struttura viene analizzata con la teoria (magari ESL) di tipo più semplice per valutare, in prima approssimazione, le forze applicate e le condizioni al contorno per la regione di interesse; in un secondo tempo, noti questi dati, si procede allo studio della regione più piccola con una teoria più raffinata (magari discrete-layer);
- multiple models di tipo **simultaneo**; l'intera struttura è studiata simultaneamente (compresa la regione di interesse) in modo che, dove necessario, si usi una teoria più precisa o un più elevato livello di discretizzazione.

Si tratta di approcci in generale molto complessi; basti pensare, nel caso dei modelli simultanei, al problema degli elementi di transizione tra regioni studiate con teorie di tipo diverso. Sembra infatti che sia proprio il problema della “transizione tra teorie” o “tra regioni diversamente discretizzate” la maggiore sfida in questo campo. Per ulteriori approfondimenti e per alcuni riferimenti bibliografici, si veda [1].

Capitolo 2

Equazioni costitutive per materiali ortotropi; strati ortotropi equivalenti per cuori di pannelli sandwich

2.1 Introduzione

La necessità di un intero capitolo sulle equazioni costitutive per materiali ortotropi è giustificata dal fatto che tali equazioni saranno estensivamente utilizzate nella formulazione dei modelli piastra e trave nei Capp. 3-6. Bisogna poi precisare subito che, per semplificare la derivazione di tali modelli, le equazioni costitutive sono state usate in una particolare forma mista della quale parleremo in questo capitolo. Va inoltre ricordato che gli strati di materiale ortotropo sono un caso più generale di quelli isotropi, per cui anche questi sono compresi nella trattazione. Infine, anche le piastre e le travi sandwich saranno oggetto dell'applicazione delle nostre teorie; come per tutti i modelli di tipo bi-dimensionale, però, è necessario che gli strati siano trattabili secondo equazioni costitutive dello stesso tipo. Nel caso dei cuori dei pannelli sandwich non sempre è immediato ammettere che questi si comportino come strati di materiale ortotropo. Esiste una vasta letteratura che si occupa, infatti, di modelli analitici per il calcolo delle costanti ingegneristiche di strati ortotropi equivalenti ai cuori. Non essendo questi modelli argomento principale della nostra tesi, ci limitiamo a riportare i risultati principali nel Par. 2.3; ricordiamo, comunque, che l'argomento è stato ulteriormente approfondito durante l'attività di ricerca ed alcuni sviluppi e risultati si trovano in [R1]. Concludendo, che si tratti di strati isotropi, ortotropi o cuori di pannelli sandwich, noi li tratteremo sempre (ai fini dell'analisi con le teorie proposte) come strati di materiale ortotropo.

2.2 Equazioni costitutive per materiali ortotropi

In generale, le equazioni costitutive per materiali di un qualunque tipo si scrivono nelle seguenti forme equivalenti (**legge di Hooke generalizzata**)

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \Leftrightarrow \{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\} \quad (2.1)$$

essendo $[C]$ (**matrice dei coefficienti elastici di rigidezza**) la matrice inversa di $[D]$ (**matrice dei coefficienti elastici di deformabilità**); $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$ sono i **vettori delle componenti di tensione e deformazione**, rispettivamente

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &\equiv \left[\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{13} \quad \tau_{23} \quad \tau_{12} \right]^T \\ \{\varepsilon\} &\equiv \left[\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{12} \right]^T \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si dicono **ortotropi** quei materiali le cui proprietà meccaniche e fisiche presentano due piani di simmetria tra loro ortogonali. Se esistono due piani di simmetria ortogonali, ne esiste certamente un terzo ortogonale ai primi due. L'intersezione dei tre piani, individua tre direzioni note come **direzioni principali di ortotropia** del materiale. Posto che le tre direzioni degli assi cartesiani x_1 , x_2 e x_3 coincidano con queste direzioni principali, la matrice dei coefficienti elastici di rigidezza $[C]$ assume la seguente espressione [36]:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Si noti come le costanti elastiche linearmente indipendenti siano 9.

2.2.1 Costanti ingegneristiche

I **moduli di Young** (o **moduli di elasticità longitudinale**), i **moduli di elasticità tangenziale** e i **coefficienti di Poisson**, sono noti come **costanti ingegneristiche**. La loro importanza è legata, in primo luogo, alla relativa facilità con cui possono essere determinate mediante prove di laboratorio e, in secondo luogo, al fatto che è possibile esprimere in funzione di esse le costanti di rigidezza C_{ij} dei materiali. Innanzitutto definiamo le 12 costanti ingegneristiche nel caso di materiali ortotropi:

$$E_i \equiv \frac{\sigma_{ii}}{\varepsilon_{ii}}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

nel caso di applicazione della sola σ_{ii} ;

$$G_{ij} \equiv \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{con } i \neq j \quad (2.5)$$

nel caso sia presente solo τ_{ij} ;

$$\nu_{ij} \equiv -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{con } i \neq j \quad (2.6)$$

quando sia applicata la sola σ_{ii} . Come anticipato, nel caso di materiali ortotropi sono 9 le costanti indipendenti, date le seguenti 3 relazioni che garantiscono anche la simmetria della matrice [D] ed, ovviamente, anche della sua inversa [C];

$$\frac{E_i}{E_j} = \frac{\nu_{ij}}{\nu_{ji}}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{con } i \neq j \quad (2.7)$$

Per un materiale ortotropo valgono poi le seguenti relazioni [1], che definiscono il legame tra i coefficienti della matrice di rigidezza [C] e le costanti ingegneristiche introdotte sopra ((2.4)-(2.6)):

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1 E_3} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3} \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3} \\ C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2} \\ C_{44} &= G_{13} \\ C_{55} &= G_{23} \\ C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove

$$\equiv \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (2.9)$$

Le relazioni (2.8)-(2.9) si semplificano ulteriormente se gli assi principali 2 e 3 sono equivalenti ai fini del comportamento meccanico del materiale. Questo avviene per le lamine costituite da fibre immerse in una matrice. In questo caso l'asse 2 è normalmente perpendicolare alle fibre e contenuto nel piano della lamina, mentre l'asse 3 è diretto normalmente a tale piano. Sotto tali ipotesi, si hanno le seguenti semplificazioni:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_3 \\ G_{12} &= G_{13} \\ \nu_{12} &= \nu_{13} \end{aligned} \quad (2.10)$$

da cui, usando le (2.7), segue che $\nu_{21}=\nu_{31}$ e $\nu_{23}=\nu_{32}$. Ora, indicando con "T" ("trasversale") le direzioni equivalenti 2 e 3 e con "L" ("longitudinale") la direzione 1, si possono indicare nel modo seguente le 6 costanti indipendenti (9 iniziali meno le 3 relazioni (2.10))

$$\begin{aligned} E_L &= E_1 \\ E_T &= E_2 = E_3 \\ G_{LT} &= G_{12} = G_{13} \\ G_{TT} &= G_{23} \\ \nu_{LT} &= \nu_{12} = \nu_{13} \\ \nu_{TT} &= \nu_{23} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tenendo conto di ciò, le (2.8)-(2.9) subiscono un'analogia semplificazione.

Per i **materiali isotropi** (stesse proprietà meccaniche in qualunque direzione esse vengano misurate), le costanti ingegneristiche sono il modulo di elasticità di Young E, il modulo di taglio G e il coefficiente di Poisson ν , essendo valide le seguenti

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 = E_3 = E \\ G_{12} &= G_{13} = G_{23} = G \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{23} = \nu \end{aligned} \quad (2.12)$$

da cui, viste le (2.7), si ricava anche $\nu_{21}=\nu_{31}=\nu_{32}=\nu$. Vale poi la relazione che le lega le tre costanti ingegneristiche, riducendo a 2 il numero dei parametri indipendenti per i materiali isotropi

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.13)$$

2.2.2 Equazioni costitutive in assi non principali

Scriviamo ora le equazioni costitutive per un materiale ortotropo secondo gli assi x_1^* , x_2^* e x_3^* , non coincidenti con quelli principali x_1 , x_2 e x_3 . Si supponga che gli assi x_3^* e x_3 coincidano e che θ sia l'angolo di cui deve ruotare in senso antiorario l'asse x_1^* per sovrapporsi all'asse x_1 . Le equazioni costitutive, che in assi principali erano le (2.1) con la matrice di rigidezza definita dalla (2.3), diventano ora le seguenti [16]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{22}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \tau_{13}^* \\ \tau_{23}^* \\ \tau_{12}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{13}^* & 0 & 0 & C_{16}^* \\ C_{12}^* & C_{22}^* & C_{23}^* & 0 & 0 & C_{26}^* \\ C_{13}^* & C_{23}^* & C_{33}^* & 0 & 0 & C_{36}^* \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^* & C_{45}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^* & C_{55}^* & 0 \\ C_{16}^* & C_{26}^* & C_{36}^* & 0 & 0 & C_{66}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{23}^* \\ \gamma_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

dove i coefficienti C_{ij}^* possono essere scritti in funzione dei C_{ij} utilizzati nella (2.3)¹

$$[C^*] = [T_\sigma]^{-1} \cdot [C] \cdot [T_\varepsilon] \quad (2.15)$$

con

$$[T_\sigma] \equiv \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix}; \quad [T_\varepsilon] \equiv \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ -2cs & 2cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

essendo

¹ La (2.15) deriva dalle leggi di trasformazione del vettore delle deformazioni ($\{\varepsilon\} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon^*\}$) e del vettore delle tensioni ($\{\sigma\} = [T_\sigma]\{\sigma^*\}$), dove con gli asterischi sono indicate le grandezze nel sistema di riferimento ruotato.

$$c \equiv \cos(\theta); \quad s \equiv \sin(\theta) \quad (2.17)$$

2.2.3 Equazioni costitutive in forma mista; stati piani di deformazione e tensione in (x_1^*, x_2^*)

Supponiamo di essere nel caso generale di assi non principali x_1^* , x_2^* e x_3^* , e distinguiamo le tensioni e le deformazioni che agiscono nel piano (x_1^*, x_2^*) (P) da quelle di taglio trasversale (T) e da quelle trasversali normali (ϵ_{33}^* e σ_{33}^*):

$$\left\{ \epsilon_P^* \right\} \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \epsilon_T^* \right\} \equiv \begin{Bmatrix} \gamma_{13}^* \\ \gamma_{23}^* \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \sigma_P^* \right\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{22}^* \\ \tau_{12}^* \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \sigma_T^* \right\} \equiv \begin{Bmatrix} \tau_{13}^* \\ \tau_{23}^* \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Utilizzando questa simbologia, possiamo riscrivere la (2.14), con semplici scambi di righe e colonne, nella seguente forma

$$\begin{Bmatrix} \left\{ \sigma_P^* \right\} \\ \sigma_{33}^* \\ \left\{ \sigma_T^* \right\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{16}^* & C_{13}^* & 0 & 0 \\ C_{12}^* & C_{22}^* & C_{26}^* & C_{23}^* & 0 & 0 \\ C_{16}^* & C_{26}^* & C_{66}^* & C_{63}^* & 0 & 0 \\ C_{13}^* & C_{23}^* & C_{63}^* & C_{33}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^* & C_{45}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45}^* & C_{44}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ \epsilon_P^* \right\} \\ \epsilon_{33}^* \\ \left\{ \epsilon_T^* \right\} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

La forma (2.19) ci fa notare che le tensioni e le deformazioni di taglio trasversale sono sempre disaccoppiate dalle restanti deformazioni e tensioni (almeno dal punto di vista delle equazioni costitutive). Inoltre, la (2.19) risulta utile nello studio dello **stato piano di deformazione** in (x_1^*, x_2^*) , cioè con $\epsilon_{33}^* = 0$ e $\left\{ \epsilon_T^* \right\} = \{0\}$. Si ottiene infatti che

$$\left\{ \sigma_P^* \right\} = [C_P] \left\{ \epsilon_P^* \right\} \quad (2.20)$$

dove $[C_P]$ è il blocco (3x3) in alto a sinistra nella matrice di rigidità contenuta nella (2.19). Si noti che non necessariamente anche lo stato di tensione in (x_1^*, x_2^*) è piano, giacché σ_{33}^* può essere non nulla.

Una forma della (2.14), alternativa alla (2.19), prevede che si definiscano due vettori misti di tensioni e deformazioni. Si ricava ϵ_{33}^* dalla quarta riga della (2.19), la si sostituisce nella prima, nella seconda e nella terza riga; si ottiene quindi [15]

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma_P^*\} \\ \varepsilon_{33}^* \\ \{\sigma_T^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & F_{13} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & F_{23} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & F_{63} & 0 & 0 \\ -F_{13} & -F_{23} & -F_{63} & S_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_P^*\} \\ \sigma_{33}^* \\ \{\varepsilon_T^*\} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

dove

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij} &\equiv C_{ij}^* - F_{i3} C_{j3}^* \\ F_{i3} &\equiv C_{i3}^* S_{33} \\ S_{33} &\equiv \frac{1}{C_{33}^*} \\ Q_{lm} &= C_{lm}^* \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i, j = 1, 2, 6 \\ l, m = 4, 5 \end{array} \quad (2.22)$$

Nel caso di **stato piano di tensione** in (x_1^*, x_2^*) ($\sigma_{33}^* = 0$ e $\{\sigma_T^*\} = \{0\}$), si ricavano facilmente le seguenti equazioni costitutive

$$\{\sigma_P^*\} = [Q_P] \{\varepsilon_P^*\} \quad (2.23)$$

dove $[Q_P]$ è il blocco (3×3) in alto a sinistra nella matrice di rigidezza della (2.21); i termini Q_{Pij} sono noti come **rigidezze ridotte** (trasformate, visto che la (2.21) vale in assi non principali di ortotropia). Analogamente a quanto sottolineato in precedenza, quando lo stato di tensione è piano in (x_1^*, x_2^*) , lo stato di deformazione può anche non esserlo ($\varepsilon_{33}^* \neq 0$).

Per la derivazione dei modelli zig-zag classico (Cap. 3) ed Hermitiano (Cap. 4), ci è più utile scrivere le equazioni costitutive miste (2.21) in forma indiciale. A tal fine alcune definizioni sono necessarie. Le componenti di deformazione, sempre secondo gli assi in generale non principali x_1^* , x_2^* e x_3^* , sono indicate da ε_{ij}^* e definite nel seguente modo (nel caso di campo deformativo lineare)

$$2\varepsilon_{ij}^* \equiv V_{i,j}^* + V_{j,i}^* \quad (2.24)$$

Si ricorda poi che gli scorrimenti sono definiti secondo la seguente

$$\gamma_{ij}^* \equiv 2\varepsilon_{ij}^* \quad \text{con } i \neq j \quad (2.25)$$

Per quanto riguarda le tensioni, si usa la notazione σ_{ij}^* ; in particolare per le tensioni di taglio trasversale useremo la notazione $\tau_{\alpha 3}^*$. Valgono poi le seguenti notazioni per le rigidzze ridotte trasformate relative al piano (x_1^*, x_2^*)

$$Q_{\alpha\beta\chi\psi} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q_{1111} & Q_{1112} & Q_{1121} & Q_{1122} \\ Q_{1211} & Q_{1212} & Q_{1221} & Q_{1222} \\ Q_{2111} & Q_{2112} & Q_{2121} & Q_{2122} \\ Q_{2211} & Q_{2212} & Q_{2221} & Q_{2222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{16} & Q_{16} & Q_{12} \\ Q_{16} & Q_{66} & Q_{66} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{66} & Q_{66} & Q_{26} \\ Q_{12} & Q_{26} & Q_{26} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e per quelle di taglio trasversale

$$Q_{\alpha 3\chi 3} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q_{1313} & Q_{1323} \\ Q_{2313} & Q_{2323} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Introduciamo, infine, la seguente definizione

$$R_{\alpha\beta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{13}^* & C_{63}^* \\ C_{63}^* & C_{23}^* \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Utilizzando le (2.24)-(2.28), possiamo scrivere la (2.21) nella forma indiciale equivalente

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^* &= Q_{\alpha\beta\chi\psi} \cdot \varepsilon_{\chi\psi}^* + S_{33} \cdot R_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{33}^* \\ \tau_{\alpha 3}^* &= Q_{\alpha 3\chi 3} \cdot \gamma_{\chi 3}^* \\ \varepsilon_{33}^* &= -S_{33} \cdot R_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}^* + S_{33} \cdot \sigma_{33}^* \end{aligned} \quad (2.29)$$

Notiamo che, grazie alla definizione (2.26), la (2.29) è valida anche nel caso in cui la definizione di ε_{ij}^* fosse $\varepsilon_{ij}^* \equiv V_{i,j}^*$. La (2.29) sarà la forma delle equazioni costitutive che verrà utilizzata nei Capp. 3 e 4. Si noti poi che, proprio grazie alla (2.29), l'espressione dell'energia di deformazione elastica assume una forma particolarmente interessante

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}^* \cdot \sigma_{ij}^*) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta}^* \cdot Q_{\alpha\beta\chi\psi} \cdot \varepsilon_{\chi\psi}^*) + \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha 3}^* \cdot Q_{\alpha 3\chi 3} \cdot \gamma_{\chi 3}^*) + \frac{1}{2}(\sigma_{33}^* \cdot S_{33} \cdot \sigma_{33}^*) \quad (2.30)$$

Il disaccoppiamento tra le energie relative ai tre modi di deformazione (membranale, trasversale di taglio e trasversale normale) risulterà molto utile nella derivazione delle equazioni del moto dei modelli zig-zag.

2.2.4 Equazioni costitutive per problemi uni-dimensionali; stati piani di deformazione e tensione in (x_1^*, x_3^*)

Ci sono due casi nei quali lo studio delle piastre multistrato si riduce ad analisi uni-dimensionali [1]:

- travi multistrato; supponendo che l'asse della trave sia coincidente con l'asse di riferimento x_1^* , bisogna allora supporre che la dimensione secondo la direzione x_2^* sia trascurabile rispetto alla lunghezza; in questo caso si ha uno **stato piano di tensione** in (x_1^*, x_3^*)

$$\sigma_{22}^* = \tau_{12}^* = \tau_{23}^* = 0 \quad (2.31)$$

Invertendo la (2.14) e imponendo le condizioni (2.31), otteniamo allora

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{13}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{13}^* & 0 \\ D_{13}^* & D_{33}^* & 0 \\ 0 & 0 & D_{44}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \tau_{13}^* \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

che, invertita, diventa

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \tau_{13}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\#} & C_{13}^{\#} & 0 \\ C_{13}^{\#} & C_{33}^{\#} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^{\#} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{13}^* \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

- pannelli infinitamente estesi in x_2^* e in flessione cilindrica; in questo caso si ha uno **stato piano di deformazione** in (x_1^*, x_3^*)

$$\varepsilon_{22}^* = \gamma_{12}^* = \gamma_{23}^* = 0 \quad (2.34)$$

Inserendo le condizioni (2.34) nella (2.14), si ha immediatamente

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \tau_{13}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{13}^* & 0 \\ C_{13}^* & C_{33}^* & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{13}^* \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Le (2.33) e (2.35) sono solo formalmente identiche; i coefficienti delle matrici di rigidezza sono, infatti, in generale diversi. Possiamo però usare una sola espressione di carattere generale per raggruppare i due casi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \tau_{13}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^U & C_{13}^U & 0 \\ C_{13}^U & C_{33}^U & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^U \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \gamma_{13}^* \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Anche in questo caso è possibile, e utile, scrivere la (2.36) in forma mista

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \varepsilon_{33}^* \\ \tau_{13}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^U & F_{13}^U & 0 \\ -F_{13}^U & S_{33}^U & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^U \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \gamma_{13}^* \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

essendo

$$\begin{aligned} Q_{11}^U &\equiv C_{11}^U - F_{13}^U C_{13}^U \\ F_{13}^U &\equiv C_{13}^U S_{33}^U \\ S_{33}^U &\equiv \frac{1}{C_{33}^U} \\ Q_{44}^U &= C_{44}^U \end{aligned} \quad (2.38)$$

E' inoltre ancora possibile scrivere la (2.37) in una forma indiciale equivalente (analoga alla (2.29))

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= Q_{11}^U \cdot \varepsilon_{11}^* + S_{33}^U \cdot R_{11}^U \cdot \sigma_{33}^* \\ \tau_{13}^* &= Q_{44}^U \cdot \gamma_{13}^* \\ \varepsilon_{33}^* &= -S_{33}^U \cdot R_{11}^U \cdot \varepsilon_{11}^* + S_{33}^U \cdot \sigma_{33}^* \end{aligned} \quad (2.39)$$

con

$$R_{11}^U \equiv C_{13}^U \quad (2.40)$$

Vale, infine, la seguente relazione per l'energia di deformazione elastica

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}^* \cdot \sigma_{ij}^*) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^* \cdot Q_{11}^U \cdot \varepsilon_{11}^*) + \frac{1}{2}(\gamma_{13}^* \cdot Q_{44}^U \cdot \gamma_{13}^*) + \frac{1}{2}(\sigma_{33}^* \cdot S_{33}^U \cdot \sigma_{33}^*) \quad (2.41)$$

I due casi ricordati (travi e piastre in flessione cilindrica), si riducono a problemi unidimensionali poiché, se la laminazione è cross-ply e i multistrati sono soggetti a carichi indipendenti da x_2^* , non si hanno spostamenti in direzione x_2^* e anche le derivate rispetto a tale coordinata sono nulle. Tutte le grandezze che caratterizzano il problema sono funzioni incognite della sola x_1^* (la dipendenza da x_3^* c'è, ma è supposta nota per ipotesi iniziale).

2.2.5 Equazioni costitutive termo-meccaniche

Tutte le relazioni riguardanti le deformazioni, scritte fino a questo punto, sono riferite a deformazioni di tipo meccanico (originate, cioè, da carichi o azioni comunque meccaniche agenti sulla struttura). Nel caso in cui si vogliono tenere in conto anche gli effetti di variazioni della temperatura, le relazioni costitutive vanno opportunamente corrette.

Le deformazioni totali sono la somma di quelle meccaniche e di quelle di origine termica

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{TOT}}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}^\Theta\} \quad (2.42)$$

Per quanto riguarda le deformazioni meccaniche, queste sono legate alle tensioni dalla seconda delle (2.1). Le deformazioni termiche si possono invece esprimere come segue

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^\Theta\} = \{\boldsymbol{\alpha}\}\Theta \quad (2.43)$$

dove $\Theta = T - T_0$ è la variazione di temperatura rispetto a quella di riferimento, mentre $\{\boldsymbol{\alpha}\}$ è il vettore dei **coefficienti di dilatazione termica** del materiale in questione. Nel caso di un materiale ortotropo riferito ai suoi assi principali di ortotropia si ha

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} \equiv [\alpha_{11} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.44)$$

Inserendo la (2.43) nella (2.42), si ha

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{TOT}}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\alpha}\}\Theta \quad (2.45)$$

Se passiamo alle grandezze nel sistema non principale (x_1^*, x_2^*, x_3^*), otteniamo

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{TOT}*}\} = [\mathbf{T}_\varepsilon]^{-1} \{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{TOT}}\} = [\mathbf{T}_\varepsilon]^{-1} (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\alpha}\}\Theta) = \{\boldsymbol{\varepsilon}^*\} + \{\boldsymbol{\alpha}^*\}\Theta \quad (2.46)$$

dove risulta

$$\{\boldsymbol{\alpha}^*\} \equiv [c^2\alpha_{11} + s^2\alpha_{22} \quad s^2\alpha_{11} + c^2\alpha_{22} \quad \alpha_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 2cs(\alpha_{11} - \alpha_{22})]^T \quad (2.47)$$

Se ora ricaviamo $\{\varepsilon^*\}$ dalla (2.46)

$$\{\varepsilon^*\} = \{\varepsilon^{\text{TOT}*}\} - \{\alpha^*\} \Theta \quad (2.48)$$

e moltiplichiamo entrambi i membri per $[C^*]$, otteniamo (vedere la (2.1))

$$\{\sigma^*\} = [C^*] \{ \{\varepsilon^{\text{TOT}*}\} - \{\alpha^*\} \Theta \} = [C^*] \{\varepsilon^{\text{TOT}*}\} - \{\lambda\} \Theta \quad (2.49)$$

dove si ha

$$\{\lambda\} \equiv [C^*] \{\alpha^*\} \quad (2.50)$$

Si noti che la struttura del vettore $\{\lambda\}$ è la seguente

$$\{\lambda\} \equiv [\lambda_{11} \quad \lambda_{22} \quad \lambda_{33} \quad 0 \quad 0 \quad \lambda_{12}]^T \quad (2.51)$$

Procedendo poi come in precedenza (Par. 2.2.3), si può riscrivere la (2.49) come segue

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^* &= Q_{\alpha\beta\chi\psi} \cdot \varepsilon_{\chi\psi}^{\text{TOT}*} + S_{33} \cdot R_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{33}^* - \omega_{\alpha\beta} \cdot \Theta \\ \tau_{\alpha 3}^* &= Q_{\alpha 3 \chi 3} \cdot \gamma_{\chi 3}^{\text{TOT}*} \\ \varepsilon_{33}^{\text{TOT}*} &= -S_{33} \cdot R_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{TOT}*} + S_{33} \cdot \sigma_{33}^* + S_{33} \cdot \lambda_{33} \cdot \Theta \end{aligned} \quad (2.52)$$

con

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \lambda_{\alpha\beta} - S_{33} \lambda_{33} R_{\alpha\beta} \quad (2.53)$$

Anche nel caso dei problemi uni-dimensionali è possibile introdurre gli effetti termici nelle equazioni costitutive. Dato che per lo stato piano di deformazione, si deve intendere che le tre componenti di deformazione nulle sono di tipo meccanico (come correttamente espresso dalla (2.34)), la (2.36) è ancora valida proprio perché le componenti di deformazione vanno intese come meccaniche. In forma compatta

$$\{\sigma^{U*}\} \equiv [C^U] \{\varepsilon^{U*}\} = [C^U] \{ \{\varepsilon^{UTOT*}\} - \{\alpha^{U*}\} \Theta \} = [C^U] \{\varepsilon^{UTOT*}\} - \{\lambda^U\} \Theta \quad (2.54)$$

Con la solita procedura già descritta in precedenza si può poi ricavare

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= Q_{11}^U \cdot \varepsilon_{11}^{\text{TOT}*} + S_{33}^U \cdot R_{11}^U \cdot \sigma_{33}^* - \omega_{11}^U \cdot \Theta \\ \tau_{13}^* &= Q_{44}^U \cdot \gamma_{13}^{\text{TOT}*} \\ \varepsilon_{33}^{\text{TOT}*} &= -S_{33}^U \cdot R_{11}^U \cdot \varepsilon_{11}^{\text{TOT}*} + S_{33}^U \cdot \sigma_{33}^* + S_{33}^U \cdot \lambda_{33}^U \cdot \Theta \end{aligned} \quad (2.55)$$

con

$$\omega_{11}^U \equiv \lambda_{11}^U - S_{33}^U \lambda_{33}^U R_{11}^U \quad (2.56)$$

Le equazioni (2.52) e (2.55) sono ulteriori generalizzazioni delle (2.29) e (2.39), rispettivamente; la forma nella quale sono scritte rende semplice il loro utilizzo in alcuni casi particolari molto frequenti. E' possibile, infatti, particolarizzare le relazioni al caso in cui si ipotizzi $\sigma_{33}^* = 0$, come avviene nelle teorie per piastre e travi sufficientemente sottili o con spostamento trasversale costante; inoltre è facile introdurre l'ipotesi di trascurare gli effetti termici ($\Theta = 0$).

2.3 Strati ortotropi equivalenti per cuori di pannelli sandwich

Come anticipato nell'introduzione del Cap. 2, esistono modelli analitici con i quali è possibile calcolare le costanti ingegneristiche (o direttamente i coefficienti della matrice [C]) equivalenti ai cuori dei pannelli sandwich; con formule che forniscono anche la densità equivalente, il set di proprietà è completo. Raggruppando modelli diversi per le diverse costanti è possibile, infine, costruire uno strato ortotropo equivalente al cuore, in modo da poterlo più semplicemente inserire tra gli altri strati del laminato. Lo studio di quest'ultimo con le teorie bi-dimensionali (del tipo di quelle che tratteremo nei Capp. 3 e 4) risulta quindi più naturale.

In questo paragrafo riportiamo solamente i risultati principali di una ricerca e di uno sviluppo più approfonditi, svolti durante l'attività di dottorato [R1]. Distinguiamo, prima di tutto, i diversi tipi di cuori: esistono numerosi modelli per i cuori **honeycomb**, molti anche per i cuori **corrugati**, meno per quelli di tipo **cellulare**. Sono soprattutto le prime due tipologie ad interessarci; per i cuori cellulari si veda la bibliografia contenuta in [R1].

2.3.1 Modelli per cuori honeycomb

Un esempio della geometria caratteristica di un cuore honeycomb è dato in Fig. 2.1. Per tutti i modelli analitici di cui parleremo nel seguito, useremo l'elemento ripetitivo di Fig. 2.2, dove sono anche indicati i parametri geometrici (indipendenti) caratteristici dei cuori honeycomb; va aggiunto h_c che è l'altezza delle celle o **spessore del cuore** (Fig. 2.1). Si introducono poi le seguenti grandezze adimensionali

$$(R, T, Q, S) \equiv (a, t, q, h_c) / l \quad (2.57)$$

dove q è la lunghezza del tratto di cella deformabile a taglio [R1]. Si suppone che il materiale delle pareti sia isotropo con costanti E , G e ν e densità ρ_f . E' ragionevole supporre, come ormai accettato da tutti i ricercatori, che il cuore honeycomb si possa considerare globalmente ortotropo con assi principali proprio quelli indicati in Fig. 2.2.

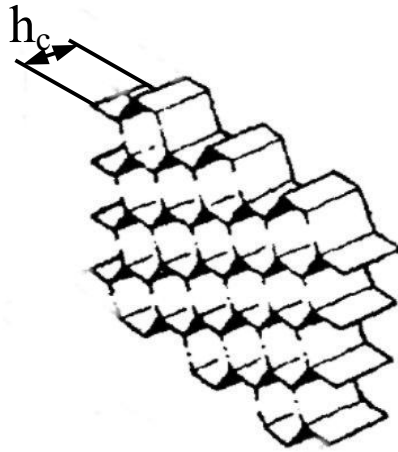


Figura 2.1: Geometria caratteristica di un cuore honeycomb.

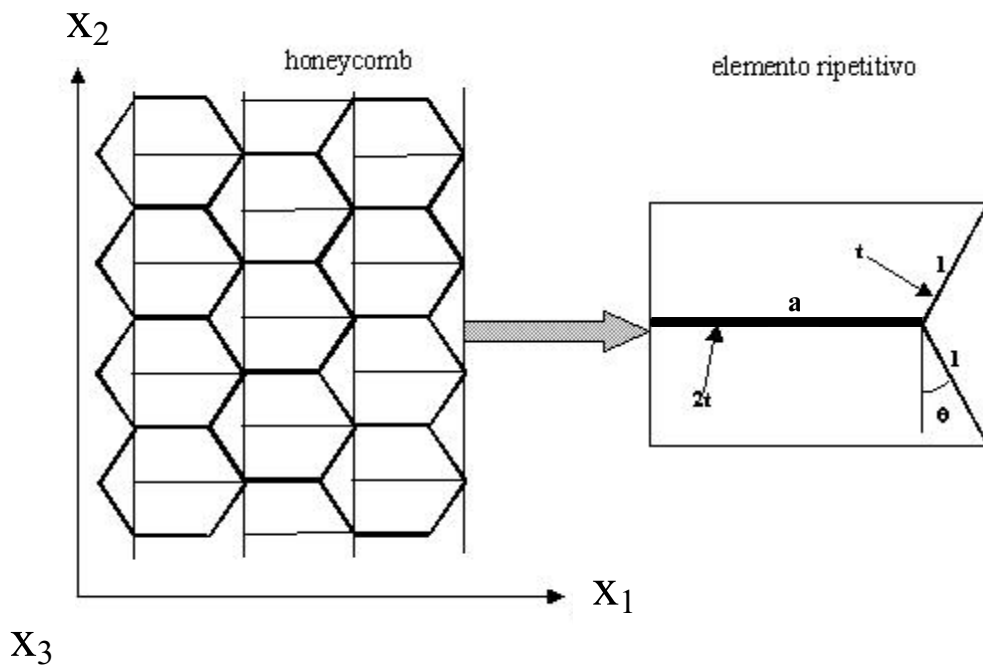


Figura 2.1: Elemento ripetitivo di un cuore honeycomb; parametri geometrici indipendenti.

Considerando il complesso dei lavori dedicati alle costanti elastiche equivalenti per i cuori honeycomb, si può notare che i modelli si dividono in due principali categorie

- modelli che non considerano l'effetto di spessore;
- modelli che considerano l'effetto di spessore.

Con il termine effetto di spessore si indica l'influenza che le facce del pannello sandwich hanno sul comportamento meccanico del cuore. In pratica, si può affermare che quando il cuore è molto spesso, l'effetto delle facce è trascurabile e viceversa. Vedremo nel seguito come utilizzare le informazioni che derivano da entrambe le tipologie di modelli.

Va poi ricordato che non esistono attualmente lavori in grado di fornire l'intero set di (9) costanti ingegneristiche o dei corrispondenti coefficienti della matrice [C]. Il calcolo delle costanti relative alla deformabilità nel piano, alla deformabilità per taglio trasversale ed alla deformabilità trasversale normale è basato su diversi meccanismi deformativi, difficilmente riconducibili ad un solo modello.

2.3.1.1 Costanti ingegneristiche nel piano (E_1 , E_2 , ν_{12} e G_{12})

Il modello proposto da Becker [37] permette di calcolare i coefficienti C_{11} , C_{12} e C_{22} della matrice [C] tenendo in conto l'effetto di spessore. Si tratta di determinare il campo di spostamenti delle pareti delle celle dell'honeycomb a diretto contatto delle facce e a notevole distanza da esse; noti gli spostamenti, si calcola l'energia di deformazione e, da questa, le suddette costanti [37],[R1]. I risultati sono quindi validi per qualunque valore dello spessore. Non è possibile però ottenere, per C_{11} , C_{12} e C_{22} , delle formule esplicite in termini dei parametri geometrici e delle caratteristiche del materiale. Va poi ricordato che, se vogliamo ricondurre tutti i modelli alla determinazione delle costanti ingegneristiche, dobbiamo, nel caso del modello di Becker, passare da C_{11} , C_{12} e C_{22} a E_1 , E_2 e ν_{12} . Anticipiamo, infatti, che per i cuori honeycomb risulta in generale vero che

$$\nu_{13} \approx \nu_{23} \approx \nu_{31} \approx \nu_{32} \ll 1 \quad (2.58)$$

Usando allora le (2.8) e (2.9) si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} C_{11} &\cong \frac{E_1}{1 - (\nu_{12})^2 \frac{E_2}{E_1}} \\ C_{12} &\cong \frac{\nu_{12} E_2}{1 - (\nu_{12})^2 \frac{E_2}{E_1}} \\ C_{22} &\cong \frac{E_2}{1 - (\nu_{12})^2 \frac{E_2}{E_1}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

da cui, facilmente,

$$\begin{aligned} E_1^{BE} &\cong C_{11}^{BE} - \frac{(C_{12}^{BE})^2}{C_{22}^{BE}} \\ E_2^{BE} &\cong C_{22}^{BE} - \frac{(C_{12}^{BE})^2}{C_{11}^{BE}} \\ \nu_{12}^{BE} &\cong \frac{C_{12}^{BE}}{C_{22}^{BE}} \end{aligned} \quad (2.60)$$

dove l'apice "BE" si riferisce a grandezze calcolate con il modello di Becker [37] citato in precedenza. Le formule (2.60) così ricavate sono (almeno indirettamente, visto che non sono esplicitabili) confrontabili con quelle ottenute da Masters e Evans [38]. Questi ultimi hanno, però, lavorato senza tenere in conto l'effetto delle facce, per cui le loro formule sono valide solo nel caso in cui lo spessore del cuore sia elevato (al limite infinito). In tale caso limite, quindi, è possibile fare un confronto con i risultati di Becker [R1]; i due modelli risultano in buonissimo accordo, come verificato in [R1]. Masters e Evans ricavano le 4 costanti ingegneristiche nel piano (oltre a quelle viste in precedenza c'è anche G_{12}) a partire dall'ipotesi che le celle delle pareti dell'honeycomb si comportino come travi. La deformazione complessiva è data dalla somma dei contributi dei modi membranale, flessionale e di taglio [38],[R1]. Le formule finali per le costanti ingegneristiche sono le seguenti

$$\frac{E_1^{ME}}{ET} = \left(\frac{R + \sin\theta}{\cos\theta} \right) \frac{1}{(R + \sin^2\theta) + \frac{1+6Q}{T^2}(\cos^2\theta)} \quad (2.61)$$

$$\frac{E_2^{ME}}{ET} = \left(\frac{\cos\theta}{R + \sin\theta} \right) \frac{1}{(\cos^2\theta) + \frac{1+6Q}{T^2}(\sin^2\theta)} \quad (2.62)$$

$$\nu_{12}^{ME} = \sin\theta(R + \sin\theta) \frac{-1 + \frac{1+6Q}{T^2}}{(R + \sin^2\theta) + \frac{1+6Q}{T^2}(\cos^2\theta)} \quad (2.63)$$

$$\frac{G_{12}^{ME}}{ET} = \cos\theta(R + \sin\theta) \frac{1}{(1 + R\sin\theta)^2 + \frac{R^2(R + 4 + 30Q)}{4T^2}(\cos^2\theta)} \quad (2.64)$$

Da un punto di vista operativo, quindi, le costanti E_1 , E_2 e ν_{12} vanno più correttamente calcolate con il modello di Becker (usando le (2.60)), poiché questo tiene in conto l'effetto di spessore. Per quanto riguarda G_{12} , è disponibile la sola (2.64) dovuta a Masters e Evans ma basata su un modello che non considera l'effetto delle facce, per cui vale a rigore per cuori honeycomb molto spessi.

2.3.1.2 Costanti ingegneristiche di taglio trasversale (G_{13} e G_{23})

Le costanti G_{13} e G_{23} sono tra le più importanti nei cuori honeycomb e, in generale, nei cuori di pannelli sandwich. Questo perché il cuore ha soprattutto la funzione di resistere al taglio trasversale. La presenza numerosi di lavori su queste costanti conferma l'importanza del problema.

I modelli tradizionalmente utilizzati sono quello di Chang e Ebcioğlu [39] e quello di Penzien e Didriksson [40]. Nel primo caso le formule ottenute sono valide per spessori ridotti (al limite nulli)

$$\frac{G_{13}^{CE}}{ET} = \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \frac{R + \sin^2\theta}{\cos\theta(R + \sin\theta)} \quad (2.65)$$

$$\frac{G_{23}^{CE}}{ET} = \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\cos\theta}{R + \sin\theta} \quad (2.66)$$

Nel secondo caso, invece, i risultati sono validi per cuori dallo spessore elevato (al limite infinito)

$$\frac{G_{13}^{PD}}{ET} = \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \frac{R + \sin\theta}{\cos\theta(R + 1)} \quad (2.67)$$

$$\frac{G_{23}^{PD}}{ET} = \frac{1}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\cos\theta}{R + \sin\theta} \quad (2.68)$$

Come si nota, nel caso di G_{23} le due trattazioni forniscono lo stesso risultato.

Naturalmente rimane il problema di determinare G_{13} nel caso di uno spessore qualunque (per G_{23} , come detto, i due modelli "estremi" coincidono). Grediac [41], con alcuni calcoli basati su modelli agli elementi finiti dei cuori honeycomb, dimostra che è possibile usare la seguente formula

$$G_{13}^{GR} = G_{13}^{PD} + \frac{k}{S} (G_{13}^{CE} - G_{13}^{PD}) \quad (2.69)$$

dove k è un parametro da determinarsi (con il metodo dei minimi quadrati) in modo che la (2.69) descriva al meglio i risultati dei calcoli agli elementi finiti.

2.3.1.3 Le altre costanti ingegneristiche (E_3 , ν_{13} e ν_{23})

Non esistono lavori specificamente dedicati al calcolo delle costanti E_3 , ν_{13} e ν_{23} nel caso di cuori honeycomb. E' però possibile riconvertire a tale scopo alcune formule valide nel caso dei cuori corrugati [R1]

$$\frac{E_3}{ET} = \frac{R+1}{\cos\theta(R+\sin\theta)} \quad (2.70)$$

$$\nu_{13} = \nu \frac{T^2(R+\sin\theta)^2}{(R+1)[(3R+1)\cos^2\theta + T^2(R+\sin^2\theta)]} \quad (2.71)$$

$$\nu_{23} = \nu \frac{T^2\cos^2\theta}{(R+1)[R^3 + 3\sin\theta \cdot R^2 + 3\sin^2\theta \cdot R + \sin^2\theta + T^2\cos^2\theta]} \quad (2.72)$$

2.3.1.4 Densità (ρ_{eq})

La formula per la determinazione della densità equivalente ρ_{eq} di un cuore a nido d'ape si può determinare in base a semplici considerazioni di conservazione della massa [R1]

$$\frac{\rho_{eq}}{\rho_f T} = \frac{\left[1 + R \left(1 + \frac{\rho_b t_b}{2\rho_f t} \right) \right]}{\cos\theta(R+\sin\theta)} \cong \frac{1+R}{\cos\theta(R+\sin\theta)} \quad (2.73)$$

dove t_b indica lo spessore degli strati di adesivo che uniscono le celle e ρ_b la densità dell'adesivo stesso. Il contributo degli strati di adesivo al calcolo della densità equivalente è legato a due rapporti; il rapporto tra la densità dell'adesivo e quella delle pareti ed il rapporto analogo tra gli spessori. Dato che in genere il prodotto di tali due rapporti non supera 0.1, si comprende come sia del tutto ragionevole trascurare la presenza dell'adesivo.

2.3.2 Modelli per cuori corrugati

I cuori corrugati più tradizionali hanno una struttura analoga a quella degli honeycombs; in questo caso, però, le pareti sono disposte con l'asse nel piano del pannello (vedi Fig. 2.3).

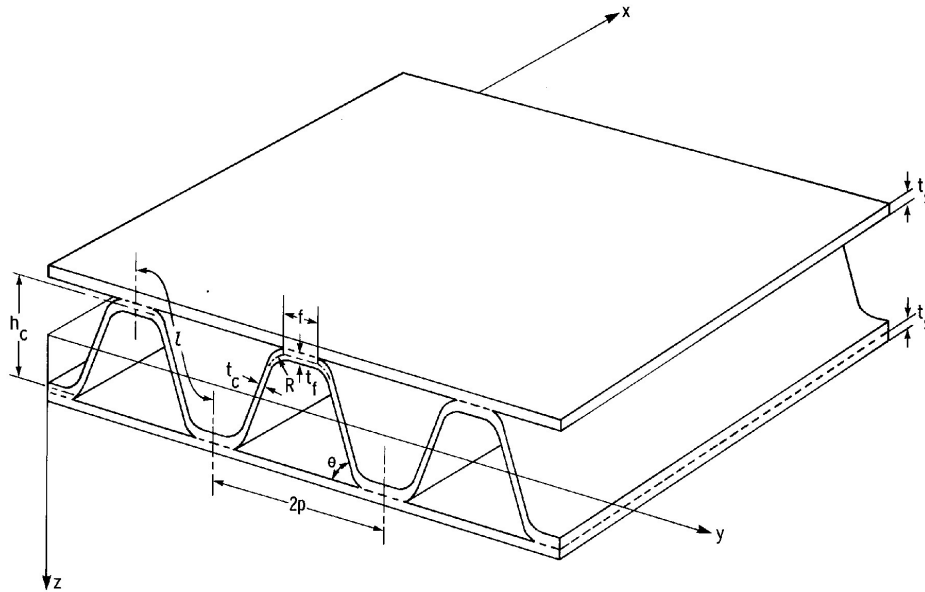


Figura 2.3: Geometria di un cuore corrugato unidirezionale.

Sono possibili geometrie più complesse, tanto è vero che si parla non solo di **cuori corrugati unidirezionali** (Fig. 2.3) ma anche di **cuori ortogonalmente corrugati** (Fig. 2.4).

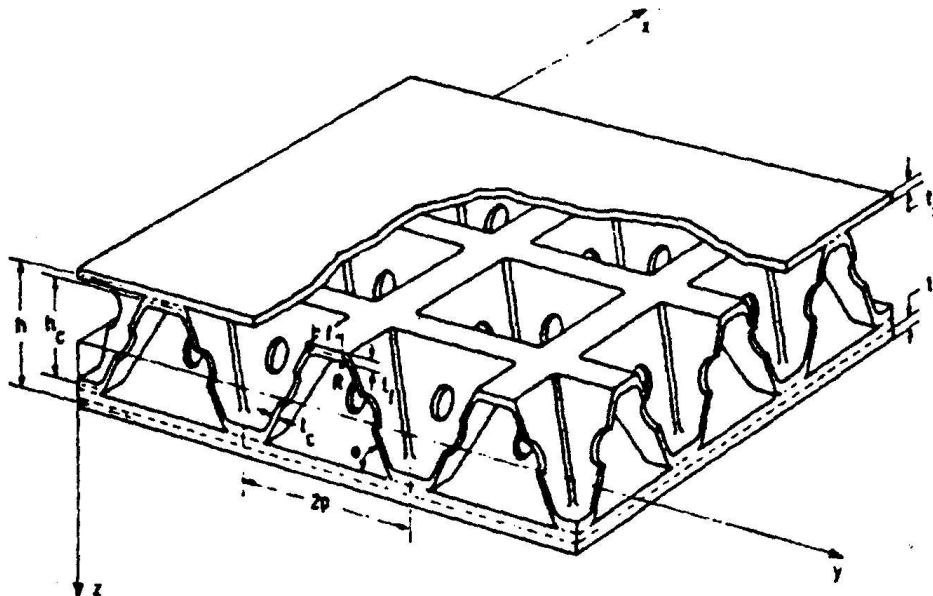


Figura 2.4: Geometria di un cuore ortogonalmente corrugato.

Tra i molti lavori dedicati a questo tipo di cuore, ricordiamo quelli fondamentali di W. L. Ko ([42],[43]), nei quali sono forniti dei modelli di studio del comportamento dei pannelli sandwich con cuori corrugati. In particolare, Ko si occupa di cuori ottenuti con una particolare procedura detta di **superplastic forming/diffusion bonding**: non ci soffermiamo su tale aspetto tecnologico del problema, ma ricordiamo solamente che è così possibile ottenere corrugazioni a spessore variabile (nei cuori corrugati tradizionali lo spessore era costante per cui le formule ricavate da Ko sono valide anche nel loro caso). Un esempio di questa particolarità si può avere nelle Fig. 2.3 e 2.4; per maggiori dettagli si veda la Fig. 2.5 dove sono evidenziati i parametri geometrici che caratterizzano l'elemento ripetitivo della corrugazione.

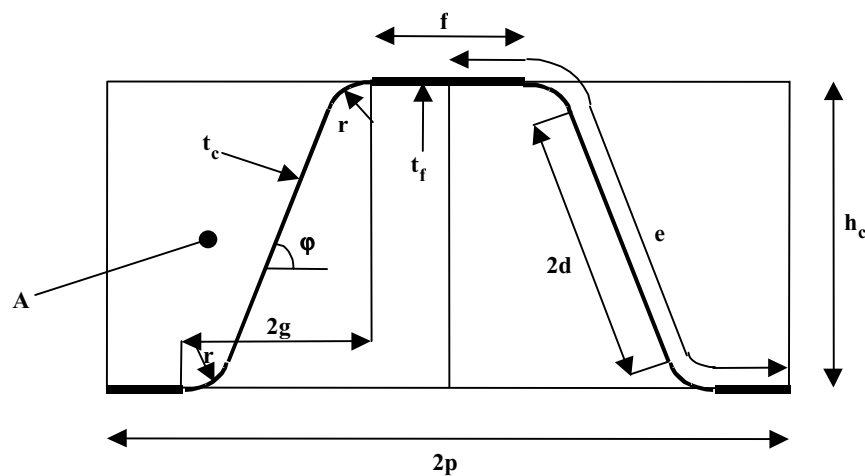


Figura 2.5: Elemento ripetitivo di un cuore corrugato: parametri geometrici caratteristici.

Degli 11 parametri presenti 6 sono indipendenti e cioè f , d , r , φ , t_f e t_c , mentre h_c , e , p , g e A si possono ricavare dai primi in base a semplici considerazioni geometriche. Anche per i cuori corrugati si fa l'ipotesi di materiale isotropo (di costanti E , G e ν , con densità ρ_f) costituente le pareti. Non ci soffermiamo sulla derivazione delle formule che danno le costanti elastiche dei cuori corrugati in funzione della geometria e del materiale (si tratta di approcci del tipo di quelli presentati per i cuori a nido d'ape). Per il dettaglio delle formule si veda [R1] e per la derivazione completa delle stesse la bibliografia dello stesso report. Notiamo solamente come le formule fornite da Ko siano un insieme completo in grado, cioè, di fornire tutte le costanti ingegneristiche equivalenti. Anzi, le costanti ricavate sono 12 e non 9 come per tutti i materiali ortotropi (i coefficienti di Poisson non rispettano le relazioni (2.7)). In sostanza, il comportamento di questi cuori corrugati non si può ridurre ad un continuo equivalente ortotropo, anche se si tratterebbe di una approssimazione accettabile.

Concludiamo l'analisi del cuore corrugato con una formula che ci permette di calcolare la densità dello strato equivalente; da semplici considerazioni sulla Fig. 2.5 (cuore corrugato unidirezionale) si ha

$$\rho_{eq} = \rho_f \frac{ft_f + (e-f)t_c}{ph_c} \quad (2.74)$$

Nel caso di cuore ortogonalmente corrugato si può ragionevolmente utilizzare una densità doppia di quella calcolata per il cuore corrugato unidirezionale.

Ricordiamo infine l'esistenza di altri tipi di cuori corrugati; si tratta di strutture dette "poligonali" nelle quali l'elemento ripetitivo è solitamente un tronco di cono o un tronco di piramide a base poligonale (vedere bibliografia in [R1]).

Capitolo 3

I modelli zig-zag classici per gusci multistrato; trattazione comune con alcune teorie ESL

3.1 Introduzione

Nel seguente capitolo presentiamo la derivazione del campo di spostamenti per entrambi i modelli zig-zag di Di Sciuva [6],[22]-[28]: il modello zig-zag lineare (LZZ) ed il modello zig-zag cubico (CZZ). La loro trattazione è, infatti, per molti versi analoga. Precisiamo che tale trattazione riguarda, più in generale, i gusci nell'ipotesi che siano sottili (shallow shell theory). Per quanto concerne la derivazione del campo di spostamenti, nulla cambia rispetto al caso delle piastre; quando si tratterà, invece, di scrivere le equazioni del moto, si dovranno tenere in conto gli effetti della curvatura e delle imperfezioni geometriche iniziali. *Rispetto ai lavori di Di Sciuva, che qui sono ripresi, una piccola modifica è stata introdotta per il campo di spostamenti [P1],[C1]; la superficie di riferimento del laminato non deve per forza coincidere con la faccia inferiore, bensì può essere qualunque superficie compresa lungo lo spessore del laminato. Questa caratteristica consente di "posizionare" i gradi di libertà (definiti appunto sulla superficie di riferimento) ovunque lungo lo spessore; inoltre consente di sfruttare le semplificazioni nel caso di laminato simmetrico, se la superficie media è scelta come superficie di riferimento.*

La forma compatta nella quale verrà espresso il campo di spostamenti per LZZ e CZZ risulterà molto simile a quella che si può usare per altri modelli: il modello di Kirchhoff (CLPT), il modello di Mindlin-Reissner (FSDT) e il modello higher-order di Reddy. Sarà allora possibile conglobare in un'unica espressione tutti questi modelli e, per mezzo dell'annullamento di opportuni "flags", particolarizzarla nei vari casi. Come vedremo in seguito, il vantaggio di avere un'espressione unica per diversi modelli, verrà esteso anche alla scrittura delle equazioni del moto e delle condizioni al contorno. Anche dal punto di vista dell'implementazione numerica dei diversi modelli, la possibilità di passare da uno all'altro con la sola scelta dei valori (0 o 1) dei flags, è di notevole utilità.

3.2 Geometria del guscio, notazioni e ipotesi

Il guscio multistrato che consideriamo (Fig. 3.1) è costituito da N strati di materiale ortotropo omogeneo con differenti proprietà fisiche e meccaniche; immaginiamo, inoltre, che tali strati possano essere incollati tra loro in modo non perfetto, originando in tal modo degli scorrimenti interlaminari. V è la regione occupata dal guscio nella sua configurazione indeformata e Ω è la sua superficie di riferimento con bordo Γ ; Ω^+ e Ω^- indicano le facce superiore e inferiore del laminato, mentre S è la superficie cilindrica laterale di V . Inoltre, S_p , S_u e Γ_p , Γ_u indicano le due parti di S e Γ dove forze e spostamenti, rispettivamente, sono imposti. Come già detto in precedenza, la posizione della superficie di riferimento Ω può essere scelta in modo che disti di ηh a partire da Ω^- , con $0 \leq \eta \leq 1$. I punti dello regione tridimensionale V sono riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane curvilinee x_i , dove x_α sono le coordinate tangenziali (quelle nel piano della superficie di riferimento, coincidenti con le sue linee di curvatura principali) e x_3 è la coordinata di spessore a partire da Ω . Sia quindi $Z(x_\alpha)$ la distanza della superficie Ω dalla sua proiezione sul piano (x_1, x_2) ; indichiamo poi con $w^*(x_\alpha)$ le piccole imperfezioni geometriche iniziali. Lo spessore del k -esimo strato e quello dell'intero guscio sono indicati con ${}^{(k)}h$ (con $k=1,2,\dots,N$) e h , rispettivamente, e sono supposti costanti. Le distanze lungo x_3 tra la superficie di riferimento Ω e le facce inferiore e superiore dello strato k -esimo sono indicate con ${}^{(k)}z^-$ e ${}^{(k)}z^+$, rispettivamente. Si ha infine che ${}^{(1)}z^- = z_B$ e ${}^{(N)}z^+ = z^T$ (Fig. 3.2).

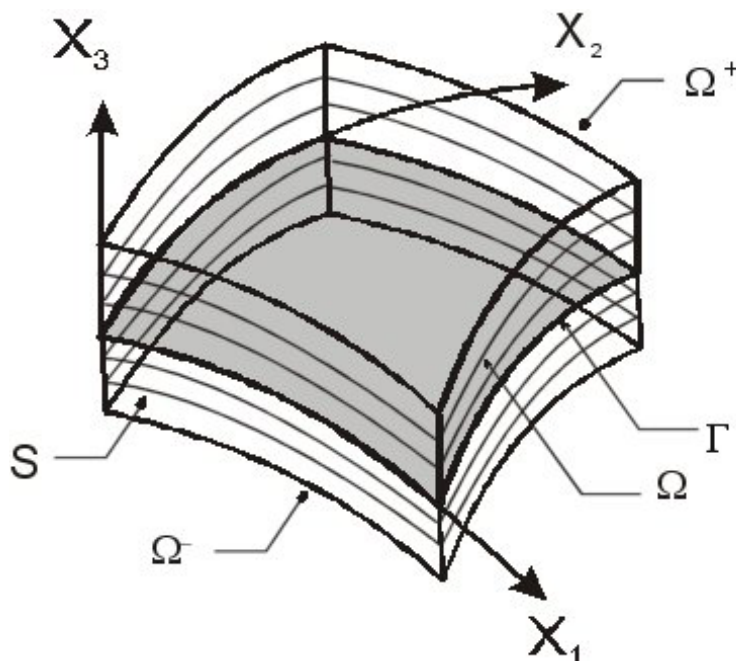


Figura 3.1: Geometria e notazioni del guscio multistrato.

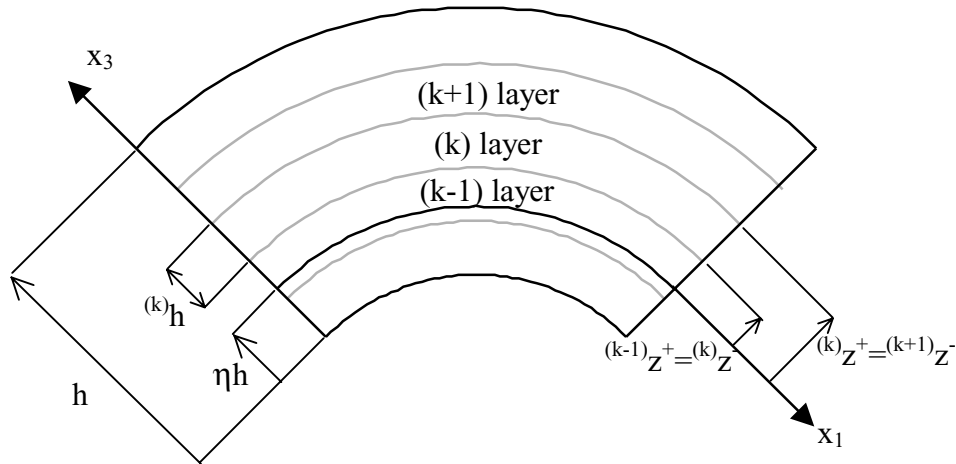


Figura 3.2: Notazioni relative alla laminazione del guscio multistrato.

La derivazione verrà fatta nell'ipotesi della teoria dei gusci piatti (**shallow shell theory**); la condizione di validità di tale teoria è che Z sia piccola se confrontata con le dimensioni tangenziali del guscio o con il minimo raggio di curvatura di Ω

$$\max(Z_{,\alpha}) \ll 1 \quad (3.1)$$

Ogni strato del guscio è supposto comportarsi come un solido elastico, omogeneo ed ortotropo. Lo stato tensionale è inoltre caratterizzato dall'ipotesi che¹

$$\sigma_{33} = 0 \quad (3.2)$$

Le equazioni costitutive sono dunque le seguenti (vedere la (2.52))

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= Q_{\alpha\beta\gamma\psi} \cdot \varepsilon_{\gamma\psi} - \omega_{\alpha\beta} \cdot \Theta \\ \tau_{\alpha 3} &= Q_{\alpha 3\gamma 3} \cdot \gamma_{\gamma 3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Per quanto riguarda il campo deformativo, usiamo un'espressione più generale della (2.24); si tratta del campo deformativo parzialmente non-lineare di von Kàrmàn (deformazioni piccole e rotazioni moderatamente piccole)

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta} &\equiv V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha} - 2V_3 Z_{,\alpha\beta} + V_{3,\alpha} V_{3,\beta} + V_{3,\alpha} w_{,\beta}^* + w_{,\alpha}^* V_{3,\beta} \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} &\equiv V_{\alpha,3} + V_{3,\alpha} = \gamma_{\alpha 3} \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹ Si noti che, per semplificare le notazioni rispetto al Cap. 2, le tensioni, le deformazioni e le coordinate geometriche del laminato sono indicate senza asterisco; sempre le deformazioni sono intese comunque totali, anche se l'apice "TOT" non compare più.

Il fatto che si stia studiando un guscio, e non una piastra, non comporta solo una modifica nella classica definizione delle deformazioni (3.4) ma anche una diversa espressione degli integrali nel volume del guscio stesso. Considerando, però, l'ipotesi di gusci piatti, nel seguito tali integrali verranno indicati e calcolati come se fossero estesi ad un cilindro di spessore h e superficie "piana" di riferimento Ω .

3.3 Derivazione del campo di spostamenti

Consideriamo il seguente campo di spostamenti tangenziali

$$V_\alpha(x_i; t) = \bar{V}_\alpha(x_i; t) + \hat{V}_\alpha(x_i; t) + \tilde{V}_\alpha(x_i; t) + \kappa_\alpha(x_i; t) \quad (3.5)$$

Per quanto riguarda il primo termine a secondo membro

$$\bar{V}_\alpha(x_i; t) \equiv \sum_{r=0}^R x_3^r s_\alpha^{(r)}(x_\beta; t) \quad (3.6)$$

è il classico sviluppo in serie di potenze di x_3 , di classe C^∞ rispetto alla coordinata di spessore e normalmente usato nelle teorie ESL. A seconda che lo sviluppo si fermi a $R=1$ o a $R=3$ avremo, rispettivamente, i modelli LZZ o CZZ.

$$\hat{V}_\alpha(x_i; t) \equiv \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\phi_\alpha(x_\beta; t) (x_3 - {}^{(k)}z^+) H_k \quad (3.7)$$

fornisce un contributo di classe C^0 agli spostamenti tangenziali ($H_k \equiv H(x_3 - {}^{(k)}z^+)$ è la funzione a gradino di Heaviside). Questa parte dell'espressione degli spostamenti tangenziali viene usata per imporre la condizione di continuità delle tensioni di taglio trasversale (imponendo la quale si determinano le ${}^{(k)}\phi_\alpha$).

$$\tilde{V}_\alpha(x_i; t) \equiv \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}S_\alpha(x_\beta; t) H_k \quad (3.8)$$

è una funzione discontinua dello spessore (in corrispondenza alle interfacce) e serve per introdurre i salti negli spostamenti tangenziali dovuti agli scorrimenti interlaminari. Per tale scorrimento ipotizziamo [21] una legge di dipendenza lineare della discontinuità degli spostamenti tangenziali dalle tensioni di taglio trasversale all'interfaccia danneggiata

$${}^{(k)}S_\alpha(x_\beta; t) = {}^{(k)}T_{\alpha\beta}(x_\chi; t) \tau_{\beta 3}(x_\chi, {}^{(k)}z^+; t) \quad (3.9)$$

dove ${}^{(k)}T_{\alpha\beta} \geq 0$ sono le **costanti di scorrimento** tra lo strato k -esimo e lo strato $(k+1)$ -esimo. La legge (3.9) vale non solo nel caso di scorrimento interlaminare (${}^{(k)}T_{\alpha\beta} \neq 0, \infty$), ma anche nelle due situazioni limite di strati perfettamente incollati (${}^{(k)}T_{\alpha\beta} = 0$ da cui ${}^{(k)}S_\alpha = 0$) o completamente scollati (${}^{(k)}T_{\alpha\beta} \rightarrow \infty$ da cui $\tau_{\alpha 3}(x_\alpha, {}^{(k)}z^+; t) = 0$). Bisogna però fare molta attenzione nel concludere che se la (3.9) vale per tutti i possibili valori delle costanti di scorrimento, allora anche il nostro modello fornisce risultati validi per ogni livello di danno interlaminare; la (3.9) è semplicemente l'espressione della legge lineare di scorrimento e non dipende dal particolare campo di spostamenti al quale è associata. Notiamo poi che la natura del danneggiamento interlaminare che le (3.8)-(3.9) descrivono è quella di uno scorrimento tangenziale; tale approccio non è quindi in grado di considerare discontinuità nello spostamento trasversale, dovute a modi di apertura delle interfacce. Infine

$$\kappa_\alpha(x_i; t) = \kappa_\alpha(x_\beta; t) \quad (3.10)$$

è un termine costante nello spessore il cui utilizzo è legato alla possibilità di posizionare la superficie di riferimento Ω ovunque lungo lo spessore del laminato (Par. 3.3.2).

Per quanto riguarda lo spostamento trasversale,

$$V_3(x_i; t) = V_3^0(x_\alpha; t) \quad (3.11)$$

cioè, si immagina che sia costante lungo lo spessore del laminato.

3.3.1 Condizione di continuità delle tensioni di taglio trasversale

La fondamentale caratteristica dei modelli zig-zag è quella di garantire la continuità delle tensioni di taglio trasversale in ogni caso di laminazione. La condizione si può esprimere in forma compatta come segue

$${}^{(k)}\tau_{\alpha 3}^+ \equiv \tau_{\alpha 3}(x_\beta, {}^{(k)}z^+; t) = \tau_{\alpha 3}(x_\beta, {}^{(k+1)}z^-; t) \equiv {}^{(k+1)}\tau_{\alpha 3}^- \quad (3.12)$$

Per garantire il soddisfacimento della (3.12), iniziamo con il calcolare gli scorrimenti di taglio trasversale a partire dalle (3.5)-(3.11) ed usando la (3.4)

$$\gamma_{\alpha 3} = \sum_{r=0}^R r x_3^{r-1} s_\alpha^{(r)}(x_\beta; t) + \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\phi_\alpha(x_\beta; t) H_k + V_{3,\alpha}^0 \quad (3.13)$$

Si può facilmente dimostrare che

$${}^{(k+1)}\gamma_{\alpha 3}^- = {}^{(k)}\gamma_{\alpha 3}^+ + {}^{(k)}\phi_\alpha \quad (3.14)$$

e quindi, sostituendo la (3.3) e la (3.14) nella (3.12),

$${}^{(k)}Q_{\alpha 3\beta 3} \cdot {}^{(k)}\gamma_{\beta 3}^+ = {}^{(k+1)}Q_{\alpha 3\beta 3} \cdot \left({}^{(k)}\gamma_{\beta 3}^+ + {}^{(k)}\phi_{\beta} \right) \quad (3.15)$$

Risolvendo la (3.15) rispetto a ${}^{(k)}\phi_{\alpha}$, si ottiene

$${}^{(k)}\phi_{\alpha} = {}^{(k)}A_{\alpha\beta} \cdot {}^{(k)}\gamma_{\beta 3}^+ \quad (3.16)$$

dove

$${}^{(k)}A_{\alpha\beta} \equiv -\delta_{\alpha\beta} + \left({}^{(k+1)}Q_{\alpha 3\beta 3} \right)^{-1} \cdot {}^{(k)}Q_{\alpha 3\beta 3} \quad (3.17)$$

Si noti che la (3.16) deve essere ancora esplicitata in funzione di ${}^{(k)}\phi_{\alpha}$, visto che anche $\gamma_{\alpha 3}$ ne è funzione (vedere la (3.13)); se assumiamo per ${}^{(k)}\phi_{\alpha}$ la seguente espressione

$${}^{(k)}\phi_{\alpha} = \sum_{r=0}^R {}^{(k)}a_{\alpha\beta}^{(r)} \cdot s_{\beta}^{(r)} + {}^{(k)}b_{\alpha\beta}^0 \cdot V_{3,\beta}^0 \quad (3.18)$$

la sostituiamo nella (3.13), e questa poi nel secondo membro della (3.16), otteniamo una relazione per ${}^{(k)}\phi_{\alpha}$ che, confrontata con la (3.18), fornisce le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} {}^{(k)}a_{\alpha\beta}^{(r)} &= {}^{(k)}A_{\alpha\chi} \left(\delta_{\chi\beta} r \left({}^{(k)}z^+ \right)^{r-1} + \sum_{q=1}^{k-1} {}^{(q)}a_{\chi\beta}^{(r)} \right) \\ {}^{(k)}b_{\alpha\beta}^0 &= {}^{(k)}A_{\alpha\chi} \left(\delta_{\chi\beta} + \sum_{q=1}^{k-1} {}^{(q)}b_{\chi\beta}^0 \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ricordiamo che valgono le seguenti proprietà

$$\left. \begin{aligned} {}^{(k)}a_{\alpha\beta}^{(0)} &= 0 \\ {}^{(k)}a_{\alpha\beta}^{(1)} &= {}^{(k)}b_{\alpha\beta}^0 \end{aligned} \right\} \forall k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.20)$$

Sostituendo la (3.18) nella (3.7) e poi questa, con la (3.6) e la (3.8), nella (3.5) e riorganizzando i vari termini, otteniamo

$$\begin{aligned} V_{\alpha}(x_i; t) &= \sum_{r=0}^R P_{\alpha\beta}^{(r)}(x_3) \cdot s_{\beta}^{(r)}(x_{\chi}; t) + h_{\alpha\beta}^0(x_3) \cdot V_{3,\beta}^0(x_{\chi}; t) + \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}S_{\alpha}(x_{\chi}; t) H_k(x_3) \\ &+ \kappa_{\alpha}(x_{\chi}; t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

dove valgono le seguenti definizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(r)}(\mathbf{x}_3) &\equiv \mathbf{x}_3^r \cdot \delta_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\mathbf{a}_{\alpha\beta}^{(r)} \cdot (\mathbf{x}_3 - {}^{(k)}\mathbf{z}^+) \cdot \mathbf{H}_k \\ \mathbf{h}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{x}_3) &\equiv \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\mathbf{b}_{\alpha\beta}^0 \cdot (\mathbf{x}_3 - {}^{(k)}\mathbf{z}^+) \cdot \mathbf{H}_k \end{aligned} \quad (3.22)$$

Valgono inoltre le seguenti, ottenute ricordando le (3.20),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(0)} &= \delta_{\alpha\beta} \\ \mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(1)} &= \mathbf{h}_{\alpha\beta}^0 + \delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}_3 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Il terzo termine a secondo membro della (3.21) può essere riscritto usando le (3.9),(3.3)

$$\sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\mathbf{S}_{\alpha} \cdot \mathbf{H}_k = \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\mathbf{T}_{\alpha\beta} \cdot {}^{(k)}\mathbf{Q}_{\beta 3 \chi 3} \cdot {}^{(k)}\gamma_{\chi 3}^+ \cdot \mathbf{H}_k \quad (3.24)$$

A questo punto, inoltre, possiamo calcolare $\gamma_{\alpha 3}$ usando direttamente la (3.21)

$$\gamma_{\alpha 3} = \sum_{r=0}^R \mathbf{P}_{\alpha\beta,3}^{(r)} \cdot \mathbf{s}_{\beta}^{(r)} + \mathbf{h}_{\alpha\beta,3}^0 \cdot \mathbf{V}_{3,\beta}^0 \quad (3.25)$$

Sostituendo la (3.25) nella (3.24), quest'ultima nella (3.21) e raggruppando opportunamente i vari termini, otteniamo

$$\mathbf{V}_{\alpha}(\mathbf{x}_i; \mathbf{t}) = \sum_{r=0}^R \bar{\mathbf{P}}_{\alpha\beta}^{(r)}(\mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{s}_{\beta}^{(r)}(\mathbf{x}_{\chi}; \mathbf{t}) + \bar{\mathbf{h}}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{V}_{3,\beta}^0(\mathbf{x}_{\chi}; \mathbf{t}) + \kappa_{\alpha}(\mathbf{x}_{\chi}; \mathbf{t}) \quad (3.26)$$

essendo

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{\alpha\beta}^{(r)}(\mathbf{x}_3) &\equiv \mathbf{P}_{\alpha\beta}^{(r)}(\mathbf{x}_3) + \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\mathbf{T}_{\alpha\lambda} \cdot {}^{(k)}\mathbf{Q}_{\lambda 3 \chi 3} \cdot \mathbf{P}_{\chi\beta,3}^{(r)}({}^{(k)}\mathbf{z}^+) \cdot \mathbf{H}_k \\ \bar{\mathbf{h}}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{x}_3) &\equiv \mathbf{h}_{\alpha\beta}^0(\mathbf{x}_3) + \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}\mathbf{T}_{\alpha\lambda} \cdot {}^{(k)}\mathbf{Q}_{\lambda 3 \chi 3} \cdot (\mathbf{h}_{\chi\beta,3}^0({}^{(k)}\mathbf{z}^+) + \delta_{\chi\beta}) \cdot \mathbf{H}_k \end{aligned} \quad (3.27)$$

con ancora (dalle (3.23))

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_{\alpha\beta}^{(0)} &= \delta_{\alpha\beta} \\ \bar{\mathbf{P}}_{\alpha\beta}^{(1)} &= \bar{\mathbf{h}}_{\alpha\beta}^0 + \delta_{\alpha\beta} \mathbf{x}_3 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Scriviamo ora la (3.26) sviluppando la prima sommatoria e ricordando la (3.28)

$$V_{\alpha}(x_i; t) = s_{\alpha}^{(0)} + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(1)} \cdot s_{\beta}^{(1)} + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(2)} \cdot s_{\beta}^{(2)} + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(3)} \cdot s_{\beta}^{(3)} + (\bar{P}_{\alpha\beta}^{(1)} - \delta_{\alpha\beta} x_3) \cdot V_{3,\beta}^0 + \kappa_{\alpha} \quad (3.29)$$

e ancora

$$V_{\alpha}(x_i; t) = s_{\alpha}^{(0)} - \delta_{\alpha\beta} x_3 \cdot V_{3,\beta}^0 + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(1)} \cdot \mu_{\beta} + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(2)} \cdot s_{\beta}^{(2)} + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(3)} \cdot s_{\beta}^{(3)} + \kappa_{\alpha} \quad (3.30)$$

dove abbiamo definito

$$\mu_{\alpha} \equiv s_{\alpha}^{(1)} + V_{3,\alpha}^0 \quad (3.31)$$

3.3.2 I campi di spostamento dei modelli zig-zag lineare e zig-zag cubico

Da questo momento in poi la derivazione della forma finale del campo di spostamenti non è più comune ai due modelli. Se consideriamo, infatti, la sommatoria (3.6), abbiamo già ricordato che i termini fino a $R=1$ sono quelli del modello zig-zag lineare (LZZ), mentre quelli fino a $R=3$ sono del modello zig-zag cubico (CZZ). Questo vale allora anche per la sommatoria primo termine a secondo membro della (3.26).

Allora il campo di spostamenti tangenziali nel caso LZZ, a meno della determinazione di κ_{α} , è il seguente (dalla (3.30))

$$V_{\alpha}(x_i; t) = s_{\alpha}^{(0)} - \delta_{\alpha\beta} x_3 \cdot V_{3,\beta}^0 + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(1)} \cdot \mu_{\beta} + \kappa_{\alpha} \quad (3.32)$$

Nel caso del modello CZZ, invece, dobbiamo ancora eliminare 4 gradi di libertà con le altrettante condizioni di annullamento delle tensioni di taglio trasversale sulle due facce estreme del laminato (condizione valida nel caso in cui siano assenti carichi tangenziali distribuiti su tali due facce)

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\tau_{\alpha 3}^{-} &\equiv \tau_{\alpha 3}(x_{\beta}, z_B; t) = 0 \\ {}^{(N)}\tau_{\alpha 3}^{+} &\equiv \tau_{\alpha 3}(x_{\beta}, z_T; t) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Affinché la (3.33) sia valida per ogni laminazione, data la seconda delle (3.3), possiamo anche scrivere

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\gamma_{\alpha 3}^{-} &\equiv \gamma_{\alpha 3}(x_{\beta}, z_B; t) = 0 \\ {}^{(N)}\gamma_{\alpha 3}^{+} &\equiv \gamma_{\alpha 3}(x_{\beta}, z_T; t) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Se calcoliamo $\gamma_{\alpha 3}$ a partire dalla (3.30) e dalla (3.11), otteniamo

$$\gamma_{\alpha 3} = \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(1)} \cdot \mu_\beta + \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(2)} \cdot s_\beta^{(2)} + \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(3)} \cdot s_\beta^{(3)} \quad (3.35)$$

per cui, imponendo il rispetto delle (3.34),

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(1)}(z_B) \cdot \mu_\beta + \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(2)}(z_B) \cdot s_\beta^{(2)} + \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(3)}(z_B) \cdot s_\beta^{(3)} &= 0 \\ \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(1)}(z_T) \cdot \mu_\beta + \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(2)}(z_T) \cdot s_\beta^{(2)} + \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(3)}(z_T) \cdot s_\beta^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

La (3.36) è un sistema di 4 equazioni in 6 variabili ($s_\alpha^{(2)}, s_\alpha^{(3)}$ e μ_α); scegliendo, per esempio, $s_\alpha^{(3)}$ come variabile di riferimento, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= C_{\alpha\beta}^{13} \cdot s_\beta^{(3)} \\ s_\alpha^{(2)} &= C_{\alpha\beta}^{23} \cdot s_\beta^{(3)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

dove

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{13} &\equiv -(\bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(3)}(z_B) + \bar{P}_{\alpha\chi,3}^{(2)}(z_B) \cdot C_{\chi\beta}^{23}) \\ C_{\alpha\beta}^{23} &\equiv -(\bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(2)}(z_T) - \bar{P}_{\alpha\chi,3}^{(1)}(z_T) \cdot \bar{P}_{\chi\beta,3}^{(2)}(z_B))^{-1} \cdot (\bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(3)}(z_T) - \bar{P}_{\alpha\chi,3}^{(1)}(z_T) \cdot \bar{P}_{\chi\beta,3}^{(3)}(z_B)) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Va precisato, a questo punto, che la (3.37) è solo una delle tre possibilità che abbiamo di esprimere due dei tre gradi di libertà vettoriali μ_α , $s_\alpha^{(2)}$ e $s_\alpha^{(3)}$ in funzione di uno di essi. La scelta di $s_\alpha^{(3)}$ deriva semplicemente dal fatto che la (3.37) è l'unica relazione tra spostamenti generalizzati valida per qualunque posizione della superficie di riferimento lungo lo spessore ($0 \leq \eta \leq 1$). Sostituendo, dunque, le (3.37) nella (3.30), otteniamo la seguente

$$V_\alpha(x_i; t) = s_\alpha^{(0)} - \delta_{\alpha\beta} x_3 \cdot V_{3,\beta}^0 + (\bar{P}_{\alpha\chi}^{(1)} \cdot C_{\chi\beta}^{13} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)} \cdot C_{\chi\beta}^{23} + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(3)}) \cdot s_\beta^{(3)} + \kappa_\alpha \quad (3.39)$$

che è l'espressione del campo di spostamenti tangenziali del modello CZZ (sempre a meno della costante additiva κ_α , ancora da determinarsi).

Considerando che le espressioni per LZZ e CZZ sono analoghe ((3.32) e (3.39)), possiamo raggrupparle in un'unica forma

$$V_\alpha(x_i; t) = s_\alpha^{(0)} - \delta_{\alpha\beta} x_3 \cdot V_{3,\beta}^0 + L_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta + \kappa_\alpha \quad (3.40)$$

dove $L_{\alpha\beta}$ e θ_α assumono gli opportuni valori nei due casi

$$\left. \begin{aligned} L_{\alpha\beta} &\equiv \bar{P}_{\alpha\beta}^{(1)} \\ \theta_\alpha &\equiv \mu_\alpha \end{aligned} \right\} \text{LZZ} \\
 \left. \begin{aligned} L_{\alpha\beta} &\equiv \bar{P}_{\alpha\chi}^{(1)} \cdot C_{\chi\beta}^{13} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)} \cdot C_{\chi\beta}^{23} + \bar{P}_{\alpha\beta}^{(3)} \\ \theta_\alpha &\equiv s_\alpha^{(3)} \end{aligned} \right\} \text{CZZ}$$
(3.41)

Rimane infine da apportare una piccola modifica al campo di spostamenti tangenziali (3.40). Vogliamo che tra i gradi di libertà del modello compaiano gli spostamenti tangenziali della superficie di riferimento

$$S_\alpha^0 \equiv V_\alpha(x_\beta, 0; t) \quad (3.42)$$

Se proviamo a determinare S_α^0 dalla (3.40), otteniamo

$$S_\alpha^0 = s_\alpha^{(0)} + L_{\alpha\beta}(0) \cdot \theta_\beta + \kappa_\alpha \quad (3.43)$$

da cui l'espressione di κ_α

$$\kappa_\alpha = S_\alpha^0 - s_\alpha^{(0)} - L_{\alpha\beta}(0) \cdot \theta_\beta \quad (3.44)$$

che, sostituita nella (3.40), fornisce

$$V_\alpha(x_i; t) = S_\alpha^0 - \delta_{\alpha\beta} x_3 \cdot V_{3,\beta}^0 + \Pi_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta \quad (3.45)$$

dove

$$\Pi_{\alpha\beta}(x_3) \equiv L_{\alpha\beta}(x_3) - L_{\alpha\beta}(0) \quad (3.46)$$

3.3.3 I campi di spostamento dei modelli ESL e zig-zag in un'unica forma

La (3.45) riassume in un'unica espressione entrambi i campi di spostamenti tangenziali LZZ e CZZ. Ma tale relazione si presta anche a descrivere i modelli classici e higher-order. Se scriviamo infatti [P1],[C1]

$$V_\alpha(x_i; t) = S_\alpha^0 - \delta_K \cdot \delta_{\alpha\beta} x_3 \cdot V_{3,\beta}^0 + \delta_T \cdot F_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta \quad (3.47)$$

abbiamo che, assegnando gli opportuni valori ai due flags δ_K e δ_T ed alla funzione matriciale $F_{\alpha\beta}$, possiamo usare la (3.47) anche per alcuni modelli, diversi dai classici zig-zag, che hanno tutti in comune il medesimo andamento costante dello spostamento trasversale secondo la (3.11))

Modello	δ_K	δ_T	Funzione $F_{\alpha\beta}(x_3)$
CLPT	1	0	/
FSDT	0	1	$\delta_{\alpha\beta}x_3$
FSDT (generalizzata)	1	1	$\delta_{\alpha\beta}x_3$
LZZ	1	1	$\Pi_{\alpha\beta}(x_3)$
HSDT (Reddy)	1	1	$\delta_{\alpha\beta}\Psi(x_3)$
CZZ	1	1	$\Pi_{\alpha\beta}(x_3)$

Tabella 3.1: Modelli piastra compresi nell'espressione (3.47).

dove

$$\Psi(x_3) \equiv \frac{4}{3h^2}x_3^3 + \frac{2}{h}(2\eta-1)x_3^2 + 4\eta(\eta-1)x_3 \quad (3.48)$$

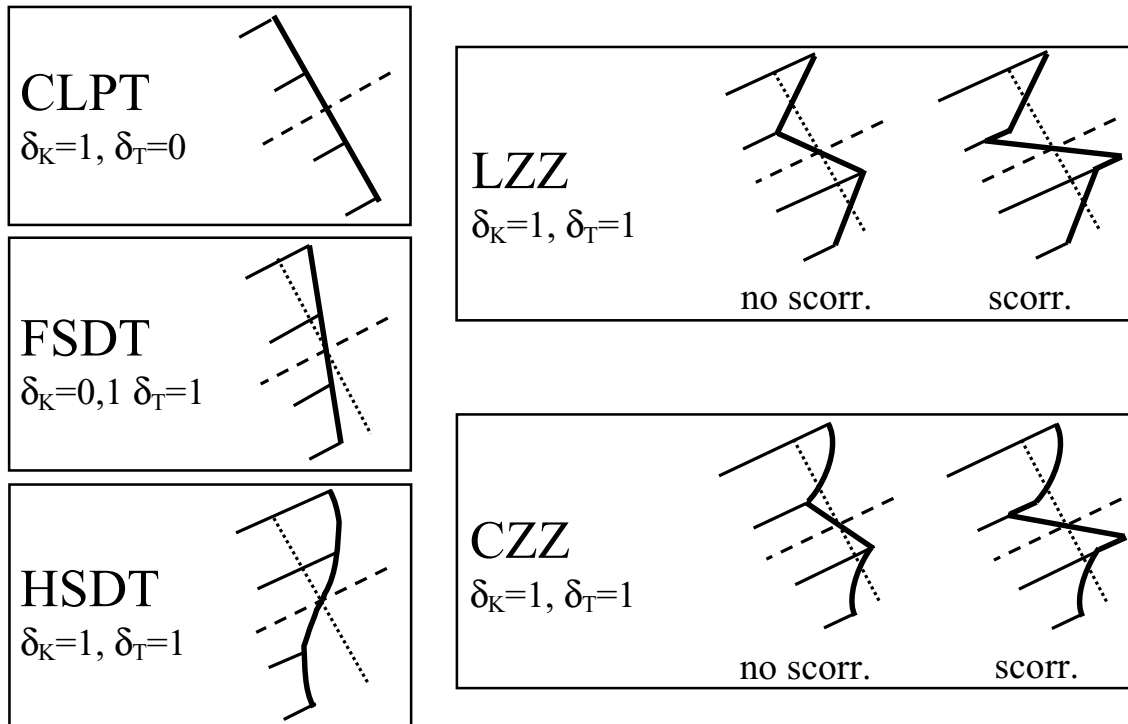


Figura 3.3: Deformazione del segmento di spessore per i vari modelli di Tab. 3.1.

Il modello FSDT generalizzato è usato al posto del classico FSDT per evitare, nella formulazione FEM, il problema dello shear-locking. La (3.48) è una generalizzazione della funzione di forma lungo lo spessore per la teoria cubica di Reddy [12], nel caso di generica posizione della superficie di riferimento; la (3.48), sostituita nella (3.47), fornisce, infatti, un campo di spostamenti tangenziali equivalente a quello di Reddy (vedere la (1.5)).

Non entriamo in ulteriori dettagli, ma ci sembra giusto precisare come la sequenza di modelli nella Tab. 3.1 non sia del tutto innaturale o forzata. Si pensi al fatto (dimostrabile) che nel caso di piastra monostrato, il modello LZZ coincide con il FSDT (generalizzato) e il modello CZZ coincide con l'HSDT (di Reddy). Si capisce, quindi, che il lavoro di Di Sciuva sui modelli zig-zag non è stato altro che una correzione dei tradizionali modelli del primo e del terzo ordine al fine di ottenere la continuità delle tensioni di taglio trasversale. Quando abbiamo a che fare con un solo strato, la correzione non è più necessaria e ricadiamo nei modelli di partenza. In Fig. 3.3 è riportato schematicamente il modo di distorsione della normale permesso dai modelli di Tab. 3.1.

Utilizzando quindi la (3.47) e la (3.11), sarà possibile scrivere le equazioni del moto, le condizioni al contorno e anche i programmi di calcolo per ben 6 modelli contemporaneamente; per passare dall'uno all'altro basterà solo scegliere i valori dei flags δ_K e δ_T e della funzione matriciale $F_{\alpha\beta}$.

3.4 Equazioni del moto e condizioni al contorno

Per ricavare le equazioni del moto e le relative condizioni al contorno valide per tutte le teorie comprese nell'espressione generale (3.47) (e (3.11)), usiamo il principio dei lavori virtuali. Consideriamo un generico guscio piatto multistrato (con densità del materiale ρ) soggetto ad un carico trasversale complessivo \bar{q} , distribuito sulle due facce, ed ai carichi \bar{f}_i , agenti sulla superficie cilindrica laterale S_p (la cui porzione appartenente allo strato k -esimo è indicata con $^{(k)}S_p$); applicando il principio dei lavori virtuali, otteniamo

$$\int_{\Omega} \langle \sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3} \rangle d\Omega = - \int_{\Omega} \langle \rho \ddot{V}_i \delta V_i \rangle d\Omega + \int_{\Omega} \bar{q} \delta V_3^0 d\Omega + \sum_{k=1}^N \int_{^{(k)}S_p} \bar{f}_i \delta V_i dS_p \quad (3.49)$$

Sviluppando opportunamente i termini contenuti nella (3.49), otteniamo le seguenti equazioni del moto in termini di caratteristiche di sollecitazione

$$\delta S_{\alpha}^{(0)} N_{\alpha\beta,\beta} = m^{(0)} \ddot{S}_{\alpha}^0 - \delta_K \cdot m^{(1)} \ddot{V}_{3,\alpha}^0 + \delta_T \cdot \mu_{\alpha\beta}^{(0)} \ddot{\theta}_{\beta} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & \delta V_3^0 \left(\delta_K \cdot M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + (1 - \delta_K) \cdot T_{\alpha,\alpha} + \right. \\ & N_{\alpha\beta} (Z + V_3^0 + w^*)_{,\alpha\beta} + N_{\alpha\beta,\beta} (V_3^0 + w^*)_{,\alpha} + \bar{q} = \\ & \left. m^{(0)} \ddot{V}_3^0 + \delta_K \cdot m^{(1)} \ddot{S}_{\alpha,\alpha}^0 - \delta_K \cdot m^{(2)} \ddot{V}_{3,\alpha\alpha}^0 + \delta_K \delta_T \cdot \mu_{\alpha\beta}^{(1)} \ddot{\theta}_{\beta,\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\delta\theta_\alpha) \delta_T \cdot (\hat{M}_{\beta\alpha,\beta} - \hat{T}_\alpha) = \delta_T \cdot \mu_{\beta\alpha}^{(0)} \ddot{S}_\beta^0 - \delta_K \delta_T \cdot \mu_{\beta\alpha}^{(1)} \ddot{V}_{3,\beta}^0 + \delta_T \cdot \pi_{\beta\alpha}^{(0)} \ddot{\theta}_\beta \quad (3.52)$$

dove valgono le seguenti definizioni per le risultanti generalizzate

$$\begin{aligned} (N_{\alpha\beta}; M_{\alpha\beta}; \hat{M}_{\alpha\beta}) &\equiv \langle \sigma_{\alpha\chi} (\delta_{\chi\beta}; \delta_{\chi\beta} x_3; F_{\chi\beta}) \rangle \\ (T_\beta; \hat{T}_\beta) &\equiv \langle \tau_{\alpha 3} (\delta_{\alpha\beta}; F_{\alpha\beta,3}) \rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

e per i termini inerziali

$$(m^{(i)}; \mu_{\alpha\beta}^{(i)}; \pi_{\alpha\beta}^{(i)}) \equiv \langle \rho x_3^i (\delta_{\alpha\beta}; F_{\alpha\beta}; F_{\chi\alpha} F_{\chi\beta}) \rangle \quad (3.54)$$

Introduciamo ora le equazioni costitutive dei modelli piastra

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta\chi\mu} S_{\chi,\mu}^0 - \delta_K \cdot B_{\alpha\beta\chi\mu} V_{3,\chi\mu}^0 + \delta_T \cdot \hat{A}_{\alpha\beta\chi\mu} \theta_{\chi,\mu} + \\ &\quad \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\chi\mu} (-2Z_{,\chi\mu} V_3^0 + V_{3,\chi}^0 V_{3,\mu}^0 + V_{3,\chi}^0 w_{,\mu}^* + w_{,\chi}^* V_{3,\mu}^0) + N_{\alpha\beta}^\ominus \\ M_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta\chi\mu} S_{\chi,\mu}^0 - \delta_K \cdot D_{\alpha\beta\chi\mu} V_{3,\chi\mu}^0 + \delta_T \cdot \hat{B}_{\alpha\beta\chi\mu} \theta_{\chi,\mu} + \\ &\quad \frac{1}{2} B_{\alpha\beta\chi\mu} (-2Z_{,\chi\mu} V_3^0 + V_{3,\chi}^0 V_{3,\mu}^0 + V_{3,\chi}^0 w_{,\mu}^* + w_{,\chi}^* V_{3,\mu}^0) + M_{\alpha\beta}^\ominus \\ \hat{M}_{\alpha\beta} &= \hat{A}_{\alpha\beta\chi\mu} S_{\chi,\mu}^0 - \delta_K \cdot \hat{B}_{\alpha\beta\chi\mu} V_{3,\chi\mu}^0 + \delta_T \cdot \hat{D}_{\alpha\beta\chi\mu} \theta_{\chi,\mu} + \\ &\quad \frac{1}{2} \hat{A}_{\alpha\beta\chi\mu} (-2Z_{,\chi\mu} V_3^0 + V_{3,\chi}^0 V_{3,\mu}^0 + V_{3,\chi}^0 w_{,\mu}^* + w_{,\chi}^* V_{3,\mu}^0) + \hat{M}_{\alpha\beta}^\ominus \\ T_\alpha &= (1 - \delta_K) \cdot A_{\alpha 3\chi 3} V_{3,\chi}^0 + \delta_T \cdot \hat{A}_{\alpha 3\chi 3} \theta_\chi \\ \hat{T}_\alpha &= (1 - \delta_K) \cdot \hat{A}_{\alpha 3\chi 3} V_{3,\chi}^0 + \delta_T \cdot \hat{D}_{\alpha 3\chi 3} \theta_\chi \end{aligned} \quad (3.55)$$

dove compaiono le rigidzze

$$\begin{aligned} (A_{\alpha\beta\tau\mu}; B_{\alpha\beta\tau\mu}; D_{\alpha\beta\tau\mu}) &\equiv \langle Q_{\alpha\gamma\tau\mu} \delta_{\gamma\beta} (1; x_3; x_3^2) \delta_{\pi\tau} \rangle \\ (\hat{A}_{\alpha\beta\tau\mu}; \hat{B}_{\alpha\beta\tau\mu}; \hat{D}_{\alpha\beta\tau\mu}) &\equiv \langle Q_{\alpha\gamma\tau\mu} (\delta_{\gamma\beta}; x_3 \delta_{\gamma\beta}; F_{\gamma\beta}) F_{\pi\tau} \rangle \\ A_{\beta 3\tau 3} &\equiv \langle Q_{\alpha 3\gamma 3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\tau} \rangle \\ (\hat{A}_{\beta 3\tau 3}; \hat{D}_{\beta 3\tau 3}) &\equiv \langle Q_{\alpha 3\gamma 3} (\delta_{\alpha\beta}; F_{\alpha\beta,3}) F_{\gamma\tau,3} \rangle \end{aligned} \quad (3.56)$$

e le risultanti termiche

$$\left(\mathbf{N}_{\alpha\beta}^{\ominus}; \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{\ominus}; \hat{\mathbf{M}}_{\alpha\beta}^{\ominus} \right) \equiv \left\langle -\Theta \omega_{\alpha\chi} \left(\delta_{\chi\beta}; \delta_{\chi\beta} \mathbf{x}_3; \mathbf{F}_{\chi\beta} \right) \right\rangle \quad (3.57)$$

Sostituendo quindi le (3.55) nelle (3.50)-(3.52) è possibile ottenere le equazioni del moto in termini degli spostamenti generalizzati; per brevità non riportiamo i risultati di questa sostituzione (vedere [P1],[C1]).

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, si ha

Geometriche (Γ_u)	Meccaniche (Γ_p)	
$\mathbf{S}_{\alpha}^0 = \bar{\mathbf{S}}_{\alpha}^0$	$\mathbf{N}_{\alpha n} = \bar{\mathbf{N}}_{\alpha n}$	
$\mathbf{V}_3^0 = \bar{\mathbf{V}}_3^0$	$\mathbf{N}_{\alpha n} \left(\mathbf{V}_3^0 + \mathbf{w}^* \right)_{,\alpha} + \delta_K \cdot \mathbf{V}_M + (1 - \delta_K) \cdot \mathbf{T}_T =$	(3.58)
	$\bar{\mathbf{T}}_3 + \delta_K \cdot \left(\mathbf{m}^{(1)} \ddot{\mathbf{S}}_{\alpha}^0 - \delta_K \cdot \mathbf{m}^{(2)} \ddot{\mathbf{V}}_{3,\alpha}^0 + \delta_T \cdot \mu_{\alpha\chi}^{(1)} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\chi} \right) \mathbf{n}_{\alpha}$	
$\mathbf{V}_{3,n}^0 = \bar{\mathbf{V}}_{3,n}^0$	$\mathbf{M}_{nn} = \bar{\mathbf{M}}_{nn}$	
$\boldsymbol{\theta}_{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha}$	$\hat{\mathbf{M}}_{\alpha n} = \bar{\hat{\mathbf{M}}}_{\alpha n}$	

dove \mathbf{n}_{α} è la componente secondo l'asse x_{α} del versore normale alla curva di contorno Γ e valgono, inoltre, le seguenti definizioni

$$\left(\bar{\mathbf{N}}_{\alpha n}; \bar{\mathbf{M}}_{\alpha n}; \bar{\hat{\mathbf{M}}}_{\alpha n} \right) \equiv \left\langle \bar{\mathbf{r}}_{\chi} \left(\delta_{\chi\alpha}; \delta_{\chi\alpha} \mathbf{x}_3; \mathbf{F}_{\chi\alpha} \right) \right\rangle \quad (3.59)$$

$$\mathbf{T}_3 \equiv \langle \bar{\mathbf{p}}_3 \rangle$$

$$\mathbf{V}_M \equiv \mathbf{M}_{\alpha\beta,\beta} \mathbf{n}_{\alpha} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{T}_T \equiv \mathbf{T}_{\alpha} \mathbf{n}_{\alpha}$$

Capitolo 4

Il modello zig-zag Hermitiano per piastre multistrato; deformabilità trasversale e carichi tangenziali

4.1 Introduzione

Il modello zig-zag cubico (CZZ) è un buon compromesso tra accuratezza e semplicità. Tra le capacità di modellizzazione ricordiamo la deformabilità al taglio trasversale, la continuità delle relative tensioni lungo lo spessore e il loro azzeramento sulle due facce estreme del laminato e, infine, la possibilità di valutare il comportamento di strutture danneggiate (scorrimento interlaminare). Questo è ottenibile con soli 5 gradi di libertà, esattamente come nel caso della molto meno accurata FSDT. Nel Cap. 1, però, abbiamo osservato come dalle teorie discrete-layer ci si aspetti anche qualcosa di più, soprattutto per applicazioni e strutture più complesse.

Elevati spessori e complesse laminazioni comportano la necessità di valutare anche la deformabilità lungo lo spessore; e, a questo scopo, non è più sufficiente un andamento dello spostamento trasversale costante nello spessore ed è necessario inserire i termini di tensione e deformazione trasversali normali nelle equazioni costitutive. Aggiungiamo poi, a questo punto della nostra trattazione, che per studiare in modo corretto i casi di multistrati soggetti a carichi tangenziali applicati sulle due facce estreme, è necessario che le tensioni di taglio trasversale assumano i valori di tali carichi agli estremi dell'intervallo di spessore. Per quest'ultima esigenza di modellizzazione, e in vista dello sviluppo di una procedura per sublaminati, sarebbe anche importante avere come gradi di libertà del modello gli spostamenti e le tensioni di taglio trasversale delle facce estreme del multistrato.

Il modello zig-zag Hermitiano (HZZ) che sarà sviluppato in questo capitolo è, per l'appunto, ottenuto a partire dal classico CZZ e presenta le caratteristiche aggiuntive elencate in precedenza. Per semplicità la formulazione verrà sviluppata per le piastre ed in assenza degli effetti della temperatura. Per altri dettagli, si veda [P2],[C2].

4.2 Geometria della piastra, notazioni e ipotesi

Per quanto riguarda le notazioni non cambia nulla rispetto a quanto indicato nel Par. 3.2. Come detto, in questo caso trattiamo una piastra e non un guscio e, inoltre, la superficie di riferimento Ω coincide con la faccia inferiore Ω^- .

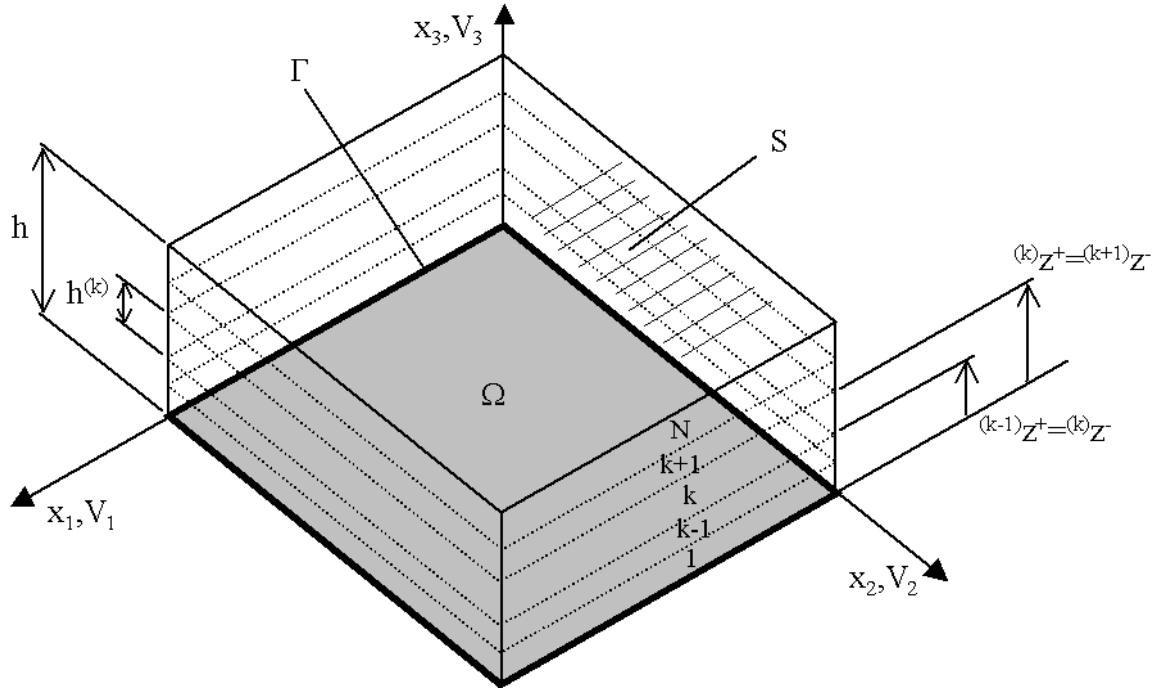


Figura 4.1: Geometria e notazioni di laminazione della piastra multistrato.

Le equazioni costitutive sono quelle per un campo deformativo e tensionale completi e senza gli effetti della temperatura (2.29)¹

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\beta} &= Q_{\alpha\beta\chi\psi} \cdot \varepsilon_{\chi\psi} + S_{33} \cdot R_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{33} \\
 \tau_{\alpha 3} &= Q_{\alpha 3\chi 3} \cdot \gamma_{\chi 3} \\
 \varepsilon_{33} &= -S_{33} \cdot R_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} + S_{33} \cdot \sigma_{33}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Le deformazioni (esclusa la ε_{33} che si ottiene dalla terza delle (4.1)) si ricavano usando le classiche relazioni lineari

¹ Anche in questo capitolo le notazioni sono semplificate rispetto a quanto indicato nel Cap. 2. Tensioni, deformazioni e coordinate geometriche del laminato sono indicate senza asterisco; sempre le deformazioni sono intese come totali, anche se l'apice "TOT" non compare più.

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\alpha\beta} &\equiv V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha} \\ 2\varepsilon_{\alpha 3} &\equiv V_{\alpha,3} + V_{3,\alpha} = \gamma_{\alpha 3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.3 Derivazione del campo di spostamenti

Anche in questo caso partiamo dal seguente campo di spostamenti tangenziali

$$V_\alpha(x_i; t) = \bar{V}_\alpha(x_i; t) + \hat{V}_\alpha(x_i; t) + \tilde{V}_\alpha(x_i; t) + \kappa_\alpha(x_i; t) \quad (4.3)$$

I termini contenuti nella (4.3) sono gli stessi e con le stesse proprietà di quelli descritti nel Par. 3.3 (in questo caso, va comunque ricordato che lo sviluppo del primo termine arriva fino ad $R=3$).

Per quanto riguarda lo spostamento trasversale, nel caso HZZ si suppone che sia lineare nello spessore

$$V_3(x_i; t) = \sum_{m=0}^1 L^{m+1}(x_3) V_3^{(m)}(x_\alpha; t) \quad (4.4)$$

dove L^{m+1} sono i due polinomi di Lagrange lineari

$$\begin{aligned} L^1(x_3) &\equiv 1 - \frac{x_3}{h} \\ L^2(x_3) &\equiv \frac{x_3}{h} \end{aligned} \quad (4.5)$$

e $V_3^{(0)}$ e $V_3^{(1)}$ sono gli spostamenti trasversali delle due facce estreme del laminato

4.3.1 Condizione di continuità delle tensioni di taglio trasversale

Anche in questo caso la continuità delle tensioni di taglio trasversale è la fondamentale proprietà che il modello deve possedere. Prima di cominciare la derivazione, però, è opportuno riscrivere la (4.4) in una forma che renda la trattazione fatta per il modello CZZ riutilizzabile per quella del modello HZZ. Si tratta di trasformare la (4.4) nella somma di un termine costante lungo lo spessore ed un termine variabile linearmente, in modo che il secondo si possa considerare come aggiuntivo rispetto al primo, già valido per il campo CZZ (vedere la (3.11))

$$V_3(x_i; t) = V_3^C(x_\alpha; t) + L'(x_3)V_3'(x_\alpha; t) \quad (4.6)$$

dove si ha

$$L' \equiv L^2 - L^1 = 2 \frac{x_3}{h} - 1 \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} V_3^C &= \frac{V_3^{(0)} + V_3^{(1)}}{2} \\ V_3' &= \frac{V_3^{(1)} - V_3^{(0)}}{2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Usando quindi la (4.3) e la (4.6), possiamo seguire una procedura analoga a quella descritta nel Par. 3.3.1 (per altri dettagli [P2]) ed ottenere

$$V_\alpha(x_i; t) = \sum_{r=0}^3 \bar{P}_{\alpha\beta}^{(r)}(x_3) \cdot s_\beta^{(r)}(x_\chi; t) + \bar{h}_{\alpha\beta}^0(x_3) \cdot V_{3,\beta}^C(x_\chi; t) + \bar{h}'_{\alpha\beta}(x_3) \cdot V_{3,\beta}'(x_\chi; t) + \kappa_\alpha(x_\chi; t) \quad (4.9)$$

che è del tutto simile alla (3.26) se si eccettua la presenza di un termine aggiuntivo per l'appunto legato alla parte lineare di variazione dello spostamento trasversale. Tutte le grandezze presenti nella (4.9) hanno, infatti, lo stesso significato e la stessa espressione del Cap. 3, eccetto le seguenti (definite a ritroso)

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\alpha\beta}(x_3) &\equiv h'_{\alpha\beta}(x_3) + \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}T_{\alpha\lambda} \cdot {}^{(k)}Q_{\lambda 3\chi 3} \cdot \left(h'_{\chi\beta,3}({}^{(k)}z^+) + \delta_{\chi\beta} L'({}^{(k)}z^+) \right) \cdot H_k \\ h'_{\alpha\beta}(x_3) &\equiv \sum_{k=1}^{N-1} {}^{(k)}b'_{\alpha\beta} \cdot (x_3 - {}^{(k)}z^+) \cdot H_k \\ {}^{(k)}b'_{\alpha\beta} &= {}^{(k)}A_{\alpha\chi} \left(\delta_{\chi\beta} L'({}^{(k)}z^+) + \sum_{q=1}^{k-1} {}^{(q)}b'_{\chi\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3.2 I gradi di libertà Hermitiani

Considerando che, rispetto al modello CZZ, c'è un grado di libertà in più (spostamento trasversale lineare e non costante), i gradi di libertà complessivi, contenuti nelle (4.9) e (4.6), saranno 10 e non più 9 come nelle (3.26) e (3.11). Di questi 8 sono relativi agli spostamenti tangenziali e 2 allo spostamento trasversale. Per quanto riguarda quest'ultimo, l'andamento è, come già visto nelle (4.4)-(4.5), di tipo lineare. Gli spostamenti tangenziali

sono invece cubici nello spessore² e, per mettere in evidenza il loro valore in corrispondenza alle facce estreme, scegliamo una descrizione di tipo Hermitiano [21],[34]. Intendiamo, quindi, con il termine di gradi di libertà Hermitiani, gli spostamenti tangenziali e le derivate prime di essi rispetto ad x_3 calcolati in corrispondenza di $x_3=0,h$.

Notando che valgono le seguenti

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{\alpha\beta}^{(r)}(x_3) &= P_{\alpha\beta}^{(r)}(x_3) = \delta_{\alpha\beta} x_3^r \\ \bar{h}_{\alpha\beta}^0(x_3) &= h_{\alpha\beta}^0(x_3) = 0 \\ \bar{h}'_{\alpha\beta}(x_3) &= h'_{\alpha\beta}(x_3) = 0 \end{aligned} \right\} \forall x_3 \in [0;^{(1)}z^+] \quad (4.11)$$

possiamo introdurre i gradi di libertà Hermitiani relativi agli spostamenti tangenziali

$$\begin{aligned} S_\alpha^0(x_\beta; t) &\equiv V_\alpha(x_\beta, 0; t) = s_\alpha^{(0)}(x_\beta; t) + \kappa_\alpha(x_\beta; t) \\ \Phi_\alpha^0(x_\beta; t) &\equiv V_{\alpha,3}(x_\beta, 0; t) = s_\alpha^{(1)}(x_\beta; t) \\ S_\alpha^h(x_\beta; t) &\equiv V_\alpha(x_\beta, h; t) = \sum_{r=0}^3 A_{\alpha\beta}^{(r)} \cdot s_\beta^{(r)}(x_\chi; t) + B_{\alpha\beta}^0 \cdot V_{3,\beta}^C(x_\chi; t) + B'_{\alpha\beta} \cdot V'_{3,\beta}(x_\chi; t) + \kappa_\alpha(x_\beta; t) \\ \Phi_\alpha^h(x_\beta; t) &\equiv V_{\alpha,3}(x_\beta, h; t) = \sum_{r=0}^3 {}^* A_{\alpha\beta}^{(r)} \cdot s_\beta^{(r)}(x_\chi; t) + {}^* B_{\alpha\beta}^0 \cdot V_{3,\beta}^C(x_\chi; t) + {}^* B'_{\alpha\beta} \cdot V'_{3,\beta}(x_\chi; t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta}^{(r)} &\equiv \bar{P}_{\alpha\beta}^{(r)}(h); & {}^* A_{\alpha\beta}^{(r)} &\equiv \bar{P}_{\alpha\beta,3}^{(r)}(h) \\ B_{\alpha\beta}^0 &\equiv \bar{h}_{\alpha\beta}^0(h); & {}^* B_{\alpha\beta}^0 &\equiv \bar{h}_{\alpha\beta,3}^0(h) \\ B'_{\alpha\beta} &\equiv \bar{h}'_{\alpha\beta}(h); & {}^* B'_{\alpha\beta} &\equiv \bar{h}'_{\alpha\beta,3}(h) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nella prima delle (4.12), per semplicità, poniamo $S_\alpha^0 = s_\alpha^0$ da cui

$$\kappa_\alpha = 0 \quad (4.14)$$

Per quanto riguarda i gradi di libertà Lagrangiani dello spostamento trasversale, si ha

$$\begin{aligned} V_3^0(x_\alpha; t) &\equiv V_3(x_\alpha, 0; t) = V_3^{(0)}(x_\alpha; t) = V_3^C(x_\alpha; t) - V_3'(x_\alpha; t) \\ V_3^h(x_\alpha; t) &\equiv V_3(x_\alpha, h; t) = V_3^{(1)}(x_\alpha; t) = V_3^C(x_\alpha; t) + V_3'(x_\alpha; t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

² Trattandosi di componenti entrambe cubiche nello spessore, è ovvio che per la descrizione di ognuna di esse siano necessari 4 gradi di libertà, per un totale appunto di 8.

4.3.3 Condizioni al contorno sulle facce estreme

Supponiamo che la piastra sia soggetta ad un sistema di carichi tangenziali $\bar{p}_\alpha^0(x_\beta; t)$ e $\bar{p}_\alpha^h(x_\beta; t)$ agenti sulle due facce esterne. Se indichiamo con $\tau_{\alpha 3}^0(x_\beta; t)$ e $\tau_{\alpha 3}^h(x_\beta; t)$ le tensioni di taglio trasversale per $x_3=0, h$ rispettivamente, deve essere

$$\begin{aligned}\bar{p}_\alpha^0 &= -\tau_{\alpha 3}^0 \\ \bar{p}_\alpha^h &= +\tau_{\alpha 3}^h\end{aligned}\quad (4.16)$$

Si noti che i segni presenti nella (4.16) sono dovuti alle convenzioni di segno; i carichi tangenziali esterni sono positivi se concordi con gli assi x_α , mentre le tensioni di taglio trasversale interne seguono tale regola per $x_3=h$, quella contraria per $x_3=0$. Consideriamo poi che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha 3}^0 &= {}^{(1)}Q_{\alpha 3 \chi 3} \cdot \gamma_{\chi 3}^0 \\ \tau_{\alpha 3}^h &= {}^{(N)}Q_{\alpha 3 \chi 3} \cdot \gamma_{\chi 3}^h\end{aligned}\quad (4.17)$$

con le quali abbiamo definito gli scorrimenti di taglio trasversale delle due facce esterne $\gamma_{\alpha 3}^0(x_\beta; t)$ e $\gamma_{\alpha 3}^h(x_\beta; t)$. In analogia alla (4.17) possiamo introdurre gli scorrimenti imposti $\bar{g}_\alpha^0(x_\beta; t)$ e $\bar{g}_\alpha^h(x_\beta; t)$

$$\begin{aligned}\bar{p}_\alpha^0 &= {}^{(1)}Q_{\alpha 3 \chi 3} \cdot \bar{g}_\alpha^0 \\ \bar{p}_\alpha^h &= {}^{(N)}Q_{\alpha 3 \chi 3} \cdot \bar{g}_\alpha^h\end{aligned}\quad (4.18)$$

Usando le (4.16)-(4.18), possiamo scrivere una relazione equivalente alla (4.16) in termini di scorrimenti

$$\begin{aligned}\bar{g}_\alpha^0 &= -\gamma_{\alpha 3}^0 \\ \bar{g}_\alpha^h &= +\gamma_{\alpha 3}^h\end{aligned}\quad (4.19)$$

Si noti che, usando la (4.12) e la (4.15), è possibile scrivere le seguenti catene di uguaglianze

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha 3}^0 &= \Phi_\alpha^0 + V_{3,\alpha}^0 = \Phi_\alpha^0 + V_{3,\alpha}^C - V_{3,\alpha}' \\ \gamma_{\alpha 3}^h &= \Phi_\alpha^h + V_{3,\alpha}^h = \Phi_\alpha^h + V_{3,\alpha}^C + V_{3,\alpha}'\end{aligned}\quad (4.20)$$

da cui

$$\begin{aligned} V_{3,\alpha}^C &= \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha 3}^h - \Phi_{\alpha}^h + \gamma_{\alpha 3}^0 - \Phi_{\alpha}^0) \\ V_{3,\alpha}^/ &= \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha 3}^h - \Phi_{\alpha}^h - \gamma_{\alpha 3}^0 + \Phi_{\alpha}^0) \end{aligned} \quad (4.21)$$

e, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha}^0 &= \gamma_{\alpha 3}^0 - V_{3,\alpha}^0 \\ \Phi_{\alpha}^h &= \gamma_{\alpha 3}^h - V_{3,\alpha}^h \end{aligned} \quad (4.22)$$

La (4.20) è, in pratica, un gruppo di 4 relazioni che ci indica come gli scorrimenti $\gamma_{\alpha 3}^0(x_{\beta}; t)$ e $\gamma_{\alpha 3}^h(x_{\beta}; t)$ siano funzione degli altri 10 gradi di libertà del modello. Per noi però è preferibile usare tali scorrimenti (o meglio, le tensioni associate) come gradi di libertà; come vedremo nel seguito saranno le rotazioni Φ_{α}^0 e Φ_{α}^h ad essere “eliminate” (usando le (4.22)).

4.3.4 Il campo di spostamenti del modello zig-zag Hermitiano

Se ora sostituiamo la prima e la seconda delle (4.12) (usando anche la (4.14)) e la (4.21) nella terza e nella quarta delle (4.12), otteniamo

$$\begin{aligned} S_{\alpha}^h &= A_{\alpha\beta}^{(0)} S_{\beta}^0 + A_{\alpha\beta}^{(1)} \Phi_{\beta}^0 + A_{\alpha\beta}^{(2)} s_{\beta}^{(2)} + A_{\alpha\beta}^{(3)} s_{\beta}^{(3)} + \\ &\quad \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^0 (\gamma_{\beta 3}^h - \Phi_{\beta}^h + \gamma_{\beta 3}^0 - \Phi_{\beta}^0) + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^/ (\gamma_{\beta 3}^h - \Phi_{\beta}^h - \gamma_{\beta 3}^0 + \Phi_{\beta}^0) \\ \Phi_{\alpha}^h &= * A_{\alpha\beta}^{(0)} S_{\beta}^0 + * A_{\alpha\beta}^{(1)} \Phi_{\beta}^0 + * A_{\alpha\beta}^{(2)} s_{\beta}^{(2)} + * A_{\alpha\beta}^{(3)} s_{\beta}^{(3)} + \\ &\quad \frac{1}{2} * B_{\alpha\beta}^0 (\gamma_{\beta 3}^h - \Phi_{\beta}^h + \gamma_{\beta 3}^0 - \Phi_{\beta}^0) + \frac{1}{2} * B_{\alpha\beta}^/ (\gamma_{\beta 3}^h - \Phi_{\beta}^h - \gamma_{\beta 3}^0 + \Phi_{\beta}^0) \end{aligned} \quad (4.23)$$

che, risolte rispetto a $s_{\alpha}^{(2)}$ e $s_{\alpha}^{(3)}$, forniscono

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(2)} &= C_{\alpha\beta}^{11} S_{\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^{12} \Phi_{\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^{13} S_{\beta}^h + C_{\alpha\beta}^{14} \Phi_{\beta}^h + N_{\alpha\beta}^{11} \gamma_{\beta 3}^0 + N_{\alpha\beta}^{12} \gamma_{\beta 3}^h \\ s_{\alpha}^{(3)} &= C_{\alpha\beta}^{21} S_{\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^{22} \Phi_{\beta}^0 + C_{\alpha\beta}^{23} S_{\beta}^h + C_{\alpha\beta}^{24} \Phi_{\beta}^h + N_{\alpha\beta}^{21} \gamma_{\beta 3}^0 + N_{\alpha\beta}^{22} \gamma_{\beta 3}^h \end{aligned} \quad (4.24)$$

dove le matrici $C_{\alpha\beta}^{ij}$ e $N_{\alpha\beta}^{ij}$ sono a coefficienti costanti e calcolabili in maniera semplice. Sostituendo le (4.24), la prima e la seconda delle (4.12) e la (4.21) nella (4.9), otteniamo

$$V_\alpha = H_{\alpha\beta}^1 S_\beta^0 + H_{\alpha\beta}^2 \Phi_\beta^0 + H_{\alpha\beta}^3 S_\beta^h + H_{\alpha\beta}^4 \Phi_\beta^h + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \gamma_{\beta 3}^0 + \Gamma_{\alpha\beta}^h \gamma_{\beta 3}^h \quad (4.25)$$

essendo

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}^1(x_3) &\equiv \bar{P}_{\alpha\beta}^{(0)}(x_3) + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{11} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(3)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{21} \\ H_{\alpha\beta}^2(x_3) &\equiv \bar{P}_{\alpha\beta}^{(1)}(x_3) + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{12} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(3)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{22} - \frac{1}{2}(\bar{h}_{\alpha\beta}^0(x_3) - \bar{h}'_{\alpha\beta}(x_3)) \\ H_{\alpha\beta}^3(x_3) &\equiv \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{13} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(3)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{23} \\ H_{\alpha\beta}^4(x_3) &\equiv \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{14} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(3)}(x_3) \cdot C_{\chi\beta}^{24} - \frac{1}{2}(\bar{h}_{\alpha\beta}^0(x_3) + \bar{h}'_{\alpha\beta}(x_3)) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^0(x_3) &\equiv \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)}(x_3) \cdot N_{\chi\beta}^{11} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(3)}(x_3) \cdot N_{\chi\beta}^{21} + \frac{1}{2}(\bar{h}_{\alpha\beta}^0(x_3) - \bar{h}'_{\alpha\beta}(x_3)) \\ \Gamma_{\alpha\beta}^h(x_3) &\equiv \bar{P}_{\alpha\chi}^{(2)}(x_3) \cdot N_{\chi\beta}^{12} + \bar{P}_{\alpha\chi}^{(3)}(x_3) \cdot N_{\chi\beta}^{22} + \frac{1}{2}(\bar{h}_{\alpha\beta}^0(x_3) + \bar{h}'_{\alpha\beta}(x_3)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le funzioni matriciali $H_{\alpha\beta}^i(x_3)$ definite nella (4.26) sono anche esse “Hermitiane” nel senso che sono una generalizzazione dei classici polinomi cubici di Hermite, secondo lo schema seguente

$$\begin{array}{cccc} \underline{H_{\alpha\beta}^1(0) \equiv \delta_{\alpha\beta}} & H_{\alpha\beta,3}^1(0) \equiv 0 & H_{\alpha\beta}^1(h) \equiv 0 & H_{\alpha\beta,3}^1(h) \equiv 0 \\ H_{\alpha\beta}^2(0) \equiv 0 & \underline{H_{\alpha\beta,3}^2(0) \equiv \delta_{\alpha\beta}} & H_{\alpha\beta}^2(h) \equiv 0 & H_{\alpha\beta,3}^2(h) \equiv 0 \\ H_{\alpha\beta}^3(0) \equiv 0 & \underline{H_{\alpha\beta,3}^3(0) \equiv 0} & \underline{H_{\alpha\beta}^3(h) \equiv \delta_{\alpha\beta}} & H_{\alpha\beta,3}^3(h) \equiv 0 \\ H_{\alpha\beta}^4(0) \equiv 0 & H_{\alpha\beta,3}^4(0) \equiv 0 & \underline{H_{\alpha\beta}^4(h) \equiv 0} & \underline{H_{\alpha\beta,3}^4(h) \equiv \delta_{\alpha\beta}} \end{array} \quad (4.27)$$

Si noti che le relazioni (4.27) sono valide per qualunque laminazione e tipologia di materiali; come verrà dimostrato in seguito con alcuni risultati numerici (Par. 7.2), inoltre, nel caso particolare di (i) piastra cross-ply le funzioni $H_{\alpha\beta}^i(x_3)$ sono diagonali. Se poi (ii) tutti gli strati hanno lo stesso valore delle rigidezze ${}^{(k)}Q_{\alpha 3 \beta 3}$ e (iii) non ci sono danni interlaminari, vale la seguente relazione

$$H_{\alpha\beta}^i = \delta_{\alpha\beta} p^i \quad (4.28)$$

dove p^i sono i polinomi di Hermite cubici definiti in $[0;h]$

$$\begin{aligned} p^1 &\equiv 2\zeta^3 - 3\zeta^2 + 1; & p^2 &\equiv \zeta^3 - 2\zeta^2 + \zeta; \\ p^3 &\equiv -2\zeta^3 + 3\zeta^2; & p^4 &\equiv \zeta^3 - \zeta^2; \end{aligned} \quad (4.29)$$

dove $\zeta \equiv x_3/h$. Le funzioni $\Gamma_{\alpha\beta}^j(x_3)$ hanno proprietà analoghe a quelle delle $H_{\alpha\beta}^i(x_3)$ (in particolare, sono nulli i valori di $\Gamma_{\alpha\beta}^j(x_3)$ e $\Gamma_{\alpha\beta,3}^j(x_3)$ calcolati per $x_3=0,h$).

L'espressione (4.25) non è ancora quella finale per il modello Hermitiano. Come anticipato, facciamo “scompare” le rotazioni Φ_α^0 e Φ_α^h , esprimibili in funzione degli altri gradi di libertà grazie alle (4.22); inoltre, sostituiamo agli scorrimenti di taglio delle facce esterne, le corrispondenti tensioni usando le (4.17). Si ottiene quindi (ricordando anche la (4.4))

$$\begin{aligned} V_\alpha &= H_{\alpha\beta}^1 S_\beta^0 - H_{\alpha\beta}^2 V_{3,\beta}^0 + H_{\alpha\beta}^3 S_\beta^h - H_{\alpha\beta}^4 V_{3,\beta}^h + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^0 \tau_{\beta 3}^0 + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^h \tau_{\beta 3}^h \\ V_3 &= L^1 V_3^0 + L^2 V_3^h \end{aligned} \quad (4.30)$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^0 &\equiv \left(\Gamma_{\alpha\chi}^0 + H_{\alpha\chi}^2 \right) \left({}^{(1)}Q_{\beta 3\chi 3} \right)^{-1} \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^h &\equiv \left(\Gamma_{\alpha\chi}^h + H_{\alpha\chi}^4 \right) \left({}^{(N)}Q_{\beta 3\chi 3} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Come si nota, osservando la (4.30), i gradi di libertà del modello HZZ sono gli spostamenti (S_1^0, S_2^0 e V_3^0) e le tensioni di taglio trasversale (τ_{13}^0 e τ_{23}^0) della faccia inferiore, gli spostamenti (S_1^h, S_2^h e V_3^h) e le tensioni di taglio trasversale della faccia superiore (τ_{13}^h e τ_{23}^h), per un totale di 10 gradi di libertà.

4.3.5 Determinazione della tensione trasversale normale σ_{33}

Al fine di poter valutare la deformabilità trasversale normale delle piastre multistrato, abbiamo considerato uno spostamento trasversale variabile linearmente nello spessore (vedere la (4.4)). Allo stesso tempo abbiamo inserito la tensione e la deformazione trasversali normali nelle equazioni costitutive (vedere la (4.1)). Occorre ora precisare come verranno calcolate tali due ultime grandezze.

Averill [44] segnala che, per trattare la deformabilità trasversale normale, è preferibile partire da un andamento magari anche solo costante della tensione σ_{33} e poi calcolare la corrispondente ϵ_{33} con la terza delle (4.1), piuttosto che calcolare prima la deformazione come derivata dello spostamento trasversale e poi calcolare la tensione con le equazioni costitutive dirette (2.19). Anche Tessler [15]-[17] ha sviluppato una serie di modelli nei quali, partendo da un supposto andamento cubico della σ_{33} , determina di conseguenza la deformazione ϵ_{33} . Sia Averill che Tessler, inoltre, utilizzano una particolare procedura per la determinazione della tensione che deriva, direttamente o indirettamente, dai metodi variazionali di Reissner [4],[5].

Tra i due andamenti proposti da Averill (costante) e da Tessler (cubico) per σ_{33} , abbiamo scelto la prima soluzione per due motivi. In primo luogo, nel caso cubico si devono introdurre dei fattori correttivi che rendano gli andamenti ottenuti per σ_{33} più corretti. Questo è quello che fa lo stesso Tessler; prove effettuate con il modello HZZ ma senza l'introduzione di tali fattori correttivi hanno fornito andamenti di σ_{33} troppo oscillanti (Par. 7.3). Inoltre, anche se l'andamento costante è meno "preciso" di quello cubico, con la formulazione degli elementi finiti basata sul metodo dei sublaminati, l'uso di più elementi nello spessore permetterà di ottenere comunque il grado di accuratezza voluto (funzione costante a tratti). Per ulteriori considerazioni sulle modalità di valutazione di σ_{33} , si veda il Par. 7.3. Supponiamo dunque che l'andamento di σ_{33} sia costante lungo lo spessore

$$\sigma_{33}(x_\alpha, x_3; t) = \sigma_{33}(x_\alpha; t) \quad (4.32)$$

Si può determinare ϵ_{33} in due modi; o derivando il campo di spostamenti

$$\epsilon_{33}^u \equiv V_{3,3} \quad (4.33)$$

o usando le equazioni costitutive (4.1)

$$\epsilon_{33}^\sigma = \epsilon_{33} = -S_{33} \cdot R_{\alpha\beta} \cdot \epsilon_{\alpha\beta} + S_{33} \cdot \sigma_{33} \quad (4.34)$$

Si noti che abbiamo indicato la deformazione ϵ_{33}^σ come semplicemente ϵ_{33} poiché sarà proprio questa ad essere considerata la deformazione trasversale normale del nostro modello HZZ. Averill [44] propone a questo punto di determinare σ_{33} in modo che sia rispettata la seguente relazione (si veda il Par. 1.1 e, in particolare, la (1.5))

$$\langle \epsilon_{33}^u - \epsilon_{33} \rangle = 0 \quad (4.35)$$

derivante dall'applicazione del principio variazionale misto di Reissner [4],[5]. Tessler, invece, impiega una condizione leggermente modificata che consiste nella ricerca del minimo della seguente funzione integrale

$$\langle (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33})^2 \rangle \quad (4.36)$$

cioè

$$\frac{\partial \langle (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33})^2 \rangle}{\partial \sigma_{33}} = 0 \quad (4.37)$$

Elaborando la (4.37), otteniamo

$$\frac{\partial \langle (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33})^2 \rangle}{\partial \sigma_{33}} = \left\langle \frac{\partial (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33})^2}{\partial \sigma_{33}} \right\rangle = -2 \left\langle (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33}) \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial \sigma_{33}} \right\rangle = -2 \langle (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33}) S_{33} \rangle = 0 \quad (4.38)$$

dove si è usata la (4.34). E' allora possibile scrivere le (4.35),(4.36) in una forma compatta

$$\langle (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33}) p \rangle = 0 \quad \text{con } p \equiv \begin{cases} 1 & \text{condizione di Reissner-Averill} \\ S_{33} & \text{condizione di Tessler} \end{cases} \quad (4.39)$$

Si tratta in entrambi i casi di una condizione di “compatibilità integrale ai minimi quadrati” tra le due deformazioni (4.33),(4.34). E' poi evidente che le due condizioni siano equivalenti per laminazioni con lo stesso S_{33} (C_{33}) per tutti gli strati. In tutti gli altri casi, invece, si ottengono risultati diversi; nel Par. 7.3 vedremo un confronto tra i risultati ottenuti con la condizione di Reissner-Averill e quella di Tessler. Vediamo ora di determinare la σ_{33} usando la (4.39). Notiamo che si ha (usando le (4.2), (4.5) e (4.30))

$$\epsilon_{33}^u = \frac{V_3^h - V_3^0}{h} \quad (4.40)$$

e, sostituendo la (4.40) e la (4.34) nella (4.39),

$$\left\langle \left(\frac{V_3^h - V_3^0}{h} + S_{33} R_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} - S_{33} \sigma_{33} \right) p \right\rangle = 0 \quad (4.41)$$

Considerando la (4.2) per la definizione delle $\epsilon_{\alpha\beta}$, risolvendo la (4.41) in σ_{33} , otteniamo

$$\sigma_{33} = \pi_{\alpha\beta}^1 S_{\alpha,\beta}^0 - \pi_{\alpha\beta}^2 V_{3,\alpha\beta}^0 + \pi_{\alpha\beta}^3 S_{\alpha,\beta}^h - \pi_{\alpha\beta}^4 V_{3,\alpha\beta}^h + \psi_{\alpha\beta}^0 \tau_{\alpha,3,\beta}^0 + \psi_{\alpha\beta}^h \tau_{\alpha,3,\beta}^h + \Delta (V_3^h - V_3^0) \quad (4.42)$$

dove

$$\left. \begin{aligned} \pi_{\alpha\beta}^i &\equiv \frac{\langle p S_{33} R_{\chi\beta} H_{\chi\alpha}^i \rangle}{\langle p S_{33} \rangle} \\ \psi_{\alpha\beta}^q &\equiv \frac{\langle p S_{33} R_{\chi\beta} \bar{\Gamma}_{\chi\alpha}^q \rangle}{\langle p S_{33} \rangle} \\ \Delta &\equiv \frac{1}{h} \frac{\langle p \rangle}{\langle p S_{33} \rangle} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ q = 0, h \end{array} \quad (4.43)$$

4.4 Equazioni del moto e condizioni al contorno

Ricaviamo ora le equazioni del moto e le condizioni al contorno per il modello HZZ partendo dalla (4.30) e ricordando la definizione (4.42) per σ_{33} . Dato che la (2.30) vale anche nel caso in cui si tratti di variazione virtuale dell'energia di deformazione, abbiamo

$$\int_{\Omega} \langle \varepsilon_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta\chi\psi} \delta \varepsilon_{\chi\psi} + \gamma_{\alpha 3} Q_{\alpha 3 \chi 3} \delta \gamma_{\chi 3} + \sigma_{33} S_{33} \delta \sigma_{33} \rangle d\Omega = - \int_{\Omega} \langle \rho \ddot{V}_i \delta V_i \rangle d\Omega + \int_{\Omega} (\bar{p}_{\alpha}^0 \delta S_{\alpha}^0 + \bar{q}^0 \delta V_3^0 + \bar{p}_{\alpha}^h \delta S_{\alpha}^h + \bar{q}^h \delta V_3^h) d\Omega + \sum_{k=1}^N \int_{(k)S_p} \bar{r}_i \delta V_i dS_p \quad (4.44)$$

dove ρ è la densità del materiale, \bar{p}_{α}^0 e \bar{p}_{α}^h sono i carichi tangenziali applicati sulla faccia inferiore e superiore, \bar{q}^0 e \bar{q}^h i corrispondenti carichi trasversali e \bar{r}_i sono i carichi agenti sulla superficie cilindrica laterale S_p .

Le equazioni del moto ricavate dalla (4.44) sono le seguenti

$$\delta S_{\alpha}^0 \left(N_{\beta\alpha,\beta}^1 - R_{\alpha}^1 + Z_{,\beta} \pi_{\alpha\beta}^1 + \bar{p}_{\alpha}^0 = m_{\beta\alpha}^{11} \ddot{S}_{\beta}^0 - m_{\beta\alpha}^{21} \ddot{V}_{3,\beta}^0 + m_{\beta\alpha}^{31} \ddot{S}_{\beta}^h - m_{\beta\alpha}^{41} \ddot{V}_{3,\beta}^h + \bar{m}_{\beta\alpha}^{01} \ddot{\tau}_{\beta 3}^0 + \bar{m}_{\beta\alpha}^{h1} \ddot{\tau}_{\beta 3}^h \right) \quad (4.45)$$

$$\delta V_3^0 \left(N_{\alpha\beta,\alpha\beta}^2 + (T_{\alpha}^1 - R_{\alpha}^2)_{,\alpha} + Z_{,\beta\alpha} \pi_{\alpha\beta}^2 + Z\Delta + \bar{q}^0 = m_{11}^Z \ddot{V}_3^0 + m_{21}^Z \ddot{V}_3^h + m_{\beta\alpha}^{12} \ddot{S}_{\beta,\alpha}^0 - m_{\beta\alpha}^{22} \ddot{V}_{3,\beta,\alpha}^0 + m_{\beta\alpha}^{32} \ddot{S}_{\beta,\alpha}^h - m_{\beta\alpha}^{42} \ddot{V}_{3,\beta,\alpha}^h + \bar{m}_{\beta\alpha}^{02} \ddot{\tau}_{\beta 3,\alpha}^0 + \bar{m}_{\beta\alpha}^{h2} \ddot{\tau}_{\beta 3,\alpha}^h \right) \quad (4.46)$$

$$\delta \tau_{\alpha 3}^0 \left(M_{\beta\alpha,\beta}^0 - Q_{\alpha}^0 + Z_{,\beta} \psi_{\alpha\beta}^0 = m_{\beta\alpha}^{10} \ddot{S}_{\beta}^0 - m_{\beta\alpha}^{20} \ddot{V}_{3,\beta}^0 + m_{\beta\alpha}^{30} \ddot{S}_{\beta}^h - m_{\beta\alpha}^{40} \ddot{V}_{3,\beta}^h + \bar{m}_{\beta\alpha}^{00} \ddot{\tau}_{\beta 3}^0 + \bar{m}_{\beta\alpha}^{h0} \ddot{\tau}_{\beta 3}^h \right) \quad (4.47)$$

$$\delta S_{\alpha}^h \left(N_{\beta\alpha,\beta}^3 - R_{\alpha}^3 + Z_{,\beta} \pi_{\alpha\beta}^3 + \bar{p}_{\alpha}^h = m_{\beta\alpha}^{13} \ddot{S}_{\beta}^0 - m_{\beta\alpha}^{23} \ddot{V}_{3,\beta}^0 + m_{\beta\alpha}^{33} \ddot{S}_{\beta}^h - m_{\beta\alpha}^{43} \ddot{V}_{3,\beta}^h + \bar{m}_{\beta\alpha}^{03} \ddot{\tau}_{\beta 3}^0 + \bar{m}_{\beta\alpha}^{h3} \ddot{\tau}_{\beta 3}^h \right) \quad (4.48)$$

$$\delta V_3^h \left(N_{\alpha\beta,\alpha\beta}^4 + (T_{\alpha}^2 - R_{\alpha}^4)_{,\alpha} + Z_{,\beta\alpha} \pi_{\alpha\beta}^4 - Z\Delta + \bar{q}^h = m_{12}^Z \ddot{V}_3^0 + m_{22}^Z \ddot{V}_3^h + m_{\beta\alpha}^{14} \ddot{S}_{\beta,\alpha}^0 - m_{\beta\alpha}^{24} \ddot{V}_{3,\beta,\alpha}^0 + m_{\beta\alpha}^{34} \ddot{S}_{\beta,\alpha}^h - m_{\beta\alpha}^{44} \ddot{V}_{3,\beta,\alpha}^h + \bar{m}_{\beta\alpha}^{04} \ddot{\tau}_{\beta 3,\alpha}^0 + \bar{m}_{\beta\alpha}^{h4} \ddot{\tau}_{\beta 3,\alpha}^h \right) \quad (4.49)$$

$$\delta\tau_{\alpha 3}^h) \left. \begin{aligned} M_{\beta\alpha,\beta}^h - Q_{\alpha}^h + Z_{,\beta}\psi_{\alpha\beta}^h &= \\ m_{\beta\alpha}^{1h}\ddot{S}_{\beta}^0 - m_{\beta\alpha}^{2h}\ddot{V}_{3,\beta}^0 + m_{\beta\alpha}^{3h}\ddot{S}_{\beta}^h - m_{\beta\alpha}^{4h}\ddot{V}_{3,\beta}^h + \bar{m}_{\beta\alpha}^{0h}\tau_{\beta 3}^0 + \bar{m}_{\beta\alpha}^{hh}\tau_{\beta 3}^h \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Le risultanti generalizzate delle tensioni sono definite come segue

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i &\equiv \langle Q_{\alpha\chi\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} H_{\chi\beta}^i \rangle \\ M_{\alpha\beta}^q &\equiv \langle Q_{\alpha\chi\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} \bar{\Gamma}_{\chi\beta}^q \rangle \\ R_{\alpha}^i &\equiv \langle \tau_{\beta 3} H_{\beta\alpha,3}^i \rangle \\ Q_{\alpha}^q &\equiv \langle \tau_{\beta 3} \bar{\Gamma}_{\beta\alpha,3}^q \rangle \\ T_{\alpha}^m &\equiv \langle \tau_{\beta 3} \delta_{\beta\alpha} L^m \rangle \\ Z &= \langle \sigma_{33} S_{33} \rangle \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i = 1,2,3,4 \\ q = 0, h \\ m = 1,2 \end{array} \quad (4.51)$$

mentre i termini inerziali sono

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha\beta}^{ij} &\equiv \langle \rho H_{\chi\alpha}^i H_{\chi\beta}^j \rangle \\ \bar{m}_{\alpha\beta}^{qj} &\equiv \langle \rho \bar{\Gamma}_{\chi\alpha}^q H_{\chi\beta}^j \rangle \\ m_{\alpha\beta}^{ir} &\equiv \langle \rho H_{\chi\alpha}^i \bar{\Gamma}_{\chi\beta}^r \rangle \\ \bar{m}_{\alpha\beta}^{qr} &\equiv \langle \rho \bar{\Gamma}_{\chi\alpha}^q \bar{\Gamma}_{\chi\beta}^r \rangle \\ m_{\alpha\beta}^Z &\equiv \langle \rho L^{\alpha} L^{\beta} \rangle \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i, j = 1,2,3,4 \\ q, r = 0, h \end{array} \quad (4.52)$$

Le equazioni costitutive del modello piastra HZZ sono le seguenti

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i &= A_{\alpha\beta\chi\psi}^{i1} S_{\chi,\psi}^0 - A_{\alpha\beta\chi\psi}^{i2} V_{3,\chi\psi}^0 + A_{\alpha\beta\chi\psi}^{i3} S_{\chi,\psi}^h - A_{\alpha\beta\chi\psi}^{i4} V_{3,\chi\psi}^h + \bar{A}_{\alpha\beta\chi\psi}^{i0} \tau_{\chi 3,\psi}^0 + \bar{A}_{\alpha\beta\chi\psi}^{ih} \tau_{\chi 3,\psi}^h \\ M_{\alpha\beta}^q &= F_{\alpha\beta\chi\psi}^{q1} S_{\chi,\psi}^0 - F_{\alpha\beta\chi\psi}^{q2} V_{3,\chi\psi}^0 + F_{\alpha\beta\chi\psi}^{q3} S_{\chi,\psi}^h - F_{\alpha\beta\chi\psi}^{q4} V_{3,\chi\psi}^h + \bar{F}_{\alpha\beta\chi\psi}^{q0} \tau_{\chi 3,\psi}^0 + \bar{F}_{\alpha\beta\chi\psi}^{qh} \tau_{\chi 3,\psi}^h \\ R_{\alpha}^i &= B_{\alpha 3\chi 3}^{i1} S_{\chi}^0 + (C_{\alpha 3\chi 3}^{i1} - B_{\alpha 3\chi 3}^{i2}) V_{3,\chi}^0 + B_{\alpha 3\chi 3}^{i3} S_{\chi}^h + (C_{\alpha 3\chi 3}^{i2} - B_{\alpha 3\chi 3}^{i4}) V_{3,\chi}^h + \\ &\quad \bar{B}_{\alpha 3\chi 3}^{i0} \tau_{\chi 3}^0 + \bar{B}_{\alpha 3\chi 3}^{ih} \tau_{\chi 3}^h \\ Q_{\alpha}^q &= G_{\alpha 3\chi 3}^{q1} S_{\chi}^0 + (K_{\alpha 3\chi 3}^{q1} - G_{\alpha 3\chi 3}^{q2}) V_{3,\chi}^0 + G_{\alpha 3\chi 3}^{q3} S_{\chi}^h + (K_{\alpha 3\chi 3}^{q2} - G_{\alpha 3\chi 3}^{q4}) V_{3,\chi}^h + \\ &\quad \bar{G}_{\alpha 3\chi 3}^{q0} \tau_{\chi 3}^0 + \bar{G}_{\alpha 3\chi 3}^{qh} \tau_{\chi 3}^h \\ T_{\alpha}^m &= D_{\alpha 3\chi 3}^{m1} S_{\chi}^0 + (E_{\alpha 3\chi 3}^{m0} - D_{\alpha 3\chi 3}^{m2}) V_{3,\chi}^0 + D_{\alpha 3\chi 3}^{m3} S_{\chi}^h + (E_{\alpha 3\chi 3}^{mh} - D_{\alpha 3\chi 3}^{m4}) V_{3,\chi}^h + \\ &\quad \bar{D}_{\alpha 3\chi 3}^{m0} \tau_{\chi 3}^0 + \bar{D}_{\alpha 3\chi 3}^{mh} \tau_{\chi 3}^h \\ Z &= O(\pi_{\alpha\beta}^1 S_{\alpha,\beta}^0 - \pi_{\alpha\beta}^2 V_{3,\alpha\beta}^0 + \pi_{\alpha\beta}^3 S_{\alpha,\beta}^h - \pi_{\alpha\beta}^4 V_{3,\alpha\beta}^h + \psi_{\alpha\beta}^0 \tau_{\alpha 3,\beta}^0 + \psi_{\alpha\beta}^h \tau_{\alpha 3,\beta}^h + \Delta(V_3^h - V_3^0)) \end{aligned} \quad (4.53)$$

dove compaiono le rigidezze

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathbf{A}_{\alpha\beta\chi\psi}^{ij}; \bar{\mathbf{A}}_{\alpha\beta\chi\psi}^{ir}) &\equiv \langle \mathbf{Q}_{\alpha\delta\pi\psi} \mathbf{H}_{\delta\beta}^i (\mathbf{H}_{\pi\chi}^j; \bar{\Gamma}_{\pi\chi}^r) \rangle \\
 (\mathbf{F}_{\alpha\beta\chi\psi}^{qj}; \bar{\mathbf{F}}_{\alpha\beta\chi\psi}^{qr}) &\equiv \langle \mathbf{Q}_{\alpha\delta\pi\psi} \bar{\Gamma}_{\delta\beta}^q (\mathbf{H}_{\pi\chi}^j; \bar{\Gamma}_{\pi\chi}^r) \rangle \\
 (\mathbf{B}_{\alpha 3\chi 3}^{ij}; \bar{\mathbf{B}}_{\alpha 3\chi 3}^{ir}; \mathbf{C}_{\alpha 3\chi 3}^{in}) &\equiv \langle \mathbf{Q}_{\delta 3\pi 3} \mathbf{H}_{\delta\alpha,3}^i (\mathbf{H}_{\pi\chi,3}^j; \bar{\Gamma}_{\pi\chi,3}^r; \delta_{\pi\chi} L^n) \rangle \\
 (\mathbf{G}_{\alpha 3\chi 3}^{qj}; \bar{\mathbf{G}}_{\alpha 3\chi 3}^{qr}; \mathbf{K}_{\alpha 3\chi 3}^{qn}) &\equiv \langle \mathbf{Q}_{\delta 3\pi 3} \bar{\Gamma}_{\delta\alpha,3}^q (\mathbf{H}_{\pi\chi,3}^j; \bar{\Gamma}_{\pi\chi,3}^r; \delta_{\pi\chi} L^n) \rangle \\
 (\mathbf{D}_{\alpha 3\chi 3}^{mj}; \bar{\mathbf{D}}_{\alpha 3\chi 3}^{mr}; \mathbf{E}_{\alpha 3\chi 3}^{mn}) &\equiv \langle \mathbf{Q}_{\delta 3\pi 3} \delta_{\delta\alpha} L^m (\mathbf{H}_{\pi\chi,3}^j; \bar{\Gamma}_{\pi\chi,3}^r; \delta_{\pi\chi} L^n) \rangle \\
 \mathbf{O} &\equiv \langle \mathbf{S}_{33} \rangle
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i, j = 1, 2, 3, 4 \\ q, r = 0, h \\ m, n = 1, 2 \end{array} \quad (4.54)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti, suddivise tra quelle geometriche (valide su Γ_u) e quelle meccaniche (valide su Γ_p)

Geometriche (Γ_u)	Meccaniche (Γ_p)
$\mathbf{S}_\alpha^0 = \bar{\mathbf{S}}_\alpha^0$	$\mathbf{N}_{\alpha n}^1 + \mathbf{Z}\Pi_{\alpha n}^1 = \bar{\mathbf{N}}_{\alpha n}^1$
$\mathbf{V}_3^0 = \bar{\mathbf{V}}_3^0$	$\mathbf{V}_T^2 + \mathbf{T}_T^1 - \mathbf{R}_T^2 + \mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{W}_{\alpha n}^2 = \bar{\mathbf{V}}_1 +$ $(\mathbf{m}_{\alpha\beta}^{12} \ddot{\mathbf{S}}_\alpha^0 - \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{22} \dot{\mathbf{V}}_{3,\alpha}^0 + \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{32} \ddot{\mathbf{S}}_\alpha^h - \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{42} \dot{\mathbf{V}}_{3,\alpha}^h + \bar{\mathbf{m}}_{\alpha\beta}^{02} \ddot{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha 3}^0 + \bar{\mathbf{m}}_{\alpha\beta}^{h2} \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha 3}^h) \mathbf{n}_\beta$
$\mathbf{V}_{3,n}^0 = \bar{\mathbf{V}}_{3,n}^0$	$\mathbf{N}_{nn}^2 + \mathbf{Z}\Pi_{nn}^2 = \bar{\mathbf{N}}_{nn}^2$
$\boldsymbol{\tau}_{\alpha 3}^0 = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha 3}^0$	$\mathbf{M}_{\alpha n}^0 + \mathbf{Z}\Psi_{\alpha n}^0 = \bar{\mathbf{M}}_{\alpha n}^0$
$\mathbf{S}_\alpha^h = \bar{\mathbf{S}}_\alpha^h$	$\mathbf{N}_{\alpha n}^3 + \mathbf{Z}\Pi_{\alpha n}^3 = \bar{\mathbf{N}}_{\alpha n}^3$
$\mathbf{V}_3^h = \bar{\mathbf{V}}_3^h$	$\mathbf{V}_T^4 + \mathbf{T}_T^2 - \mathbf{R}_T^4 + \mathbf{Z}_{,\alpha} \mathbf{W}_{\alpha n}^4 = \bar{\mathbf{V}}_2 +$ $(\mathbf{m}_{\alpha\beta}^{14} \ddot{\mathbf{S}}_\alpha^0 - \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{24} \dot{\mathbf{V}}_{3,\alpha}^0 + \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{34} \ddot{\mathbf{S}}_\alpha^h - \mathbf{m}_{\alpha\beta}^{44} \dot{\mathbf{V}}_{3,\alpha}^h + \bar{\mathbf{m}}_{\alpha\beta}^{04} \ddot{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha 3}^0 + \bar{\mathbf{m}}_{\alpha\beta}^{h4} \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha 3}^h) \mathbf{n}_\beta$
$\mathbf{V}_{3,n}^h = \bar{\mathbf{V}}_{3,n}^h$	$\mathbf{N}_{nn}^4 + \mathbf{Z}\Pi_{nn}^4 = \bar{\mathbf{N}}_{nn}^4$
$\boldsymbol{\tau}_{\alpha 3}^h = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\alpha 3}^h$	$\mathbf{M}_{\alpha n}^h + \mathbf{Z}\Psi_{\alpha n}^h = \bar{\mathbf{M}}_{\alpha n}^h$

Nelle (4.55) sono state introdotte le risultanti dei carichi esterni $\bar{\mathbf{r}}_i$, applicati sulla superficie cilindrica laterale S_p

$$\left. \begin{aligned}
 (\bar{\mathbf{N}}_{\alpha n}^i; \bar{\mathbf{M}}_{\alpha n}^q) &\equiv \langle \bar{\mathbf{r}}_\chi (\mathbf{H}_{\chi\alpha}^i; \bar{\Gamma}_{\chi\alpha}^q) \rangle \\
 \bar{\mathbf{V}}_\alpha &\equiv \langle \bar{\mathbf{r}}_3 L^\alpha \rangle
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ q = 0, h \end{array} \quad (4.56)$$

Valgono, infine, le seguenti definizioni

$$\left. \begin{aligned} (N_{\alpha n}^i; M_{\alpha n}^q) &\equiv (N_{\beta \alpha}^i; M_{\beta \alpha}^q) n_{\beta} \\ (V_T^{2m}; T_T^m; R_T^{2m}) &\equiv (N_{\alpha \beta, \alpha}^{2m}; T_{\beta}^m; R_{\beta}^{2m}) n_{\beta} \\ (\Pi_{\alpha n}^i; \Psi_{\alpha n}^q; W_{\alpha n}^{2m}) &\equiv (\pi_{\alpha \beta}^i; \Psi_{\alpha \beta}^q; \pi_{\beta}^{2m}) n_{\beta} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ q = 0, h \\ m = 1, 2 \end{array} \quad (4.57)$$

A questo punto è necessaria una precisazione. Le equazioni del moto, le condizioni al contorno e le relative definizioni (4.45)-(4.57) sono valide nel caso in cui le tensioni di taglio trasversale $\tau_{\alpha 3}^0$ e $\tau_{\alpha 3}^h$ siano gradi di libertà del problema. Quando il modello HZZ è usato sull'intero spessore del laminato, tali tensioni non sono incognite ma valori noti (corrispondendo ai carichi tangenziali applicati). In questo caso $\tau_{\alpha 3}^0$ e $\tau_{\alpha 3}^h$ sono imposti secondo le (4.16). Come conseguenza, non sono più valide le equazioni del moto (4.47) e (4.50) e non sono più definite alcune risultanti di tensione ($M_{\alpha \beta}^q$ e Q_{α}^q), inerzie ($m_{\alpha \beta}^{ir}$ e $\bar{m}_{\alpha \beta}^{qr}$), rigidezze ($F_{\alpha \beta \chi \psi}^{qi}$, $\bar{F}_{\alpha \beta \chi \psi}^{qr}$, $G_{\alpha 3 \chi 3}^{qi}$, $\bar{G}_{\alpha 3 \chi 3}^{qr}$ e $K_{\alpha 3 \chi 3}^{qn}$) ed altri termini ($\bar{M}_{\alpha n}^q$, $M_{\alpha n}^q$ e $\Psi_{\alpha n}^q$).

Capitolo 5

Formulazioni dei modelli zig-zag classici; soluzioni analitiche per travi e piastre e elementi finiti trave

5.1 Introduzione

I modelli zig-zag (LZZ e CZZ) sono quelli per i quali abbiamo studiato il maggior numero di soluzioni. Usando la (3.47) che comprende anche altre teorie ESL, abbiamo ricavato soluzioni esatte per la trave (non-lineari) e per la piastra (solo lineari), soluzioni approssimate (Rayleigh-Ritz) sia per la trave che per la piastra (caso lineare) e, infine, soluzioni numeriche basate sul metodo degli elementi finiti per la trave (caso lineare).

Non volendo trasformare questo capitolo in una descrizione di metodi ampiamente trattati in letteratura, ci soffermiamo in breve sulla soluzione esatta delle equazioni di equilibrio non-lineari per la trave [P1],[C1], visto che procedura e risultati (Cap. 8) sono degni di nota. Le soluzioni esatte sono possibili nel caso di semplice appoggio (sui due estremi per la trave, sui quattro lati per la piastra) e laminazione ortotropa. Le soluzioni alla Rayleigh-Ritz possono prescindere da queste ipotesi; in particolare, abbiamo usato come funzioni di forma in x_1 (e x_2) i polinomi di Gram-Schmidt [45] che permettono di rispettare le condizioni al contorno geometriche per qualunque vincolo. Per quanto concerne lo sviluppo di elementi finiti, daremo qualche indicazione sui gradi di libertà, la topologia e le funzioni di forma. Per altri dettagli sulle formulazioni FEM, si veda il Cap. 6.

5.2 Soluzione esatta delle equazioni non-lineari di equilibrio per la trave

Consideriamo una trave con laminazione cross-ply simmetrica e semplicemente appoggiata su entrambi gli estremi (Fig. 5.1). La lunghezza della trave sia indicata con L mentre b è la larghezza della sezione e h lo spessore. L'appoggio di sinistra è fisso mentre

quello di destra è collegato ad una molla (agente nella direzione dello spostamento tangenziale) la cui rigidezza (per unità di larghezza della trave) è K_m . La trave¹ è soggetta ad un carico trasversale distribuito $\bar{q}(x_1)$ e subisce una variazione di temperatura uniforme $\Theta(x_1)=\Theta$.

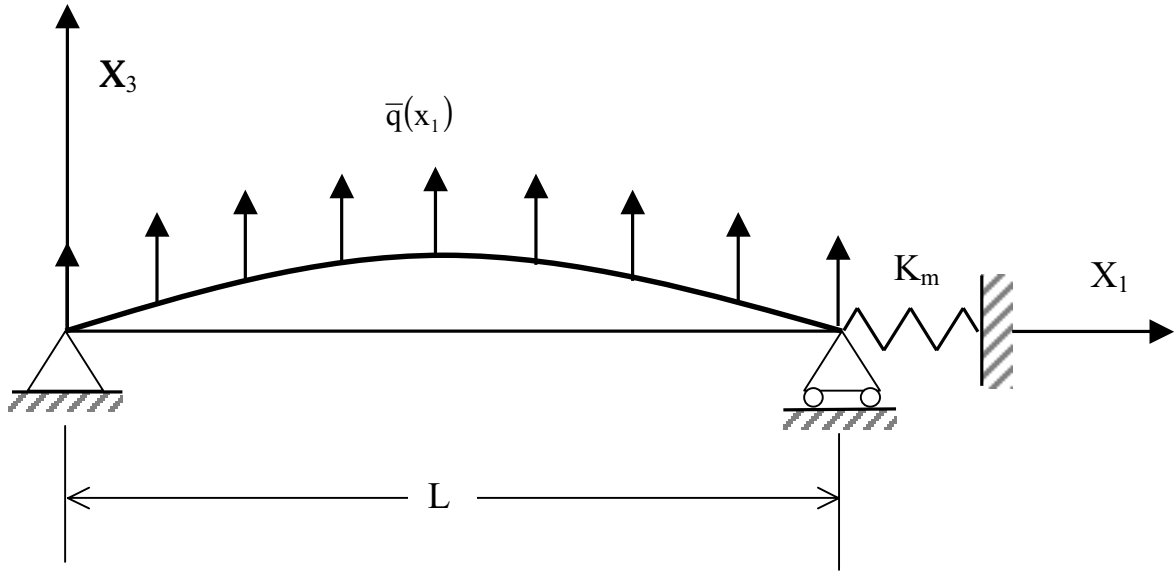


Figura 5.1: Geometria, vincoli e carichi della trave curva.

Le equazioni costitutive sono quelle del caso uni-dimensionale con la presenza di effetti termici (2.55) e con la tensione trasversale normale supposta nulla²

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= Q_{11} \cdot \varepsilon_{11} - \omega_{11} \cdot \Theta \\ \tau_{13} &= Q_{44} \cdot \gamma_{13}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Per il campo deformativo abbiamo (vedere la (3.4))

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= V_{1,1} - V_3 Z_{,11} + \frac{1}{2} V_{3,1}^2 + V_{3,1} w_{,1}^* \\ \gamma_{13} &= V_{1,3} + V_{3,1}\end{aligned}\tag{5.2}$$

¹ Si può trattare anche di un pannello cilindrico, anche se nel capitolo useremo sempre il termine trave. La differenza tra i due casi sta, evidentemente, solo nelle equazioni costitutive che sono quelle dello stato piano di tensione per la trave e dello stato piano di deformazione per il pannello cilindrico (Par. 2.2.4).

² Anche in questo caso le notazioni del Cap. 2 sono semplificate, con la caduta degli apici “*” (sistema di riferimento geometrico), “TOT” (le deformazioni sono comunque quelle totali) e “U” (le rigidezze saranno comunque quelle del caso uni-dimensionale, Par. 2.2.4).

Trattandosi di una trave cross-ply in flessione cilindrica, si ha che lo spostamento in direzione x_2 e le derivate di tutte le grandezze rispetto a tale coordinata si annullano. Il campo di spostamenti (comprendente le 6 teorie, tra le quali LZZ e CZZ, secondo la Tab. 3.1) può quindi essere scritto nel seguente modo (vedere la (3.47) e la (3.11))

$$\begin{aligned} V_1 &= u^0 - \delta_K \cdot x_3 \cdot w_{,1}^0 + \delta_T \cdot F \cdot \theta \\ V_3 &= w^0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

dove abbiamo introdotto le seguenti notazioni semplificate: $F=F_{11}$, $u^0 = S_1^0$, $w^0 = V_3^0$ e $\theta=\theta_1$.

Le equazioni non-lineari di equilibrio della trave si possono ricavare facilmente a partire dalle equazioni non-lineari del moto della piastra (3.50)-(3.52)

$$\delta u^0 \quad N_{11,1} = 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \delta w^0 \quad \delta_K \cdot M_{11,11} + (1 - \delta_K) \cdot T_{1,1} + \\ N_{11} (Z + w^0 + w^*)_{,11} + \bar{q} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\delta \theta \quad \delta_T \cdot (\hat{M}_{11,1} - \hat{T}_1) = 0 \quad (5.6)$$

dove la (5.5) è già stata semplificata con l'uso della (5.4). Le condizioni al contorno per il semplice appoggio sono

$$x_1 = 0, L: \quad w^0 = M_{11} = 0 \quad (5.7)$$

Considerando che la laminazione è simmetrica, alcuni termini di rigidezza si annullano e, in particolare, $B_{1111} = \hat{A}_{1111} = 0$; inoltre si ha che $M_{11}^0 = \hat{M}_{11}^0 = 0$.

Per risolvere esattamente le (5.4)-(5.6) con le condizioni (5.7) usiamo una procedura sviluppata da Skvortsov e Bozhevolnaya per teorie del tipo FSDT [46] e poi estesa da noi ai modelli zig-zag [P1],[C1]³.

Iniziamo con l'usare la (5.4). Se consideriamo la definizione di N_{11} (vedere le (3.55)), si ha

$$N_{11} = A_{1111} \left(u_{,1}^0 - w^0 Z_{,11} + \frac{1}{2} (w_{,1}^0)^2 + w_{,1}^0 w_{,1}^* \right) + N_{11}^0 \quad (5.8)$$

Dalla (5.4) risulta che nella trave agisce uno sforzo normale costante; per comodità indichiamo con P tale sforzo, per unità di larghezza della trave e positivo se di compressione

³ Rispetto a [P1],[C1] abbiamo solamente modificato le definizioni di p^0 (5.22) e η_0 (5.23).

$$P = -N_{11} \quad (5.9)$$

Se risolviamo la (5.8) rispetto a $u_{,1}^0$, otteniamo

$$u_{,1}^0 = \frac{N_{11} - N_{11}^\ominus}{A_{1111}} + w^0 Z_{,11} - \frac{1}{2} (w_{,1}^0)^2 - w_{,1}^0 w_{,1}^* \quad (5.10)$$

per cui, essendo

$$u^0(L) - u^0(0) = \frac{P}{K_m} = \int_0^L u_{,1}^0 dx_1 \quad (5.11)$$

otteniamo

$$P + N_{11}^\ominus \eta_K = \frac{\eta_K A_{1111}}{L} \int_0^L \left(w^0 Z_{,11} - \frac{1}{2} (w_{,1}^0)^2 - w_{,1}^0 w_{,1}^* \right) dx_1 \quad (5.12)$$

dove

$$\eta_K \equiv \frac{K_m L}{K_m L + A_{1111}} \quad (5.13)$$

Si noti che $0 \leq \eta_K \leq 1$; quando $\eta_K = 0$ ($K_m = 0$), il supporto di destra è completamente mobile in direzione x_1 , mentre per $\eta_K = 1$ ($K_m \rightarrow \infty$), il supporto di destra è fisso (diventa, quindi, una cerniera).

Passiamo ora alle (5.5) e (5.6); se le scriviamo in termini di spostamenti generalizzati (usando le (3.55) adattate al caso della trave) e poi le rielaboriamo, ricaviamo un'equazione in termini della sola w^0

$$\begin{aligned} D_{1111} w_{,1111}^0 + P (w^0 + Z + w^*)_{,11} - \bar{q} + \\ - \hat{B}_{1111} (C_2 w_{,1111}^0 + C_1 P (w^0 + Z + w^*)_{,1111} - C_1 \bar{q}_{,11}) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

e la seguente espressione per M_{11}

$$M_{11} = -D_{1111} w_{,11}^0 + \hat{B}_{1111} (C_2 w_{,1111}^0 + C_1 P (w^0 + Z + w^*)_{,11} - C_1 \bar{q}) \quad (5.15)$$

Nelle (5.14) e (5.15) valgono le seguenti definizioni

$$\begin{aligned}
 C_1 &\equiv \delta_T \cdot \frac{\hat{D}_{1111}}{\hat{B}_{1111} \hat{D}_{1313}} \\
 C_2 &\equiv \delta_K \cdot \delta_T \cdot \frac{\hat{D}_{1111} D_{1111} - \hat{B}_{1111}^2}{\hat{B}_{1111} \hat{D}_{1313}}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Se usiamo la (5.15) per esprimere le (5.7), queste si modificano come segue

$$x_1 = 0, L: w^0 = w_{,11}^0 = w_{,1111}^0 = 0 \tag{5.17}$$

Introduciamo ora i seguenti sviluppi trigonometrici

$$f = f_0 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right) \tag{5.18}$$

dove $f(x_1)$ è una generica funzione, f_0 il suo valore per $x_1=L/2$ e, infine, vale la seguente

$$f_k = \frac{2}{L f_0} \int_0^L f(x_1) \sin\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right) dx_1 \tag{5.19}$$

Se possiamo scrivere Z , w^* e \bar{q} secondo gli sviluppi (5.18), allora sempre della stessa forma è la funzione $w^0(x_1)$ che risolve esattamente la (5.14) e rispetta le (5.17). Sostituiamo allora le (5.18) per Z , w^* , \bar{q} e w^0 tanto nella (5.12) che nella (5.14) e ricaviamo, rispettivamente,

$$p = -\frac{\eta_K}{L^2 \eta_0} \left(2Z_0 w_0^0 \sum_{k=1}^{\infty} Z_k w_k^0 k^2 + (w_0^0)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (w_k^0)^2 k^2 + 2w_0^* w_0^0 \sum_{k=1}^{\infty} w_k^* w_k^0 k^2 \right) - p^\Theta \eta_K \tag{5.20}$$

$$w_0^0 w_k^0 = S_{0k} \left((Z_0 Z_k + w_0^* w_k^*) k^2 p + \bar{q}_0 \bar{q}_k \frac{L^4}{\pi^4 D_{1111}} \right) \forall k \tag{5.21}$$

dove sono stati introdotti i seguenti carichi adimensionali

$$\begin{aligned}
 p &\equiv \frac{PL^2}{D_{1111} \pi^2} \\
 p^\Theta &\equiv \frac{N_{11}^\Theta L^2}{D_{1111} \pi^2}
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

ed i seguenti parametri

$$\begin{aligned}
 S_{0k} &\equiv \frac{1 + \eta_1 k^2}{(1 + \eta_2 k^2)k^4 - (1 + \eta_1 k^2)pk^2} \\
 \eta_0 &\equiv \frac{4D_{1111}}{A_{1111}L^2} \\
 \eta_1 &\equiv \delta_T \cdot \frac{\hat{D}_{1111}}{\hat{D}_{1313}} \frac{\pi^2}{L^2} \\
 \eta_2 &\equiv \delta_K \cdot \delta_T \cdot \frac{\hat{D}_{1111}D_{1111} - \hat{B}_{1111}^2}{D_{1111}\hat{D}_{1313}} \frac{\pi^2}{L^2}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Se sostituiamo la (5.21) (ricavando w_k^0) nella (5.20), e risolviamo quest'ultima in \bar{q}_0 , si ha

$$\bar{q}_0 = -\frac{D_{1111}\pi^4}{S_{11}L^4} \left((Z_0 S_{p4} + w_0^* S_{p5}) \pm \sqrt{(Z_0 S_{p4} + w_0^* S_{p5})^2 - p S_{11} \cdot \left(L^2 \frac{\eta_0}{\eta_K} \frac{p + p^\Theta \eta_K}{p} + Z_0^2 S_{p1} + 2Z_0 w_0^* S_{p2} + (w_0^*)^2 S_{p3} \right)} \right) \tag{5.24}$$

essendo

$$\begin{aligned}
 S_{p1} &\equiv 2S_1 + pS_6; & S_{p4} &\equiv S_4 + pS_9; \\
 S_{p2} &\equiv 2S_2 + pS_7; & S_{p5} &\equiv S_5 + pS_{10}; \\
 S_{p3} &\equiv 2S_3 + pS_8;
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

e ancora

$$\begin{aligned}
 S_1 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^2 k^4 S_{0k} & S_6 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^2 k^6 S_{0k}^2 \\
 S_2 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} Z_k w_k^* k^4 S_{0k} & S_7 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} Z_k w_k^* k^6 S_{0k}^2 \\
 S_3 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} (w_k^*)^2 k^4 S_{0k} & S_8 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} (w_k^*)^2 k^6 S_{0k}^2 \\
 S_4 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \bar{q}_k k^2 S_{0k} & S_9 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \bar{q}_k k^4 S_{0k}^2 \\
 S_5 &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} w_k^* \bar{q}_k k^2 S_{0k} & S_{10} &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} w_k^* \bar{q}_k k^4 S_{0k}^2 \\
 & & S_{11} &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \bar{q}_k^2 k^2 S_{0k}^2
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Le (5.21) e (5.24) sono due equazioni che legano tra di loro le tre grandezze p (carico adimensionale di compressione), \bar{q}_0 (intensità del carico distribuito trasversale in mezzeria) e w_0^0 (spostamento trasversale in mezzeria). Una volta fissati i dati relativi alla rigidità della molla ($K_m \rightarrow \eta_K$), alla curvatura iniziale (Z_0 e Z_k), alle imperfezioni geometriche (w_0^* e w_k^*) ed alla variazione di temperatura ($\Theta \rightarrow N_{11}^0 \rightarrow p^0$), la (5.24) ci fornisce la relazione $\bar{q}_0(p)$, mentre la (5.21) (anche grazie alla (5.24)) esprime il legame $w_0^0(p)$. Combinando opportunamente le due relazioni è possibile poi avere la relazione $\bar{q}_0(w_0^0)$.

In generale le relazioni di cui abbiamo parlato sopra sono esatte ma a patto di considerare nelle varie sommatorie infiniti termini. E' però vero che per molte applicazioni pratiche è una buona approssimazione considerare le varie sommatorie come estese solo al primo termine. In questo caso, con alcuni passaggi che non riportiamo, è possibile ottenere delle leggi esplicite che esprimono il legame tra le grandezze di interesse. Per quanto riguarda la legge $p(w_0^0)$, dalla più generale (5.20), si ricava

$$p(w_0^0) = -\frac{\eta_K}{L^2 \eta_0} (2w_s + w_0^0)w_0^0 - p^0 \eta_K \quad (5.27)$$

mentre la (5.24) fornisce l'espressione di $\bar{q}_0(w_0^0)$

$$\bar{q}_0(w_0^0) = \frac{D_{1111} \pi^4 \eta_K}{L^6 \eta_0 \bar{q}_1} \left((w_0^0)^3 + 3w_s (w_0^0)^2 + \left(2w_s^2 + L^2 \frac{\eta_0}{\eta_K} \left(\frac{1+\eta_2}{1+\eta_1} + p^0 \eta_K \right) \right) w_0^0 + L^2 \eta_0 p^0 w_s \right) \quad (5.28)$$

dove

$$w_s \equiv Z_0 Z_1 + w_0^* w_1^* \quad (5.29)$$

Le relazioni (5.27) e (5.28) ci permettono di ricavare delle interessanti osservazioni sulla soluzione esatta del problema proposto. Come già detto, tali equazioni sono valide nel caso in cui si considerino tutti gli sviluppi in serie di seni arrestabili al solo primo termine; però, almeno a livello qualitativo, le informazioni così ottenute sono valide in generale. Per quanto riguarda il carico adimensionato di compressione p , questo ha un andamento parabolico in w_0^0 con un valore massimo che corrisponde all'annullamento del discriminante della (5.24). La curva $\bar{q}_0(w_0^0)$, che classicamente è chiamata **curva carico-spostamento**, è cubica; può avere un massimo locale (corrispondente in tal caso al punto di **snap-buckling** o **instabilità a scatto**) o non averlo (comportamento tutto stabile). Su tali concetti torneremo nel Par. 8.2, dove saranno presentati anche dei risultati numerici a supporto del ragionamento, qui solo accennato.

5.3 Elementi finiti trave

Nel caso di deformazioni lineari, assenza di curvatura e imperfezioni geometriche iniziali e senza considerare gli effetti della temperatura, abbiamo sviluppato e inserito in un programma MATLAB[®] degli elementi finiti trave per tutti i modelli compresi nella formulazione compatta del Cap. 3.

Le equazioni costitutive sono quelle del caso uni-dimensionale senza effetti termici (2.39) e con la tensione trasversale normale supposta nulla

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= Q_{11} \cdot \varepsilon_{11} \\ \tau_{13} &= Q_{44} \cdot \gamma_{13}\end{aligned}\quad (5.30)$$

Le deformazioni sono quelle ottenibili con le classiche relazioni lineari

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= V_{1,1} \\ \gamma_{13} &= V_{1,3} + V_{3,1}\end{aligned}\quad (5.31)$$

Per il campo di spostamenti valgono le osservazioni del Par. 5.2

$$\begin{aligned}V_1 &= u^0 - \delta_K \cdot x_3 \cdot w_{,1}^0 + \delta_T \cdot F \cdot \theta \\ V_3 &= w^0\end{aligned}\quad (5.32)$$

La compattezza della relazione (5.32) non può essere mantenuta ad oltranza durante la formulazione degli elementi finiti per i vari modelli. Quando si tratta di scegliere i gradi di libertà e le funzioni di forma, delle opportune distinzioni, modello per modello, devono essere prese in considerazione.

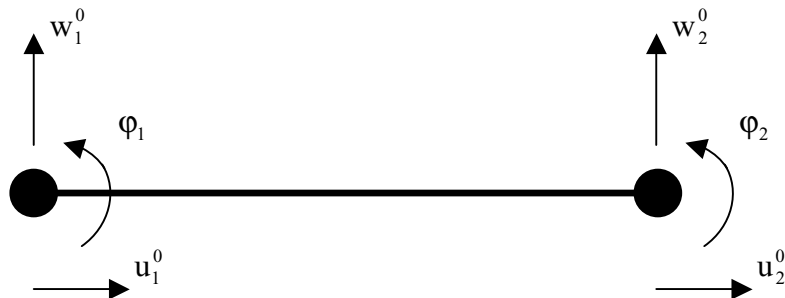


Figura 5.2: Topologia dell'elemento finito trave per il modello CLPT.

Nel caso del modello CLPT si hanno come spostamenti generalizzati u^0 e w^0 . I rispettivi ordini massimi di derivazione nell'espressione dell'energia di deformazione sono 1 e 2; l'elemento finito conforme prevede, quindi, funzioni di forma lineari (Lagrange) e cubiche (Hermite). I gradi di libertà per nodo sono (Fig. 5.2) u_i^0 , w_i^0 e φ_i ($\varphi_i \equiv (w_{,1}^0)_i$).

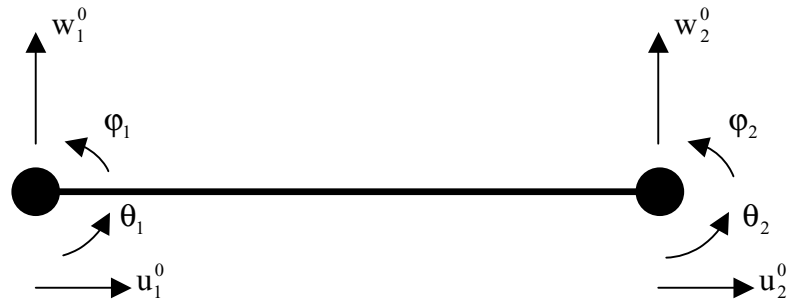


Figura 5.3: Topologia dell'elemento finito trave per i modelli FSDT, LZZ, HSDT e CZZ.

Nel caso del modello FSDT classico, gli spostamenti generalizzati sono u^0 e θ . Entrambi sono derivati una sola volta nell'energia di deformazione per cui basterebbero funzioni di forma Lagrangiane lineari per avere un elemento conforme. Come è noto in letteratura, però, tale elemento finito è affetto dal fenomeno dello **shear-locking**. Tra i vari metodi usati per eliminare tale problema, quello che noi abbiamo considerato è l'impiego del modello FSDT generalizzato (vedere Tab. 3.1). Tale modello è, in termini di spostamenti generalizzati, funzioni di forma e gradi di libertà, del tutto analogo ai modelli LZZ, HSDT (Reddy) e CZZ. Usando i polinomi di Lagrange lineari per u^0 e θ e i polinomi di Hermite cubici per w^0 , otteniamo un elemento finito trave con la stessa topologia per tutti e 4 i modelli; ci sono 4 gradi di libertà per nodo u_i^0 , w_i^0 , φ_i e θ_i (Fig. 5.3).

Per tutti gli elementi finiti brevemente presentati, va ricordato che i gradi di libertà sono definiti in corrispondenza dell'asse della trave cioè per $x_3=0 \forall x_1$. Considerando che (Par. 3.2) è possibile scegliere la posizione dell'asse lungo tutto lo spessore, lo stesso vale per i relativi gradi di libertà.

Capitolo 6

Formulazioni del modello zig-zag Hermitiano; l'elemento finito trave

6.1 Introduzione

Il modello zig-zag Hermitiano (HZZ) presenta delle notevoli innovazioni rispetto al classico modello zig-zag cubico (CZZ), come già evidenziato nel Par. 4.1. Ma ci sono particolari problemi o applicazioni che richiedono ulteriori passi in avanti nell'accuratezza dell'analisi di piastre e travi multistrato.

In primo luogo, ci sono alcuni casi nei quali lo spostamento trasversale è ben lontano, non solo da un andamento costante, ma anche da un andamento lineare nello spessore; soprattutto quando lo spessore è elevato e/o la laminazione è complessa, è utile disporre di modelli che prevedano andamenti più realistici. Inoltre, in alcune applicazioni, come i problemi di impatto [47],[48], sono molto importanti non solo le tensioni di taglio trasversale ma anche quella trasversale normale; è quindi necessario andare oltre una semplice valutazione del valore medio-costante di tale tensione nello spessore. Per rispondere a tali due esigenze una soluzione potrebbe essere quella di usare uno sviluppo dello spostamento trasversale di ordine superiore al primo, una strada seguita, per esempio, da Kant [49]-[51] e da Tessler [15]-[17]. Kant, poi, con il metodo tradizionale (spostamenti \rightarrow deformazioni \rightarrow tensioni) calcola la tensione σ_{33} , incorrendo così nel solito problema di continuità della stessa. Tessler preferisce ipotizzare un andamento cubico per σ_{33} , molto realistico, ma poco applicabile a causa dei fattori correttivi necessari al suo affinamento. L'idea, quindi, di incrementare le capacità del nostro HZZ con sviluppi di ordine superiore sia per lo spostamento trasversale che per la tensione trasversale normale, non appare felice; questo è tanto più vero perché non sarebbero così risolti nemmeno altri due problemi di modellizzazione.

Come sarà dimostrato nel Par. 7.4 [P3],[C2], tanto il CZZ che il HZZ sono affetti da quello che abbiamo definito **slip-locking**; senza entrare subito nel dettaglio, diciamo che *quando vengono studiate piastre o travi con interfacce severamente danneggiate, i modelli LZZ e CZZ diventano indeformabili al taglio e "rispondono" così in maniera "più rigida"*

e comunque scorretta. Inoltre, per alcune applicazioni (laminati con strati di piezoelettrici posizionati in alcune particolari regioni delle due facce esterne e, comunque, laminati dallo spessore variabile in modo discontinuo), è necessario disporre di un modello che sia in grado di descrivere la coesistenza di regioni a diverso spessore. Soprattutto queste due ultime problematiche ci hanno spinto a puntare sullo sviluppo di elementi finiti da utilizzare secondo lo schema dei sublaminati [34],[35]. Come vedremo, questa scelta permette di risolvere anche i due problemi discussi in precedenza e relativi alla descrizione di V_3 e σ_{33} . Il notevole vantaggio di questa procedura risiede, inoltre, nel fatto che tutto il lavoro necessario alla formulazione del modello HZZ non è inutile poiché all'interno di ogni sublaminato-elemento vale proprio il campo di spostamenti HZZ.

In questo capitolo verrà dunque presentata la formulazione di un elemento finito trave basato sul modello HZZ. Verrà inoltre discussa, almeno in termini preliminari, la procedura basata sul concetto di sublaminato, utile ad incrementare in modo decisivo le capacità di modellizzazione della nostra teoria. Gran parte dei contenuti di questo capitolo si trovano anche in [P3],[C2].

6.2 Il modello HZZ nel caso della trave

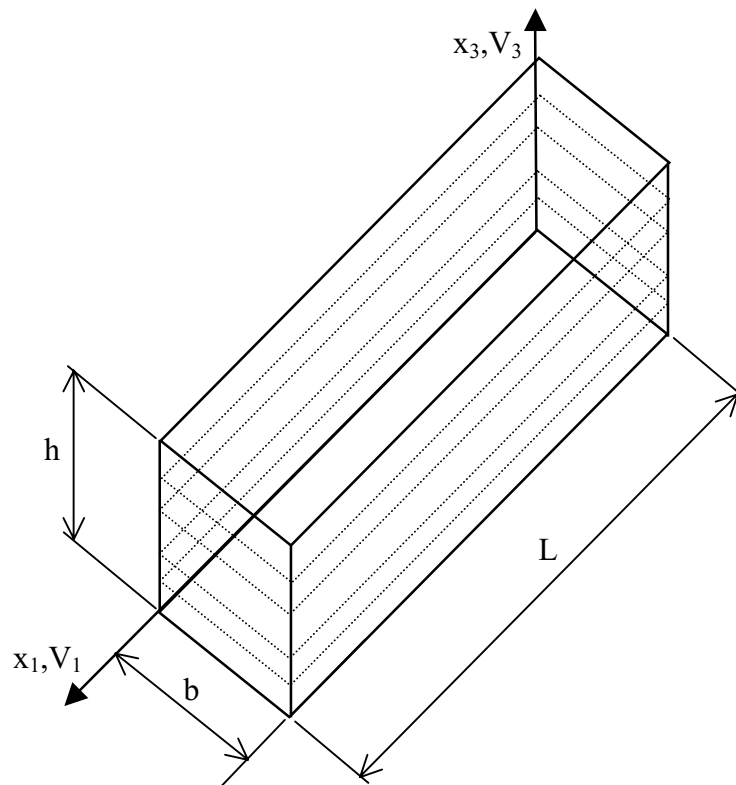


Figura 6.1: Geometria della trave multistrato.

Consideriamo una trave riferita al solito sistema di assi cartesiani (Par. 4.2) x_1 , x_2 e x_3 con dimensioni L , b e h , rispettivamente (Fig. 6.1)¹. Supponiamo che gli strati che costituiscono la trave siano tutti cross-ply e che lo spostamento V_2 sia nullo come le derivate di tutte le grandezze rispetto ad x_2 .

Per quanto riguarda le equazioni costitutive, sono quelle valide nel caso uni-dimensionale e senza gli effetti termici (vedere la (2.39))

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= Q_{11} \cdot \varepsilon_{11} + S_{33} \cdot R_{11} \cdot \sigma_{33} \\ \tau_{13} &= Q_{44} \cdot \gamma_{13} \\ \varepsilon_{33} &= -S_{33} \cdot R_{11} \cdot \varepsilon_{11} + S_{33} \cdot \sigma_{33}\end{aligned}\quad (6.1)$$

Le deformazioni (esclusa la ε_{33} , definita dalle (6.1)) si calcolano con le solite formule

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= V_{1,1} \\ \gamma_{13} &= V_{1,3} + V_{3,1}\end{aligned}\quad (6.2)$$

Il campo di spostamenti del modello HZZ nel caso trave è il seguente (vedere la (4.30))

$$\begin{aligned}V_1 &= H^1 u^0 - H^2 w_{,1}^0 + H^3 u^h - H^4 w_{,1}^h + \bar{\Gamma}^0 \tau^0 + \bar{\Gamma}^h \tau^h \\ V_3 &= L^1 w^0 + L^2 w^h\end{aligned}\quad (6.3)$$

dove, rispetto alla (4.30) sono state introdotte le seguenti modifiche al fine di semplificare la notazione; $H^i = H_{11}^i$, $\bar{\Gamma}^q = \bar{\Gamma}_{11}^q$, $u^q = S_1^q$, $w^q = V_3^q$ e $\tau^q = \tau_{13}^q$. In pratica, in questo caso, i gradi di libertà sono 6 e cioè gli spostamenti tangenziali (u^0 e u^h) e trasversali (w^0 e w^h) e le tensioni di taglio trasversale (τ^0 e τ^h) delle due facce del laminato.

Scriviamo ora le grandezze caratteristiche del modello in forme matriciali più compatte che ci serviranno per la formulazione dell'elemento finito trave. Per quanto riguarda gli spostamenti definiti nella (6.3), possiamo scrivere

$$\{V\} = [H_V] \cdot \{q_V\} \quad (6.4)$$

con

$$[H_V] \equiv \begin{bmatrix} H^1 & H^3 & 0 & 0 & -H^2 & -H^4 & \bar{\Gamma}^0 & \bar{\Gamma}^h \\ 0 & 0 & L^1 & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

¹ Anche in questo caso le notazioni del Cap. 2 sono semplificate, con la caduta degli apici “*” (sistema di riferimento geometrico), “TOT” (le deformazioni sono sia totali che meccaniche, essendo nulle quelle termiche) e “U” (le rigidità saranno comunque quelle del caso uni-dimensionale, Par. 2.2.4).

e

$$\{q_v\} \equiv [u^0 \quad u^h \quad w^0 \quad w^h \quad w_{,1}^0 \quad w_{,1}^h \quad \tau^0 \quad \tau^h]^T \quad (6.6)$$

Le deformazioni definite dalla (6.2) si possono analogamente scrivere nel seguente modo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= [H_{\varepsilon 11}] \cdot \{q_\varepsilon\} \\ \gamma_{13} &= [H_{\gamma 13}] \cdot \{q_\varepsilon\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

dove

$$\begin{aligned} [H_{\varepsilon 11}] &\equiv [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad H^1 \quad H^3 \quad 0 \quad 0 \quad -H^2 \quad -H^4 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{\Gamma}^0 \quad \bar{\Gamma}^h] \\ [H_{\gamma 13}] &\equiv [H_{,3}^1 \quad H_{,3}^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad L^1 - H_{,3}^2 \quad L^2 - H_{,3}^4 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{\Gamma}_{,3}^0 \quad \bar{\Gamma}_{,3}^h \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \quad (6.8)$$

e

$$\{q_\varepsilon\} \equiv [u^0 \quad u^h \quad w^0 \quad w^h \quad u_{,1}^0 \quad u_{,1}^h \quad w_{,1}^0 \quad w_{,1}^h \quad w_{,11}^0 \quad w_{,11}^h \quad \tau^0 \quad \tau^h \quad \tau_{,1}^0 \quad \tau_{,1}^h]^T \quad (6.9)$$

Per quanto riguarda la tensione σ_{33} , ricordiamo che si calcola come indicato nel Par. 4.3.5 (al quale rimandiamo per dettagli sulla definizione dei coefficienti), per cui possiamo scrivere

$$\sigma_{33} = [H_{\sigma 33}] \cdot \{q_\varepsilon\} \quad (6.10)$$

essendo

$$[H_{\sigma 33}] \equiv [0 \quad 0 \quad -\Delta \quad \Delta \quad \pi_{11}^1 \quad \pi_{11}^3 \quad 0 \quad 0 \quad -\pi_{11}^2 \quad -\pi_{11}^4 \quad 0 \quad 0 \quad \psi_{11}^0 \quad \psi_{11}^h] \quad (6.11)$$

6.3 Formulazione dell'elemento finito trave

L'elemento finito che stiamo per presentare corrisponde, nella direzione dello spessore, ad uno dei sublaminati nei quali l'intero laminato è stato suddiviso (Fig. 6.2). Per ciascuna faccia di tale sublaminato-elemento ci sono due spostamenti (tangenziale e trasversale) ed una tensione di taglio trasversale. Considerando che nell'espressione dell'energia di deformazione compare la derivata prima degli spostamenti u^0 e u^h e delle tensioni τ^0 e τ^h , e la derivata seconda degli spostamenti w^0 e w^h , per avere un elemento conforme dobbiamo garantire che u e τ siano di classe C^0 e che w sia di classe C^1 in x_1 . Per quanto riguarda w ,

quindi, usiamo i polinomi cubici di Hermite come funzioni di interpolazione, con l'introduzione di un grado di libertà rotazionale $\varphi \equiv w_{,1}$ per ogni nodo di vertice. Per u e τ , potremmo limitarci ai polinomi lineari di Lagrange ma preferiamo usare quelli quadratici (per cui, per ogni faccia, compare tra i due nodi di vertice un nodo intermedio dove sono attivi i soli gradi di libertà relativi a u e τ). Ci sono due fondamentali ragioni per la scelta dei polinomi quadratici. In primo luogo, nel caso di una trave a sbalzo isotropa e caricata di punta, gli spostamenti tangenziali delle due facce estreme sono parabolici e non lineari; è quindi ovvio che, con una interpolazione lineare, tale semplice problema non si potrebbe risolvere esattamente con un solo elemento. In secondo luogo, quando affronteremo il problema dello scorrimento interlaminare con l'elemento finito che stiamo per formulare (Par. 7.4), vedremo che la possibilità di disporre di un nodo centrale per ogni faccia del sublaminato ci permetterà di ottenere una mesh più fitta localmente senza l'uso di un numero elevato di elementi (e, quindi, di gradi di libertà).

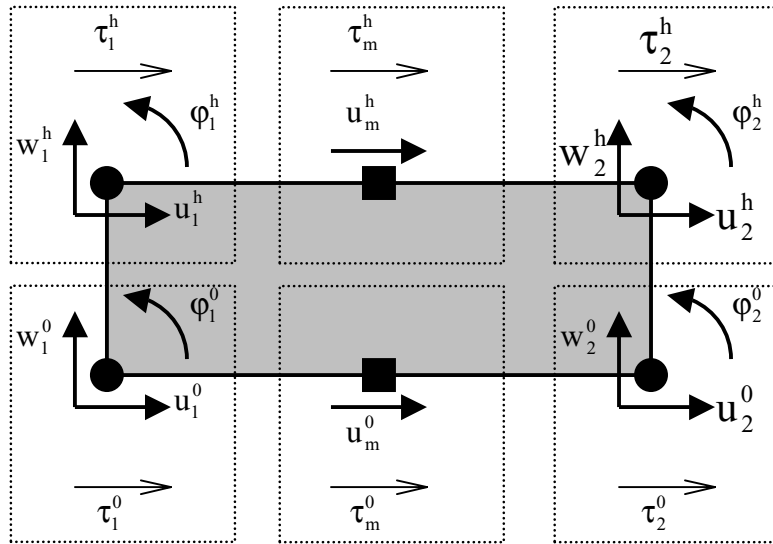


Figura 5.2: Topologia dell'elemento finito basato sul modello HZZ.

In conclusione, i gradi di libertà per ciascuna faccia sono 10, di cui 3 relativi ad u , 4 relativi a w e 3 relativi a τ . In totale ci sono, quindi, 20 gradi di libertà, ordinati secondo il seguente vettore

$$\{q\} \equiv \begin{bmatrix} u_1^0 & w_1^0 & \varphi_1^0 & \tau_1^0 & u_1^h & w_1^h & \varphi_1^h & \tau_1^h & u_m^0 & \tau_m^0 \\ u_m^h & \tau_m^h & u_2^0 & w_2^0 & \varphi_2^0 & \tau_2^0 & u_2^h & w_2^h & \varphi_2^h & \tau_2^h \end{bmatrix}^T \quad (6.12)$$

Gli spostamenti e le tensioni sono quindi approssimabili in termini di funzioni di interpolazione e gradi di libertà nel seguente modo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^0(\mathbf{x}_1; t) &= \mathbf{N}_2^1(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_1^0(t) + \mathbf{N}_2^2(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_m^0(t) + \mathbf{N}_2^3(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_2^0(t) \\
 \mathbf{w}^0(\mathbf{x}_1; t) &= \mathbf{N}_3^1(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{w}_1^0(t) + \mathbf{N}_3^2(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\phi}_1^0(t) + \mathbf{N}_3^3(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{w}_2^0(t) + \mathbf{N}_3^4(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\phi}_2^0(t) \\
 \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{x}_1; t) &= \mathbf{N}_2^1(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^0(t) + \mathbf{N}_2^2(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_m^0(t) + \mathbf{N}_2^3(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^0(t) \\
 \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_1; t) &= \mathbf{N}_2^1(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_1^h(t) + \mathbf{N}_2^2(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_m^h(t) + \mathbf{N}_2^3(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{u}_2^h(t) \\
 \mathbf{w}^h(\mathbf{x}_1; t) &= \mathbf{N}_3^1(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{w}_1^h(t) + \mathbf{N}_3^2(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\phi}_1^h(t) + \mathbf{N}_3^3(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{w}_2^h(t) + \mathbf{N}_3^4(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\phi}_2^h(t) \\
 \boldsymbol{\tau}^h(\mathbf{x}_1; t) &= \mathbf{N}_2^1(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_1^h(t) + \mathbf{N}_2^2(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_m^h(t) + \mathbf{N}_2^3(\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_2^h(t)
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

dove gli \mathbf{N}_2^i sono i polinomi quadratici di Lagrange e gli \mathbf{N}_3^i quelli cubici di Hermite. Usando le (6.13) e le (6.2) è possibile scrivere

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{q}_v\} &= [\mathbf{N}_v] \cdot \{\mathbf{q}\} \\
 \{\mathbf{q}_\varepsilon\} &= [\mathbf{N}_\varepsilon] \cdot \{\mathbf{q}\}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

dove $[\mathbf{N}_v]$ e $[\mathbf{N}_\varepsilon]$ sono matrici (8x20 e 14x20, rispettivamente) contenenti i polinomi di Lagrange e Hermite e le loro derivate.

Usando la (2.41), possiamo scrivere la variazione virtuale dell'energia di deformazione elastica dell'elemento nel seguente modo

$$\delta\phi = \delta\phi_m + \delta\phi_t + \delta\phi_z \equiv \int_V \delta\varepsilon_{11} Q_{11} \varepsilon_{11} dV + \int_V \delta\gamma_{13} Q_{44} \gamma_{13} dV + \int_V \delta\sigma_{33} S_{33} \sigma_{33} dV \tag{6.15}$$

Per i tre termini presenti nella (6.15) si possono scrivere le seguenti forme compatte (usando le (6.7), (6.10) e (6.14))

$$\begin{aligned}
 \delta\phi_m &= \delta\{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{K}_m] \{\mathbf{q}\} \\
 \delta\phi_t &= \delta\{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{K}_t] \{\mathbf{q}\} \\
 \delta\phi_z &= \delta\{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{K}_z] \{\mathbf{q}\}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

essendo

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_m] &\equiv b \int_1 [\mathbf{N}_\varepsilon]^T \langle [\mathbf{H}_{\varepsilon 11}]^T Q_{11} [\mathbf{H}_{\varepsilon 11}] \rangle [\mathbf{N}_\varepsilon] dx_1 \\
 [\mathbf{K}_t] &\equiv b \int_1 [\mathbf{N}_\varepsilon]^T \langle [\mathbf{H}_{\gamma 13}]^T Q_{44} [\mathbf{H}_{\gamma 13}] \rangle [\mathbf{N}_\varepsilon] dx_1 \\
 [\mathbf{K}_z] &\equiv b \int_1 [\mathbf{N}_\varepsilon]^T \langle [\mathbf{H}_{\sigma 33}]^T S_{33} [\mathbf{H}_{\sigma 33}] \rangle [\mathbf{N}_\varepsilon] dx_1
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

con l lunghezza dell'elemento finito trave. Ovviamente la matrice di rigidità dell'elemento finito $[K]$ è definita come

$$[K] = [K_m] + [K_t] + [K_z] \quad (6.18)$$

Il lavoro virtuale delle forze di inerzia è

$$\delta L_{in} \equiv - \int_V \delta\{V\}^T \rho \{\ddot{V}\} dV \quad (6.19)$$

che, usando le (6.4) e (6.14) diventa

$$\delta L_{in} = -\delta\{q\}^T [M] \{\ddot{q}\} \quad (6.20)$$

con

$$[M] \equiv b \int_1 [N_v]^T \langle [H_v]^T \rho [H_v] \rangle [N_v] dx_1 \quad (6.21)$$

Se consideriamo un sistema di carichi distribuiti sulle due facce del sublaminato, due tangenziali, \bar{p}^0 e \bar{p}^h , e due trasversali, \bar{q}^0 e \bar{q}^h , il lavoro virtuale dei carichi esterni risulta essere il seguente

$$\delta L_{ex} \equiv b \int_1 \delta\{g\}^T \{f\} dx_1 \quad (6.22)$$

dove

$$\begin{aligned} \{g\} &\equiv [u^0 \quad u^h \quad w^0 \quad w^h]^T \\ \{f\} &\equiv [\bar{p}^0 \quad \bar{p}^h \quad \bar{q}^0 \quad \bar{q}^h]^T \end{aligned} \quad (6.23)$$

Se scriviamo

$$\{g\} = [N_g] \{q\} \quad (6.24)$$

possiamo ottenere

$$\delta L_{ex} \equiv \delta\{q\}^T \{F\} \quad (6.25)$$

essendo

$$\{F\} \equiv b \int_1 [N_g]^T \{f\} dx_1 \quad (6.26)$$

Dalla classica espressione del principio dei lavori virtuali

$$\delta\phi = \delta L_{in} + \delta L_{ex} \quad (6.27)$$

otteniamo il sistema di equazioni del moto dell'elemento trave basato sul modello HZZ

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (6.28)$$

6.4 Discretizzazione secondo l'approccio dei sublaminati

In questo paragrafo discutiamo alcuni dei concetti relativi all'impiego dell'elemento finito trave, basato sul modello HZZ, in una procedura di discretizzazione con il metodo dei sublaminati.

Prima di tutto, chiariamo ancora una volta che il concetto di sublaminato è molto generale; sublaminato è un insieme di strati adiacenti che fanno parte del laminato completo. Naturalmente quando parliamo di strati, intendiamo non solo quelli fisicamente distinguibili ma anche quelli "matematici"; se può essere necessario, uno strato "fisico" può essere diviso in più strati "matematici" aventi, ovviamente, le stesse caratteristiche meccaniche. In questo senso il sublaminato può contenere da uno a tutti gli strati "matematici" del laminato, per cui può corrispondere ad una porzione di strato "fisico" o all'intero spessore del multistrato.

Se tralasciamo per il momento l'uso degli elementi finiti e consideriamo un laminato da studiare con il modello HZZ, l'uso dei sublaminati è un modo valido per incrementare l'ordine di accuratezza del modello stesso. Questo avviene perché le caratteristiche del modello, invece di essere valide sull'intero spessore, sono valide su ogni sua porzione-sublaminato. In questo modo, per esempio, invece di avere uno spostamento trasversale lineare nello spessore, abbiamo uno spostamento trasversale lineare a tratti. In pratica, se consideriamo l'intero spessore del multistrato, è come se lo stessi studiando con un modello più complesso del semplice HZZ.

Qualora si passi a considerare il metodo degli elementi finiti (limitiamoci, per ora, al caso di una trave), la divisione in sublaminati lungo lo spessore si sovrappone alla suddivisione in elementi della lunghezza (Fig. 6.3). E, visto che ogni elemento corrisponde ad un sublaminato in termini di spessore, tutto avviene come se la discretizzazione fosse quella di una struttura bi-dimensionale e si usassero elementi piastra; e questa, almeno dal punto di vista della scrittura dei programmi, è una interpretazione molto vantaggiosa.

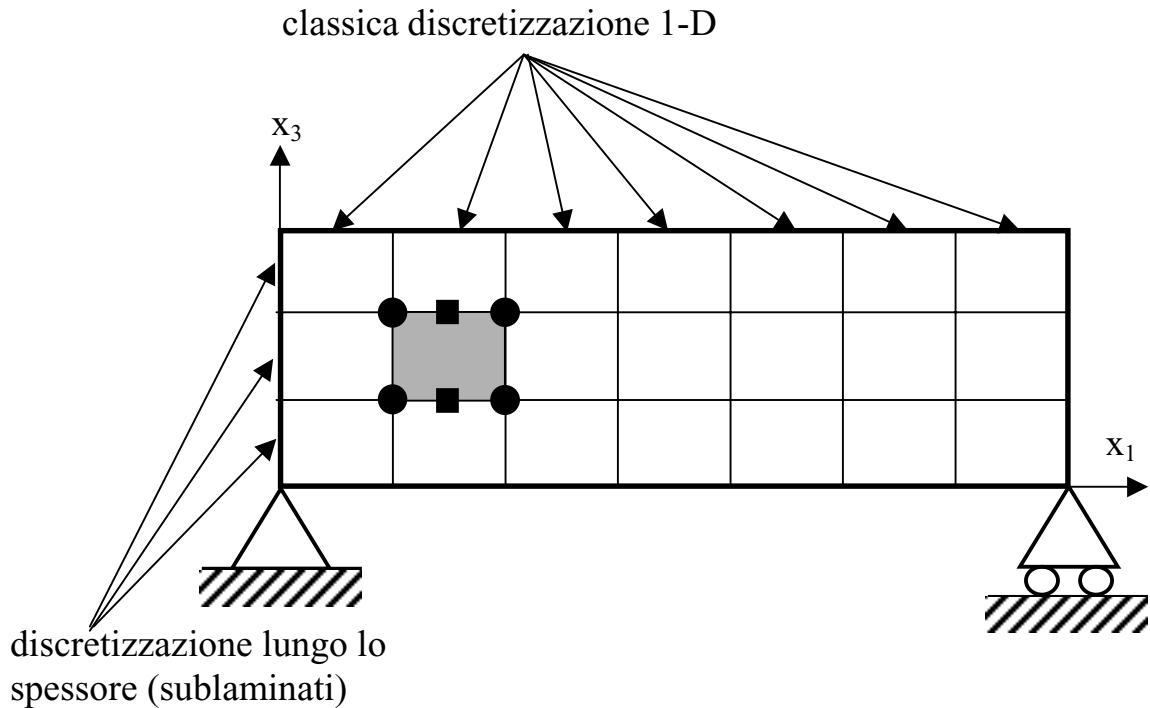


Figura 6.3: Discretizzazione classica e lungo lo spessore.

Naturalmente l'uso del concetto di sublaminato, soprattutto accoppiato all'impiego degli elementi finiti, comporta che sia garantita la continuità delle grandezze opportune lungo l'intero spessore. All'interno di ogni sublaminato tale continuità si ha automaticamente grazie alle proprietà del modello HZZ (spostamento tangenziale continuo tranne che nei casi di scorrimento interlaminare, spostamento trasversale e tensioni di taglio trasversale continui sempre). Nel passaggio da sublaminato a sublaminato la continuità può essere facilmente imposta (quando necessario) durante la procedura di assemblaggio; in questo senso è di decisiva importanza il fatto che i gradi di libertà siano definiti proprio sulle facce estreme (quelle che separano un sublaminato da quelli adiacenti) e siano proprio spostamenti e tensione di taglio trasversale. La possibilità di imporre o meno le continuità di tali grandezze tra sublaminato e sublaminato garantisce una capacità di modellizzazione che è più vasta di quella offerta all'interno di ogni sublaminato. Si pensi, per esempio, alla possibilità di studiare discontinuità dello spostamento trasversale, cioè modi di frattura del I tipo che non sono ammessi nel modello HZZ (cioè all'interno di ogni sublaminato). La possibilità di avere discontinuità dello spostamento tangenziale tra sublaminato e sublaminato sembra non essere un grande vantaggio, visto che tali discontinuità sono ammesse anche all'interno di ognuno di essi; ma vedremo nel Par. 7.4 che i due modi di simulare gli scorrimenti interlaminari forniscono risultati molto diversi e solo in un caso corretti.

Capitolo 7

Aspetti della modellizzazione; funzioni di forma Hermitiane, valutazione della σ_{33} e slip-locking

7.1 Introduzione

Prima di presentare (Cap. 8) alcuni risultati numerici relativi alle applicazioni dei modelli e delle procedure viste in precedenza (Capp. 3-6), in questo capitolo vogliamo trattare alcuni aspetti di modellizzazione che riteniamo di notevole importanza.

In primo luogo vogliamo mettere in evidenza le proprietà delle funzioni di forma Hermitiane (modello HZZ) descritte nel Par. 4.3.4; è soprattutto interessante come alcune di queste proprietà siano indipendenti dalla laminazione.

Inoltre, è istruttivo considerare quali tentativi siano stati fatti per arrivare a scegliere un andamento costante nello spessore della tensione trasversale normale (Par. 4.3.5), sempre per il modello HZZ. Le scelte presenti in letteratura a tale proposito sono diverse e non tutte ci sono parse valide, soprattutto in termini di semplicità computazionale.

Infine, valutiamo la capacità che i modelli LZZ, CZZ e HZZ hanno di valutare gli scorrimenti interlaminari ed i loro effetti sulla risposta delle strutture. Si vedrà come i modelli LZZ e CZZ incorrano in quello che abbiamo definito slip-locking; per elevati valori del danno, i due modelli non sono in grado di fornire risultati attendibili. Questo avviene anche per il modello HZZ senza suddivisione dello spessore in sublaminati; solo usando gli elementi finiti basati su tale modello (Cap. 6) è possibile eliminare il problema.

Precisiamo ancora che i risultati numerici dei Parr. 7.3 e 7.4 fanno riferimento al problema schematizzato in Fig. 7.1. Si tratta di una trave appoggiata su entrambi gli estremi e soggetta ad un carico distribuito sinusoidale \bar{q}^h . Il problema ammette una soluzione esatta (vedere le (7.12)-(7.15)) che prevede l'annullarsi dello spostamento tangenziale nella mezzera della trave (vincolo tratteggiato in Fig. 7.1). I risultati contenuti nei paragrafi citati sono, quindi, ottenuti usando tali soluzioni esatte per i vari modelli interessati. Inoltre, tutti i risultati dei Parr. 7.3-7.5 sono ottenuti con l'ipotesi di stato di tensione piano in (x_1, x_3) .

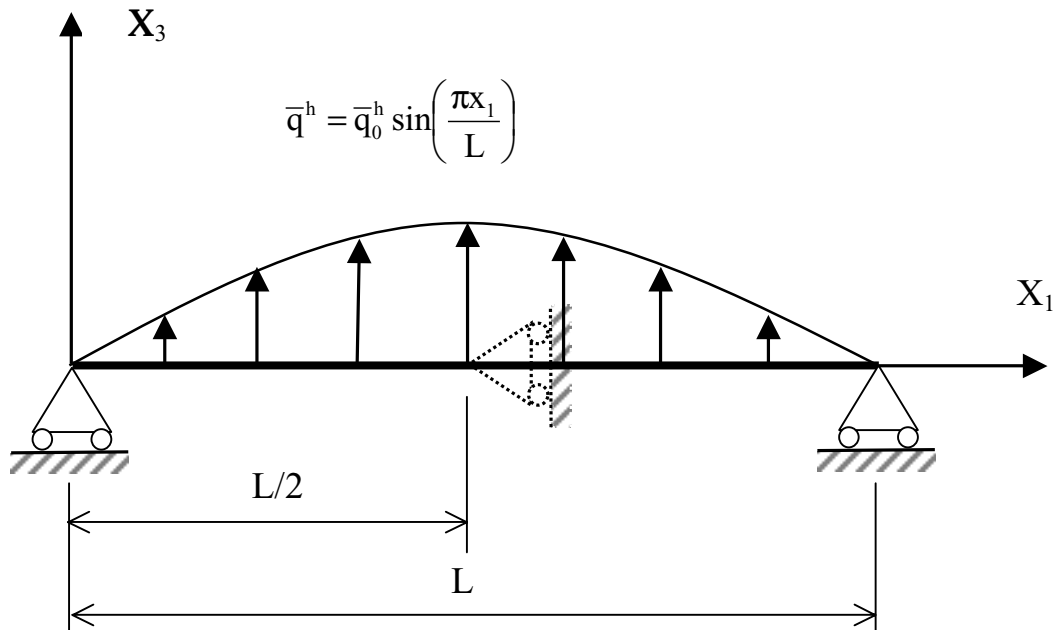


Figura 7.1: Geometria, vincoli e carichi del problema analizzato nei Parr. 7.3 e 7.4.

7.2 Le funzioni di forma Hermitiane del modello HZZ

In questo paragrafo vogliamo presentare alcuni risultati che riguardano le funzioni di forma matriciali $H_{\alpha\beta}^i$ del modello HZZ. Abbiamo già parlato (Par. 4.3.4) delle caratteristiche di tali funzioni e del fatto che siano una generalizzazione dei classici polinomi cubici di Hermite. Consideriamo, per semplicità, il caso di una trave; in questa condizione (vedere la (6.3)) di ogni funzione matriciale resta attivo solo il termine H_{11}^i che noi qui ribattezziamo H^i . Vediamo allora come si comportano le 4 funzioni H^i per tre diverse laminazioni (laminati 1, 2 e 3). Nelle Figg. 7.2-7.5 riportiamo gli andamenti delle funzioni di forma. Nel caso del laminato 1, tutti gli strati hanno la stessa rigidezza Q_{44} e non ci sono scorrimenti interlaminari; sono quindi rispettate le due condizioni, discusse nel Par. 4.3.4, per le quali H^i è esattamente il polinomio i -esimo di Hermite. Per quanto riguarda il laminato 2, non ci sono danni interlaminari ma si hanno diverse rigidezze Q_{44} per i vari strati; le funzioni H^i sono ancora continue. Con la presenza di danni interlaminari (laminato 3), alle interfacce danneggiate le H^i presentano delle discontinuità che si tradurranno in analoghe discontinuità degli spostamenti tangenziali.

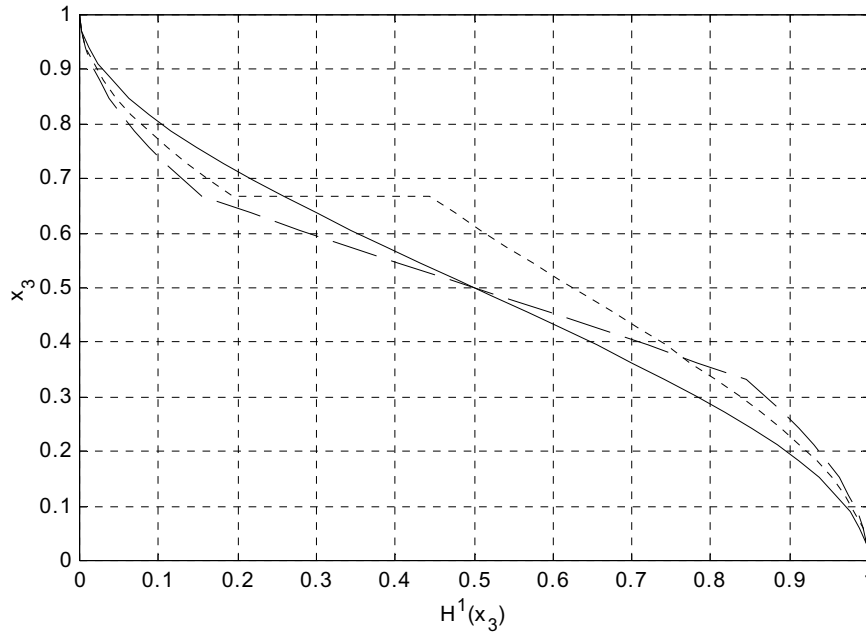


Figura 7.2: Andamento lungo lo spessore della funzione $H^1(x_3)$: linea continua, laminato 1; linea tratteggiata, laminato 2; linea a punti, laminato 3.

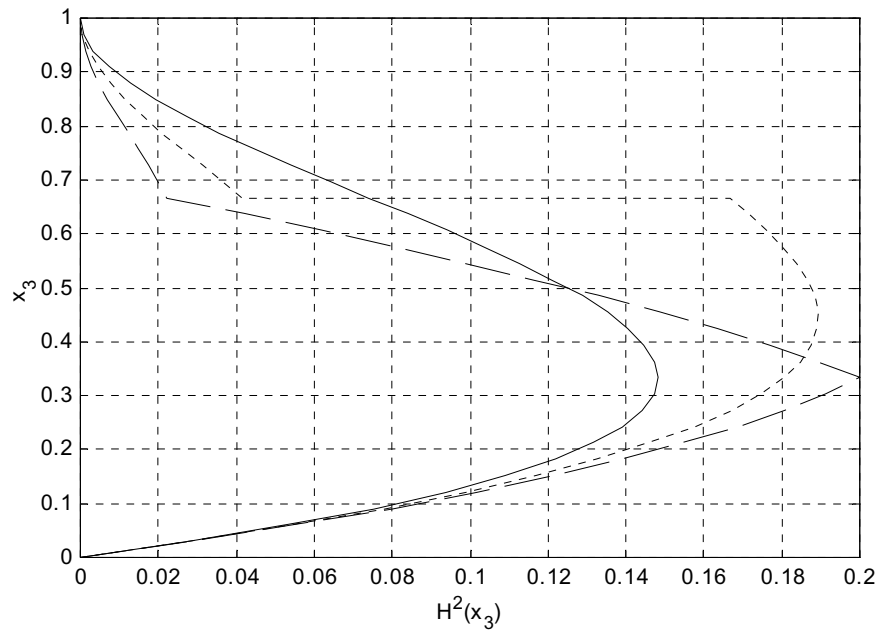


Figura 7.3: Andamento lungo lo spessore della funzione $H^2(x_3)$: linea continua, laminato 1; linea tratteggiata, laminato 2; linea a punti, laminato 3.

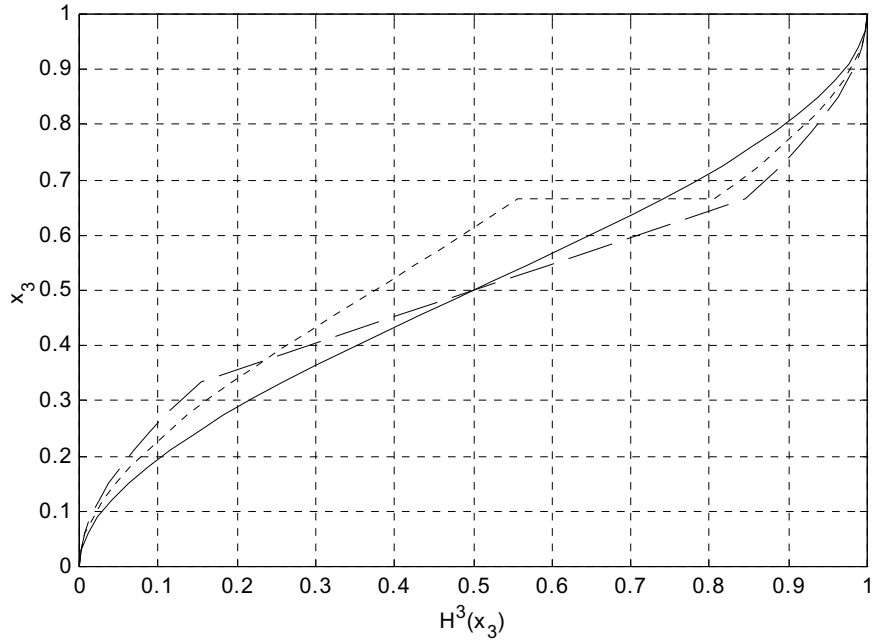


Figura 7.4: Andamento lungo lo spessore della funzione $H^3(x_3)$: linea continua, laminato 1; linea tratteggiata, laminato 2; linea a punti, laminato 3.

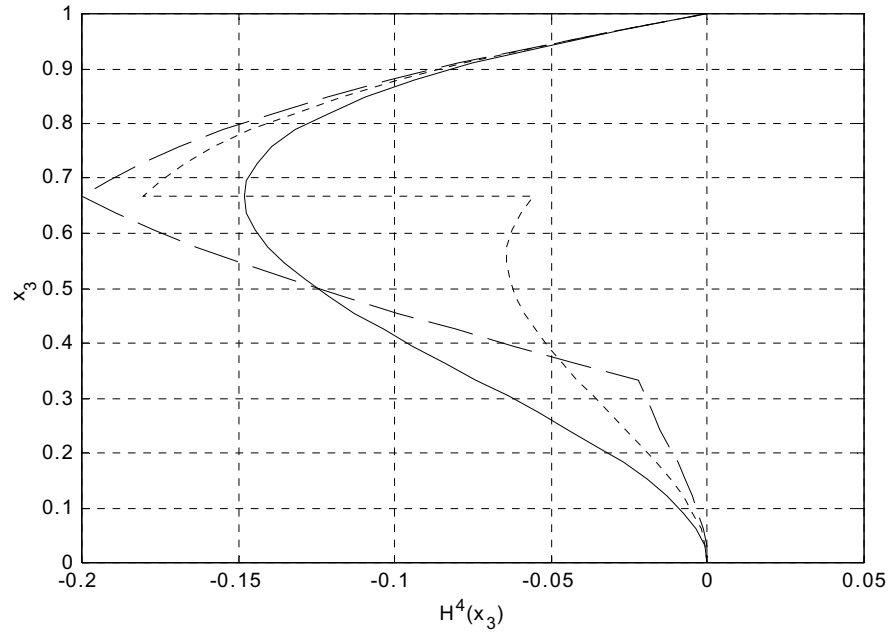


Figura 7.5: Andamento lungo lo spessore della funzione $H^4(x_3)$: linea continua, laminato 1; linea tratteggiata, laminato 2; linea a punti, laminato 3.

7.3 Valutazione della tensione trasversale normale

σ_{33}

Uno dei principali problemi incontrati nello sviluppo del modello HZZ (Cap. 4) è stato decidere come valutare la deformabilità trasversale normale. Il primo passo è stato semplice ed è consistito nel supporre un andamento lineare dello spostamento trasversale lungo lo spessore. La scelta più critica è stata come descrivere la deformazione e la tensione trasversali normali. Prima di tutto (Par. 4.3.5), seguendo le conclusioni di Averill [44], si è deciso di ipotizzare un andamento per la tensione; tale andamento viene poi determinato, in termini quantitativi, usando una opportuna condizione di minimo che renda compatibili le deformazioni trasversali normali, quella derivata dagli spostamenti e quella ottenuta con le equazioni costitutive (Par. 4.3.5). Il cuore del problema è però quale andamento ipotizzare per σ_{33} . La nostra scelta è caduta, infine, su un andamento costante, ma preferiamo dare conto dello studio che abbiamo effettuato per arrivare a tale conclusione. Non stiamo qui ad entrare in dettagli eccessivi sulla sequenza cronologica dei vari andamenti provati; diamo solo alcune indicazioni sui risultati ottenuti con le diverse scelte e sul motivo per cui si è deciso di usare un andamento costante per σ_{33} .

Tutti gli andamenti di σ_{33} provati sono di tipo polinomiale in x_3 e possono essere scritti in una forma generale (supponiamo, per semplicità, di essere nel caso statico per una trave)

$$\sigma_{33}(x_1, x_3) = \delta_C \sigma_{33}(x_1) + (1 - \delta_C) p_n^i(x_3) \sigma_{33}^i(x_1) \quad (7.1)$$

dove i $p_n^i(x_3)$ sono i polinomi di Hermite di grado n e $\sigma_{33}^i(x_1)$ i relativi coefficienti. Nel caso $\delta_C=1$ abbiamo una σ_{33} costante lungo lo spessore; nel caso $\delta_C=0$ possiamo ancora scegliere il grado n del polinomio (lineare, cubico, etc.). La determinazione dei coefficienti della (7.1) si ottiene con una condizione di minimo come quella già descritta nel Par. 4.3.5

$$\langle (\epsilon_{33}^u - \epsilon_{33}) p \rangle = 0 \quad \text{con } p \equiv \begin{cases} 1 & \text{condizione di Reissner-Averill} \\ S_{33} & \text{condizione di Tessler} \end{cases} \quad (7.2)$$

Ci sono però altre fonti di informazioni sul comportamento della tensione trasversale normale [15]-[17]. Prima di tutto la presenza di carichi trasversali sulle due facce esterne del laminato può essere usata per calcolare i valori di σ_{33} per $x_3=0$ e h

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_1, x_3 = 0) &= -q^0(x_1) \\ \sigma_{33}(x_1, x_3 = h) &= +q^h(x_1) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Inoltre, l'uso della equazione indefinita di equilibrio in direzione trasversale

$$\tau_{13,1} + \sigma_{33,3} = 0 \quad (7.4)$$

ci fornisce le derivate prime di σ_{33} rispetto a x_3 , per $x_3=0$ e h

$$\begin{aligned} \sigma_{33,3}(x_1, x_3 = 0) &= -\tau_{13,1}(x_1, x_3 = 0) = +\bar{p}_1^0(x_1) \\ \sigma_{33,3}(x_1, x_3 = h) &= -\tau_{13,1}(x_1, x_3 = h) = -\bar{p}_1^h(x_1) \end{aligned} \quad (7.5)$$

dove abbiamo usato anche le condizioni (4.16).

Abbiamo, dunque, a disposizione le (7.2), (7.3) e (7.5) per determinare i coefficienti dello sviluppo (7.1). In generale, si calcolano alcuni dei coefficienti con le (7.3) e (7.5) e i restanti con la (7.2). Sono stati svolti diversi calcoli per verificare quale fosse l'ordine di sviluppo migliore (costante, lineare, cubico, etc.) e con quali condizioni fosse meglio calcolare i relativi coefficienti. Riportiamo qui di seguito le principali conclusioni ottenute¹.

- In ogni caso, la determinazione dei coefficienti dello sviluppo (7.1) non può essere fatta con le sole condizioni (7.3) e (7.5); la condizione di compatibilità (7.2) non può essere ignorata. Tutti i calcoli effettuati con $\delta_C=0$, $n=1$ (tensione lineare) e i due valori estremi di σ_{33} ottenuti con la (7.3) (procedura 00) oppure con $\delta_C=0$, $n=3$ (tensione cubica) e valori e derivate estremi di σ_{33} calcolati con le (7.3) e (7.5) (procedura 0000), hanno fornito risultati scorretti per le altre grandezze. Per esempio, si consideri il problema di Fig. 7.1 (laminato 4, $L/h=4$) studiato con le impostazioni 0000 e si noti (Fig. 7.6) come la tensione σ_{11} sia notevolmente diversa da quella ottenuta con la soluzione esatta di Pagano [52]. E questo avviene nonostante la valutazione di σ_{33} sia del tutto accettabile (Fig. 7.7). Con impostazioni diverse dalle 00 e 0000 tale tensione è determinata in maniera molto più corretta.
- Se consideriamo la scelta di una tensione σ_{33} costante ($\delta_C=1$), vista l'osservazione precedente, il suo valore deve essere determinato con l'uso della condizione di minimo (7.2) (procedura 1). Il valore così ottenuto è in ogni caso (sia di laminazione che di snellezza delle trave, vedere le Figg. 7.8, 7.9, 7.10 e 7.11) una sorta di media integrale dell'andamento della tensione lungo lo spessore.
- Nel caso di una tensione trasversale normale lineare ($\delta_C=0$, $n=1$), la procedura più sensata è quella che prevede il calcolo di entrambi i coefficienti con la (7.2) (procedura 11). Come si nota osservando le Figg. 7.8, 7.9, 7.10 e 7.11, l'andamento di σ_{33} è corretto nel caso di travi molto tozze e non per tutte le laminazioni.

¹ Al fine di semplificare l'indicazione delle diverse modalità di calcolo di σ_{33} , useremo una notazione compatta. Per esempio, la tensione calcolata secondo la procedura 1010 è di tipo cubico (perché ci sono 4 numeri, come 4 sono i coefficienti di un polinomio cubico); il primo numero è relativo al valore della tensione per $x_3=0$, il secondo numero alla sua derivata per $x_3=0$, il terzo al valore per $x_3=h$ e il quarto alla derivata per $x_3=h$. Se il numero è 1 si intende che il corrispondente coefficiente è stato calcolato con la (7.2), se è 0 vuol dire che è stato determinato con una delle (7.3) (se si tratta di un valore della tensione) o una delle (7.5) (se si tratta di una derivata prima della tensione). Nel caso 1010, quindi, si ha che sono imposte le derivate (con la (7.5)) e sono calcolati i valori (con la (7.2)).

- L'andamento cubico ($\delta_c=0$, $n=3$) è quello proposto da Tessler [15]-[17] sulla base della sua somiglianza con le soluzioni esatte. Lo stesso autore usa le (7.5) per calcolare le derivate di σ_{33} per $x_3=0$ e h ; i restanti due coefficienti si ottengono con la (7.2) (procedura 1010). L'andamento ottenuto va poi corretto per garantire che la funzione cubica rispetti anche le condizioni (7.3). Questo si ottiene introducendo dei fattori correttivi che dipendono dalla laminazione [16]. L'importanza di aggiungere questa correzione è stata da noi verificata; se consideriamo le Figg. 7.12, 7.13, 7.14 e 7.15, notiamo che, imponendo le derivate estreme ma non i valori, questi possono essere molto diversi da quelli esatti, soprattutto per travi snelle. Abbiamo anche provato ad imporre i valori estremi (uso della (7.3)) e non le derivate (ottenute, quindi, con la (7.2)) (procedura 0101); nel caso delle travi snelle, ed anche per alcune laminazioni delle travi tozze, l'andamento di σ_{33} oscilla notevolmente. Questo vale anche nel caso in cui tutti e 4 coefficienti siano determinati con la (7.2) (procedura 1111).
- Abbiamo provato anche un andamento polinomiale di 5° grado ($\delta_c=0$, $n=5$) per vedere se imponendo i due valori con la (7.3), le due derivate prime con la (7.5) e poi calcolando i due coefficienti rimasti con la (7.2) (procedura 001001), si otteneva un risultato migliore dei precedenti. Osservando le Figg. 7.16, 7.17, 7.18 e 7.19 si nota come ciò sia vero per travi tozze e per alcune laminazioni; diversamente, la funzione ottenuta per σ_{33} è troppo oscillante. Conclusioni del tutto analoghe valgono per i risultati ottenuti con altre modalità di calcolo dei coefficienti dello sviluppo (7.1) (procedure 011011 e 111111).

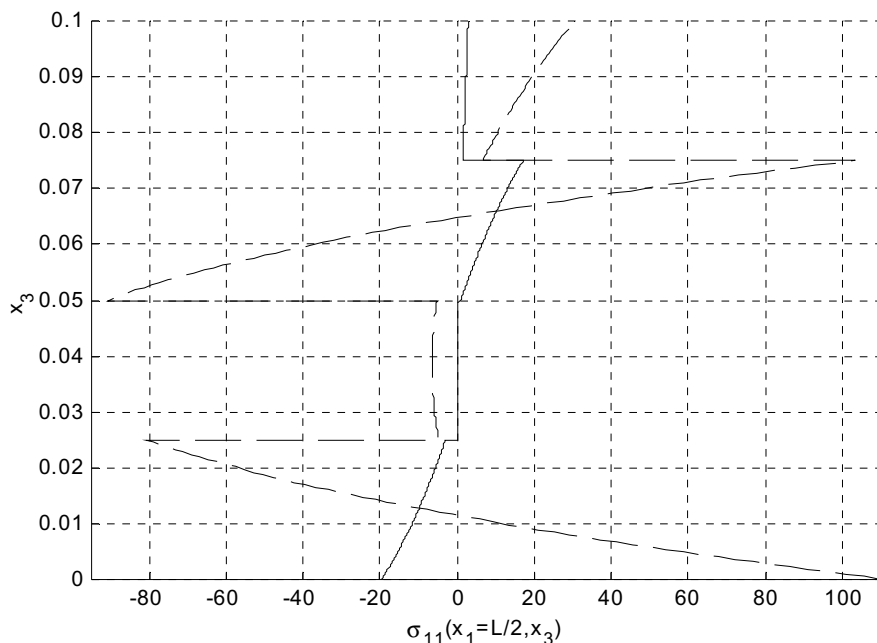


Figura 7.6: Andamento lungo lo spessore di σ_{11} : linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratteggiata, p. 0000.

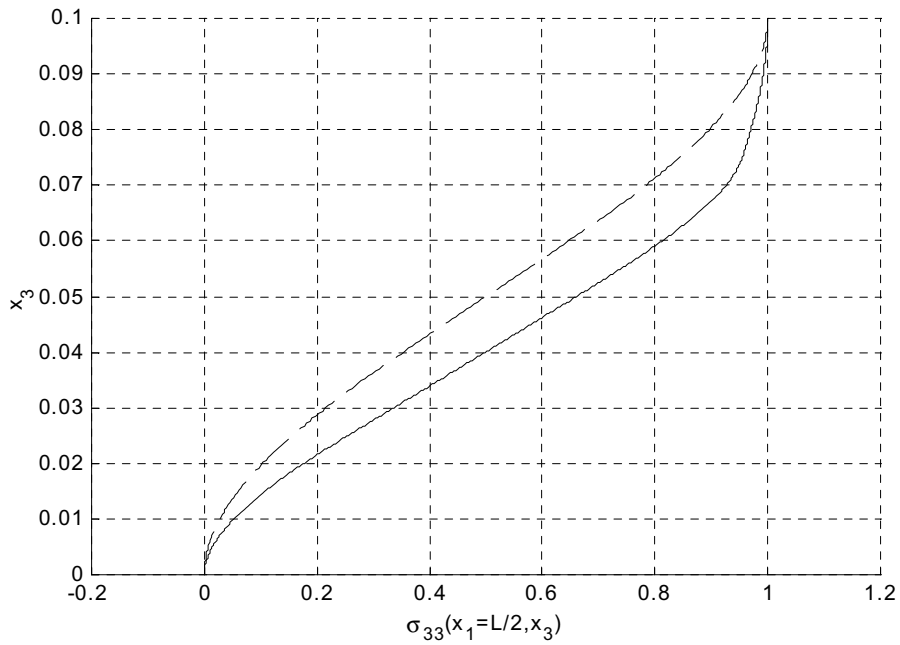


Figura 7.7: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} : linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratteggiata, p. 0000.

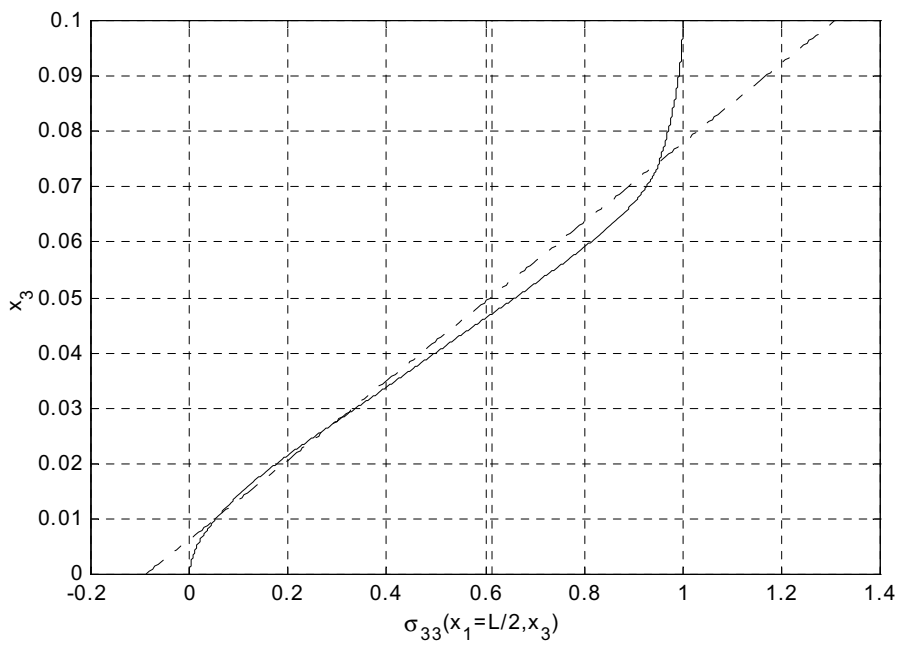


Figura 7.8: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 4, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1; linea tratto-punto, p. 11.

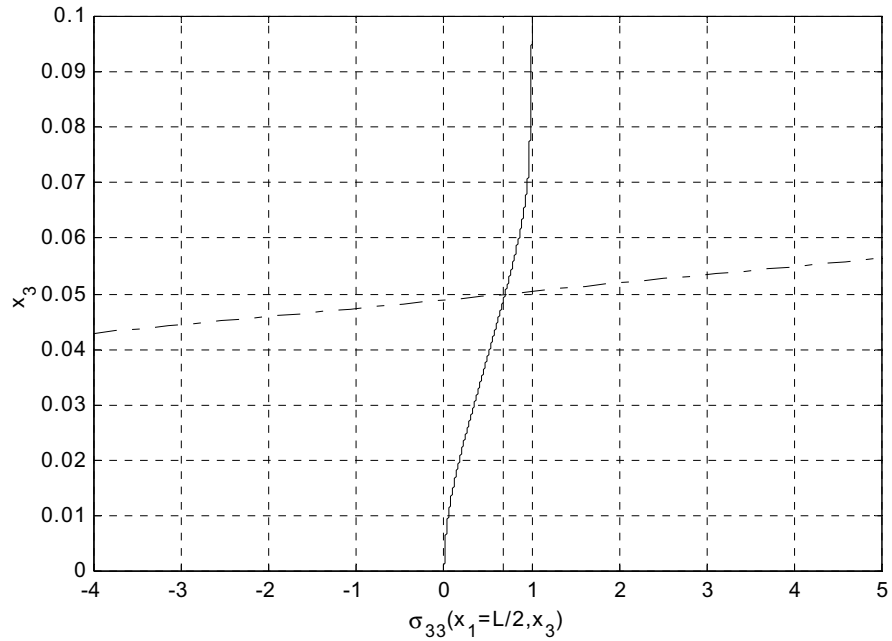


Figura 7.9: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 4, $L/h=30$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1; linea tratto-punto, p. 11.

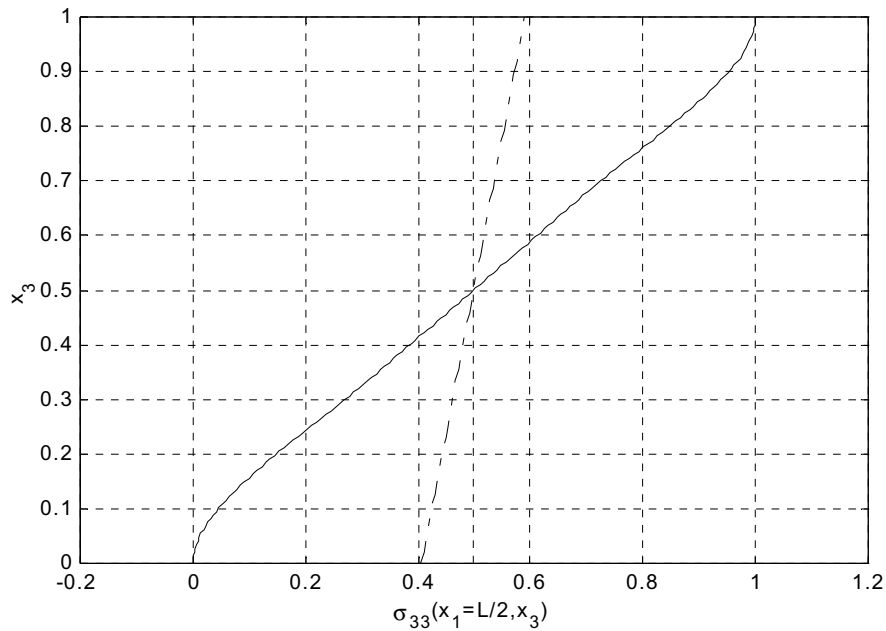


Figura 7.10: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 2, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1; linea tratto-punto, p. 11.

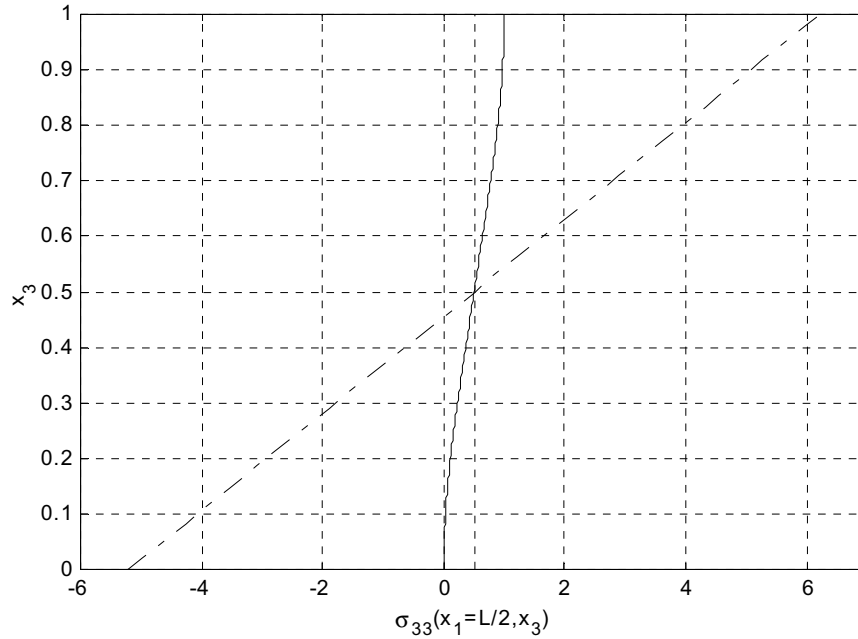


Figura 7.11: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 2, $L/h=30$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1; linea tratto-punto, p. 11.

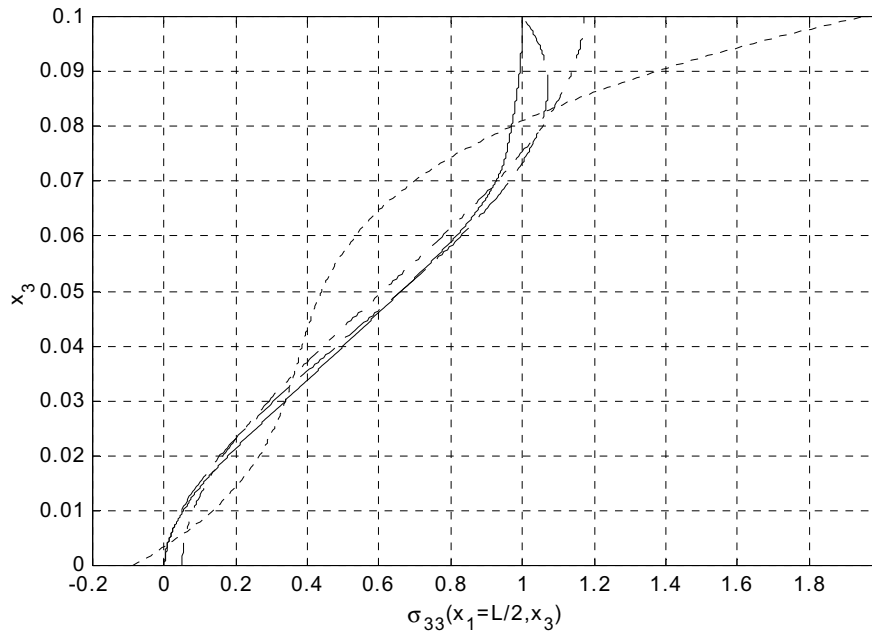


Figura 7.12: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 4, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1111; linea tratteggiata, p. 0101; linea tratto-punto, p. 1010.

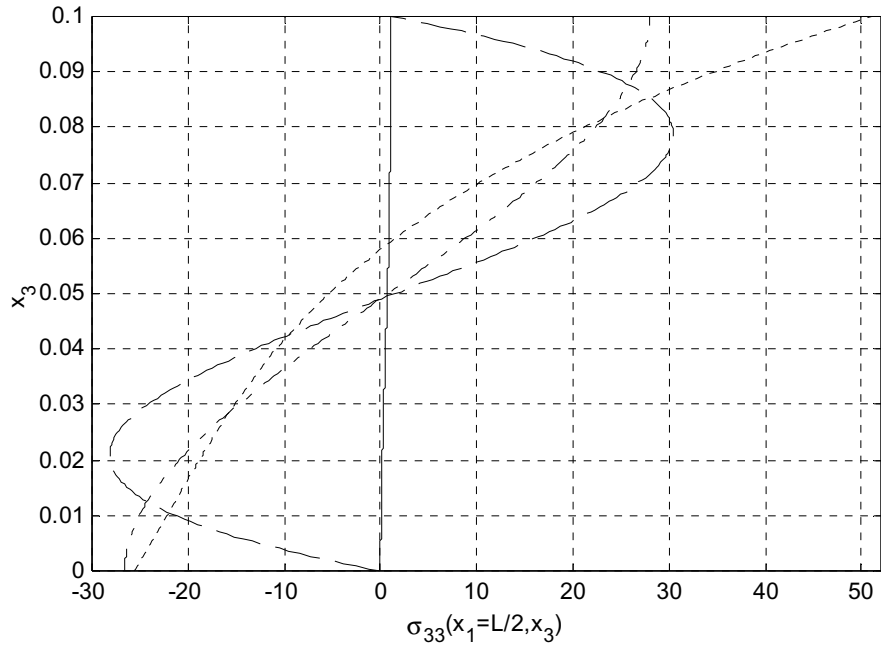


Figura 7.13: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 4, $L/h=30$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1111; linea tratteggiata, p. 0101; linea tratto-punto, p. 1010.

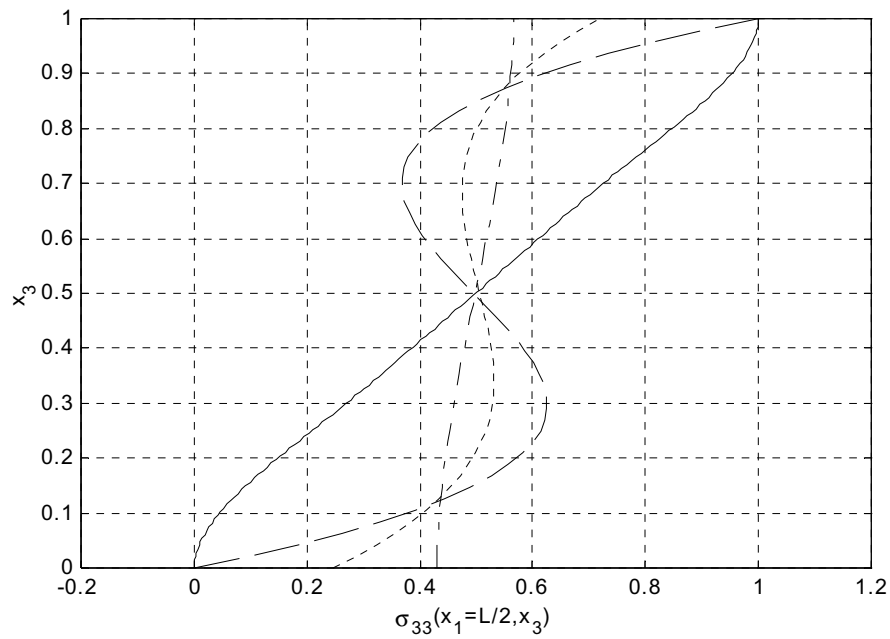


Figura 7.14: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 2, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1111; linea tratteggiata, p. 0101; linea tratto-punto, p. 1010.

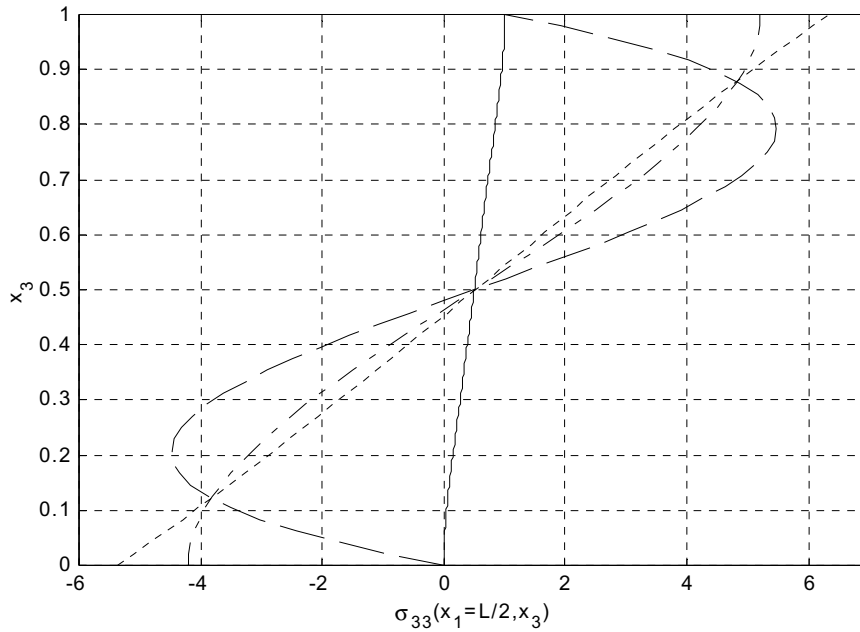


Figura 7.15: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 2, $L/h=30$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 1111; linea tratteggiata, p. 0101; linea tratto-punto, p. 1010.

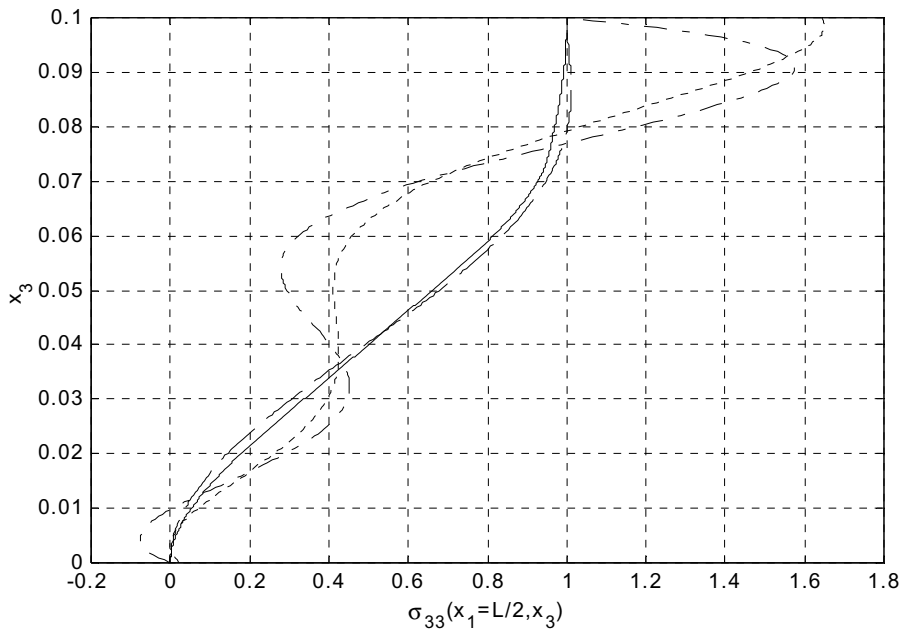


Figura 7.16: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 4, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 111111; linea tratteggiata, p. 001001; linea tratto-punto, p. 011011.

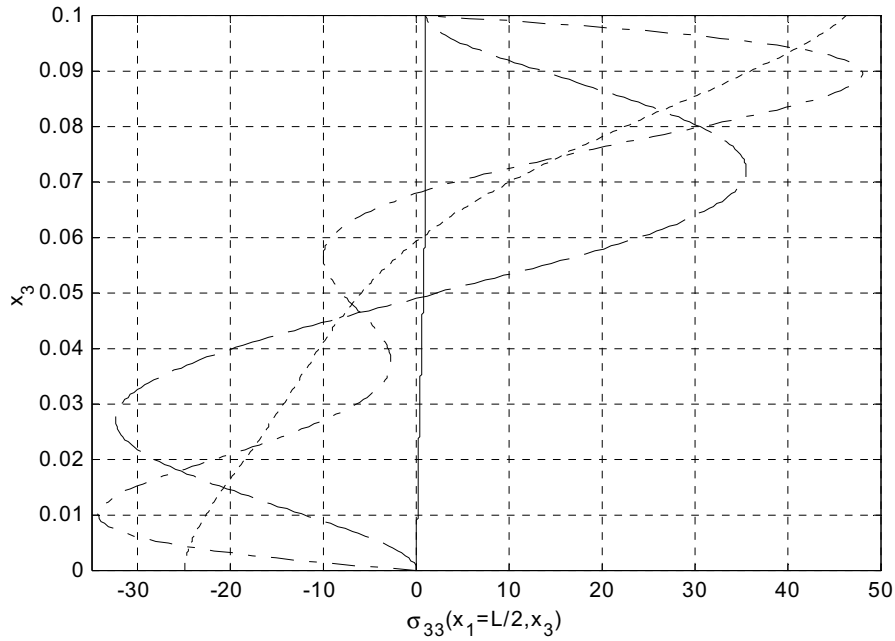


Figura 7.17: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 4, $L/h=30$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 111111; linea tratteggiata, p. 001001; linea tratto-punto, p. 011011.

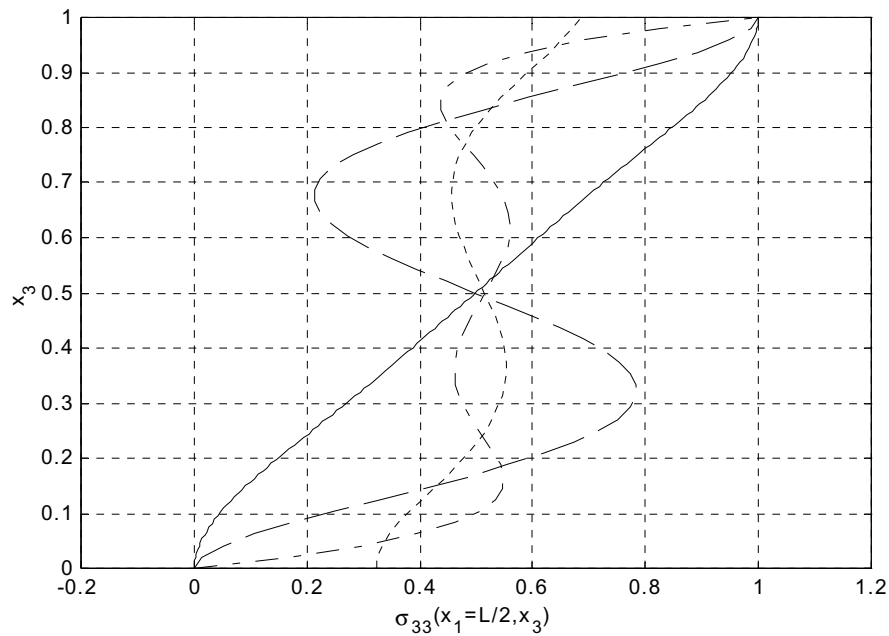


Figura 7.18: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 2, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 111111; linea tratteggiata, p. 001001; linea tratto-punto, p. 011011.

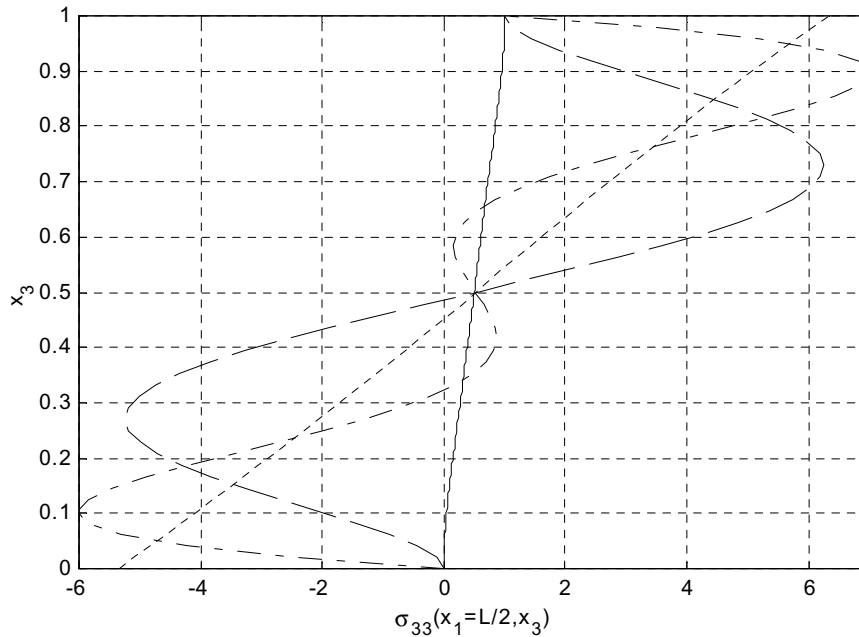


Figura 7.19: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 2, $L/h=30$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, p. 111111; linea tratteggiata, p. 001001; linea tratto-punto, p. 011011.

La scelta finale (Par. 4.3.5) è quindi stata di calcolare un andamento costante medio di σ_{33} . La soluzione di Tessler è più corretta perché l'andamento cubico meglio approssima la soluzione esatta; ma tale precisione si paga con l'introduzione dei fattori correttivi che dipendono dalla laminazione. Comunque, la precisione voluta si può ottenere anche con il modello HZZ, dividendo lo spessore in un numero opportuno di sublaminati. A proposito della valutazione di σ_{33} , ricordiamo il già citato lavoro di Icardi [35]; lo spostamento trasversale è di quarto grado in x_3 ed è di tipo zig-zag, cioè con discontinuità nella derivata prima alle interfacce. E' così possibile imporre a priori che σ_{33} (calcolata secondo la sequenza spostamento \rightarrow deformazione \rightarrow tensione) sia continua (anche nella sua derivata rispetto a x_3); è, inoltre, possibile far sì che σ_{33} assuma sulle due facce esterne del laminato i valori dei carichi trasversali applicati (senza la necessità di introdurre coefficienti correttivi). Il tutto, però si paga ancora con un elevato numero di gradi di libertà.

I casi studiati fino ad ora, per verificare quale fosse la scelta migliore per la funzione σ_{33} , erano caratterizzati da un valore comune di C_{33} per tutti gli strati. Come visto nel Par. 4.3.5, in questo caso, le due possibili condizioni espresse dalla (7.2) sono del tutto equivalenti. Vediamo ora cosa accade nel caso del laminato 5 ($L/h=4$). Trattandosi di una trave sandwich, gli approcci di Reissner-Averill e di Tessler forniscono risultati diversi. Come evidenziato dalle Figg. 7.20-7.23, la condizione di Reissner-Averill permette di determinare meglio le grandezze trasversali come ϵ_{33} e σ_{33} , mentre la condizione di Tessler migliora la valutazione delle grandezze nel piano (V_1 e ϵ_{11}).

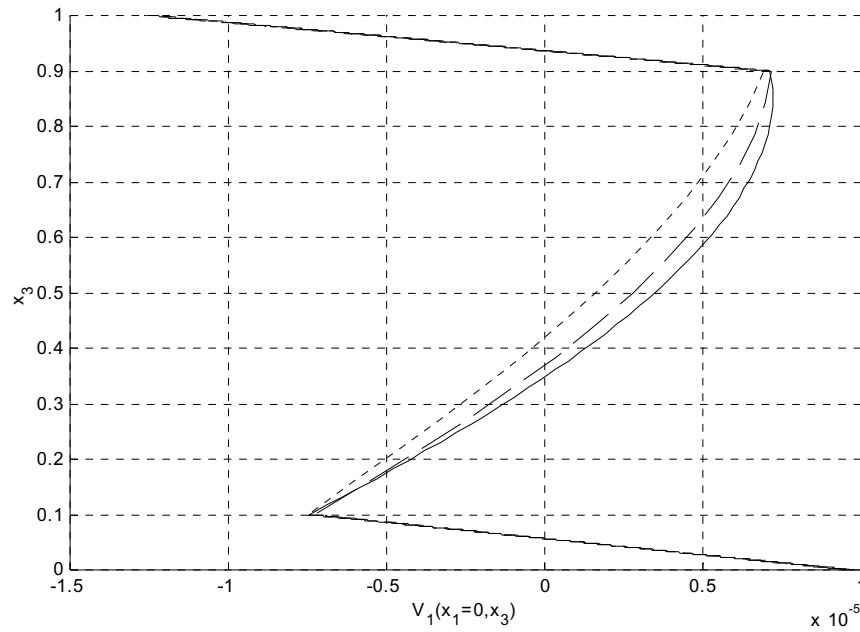


Figura 7.20: Andamento lungo lo spessore di V_1 (laminato 5, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, HZZ (Averill); linea tratteggiata, HZZ (Tessler).

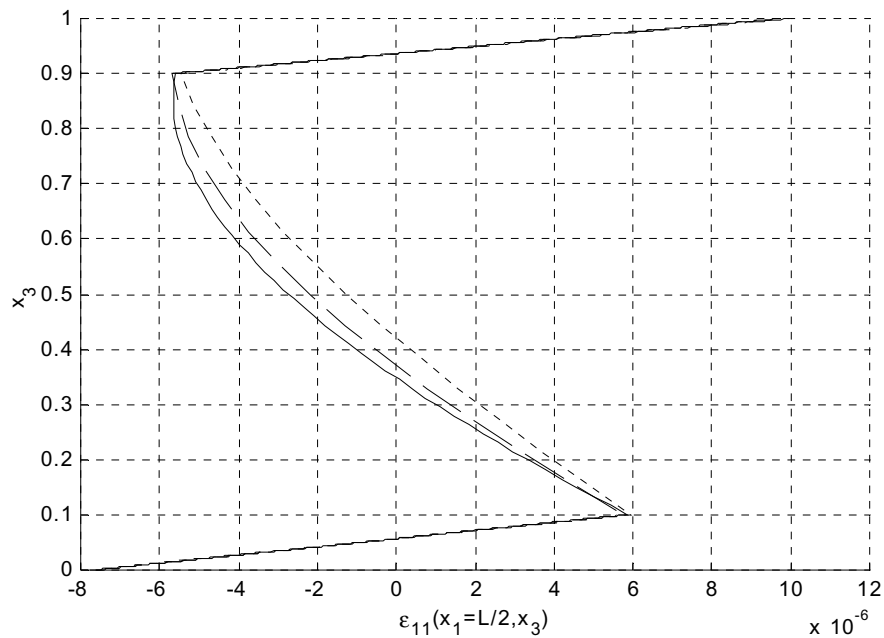


Figura 7.21: Andamento lungo lo spessore di ϵ_{11} (laminato 5, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, HZZ (Averill); linea tratteggiata, HZZ (Tessler).

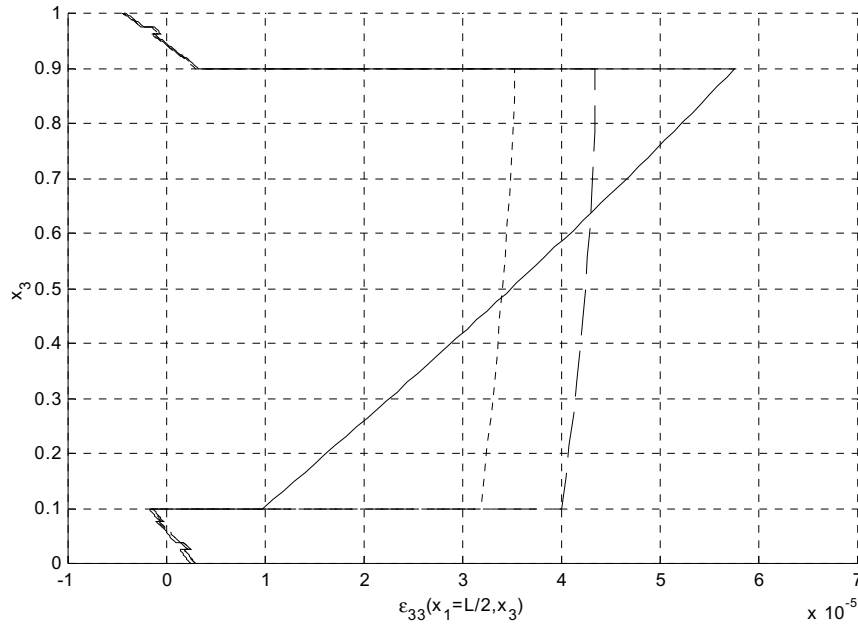


Figura 7.22: Andamento lungo lo spessore di ϵ_{33} (laminato 5, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, HZZ (Averill); linea tratteggiata, HZZ (Tessler).

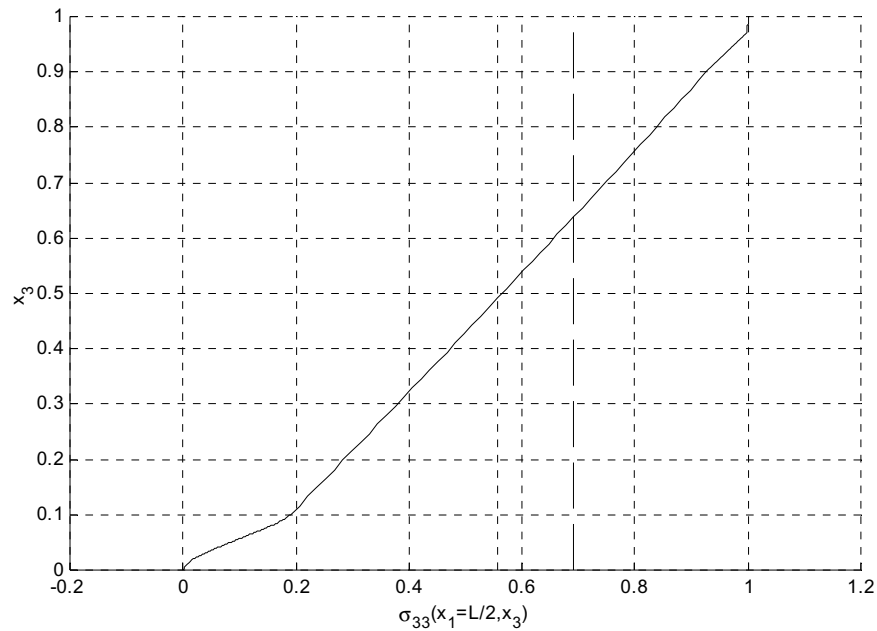


Figura 7.23: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 5, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea a punti, HZZ (Averill); linea tratteggiata, HZZ (Tessler).

7.4 Valutazione dello scorrimento interlaminare; il fenomeno dello slip-locking

Prima di iniziare a studiare l'effetto del danno interlaminare sulle capacità di resistenza delle strutture multistrato, occorre soffermarsi sui modelli che useremo per tale analisi. Come visto nei Capp. 3-4, i modelli LZZ, CZZ e HZZ ammettono l'esistenza di discontinuità degli spostamenti tangenziali in corrispondenza di interfacce danneggiate. Si suppone, inoltre, un legame lineare (vedere la (3.9)) tra tale discontinuità e le tensioni di taglio trasversale sulla stessa interfaccia. Le costanti di proporzionalità sono definite costanti di scorrimento $^{(k)}T_{\alpha\beta}$; al variare di tali costanti passiamo dal caso limite di strati perfettamente incollati a quello opposto di strati completamente scollati.

In questo paragrafo vogliamo dimostrare che i modelli zig-zag sono in grado di simulare scorrimenti interlaminari da lievi a moderati; i casi di strati notevolmente scorrevoli l'uno rispetto all'altro non vengono colti con accuratezza, a causa dell'insorgere del fenomeno detto di **slip-locking**. Tale fenomeno si verifica per i modelli LZZ, CZZ e HZZ, sia nel caso trave che nel caso piastra ed in ogni tipo di applicazione (analisi statiche, calcolo di frequenze proprie e carichi critici). Per spiegare in che cosa consista lo slip-locking e come si possa superare, preferiamo usare un semplice esempio numerico.

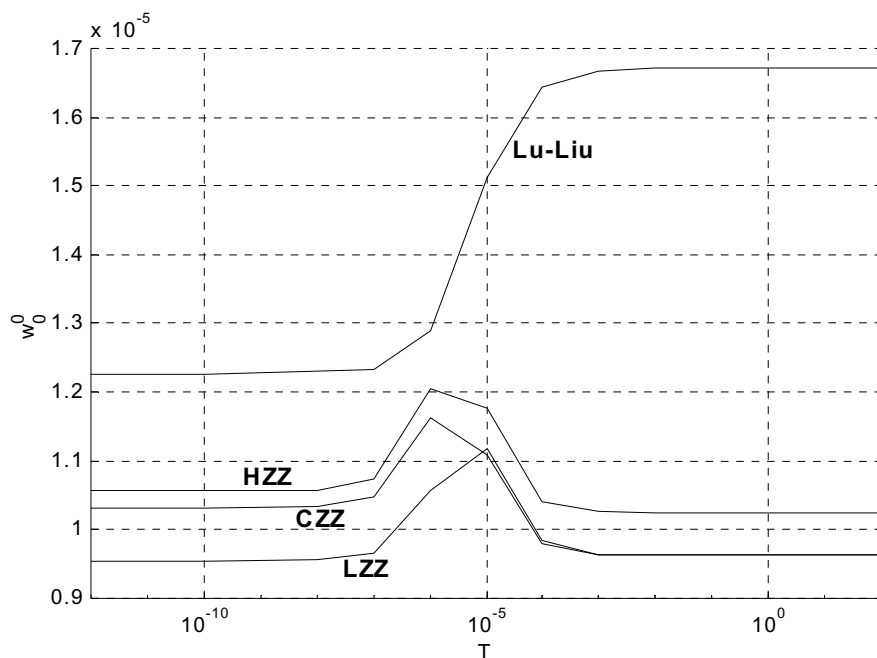


Figura 7.24: Effetto del danno sulla massima deflessione (laminato 6, $L/h=4$); soluzioni ottenute con diversi modelli.

Consideriamo, allora, un classico problema di laminato con scorrimenti interlaminari [21]; si tratta della trave di Fig. 7.1 composta di due strati (laminato 6, $L/h=4$). L'intera interfaccia è danneggiata (${}^{(1)}T_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}T$) ed il problema è proprio quello di analizzare la risposta statica del sistema al variare dell'entità di tale danno. Se riportiamo l'andamento della massima deflessione ($w_0^0 \equiv w^0(L/2)$) in funzione della costante di scorrimento T (Fig. 7.24), così come ottenuto in [21] da Lu e Liu (vedere Par. 1.3 per dettagli sul modello di spostamento usato), notiamo che si tratta di un comportamento monotono crescente; più la struttura è danneggiata e più si deforma sotto lo stesso carico. Se ora riportiamo i risultati ottenuti con i modelli LZZ, CZZ e HZZ, notiamo come, a parte differenze di intensità del fenomeno, in ogni caso ci sia un iniziale aumento, poi un massimo e infine una diminuzione asintotica della deflessione con il danno. E' come se da un certo livello di danneggiamento in poi la struttura si irrigidisse e diventasse addirittura più resistente che nel caso integro. Questo risultato, evidentemente non corretto, è per l'appunto dovuto allo slip-locking.

Ma vediamo di capire quale sia l'origine di questa "lacuna" dei tre modelli zig-zag. Per fare questo consideriamo il modello CZZ (considerazioni analoghe si possono fare per i modelli LZZ e HZZ, sui quali torneremo alla fine del nostro ragionamento). Come già visto nel Cap. 5, il campo di spostamenti per il modello CZZ nel caso trave è il seguente

$$\begin{aligned} V_1(x_1, x_3; t) &= u^0(x_1; t) - \delta_K \cdot x_3 \cdot w_{,1}^0(x_1; t) + \delta_T \cdot F(x_3) \cdot \theta(x_1; t) \\ V_3(x_1, x_3; t) &= w^0(x_1; t) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Usando le definizioni (5.2), otteniamo lo scorrimento di taglio trasversale

$$\gamma_{13}(x_1, x_3; t) = F_{,3}(x_3) \cdot \theta(x_1; t) \quad (7.7)$$

e, con le equazioni costitutive (5.1), ricaviamo la tensione di taglio trasversale

$$\tau_{13}(x_1, x_3; t) = Q_{44}(x_3) \cdot F_{,3}(x_3) \cdot \theta(x_1; t) \quad (7.8)$$

Ricordando che Q_{44} e F sono funzioni dello spessore costante e cubica a tratti, rispettivamente, e che ogni tratto è uno strato del laminato, possiamo anche scrivere

$${}^{(k)}\tau_{13}(x_1, x_3; t) = {}^{(k)}Q_{44} \cdot {}^{(k)}F_{,3}(x_3) \cdot \theta(x_1; t) \quad (7.9)$$

Vediamo ora come si comportano, in sequenza, le grandezze $F(x_3)$, $F_{,3}(x_3)$, ${}^{(k)}\tau_{13}$ e w_0^0 all'aumentare della costante di scorrimento T e per il problema in esame. Per quanto riguarda la funzione $F(x_3)$, questa è definita come segue

$$\begin{aligned} {}^{(1)}F(x_3) &= x_3^3 - 1.1786x_3^2 \\ {}^{(2)}F(x_3) &= x_3^3 - 1.1786x_3^2 - 0.6429x_3 + \lambda(T) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Ricordiamo che il risultato riportato nella (7.10) si ottiene anche in virtù della scelta del sistema di coordinate x_3 con l'origine coincidente con la faccia inferiore del laminato ($\eta=0$, Par. 3.2). Si può notare che l'espressione di F nel primo strato non cambia con T , mentre nel secondo strato quello che si modifica è il solo termine noto λ . Nella Tab. 7.1 sono riportati i valori di λ al variare di T .

T	λ
0	3.2143e-01
1e-12	3.2143e-01
1e-10	3.2141e-01
1e-08	3.1929e-01
1e-07	3.0000e-01
1e-06	1.0714e-01
1e-05	-1.8214e000
1e-04	-2.1107e+01
1e-02	-2.1425e+03
1e000	-2.1429e+05
1e+02	-2.1429e+07

Tabella 7.1: Andamento del termine noto λ al variare della costante di scorrimento T .

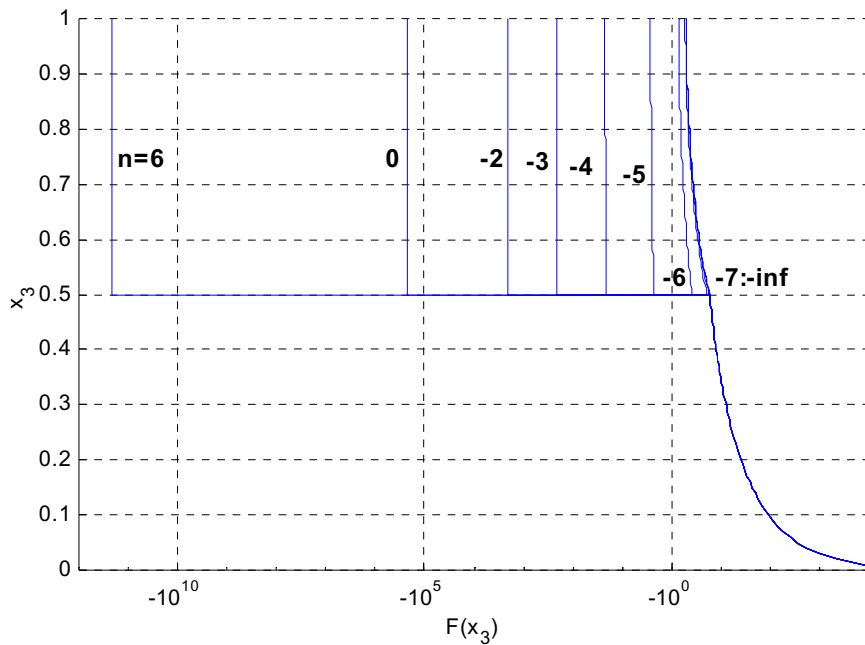


Figura 7.25: Effetto del danno sulla funzione di forma F del modello CZZ (laminato 6, $L/h=4$). $T=10^n$.

Confrontando le espressioni (7.10) con quelle più generali del Cap. 3 (in particolare (3.41) e (3.27)) e usando anche i risultati della Tab. 7.1, otteniamo la seguente relazione

$$\lambda(T) = 3.2143 \cdot 10^1 - 2.1429 \cdot 10^5 \cdot T \quad (7.11)$$

In pratica, esiste una relazione lineare tra la costante di scorrimento e il termine noto dell'espressione di F nel secondo strato. All'aumentare di T, anche λ (in valore assoluto) aumenta e per T molto elevati il comportamento di $^{(2)}F$ è dominato dal suo termine noto, come evidenziato dalla Fig. 7.25. Non è il caso di riportare anche l'andamento di $F_{,3}$, visto che risulta chiaro dalla (7.10) come la derivata di F non cambi al variare di T. Per capire che cosa accade alla tensione di taglio trasversale τ_{13} , dobbiamo ancora verificare come si comporta θ . Il problema che stiamo studiando ammette una soluzione esatta del tipo

$$\begin{aligned} u^0(x_1) &= u_0^0 \cos(\lambda_1 x_1) \\ w^0(x_1) &= w_0^0 \sin(\lambda_1 x_1) \\ \theta(x_1) &= \theta_0 \cos(\lambda_1 x_1) \end{aligned} \quad (7.12)$$

dove

$$\lambda_m \equiv \frac{m\pi}{L} \quad (7.13)$$

e

$$\begin{aligned} u_0^0 &= \frac{\bar{q}_0^h}{\lambda_1^3} \frac{B_{1111}(\hat{D}_{1313} + \lambda_1^2 \hat{D}_{1111}) - \lambda_1^2 \hat{A}_{1111} \hat{B}_{1111}}{\Delta} \\ w_0^0 &= \frac{\bar{q}_0^h}{\lambda_1^4} \frac{A_{1111}(\hat{D}_{1313} + \lambda_1^2 \hat{D}_{1111}) - \lambda_1^2 \hat{A}_{1111}^2}{\Delta} \\ \theta_0 &= \frac{\bar{q}_0^h}{\lambda_1^3} \frac{A_{1111} \hat{B}_{1111} - B_{1111} \hat{A}_{1111}}{\Delta} \end{aligned} \quad (7.14)$$

essendo

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv (\hat{D}_{1313} + \lambda_1^2 \hat{D}_{1111})(A_{1111} D_{1111} - B_{1111}^2) + \\ &\quad - \lambda_1^2 (A_{1111} \hat{B}_{1111}^2 - 2B_{1111} \hat{A}_{1111} \hat{B}_{1111} + D_{1111} \hat{A}_{1111}^2) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Se consideriamo le espressioni (7.14) e (7.15), notiamo come siano presenti 7 rigidzze delle quali, però, solo \hat{A}_{1111} , \hat{B}_{1111} e \hat{D}_{1111} dipendono da F (vedere le (3.56)), secondo le seguenti espressioni

$$(\hat{A}_{1111}; \hat{B}_{1111}; \hat{D}_{1111}) \equiv \langle Q_{11}(1; x_3; F)F \rangle \quad (7.16)$$

Le altre 4 rigidezze non variano con T poiché o non dipendono da F (A_{1111} , B_{1111} e D_{1111}) o dipendono solo da $F_{,3}$ (\hat{D}_{1313}), che per l'appunto non varia con T. E' facile rendersi conto che, quando T è molto elevato, F è dominata dal suo andamento nel secondo strato e questo dal suo termine noto λ , lineare in T secondo la (7.11). Si può, allora, descrivere il comportamento delle rigidezze contenute nella (7.16) per elevati valori di T nel seguente modo

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_{1111} &\cong k_A T \\ \hat{B}_{1111} &\cong k_B T \\ \hat{D}_{1111} &\cong k_D^2 T^2 \end{aligned} \right\} T \gg 1 \quad (7.17)$$

Usando la (7.17), possiamo ricavare come si modificano le (7.14) per valori molto elevati di T

$$\begin{aligned} u_0^0 &\cong \frac{\bar{q}_0^h}{\lambda_1^3} \frac{B_{1111} k_D^2 - k_A k_B}{(A_{1111} D_{1111} - B_{1111}^2) k_D^2 - (A_{1111} k_B^2 - 2B_{1111} k_A k_B + D_{1111} k_A^2)} \\ w_0^0 &\cong \frac{\bar{q}_0^h}{\lambda_1^4} \frac{A_{1111} k_D^2 - k_A^2}{(A_{1111} D_{1111} - B_{1111}^2) k_D^2 - (A_{1111} k_B^2 - 2B_{1111} k_A k_B + D_{1111} k_A^2)} \\ \theta_0 &\cong \frac{\bar{q}_0^h}{\lambda_1^3} \frac{A_{1111} k_B - B_{1111} k_A}{(A_{1111} D_{1111} - B_{1111}^2) k_D^2 - (A_{1111} k_B^2 - 2B_{1111} k_A k_B + D_{1111} k_A^2)} \cdot \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Mentre u_0^0 e w_0^0 raggiungono valori asintotici non nulli, θ_0 tende ad annullarsi come $1/T$. Allora, secondo la (7.12), $\theta(x_1)$ è sempre nulla per valori molto elevati del danno; di conseguenza (vedere la (7.9)) la stessa tensione di taglio trasversale τ_{13} è sempre nulla per T elevato.

Questo è quello che avviene da un punto di vista puramente numerico; vediamo ora di darle un'interpretazione fisica. In questo modo riusciremo anche a capire dove si origina il fenomeno dello slip-locking. Quello che abbiamo appurato con il nostro esempio è che la presenza di un danno interlaminare e, quindi, un valore di T non nullo, modifica la funzione F solo a livello di termini noti. Di conseguenza *la funzione $F_{,3}$ è sempre la stessa, tanto nel caso di assenza di scorrimento che nel caso in cui lo scorrimento ci sia, e per ogni suo valore.* Visto che l'andamento lungo lo spessore della tensione τ_{13} è modulato per l'appunto da $F_{,3}$, anche tale andamento non sentirà l'effetto del danno. Quello che può cambiare è "l'intensità" o "ampiezza" di tale andamento, ma non la sua "forma" (Fig. 7.26). Proprio *l'impossibilità della tensione di taglio trasversale a cambiare la forma del suo andamento lungo lo spessore, in base al livello del danno, è l'origine dello slip-*

locking. Infatti, nel caso di una trave a 2 strati con interfaccia sempre più danneggiata, la tensione di taglio deve necessariamente passare da un andamento grosso modo parabolico su tutto lo spessore (assenza di scorrimento) ad un andamento costituito da una parabola per ogni strato, con annullamento all'interfaccia danneggiata (scorrimento infinito). Il modello CZZ non può fornire un tale risultato; essendo bloccata la forma di τ_{13} , questa si mantiene anche quando non è più quella corretta e quindi il modello è sempre più inadeguato e “rigido”. In pratica, quando lo scollamento tra gli strati è totale, la tensione di taglio trasversale si annulla ed è come se il modello CZZ fosse “regredito” ad un modello analogo alla CLPT (ma non identico perché, se anche il taglio trasversale è nullo, rimangono gli spostamenti tangenziali cubici e non lineari).

Per quanto riguarda il modello LZZ, il fenomeno dello slip-locking è del tutto analogo. Le differenze rispetto al caso del modello CZZ stanno nella forma della tensione di taglio trasversale che è costante lungo lo spessore (Fig. 7.27); anche tale forma non può cambiare al variare dell'intensità dello scorrimento ed anche in questo caso, per valori molto elevati dello stesso, il modello regredisce ad una teoria inefficace perché priva della deformabilità al taglio trasversale.

Il modello HZZ ha di più, rispetto a LZZ e CZZ, la variazione lineare dello spostamento trasversale lungo lo spessore perciò, con scorrimento molto elevato, il modello è ancora indeformabile al taglio trasversale (Fig. 7.28) ma di ordine superiore agli analoghi comportamenti asintotici di LZZ e CZZ.

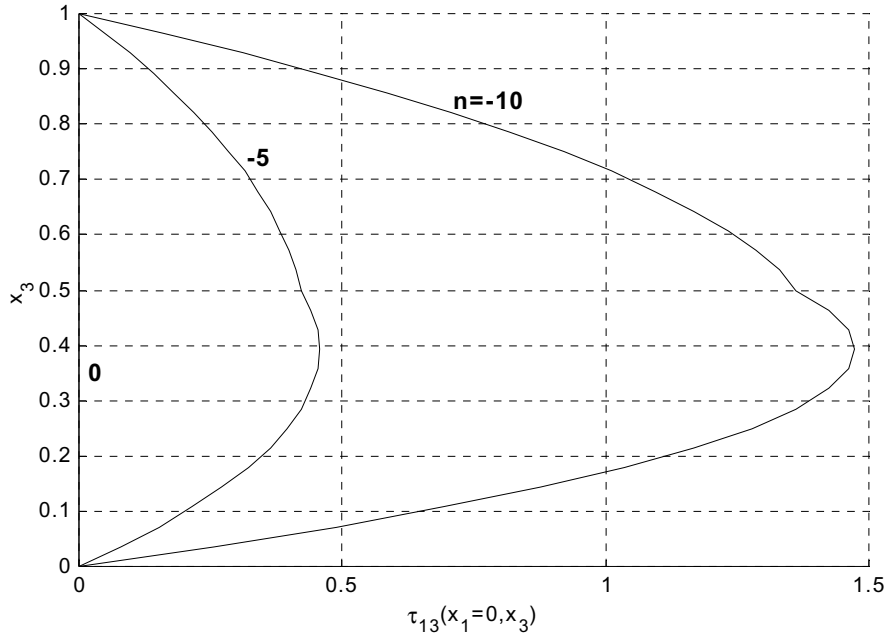


Figura 7.26: Effetto del danno sull'andamento lungo lo spessore di τ_{13} (laminato 6, $L/h=4$): soluzioni ottenute con il modello CZZ. $T=10^n$.

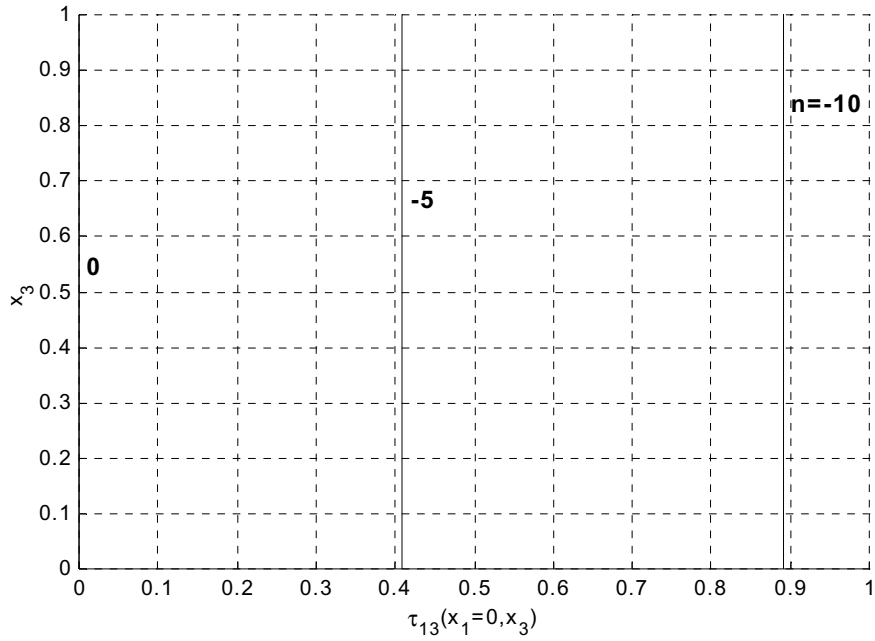


Figura 7.27: Effetto del danno sull'andamento lungo lo spessore di τ_{13} (laminato 6, $L/h=4$): soluzioni ottenute con il modello LZZ. $T=10^n$.

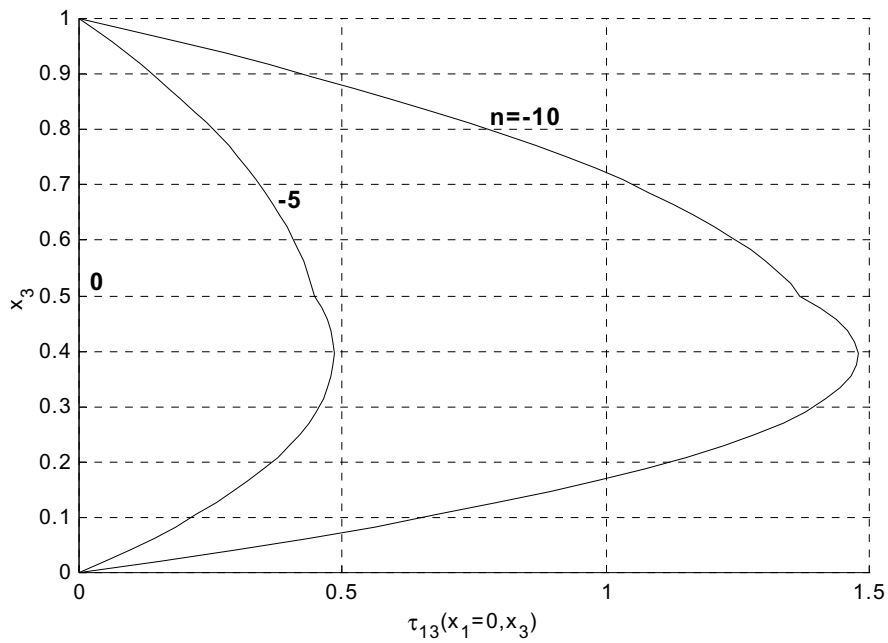


Figura 7.28: Effetto del danno sull'andamento lungo lo spessore di τ_{13} (laminato 6, $L/h=4$): soluzioni ottenute con il modello HZZ. $T=10^n$.

Come dimostrato sopra, il range di valori delle costanti di scorrimento per cui i modelli LZZ, CZZ e HZZ forniscono risultati accettabili, è limitato. Ma i tre modelli citati presentano anche altre controindicazioni rispetto allo studio di laminati con scorrimenti interlaminari. In particolare, l'impossibilità di studiare danni localizzati, limitati, cioè, alle interfacce di tratti di lunghezza o porzioni di superficie di riferimento. Il problema sembrerebbe in realtà banale; prendiamo per esempio il caso della trave a due strati studiata in precedenza. Se lo scorrimento è limitato ad un decimo della sua lunghezza, il decimo che comprende l'estremo sinistro della trave, dovrebbe essere sufficiente dividere la trave in dieci elementi. Il primo sarà caratterizzato dallo scorrimento interlaminare, gli altri 9 no. In pratica, però, tale schematizzazione è affetta da una discontinuità del campo di spostamenti nel passaggio dal primo al secondo elemento. Se, per esempio, consideriamo il modello CZZ, possiamo dire che (Cap. 5) tra i due elementi ci sarà la continuità dei gradi di libertà u^0 , w^0 , φ ($\varphi \equiv w_{,1}^0$) e θ ; ma l'andamento dello spostamento V_1 secondo x_3 non sarà lo stesso a destra del primo elemento e a sinistra del secondo. Questo avviene perché, essendo il primo elemento danneggiato e il secondo no, la funzione di forma $F(x_3)$ non sarà la stessa; di conseguenza, a parità di u^0 , w^0 , φ e θ cambia $V_1(x_3)$ (vedere la (7.6)). Il problema tratto da [21], infatti, è stato risolto facilmente perché il danno era esteso a tutta la lunghezza della trave.

Va poi ancora ricordato che il modello di scorrimento interlaminare usato è di tipo lineare (vedere la (3.9)); questa è in generale una semplificazione.

Siamo quindi di fronte a tre modelli che permettono di considerare lo scorrimento interlaminare ma entro certi limiti; lo scorrimento deve essere (i) non troppo elevato, (ii) diffuso nel laminato e (iii) di tipo lineare. Ma è proprio uno di questi modelli, HZZ, a fornirci la possibilità di superare tali limiti; qui di seguito cercheremo di spiegare come.

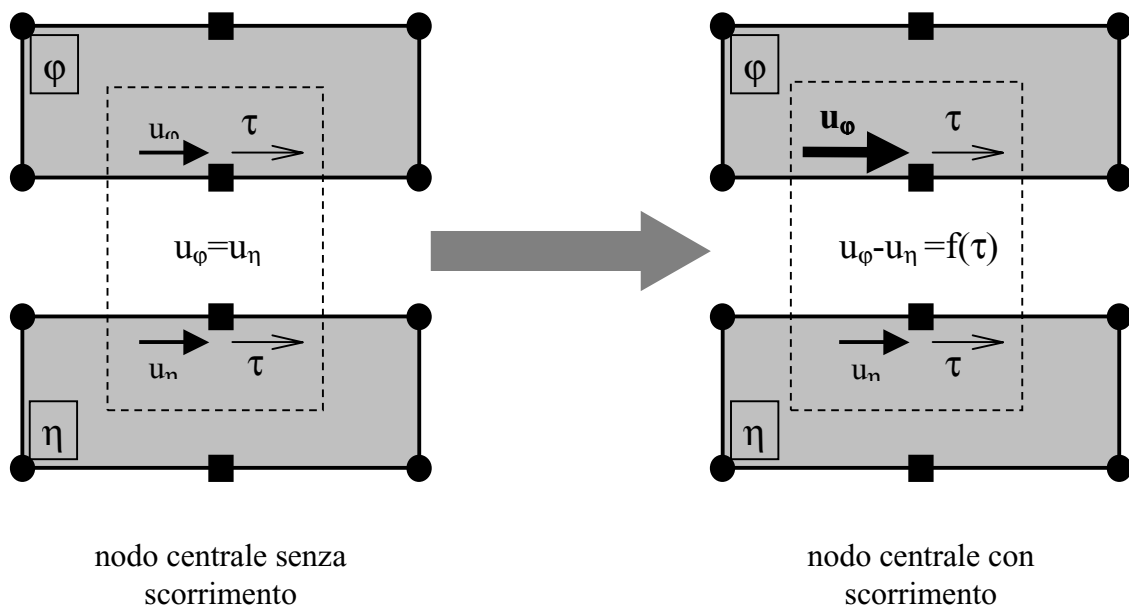


Figura 7.29: Modellizzazione dello scorrimento interlaminare con il modello HZZ e l'approccio dei sublaminati.

Rimaniamo, per fissare le idee, al caso della trave a due strati con scorrimento limitato al primo decimo della sua lunghezza. Le difficoltà che i modelli LZZ, CZZ e HZZ incontrano nell'affrontare questo problema, derivano tutti dal fatto che lo scorrimento si verifica all'interno dello spessore dell'elemento finito usato. Se noi, invece, usiamo sempre gli elementi finiti basati su HZZ ma secondo lo schema dei sublaminati (Par. 6.4), possiamo far coincidere l'interfaccia danneggiata con la superficie di confine tra due elementi finiti, come indicato in Fig. 7.29. Supponiamo che il danno, quando presente, sia limitato al nodo centrale in comune tra gli elementi φ e η . In ogni caso, in corrispondenza a tale nodo, deve essere garantita la continuità della tensione di taglio trasversale. Se non c'è scorrimento, anche lo spostamento tangenziale è continuo

$$u_{\varphi} = u_{\eta} \quad (7.19)$$

Nel caso di nodo centrale danneggiato, invece, lo spostamento tangenziale è discontinuo e tale discontinuità è funzione del comune valore della tensione di taglio secondo una opportuna legge

$$u_{\varphi} - u_{\eta} = f(\tau) \quad (7.20)$$

Nel caso di scollamento completo tra i due elementi in corrispondenza al nodo centrale, la (7.20) diventa

$$\tau = 0 \quad (7.21)$$

La relazione (7.20) (o (7.21)), aggiunta come "vincolo" al sistema lineare $[K]\{q\}=\{F\}$ ², permette di tenere in conto la presenza del danno.

La procedura è abbastanza semplice ma consente di risolvere tutti i limiti riscontrati nei modelli LZZ, CZZ e HZZ con un solo sublaminato (d'ora in poi indicato con HZZ1). In primo luogo, come dimostreremo tra breve con alcuni risultati numerici, (i) il metodo è valido per qualunque livello del danno, giacché per scorrimento "infinito" possiamo usare la (7.21) al posto della (7.20). Inoltre, (ii) la procedura può essere applicata ad uno solo o a tutti i nodi comuni tra due elementi, e ad uno o anche più elementi; insomma, è possibile studiare danni localizzati, diffusi e distribuiti su ogni porzione di qualunque interfaccia. Infine, (iii) la legge (7.20) è del tutto generale, potendo essere f una funzione lineare, polinomiale, trigonometrica, etc.; si noti poi che f può essere di tipo diverso in diversi punti della struttura.

A titolo di esempio, proviamo a risolvere il problema di cui si è discusso in precedenza con l'uso di un elemento per ogni strato e di dieci divisioni secondo la lunghezza della

² Partendo dal sistema lineare $[K]\{q\}=\{F\}$, è possibile aggiungere tutte le relazioni del tipo (7.20) o (7.21), necessarie a descrivere gli scorrimenti presenti nella struttura. Se si aggiungono ancora le condizioni di vincolo, si ottiene un problema di ricerca di punti stazionari vincolati. Tale problema è facilmente risolvibile, per esempio, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

trave (in tutto, quindi, 20 elementi). Stiamo usando il modello HZZ2, cioè con 2 sublaminati. In questo caso, per poter confrontare i risultati con quelli dei modelli LZZ, CZZ e HZZ1 (basati sulla legge lineare di scorrimento (3.9)), usiamo nella (7.20) una funzione $f(\tau)$ di tipo lineare

$$f(\tau) = T \cdot \tau \quad (7.22)$$

Come si vede dalla Fig. 7.30, il problema dello slip-locking non si presenta. Lo spostamento è maggiore che nel caso del modello di Lu e Liu [21] perché questi ultimi ipotizzano uno spostamento trasversale costante nello spessore (vedere Par. 1.3), mentre nel caso di HZZ2 è lineare a tratti. La correttezza della procedura è anche dimostrata dall'andamento lungo lo spessore della tensione di taglio trasversale, per diversi valori dello scorrimento (Fig. 7.31). Con l'uso del modello HZZ2 si riesce a cogliere la corretta tendenza della tensione ad annullarsi in corrispondenza all'interfaccia sempre più danneggiata.

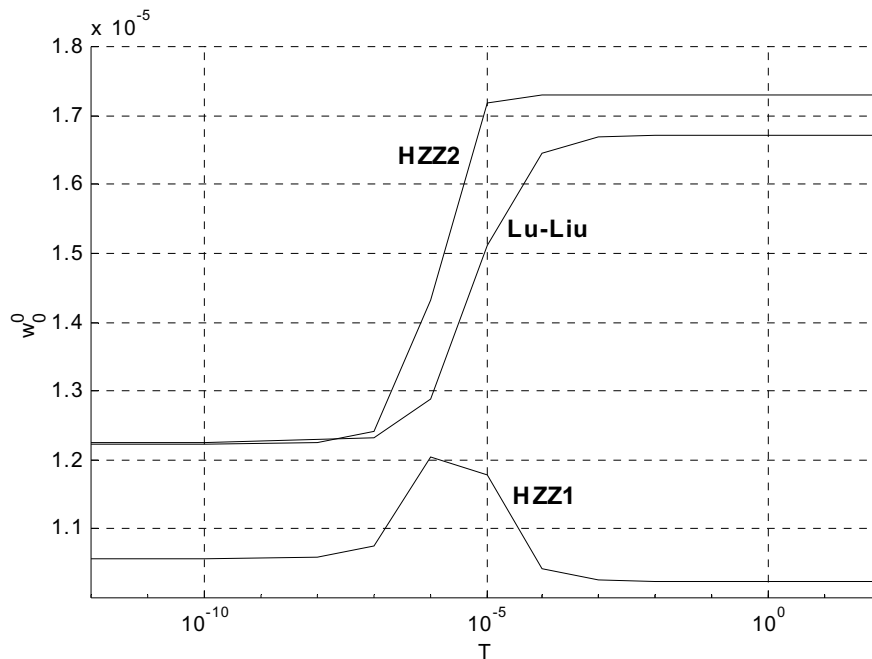


Figura 7.30: Effetto del danno sulla massima deflessione (laminato 6, $L/h=4$): soluzioni ottenute con diversi modelli.

Per valutare le potenzialità del metodo descritto, possiamo anche considerare il problema di una trave a tre strati ($L/h=4$). A seconda che il danno, diffuso su tutta la lunghezza, sia presente sull'interfaccia inferiore (laminato 7) o superiore (laminato 8) e a seconda del modello usato (CZZ, HZZ1 e HZZ3), si ottengono i risultati riportati nella Fig. 7.32 per confronto.

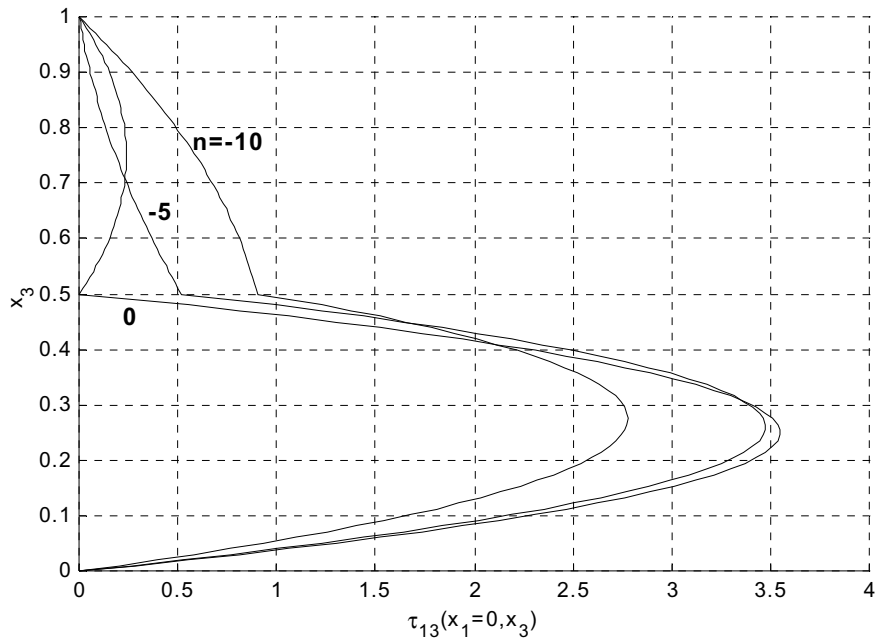


Figura 7.31: Effetto del danno sull'andamento lungo lo spessore di τ_{13} (laminato 6, $L/h=4$): soluzioni ottenute con il modello HZZ2. $T=10^0$.

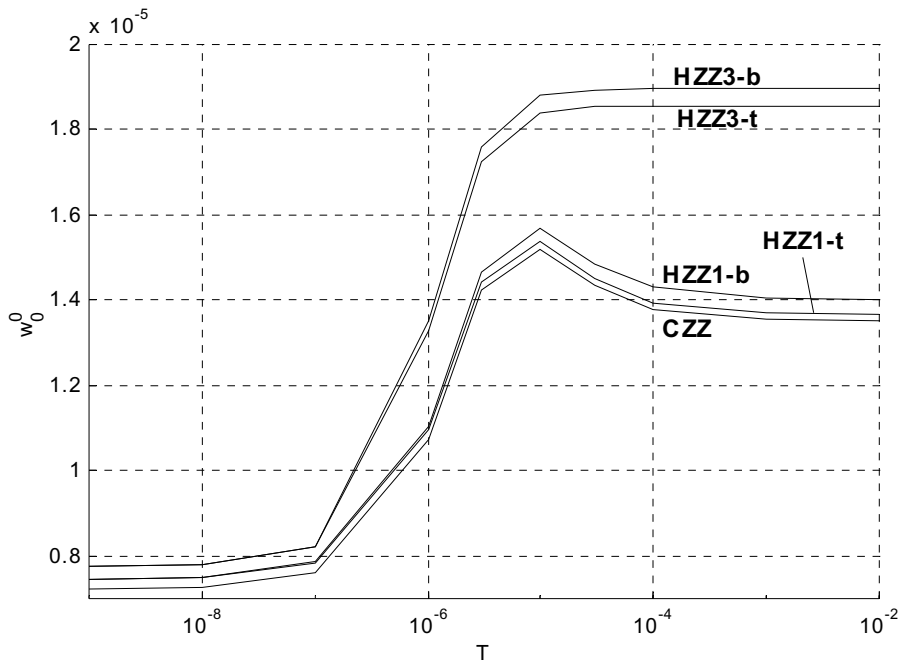


Figura 7.32: Effetto del danno sulla massima deflessione (laminati 7 e 8, $L/h=4$): soluzioni ottenute con diversi modelli. Laminato 7, suffisso -b; laminato 8, suffisso -t.

Il modello CZZ, oltre a presentare ancora lo slip-locking, non sente la posizione del danno perché lo spostamento trasversale è costante. Nel caso dei modelli HZZ1 e HZZ3, invece, lo spostamento trasversale lineare e lineare a tratti, rispettivamente, permette di valutare gli effetti della posizione dello scorrimento; è più penalizzante che il danno sia posizionato sull'interfaccia inferiore. Va ancora ribadito che il modello HZZ1 presenta lo slip-locking, assente, invece, nel HZZ3.

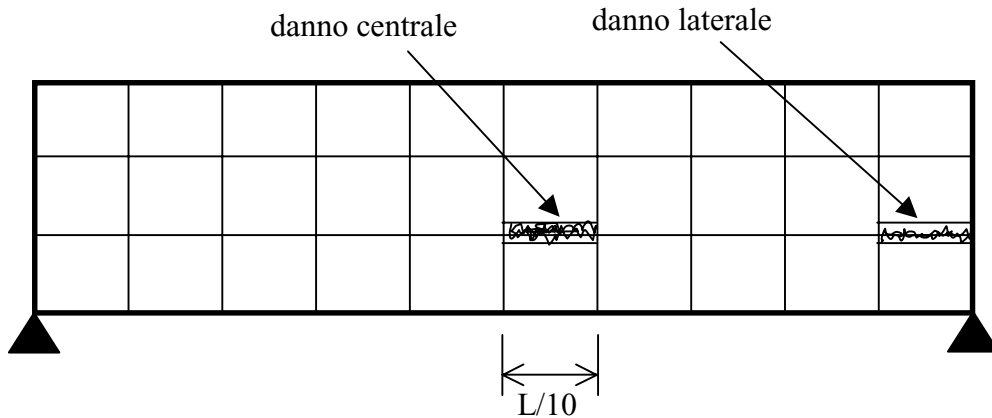


Figura 7.33: Posizione dei danni localizzati per il problema cui si riferisce la Fig. 7.34.

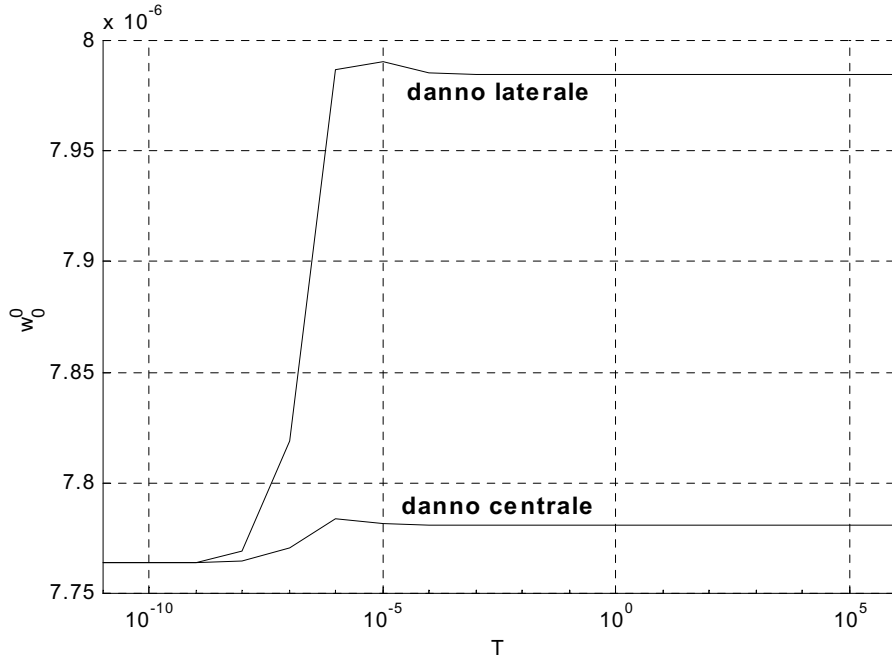


Figura 7.34: Effetto del danno sulla massima deflessione (laminati 9 e 10, $L/h=4$): soluzioni ottenute con il modello HZZ3.

Per quanto riguarda la possibilità di studiare danni localizzati, si consideri il problema della trave a tre strati ma con due possibili casi di danno localizzato (Fig. 7.33), centrale (laminato 9) o laterale (laminato 10). I risultati sono riportati in Fig. 7.34 e dimostrano come, a parità di estensione del danno secondo la lunghezza della trave, la posizione più dannosa sia quella laterale perché comporta una diminuzione della capacità di resistere al taglio trasversale proprio dove la corrispondente tensione è più elevata.

Capitolo 8

Risultati numerici

8.1 Introduzione

In questo capitolo saranno presentate alcune applicazioni dei vari modelli studiati durante l'attività di ricerca. Innanzitutto, (Par. 8.2), vedremo come si comportano i vari modelli, compresi nella trattazione del Cap. 3, rispetto al problema delle analisi statiche non lineari (Cap. 5) ed al fenomeno dello snap-buckling. Alcuni problemi statici lineari, classici e non, ci dimostreranno (Par. 8.3) la bontà del modello HZZ, proposto nel Cap. 4, e della sua formulazione FEM secondo il metodo dei sublaminati (Cap. 6). Nel Par. 8.4 studieremo il calcolo delle frequenze proprie per travi sandwich; questo ci consentirà, da un lato, di valutare la bontà di alcuni dei modelli analitici per cuori honeycomb (Par. 2.3) e, dall'altro, di confrontare tra loro i vari campi di spostamento. Con il calcolo dei carichi critici di piastre multistrato (Par. 8.5), faremo ancora un confronto tra i diversi modelli del Cap. 4 e vedremo come sulle loro prestazioni influiscano lo spessore e l'anisotropia trasversale. Nel Par. 8.6, infine, un complesso problema di risposta (impatto a bassa velocità) sarà banco di prova per il modello HZZ.

8.2 Analisi statiche non-lineari

Un'interessante applicazione delle varie teorie studiate nel Cap. 3, è il problema dell'analisi non-lineare di travi semplicemente appoggiate agli estremi e caricate trasversalmente (Fig. 8.1). Del problema abbiamo già parlato nel Par. 5.2, dove è stato mostrato come ottenere la soluzione esatta. Vogliamo ora presentare alcuni risultati numerici [P1],[C1] che ci permetteranno, da un lato, di effettuare un confronto tra vari modelli di spostamento e, dall'altro, di vedere quali sono i parametri che influenzano l'esistenza o meno del punto limite nel diagramma carico-spostamento, ed, eventualmente,

l'intensità del fenomeno di instabilità a scatto. Rimandiamo al report [R2] per alcune osservazioni sulla natura non-lineare dei risultati ottenuti.

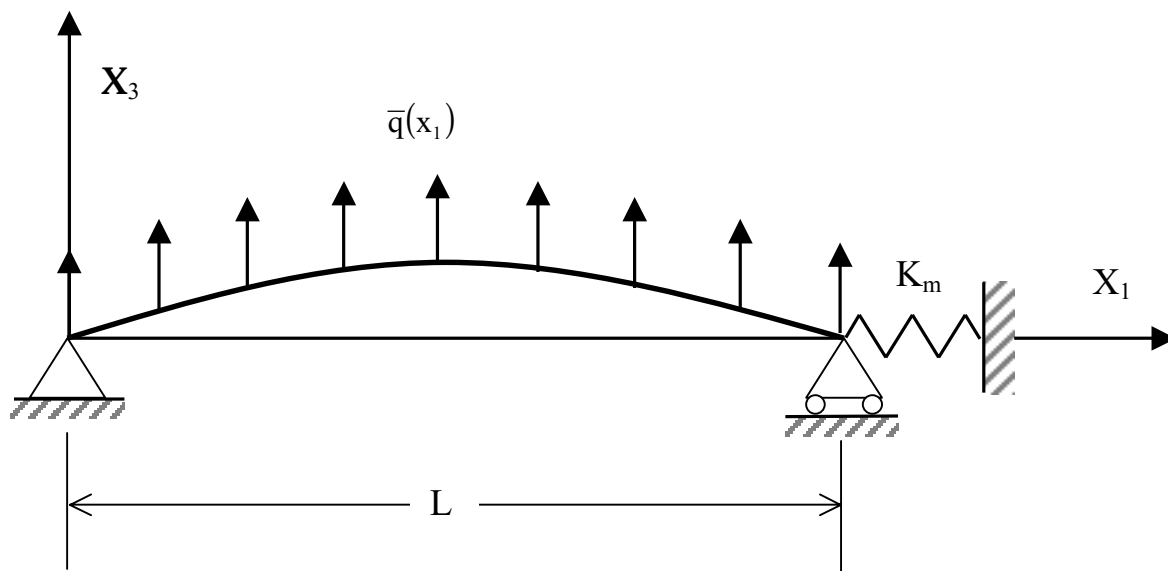


Figura 8.1: Geometria, vincoli e carichi della trave curva.

Come primo caso, consideriamo un pannello sandwich (laminato 1, $L=0.5$, $b=0.3$, deformazione piana in (x_1, x_3)); il parametro di rigidità della molla è $\eta_K=0.6$. Immaginiamo che la curvatura iniziale Z (valore massimo $Z_0=27e-3$) ed il carico distribuito \bar{q} abbiano distribuzioni sinusoidali (Par. 5.2). La stessa cosa vale, allora, per lo spostamento trasversale w^0 ; valgono, inoltre, le formule esplicite (5.27)-(5.28). Se confrontiamo tra loro (Fig. 8.2) le curve carico-spostamento (intensità massima del carico \bar{q}_0 in funzione della massima deflessione w_0^0) ottenute usando i vari modelli contenuti nella Tab. 3.1 (per tutti i modelli si ha $\eta=0.5$, cioè la superficie di riferimento è quella di mezzeria), possiamo fare alcune importanti conclusioni. In primo luogo, i modelli FSDT e FSDT generalizzato ($K_T=5/6$) sono equivalenti ai fini della soluzione descritta nel Par. 5.2; in Fig. 8.2 le relative curve sono coincidenti. Inoltre, i vari modelli forniscono risultati confrontabili per bassi valori della deflessione, mentre nei range non-lineare e post-critico (se esiste il punto limite) le differenze aumentano. Il modello FSDT non migliora di tanto le prestazioni del CLPT, nonostante tenga in conto la deformabilità al taglio trasversale; con il modello HSDT (di Reddy) si ha una più marcata differenza ma sono i modelli LZZ e CZZ (quasi coincidenti le relative curve) a garantire una più corretta valutazione di tale deformabilità. La correttezza del ragionamento che sta alla base dei modelli zig-zag è dimostrata dal risultato di Fig. 8.2; il modello LZZ è solo lineare mentre HSDT è cubico, ma il primo riesce molto meglio a descrivere il comportamento del pannello sandwich. Nel caso dei pannelli sandwich, inoltre, i modelli LZZ e CZZ si comportano in maniera molto simile perché la tensione di taglio trasversale ha, normalmente, una distribuzione “quasi” costante (domina il valore della tensione nel cuore), come previsto da LZZ.

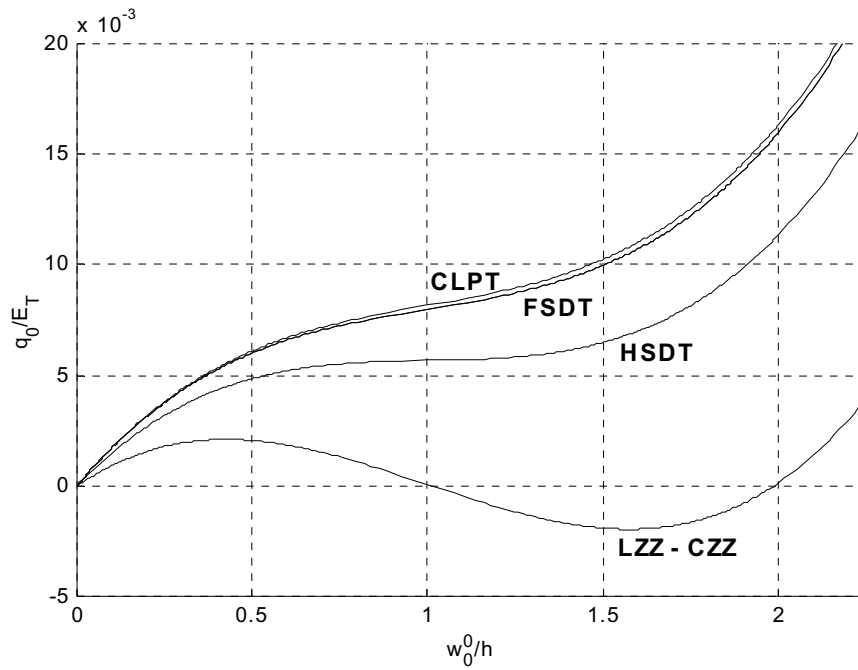


Figura 8.2: Curva carico-spostamento (laminato 1, $Z_0=27e-3$, $\eta_K=0.6$, $\Theta=0$) ottenuta con diversi modelli.

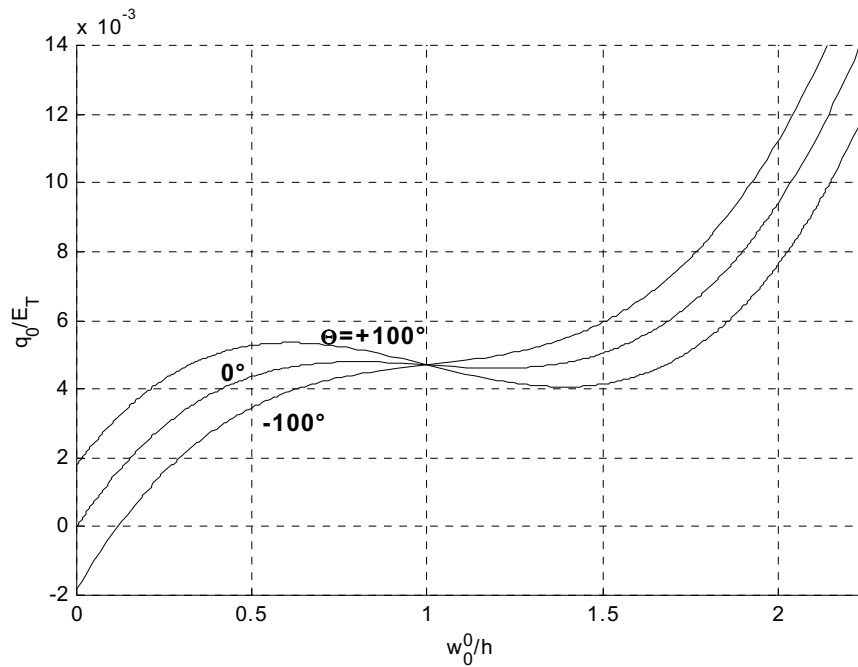


Figura 8.3: Curva carico-spostamento (laminato 1, $Z_0=27e-3$, $\eta_K=0.6$, modello CZZ) al variare di Θ .

Sempre nel caso del pannello sandwich descritto in precedenza, vediamo quale effetto hanno le variazioni di temperatura sulla risposta del sistema; in questo caso (Fig. 8.3), il modello usato è il solo CZZ. Come si nota, un incremento di temperatura favorisce l'insorgere dello snap-buckling. Si può immaginare, infatti, che su un pannello curvo vincolato agli estremi, un incremento di temperatura agisca nel senso di aumentare tale curvatura e, quindi, di rendere più probabile e più severa l'instabilità a scatto. Nel caso di Fig. 8.3, addirittura, la diminuzione della temperatura di 100 °C comporta la scomparsa del punto limite dal diagramma carico-spostamento.

Passiamo ora a considerare una trave composita (laminato 2, $L=10$, $b=3$, tensione piana in (x_1, x_3)), studiata con il modello CZZ. Vale il discorso fatto per il pannello sandwich a riguardo degli andamenti di Z e \bar{q} . Nel caso di Fig. 8.4 ($\eta_K=1$) è messo in evidenza come, per pannelli maggiormente curvi prima dell'applicazione del carico trasversale, sia più probabile e più intenso il fenomeno dello snap-buckling.

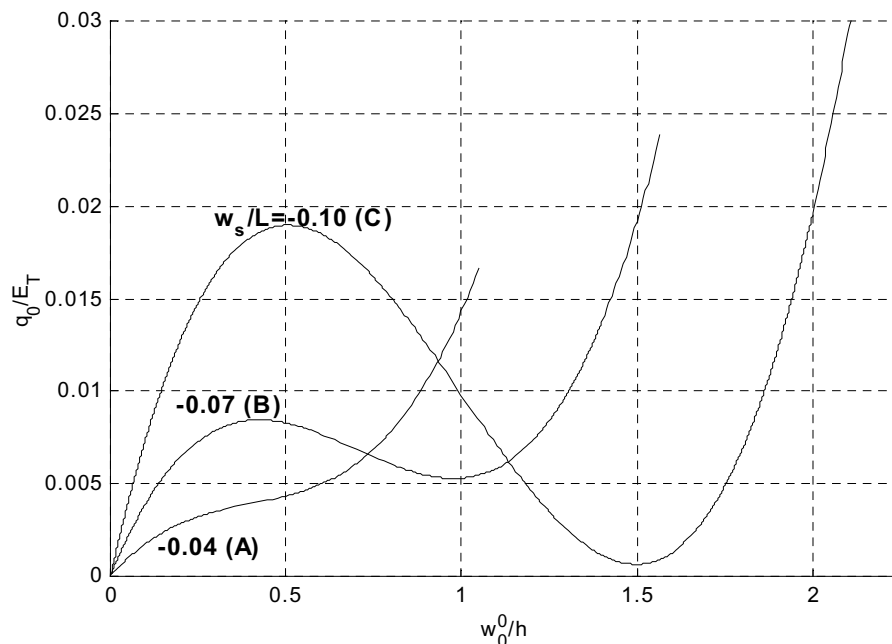


Figura 8.4: Curva carico-spostamento (laminato 2, $\eta_K=1$, $\Theta=0^\circ$, modello CZZ) al variare di Z_0 (w_s).

A parità di curvatura iniziale ($Z_0=-1$), la Fig. 8.5 mostra l'effetto della rigidità del vincolo tangenziale offerto dalla molla di rigidità K_m . All'aumentare del relativo parametro η_K la trave è soggetta a instabilità a scatto di crescente intensità.

Come visto, a parità di modello, sono molti i parametri da cui dipende l'esistenza del punto limite nella curva carico-spostamento (temperatura, curvatura iniziale, rigidità del vincolo destro, etc.). Un modo per poter controllare in maniera più compatta la contemporanea azione dei vari fattori è il **metodo delle curve limite** presentato in [P1].

Consideriamo il caso particolare (Par. 5.2) nel quale lo sviluppo della soluzione $w^0(x_1)$ si possa limitare al solo primo termine; vale in questo caso la (5.28), che qui richiamiamo

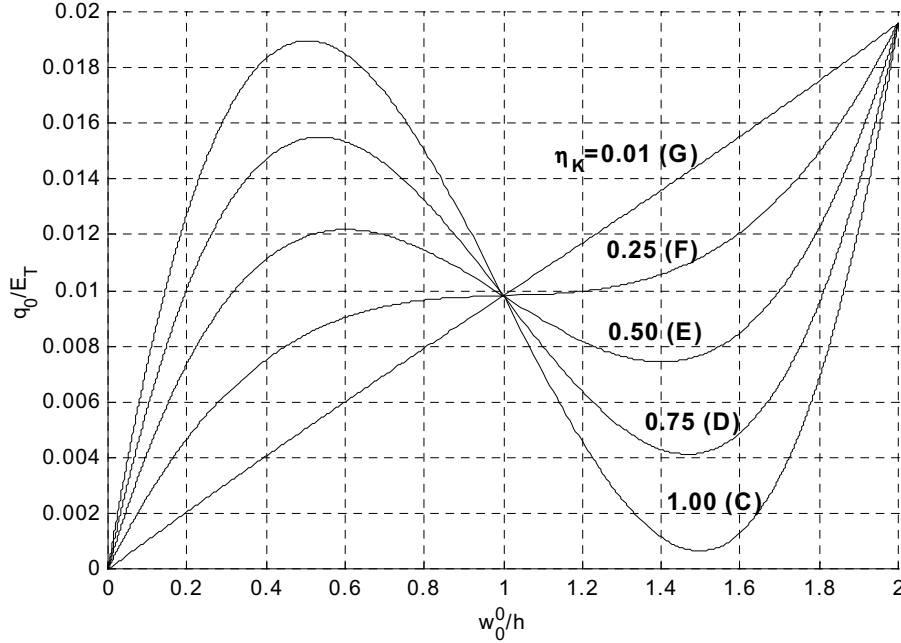


Figura 8.5: Curva carico-spostamento (laminato 2, $Z_0=-1$, $\Theta=0^\circ$, modello CZZ) al variare di η_K .

$$\frac{\bar{q}_0(w_0^0)}{D_{1111}\pi^4\eta_K} = \left((w_0^0)^3 + 3w_s(w_0^0)^2 + \left(2w_s^2 + L^2 \frac{\eta_0}{\eta_K} \left(\frac{1+\eta_2}{1+\eta_1} + p^\Theta \eta_K \right) \right) w_0^0 + L^2 \eta_0 p^\Theta w_s \right) \frac{1}{L^6 \eta_0 \bar{q}_1} \quad (8.1)$$

Il punto limite, per la curva descritta dalla (8.1), esiste se la condizione differenziale

$$\frac{d\bar{q}_0}{dw_0^0} = 0 \quad (8.2)$$

ammette una soluzione corrispondente ad un massimo. Visto che la (8.1) è di tipo cubico, la sua derivata sarà parabolica con discriminante Δ . Tale derivata si può annullare in due punti distinti (minimo e massimo, quest'ultimo è il punto limite) per $\Delta > 0$, in due punti coincidenti (flesso) per $\Delta = 0$ o mai per $\Delta < 0$. Il punto limite esiste, dunque, se $\Delta > 0$, con Δ

$$\Delta = 3 \left(w_s^2 - L^2 \frac{\eta_0}{\eta_K} \left(\frac{1+\eta_2}{1+\eta_1} + p^\Theta \eta_K \right) \right) \quad (8.3)$$

per cui, la condizione $\Delta > 0$ fornisce la seguente relazione

$$\left(\frac{w_s}{L}\right)^2 > \eta_0 \left(p^\ominus + \frac{1}{\eta_K} \left(\frac{1 + \eta_2}{1 + \eta_1} \right) \right) \quad (8.4)$$

Possiamo interpretare la (8.4) (con il segno = al posto di >) come una legge $\eta_K(|w_s/L|)$. La curva descritta da tale legge divide il piano $(|w_s/L|, \eta_K)$ in due regioni; quella al di sopra della curva comprende i punti che corrispondono a configurazioni per le quali esiste il punto limite. Tale curva è quella che abbiamo definito curva limite. La legge $\eta_K(|w_s/L|)$ (8.4) dipende da η_0 , η_1 , η_2 e p^\ominus ; sono tutti parametri funzione della laminazione (materiali, spessori e orientazioni dei vari strati) e della geometria (L/h) mentre p^\ominus è anche funzione della temperatura (vedere le (5.22)-(5.23)). Una volta che siano stati fissati tali 4 parametri, esiste una sola curva limite.

E' allora possibile riconsiderare i casi trattati in precedenza secondo il metodo appena descritto. Per quanto riguarda il pannello sandwich al quale si riferiscono le Figg. 8.2-8.3, va detto che tutti i casi considerati sono rappresentati sul piano $(|w_s/L|, \eta_K)$ dal solo punto $(27e-3/0.5, 0.6)$. Viceversa, a seconda della teoria usata per lo studio del pannello senza l'effetto della temperatura (Fig. 8.2) e nel caso di modello CZZ ma con diverse variazioni di temperatura (Fig. 8.3), ci saranno altrettante curve limite (Fig. 8.6).

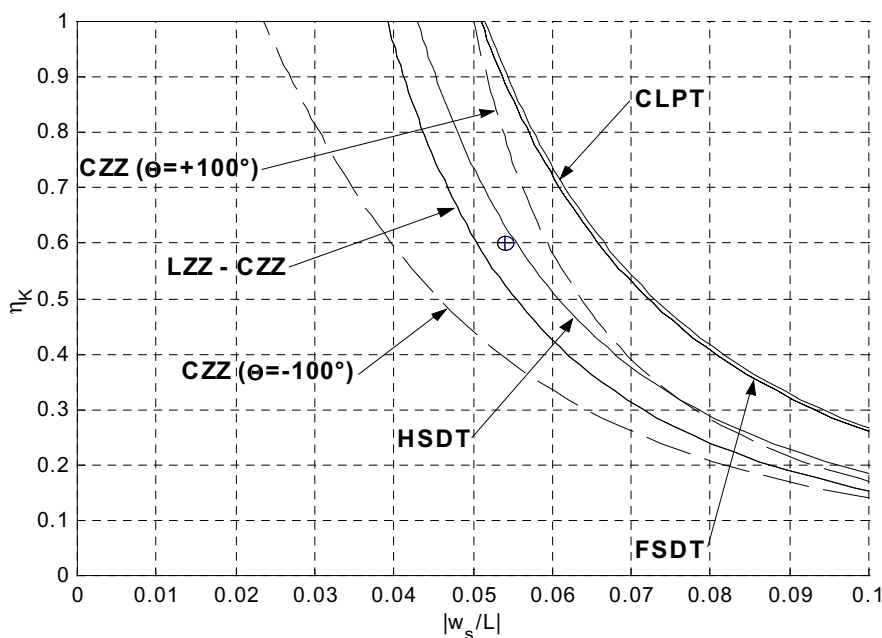


Figura 8.6: Curve limite per i casi rappresentati dalle Figg. 8.2-8.3.

Come detto, ogni curva limite divide lo spazio $(|w_s/L|, \eta_K)$ in due regioni; quella al di sopra della curva è la zona di instabilità (esistenza del punto limite). Naturalmente, diagrammi come quello di Fig. 8.6 non ci dicono solo se il punto limite esiste o no ma anche, se esiste, quanto è severo lo snap-buckling; basta considerare quanto “dista” il punto rappresentativo del problema studiato dalla relativa curva limite. Come confermato anche dalle Figg. 8.2 e Fig. 8.3, le situazioni nelle quali è presente l’instabilità sono quelle in cui usiamo i modelli LZZ e CZZ e, per quest’ultimo caso, anche con incremento di temperatura. Per i problemi rappresentati nelle Figg. 8.4 e 8.5 esiste una sola curva limite ma diversi punti nel piano $(|w_s/L|, \eta_K)$, come evidenziato dalla Fig. 8.7. Anche in questo caso la rappresentazione con la curva limite ci permette in un colpo d’occhio di valutare i casi stabili e quelli instabili.

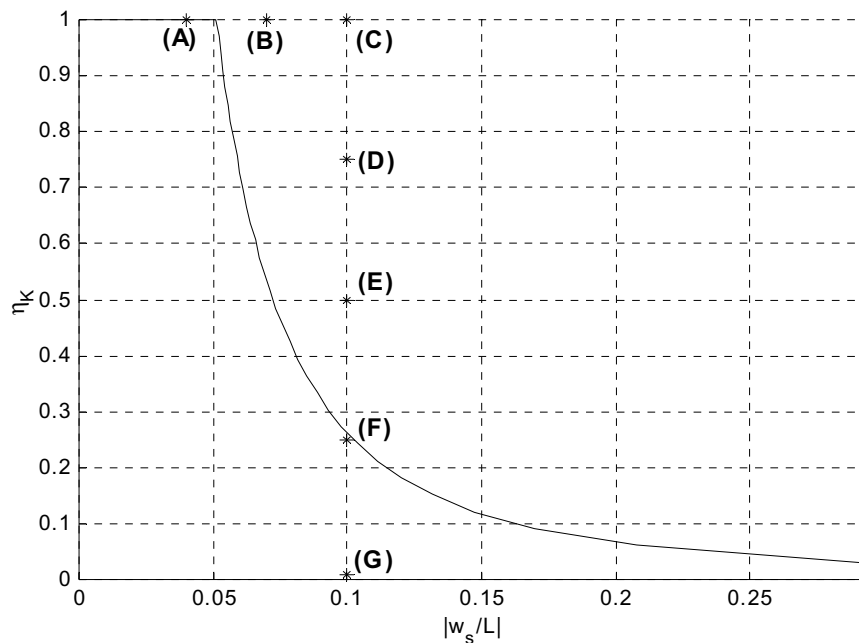


Figura 8.7: Curva limite per i casi rappresentati dalle Figg. 8.4-8.5.

8.3 Analisi statiche lineari

In questo paragrafo vogliamo soffermarci, in particolare, sul modello HZZ e sulle sue capacità di descrivere gli andamenti di spostamenti, deformazioni e tensioni lungo lo spessore [P3],[C2]. I problemi descritti qui di seguito sono stati tutti risolti con la procedura dei sublaminati, basata sugli elementi finiti descritti nel Cap. 6.

Il primo problema che studiamo è quello classico della trave semplicemente appoggiata su entrambi gli estremi e soggetta ad un carico trasversale sinusoidale (Fig. 8.8).

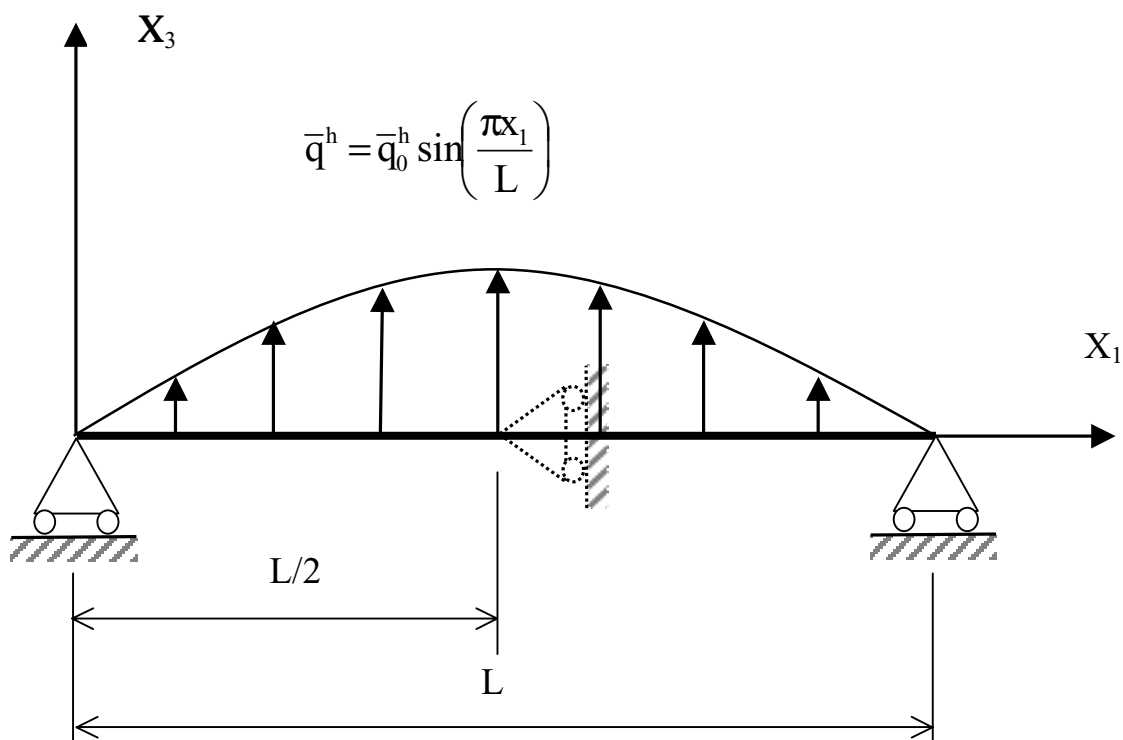


Figura 8.8: Geometria, carichi e vincoli del problema analizzato.

Considerando la laminazione (laminato 3, stato piano di tensione in (x_1, x_3)) e il rapporto lunghezza-spessore ($L/h=4$), si nota come ci si trovi di fronte ad un problema davvero ostico per i classici modelli ESL. Vogliamo qui dimostrare come il modello HZZ, con l'uso dell'approccio dei sublaminati, riesca in modo efficace a descrivere la risposta della trave (Figg. 8.9-8.16). Le soluzioni messe a confronto, tra loro e con la soluzione esatta di Pagano [52], sono tutte relative al modello HZZ con 10 divisioni (uguali) della lunghezza della trave. Ciò che cambia da caso a caso è il numero di sublaminati: 1, 2 ($[h/2, h/2]$) o 5 ($[h/4, h/4, h/4, h/8, h/8]$).

Si può notare come le grandezze di tipo tangenziale (V_1 , ε_{11} e σ_{11}) siano calcolate in modo corretto già nel caso di un solo sublaminato (Figg. 8.9, 8.11 e 8.14). L'andamento della tensione tangenziale normale sarebbe, peraltro, descritto in modo accurato anche dalle classiche teorie ESL; per quanto riguarda lo spostamento e la deformazione, sono almeno necessari i modelli LZZ e CZZ per la valutazione dell'effetto zig-zag (discontinuità della derivata rispetto a x_3 alle interfacce, qui non così accentuata perché limitata alle interfacce tra i blocchi di strati a 0° e 90°). Se passiamo, poi, alle rimanenti grandezze trasversali (Figg. 8.10, 8.12, 8.13, 8.15 e 8.16), il discorso cambia del tutto. Il passaggio da 1 a 5 sublaminati permette di migliorare nettamente i risultati. Tutte le grandezze sono descritte con notevole precisione usando 5 sublaminati; tale precisione va intesa in senso "medio" o "integrale" per quello che concerne la tensione trasversale normale σ_{33} .

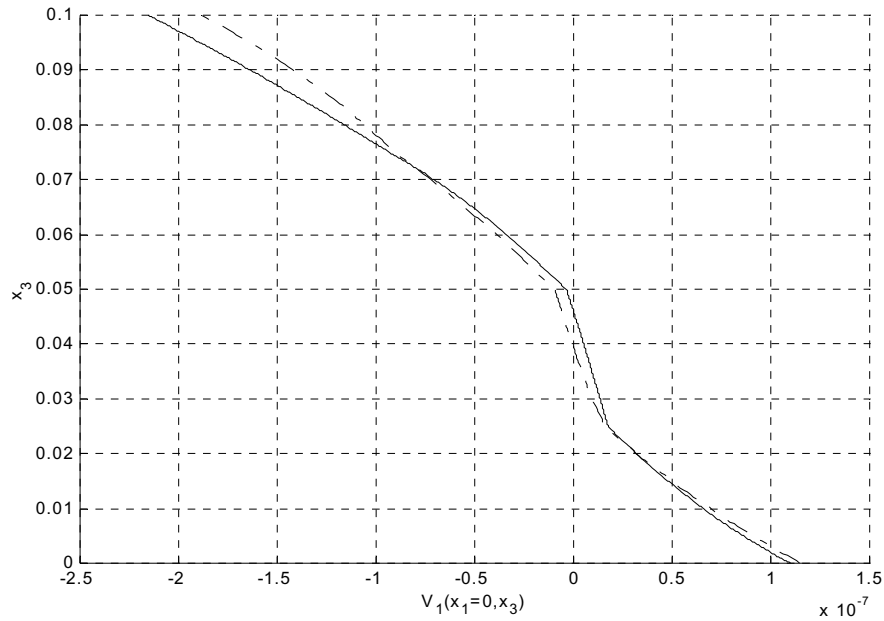


Figura 8.9: Andamento lungo lo spessore di V_1 (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1.

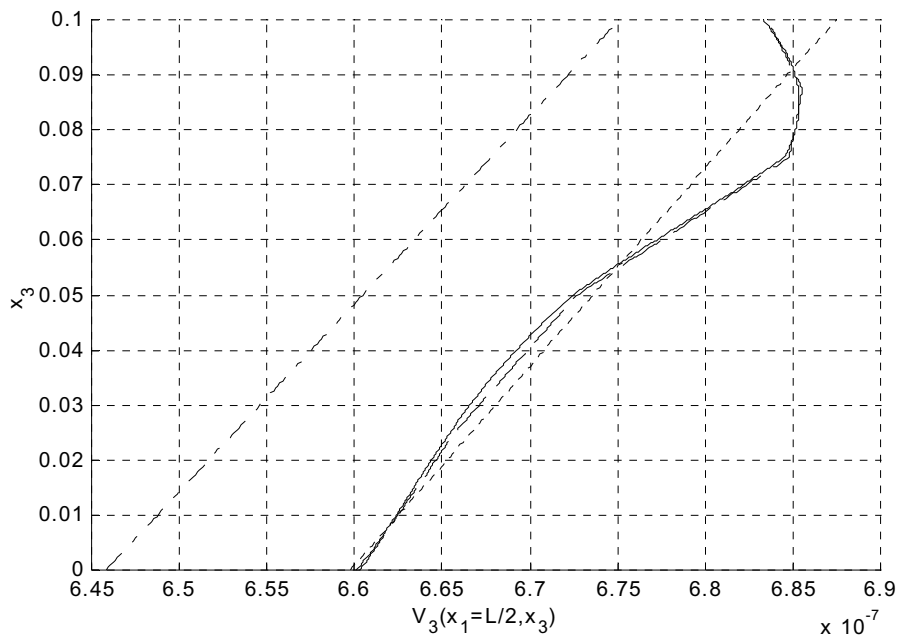


Figura 8.10: Andamento lungo lo spessore di V_3 (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1; linea a punti, modello HZZ2; linea tratteggiata, modello HZZ5.

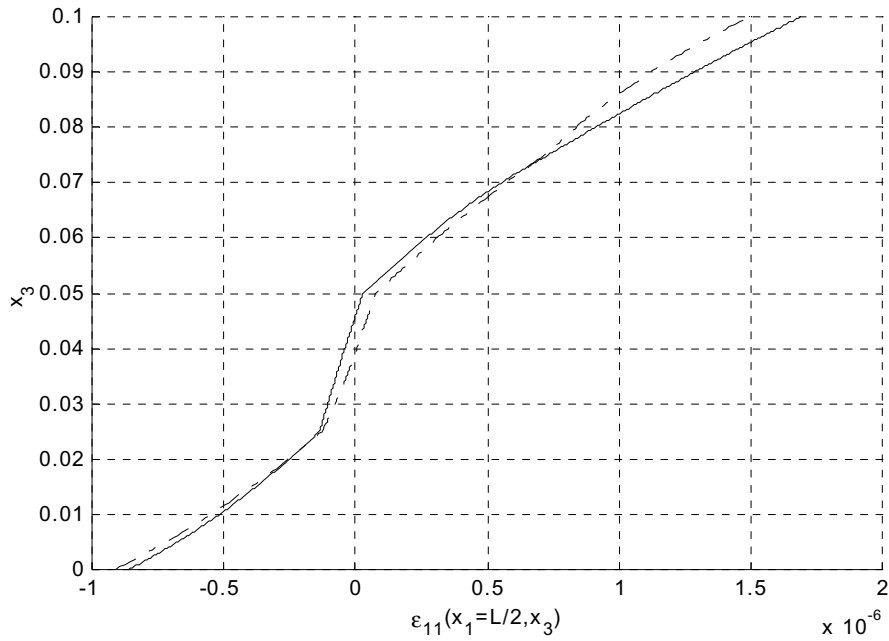


Figura 8.11: Andamento lungo lo spessore di ϵ_{11} (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1.

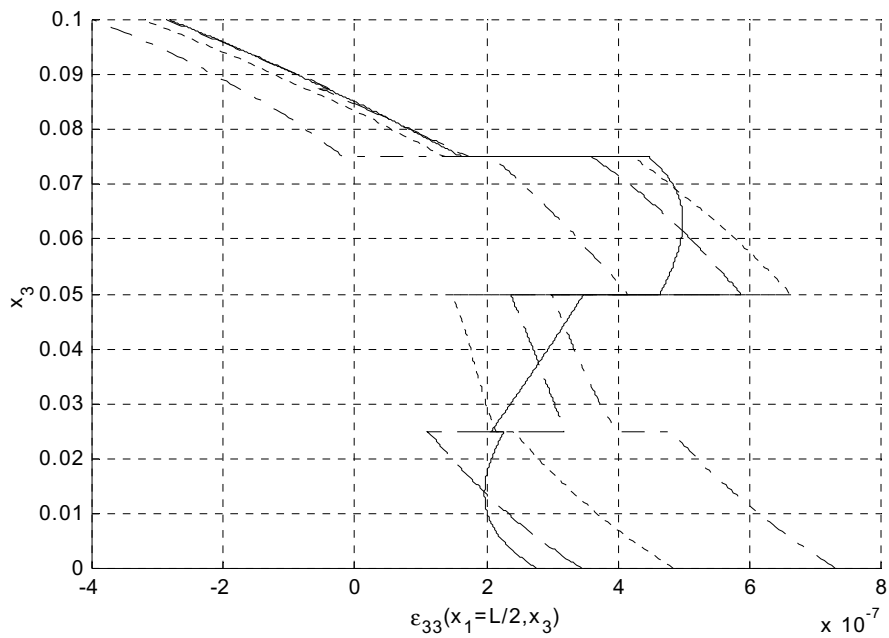


Figura 8.12: Andamento lungo lo spessore di ϵ_{33} (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1; linea a punti, modello HZZ2; linea tratteggiata, modello HZZ5.

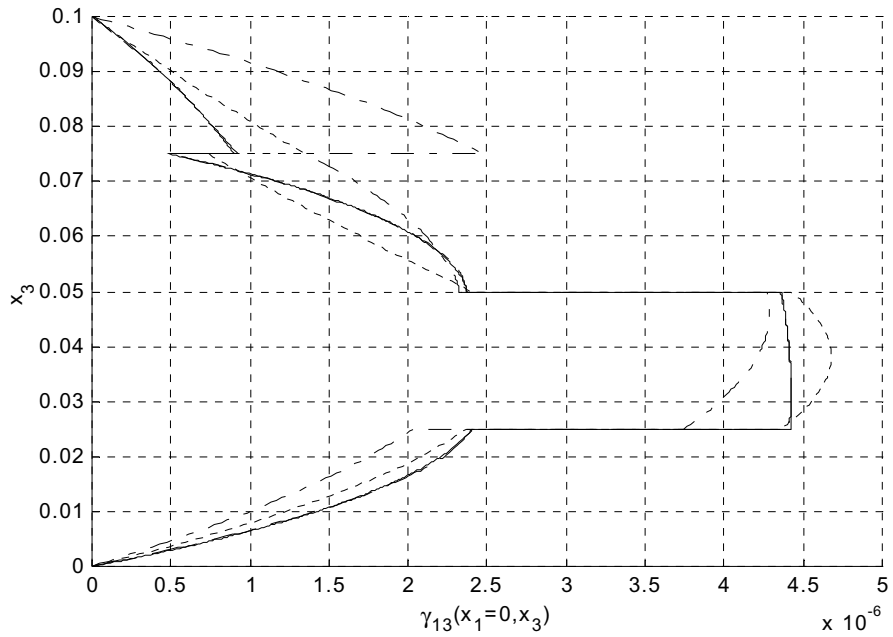


Figura 8.13: Andamento lungo lo spessore di γ_{13} (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1; linea a punti, modello HZZ2; linea tratteggiata, modello HZZ5.

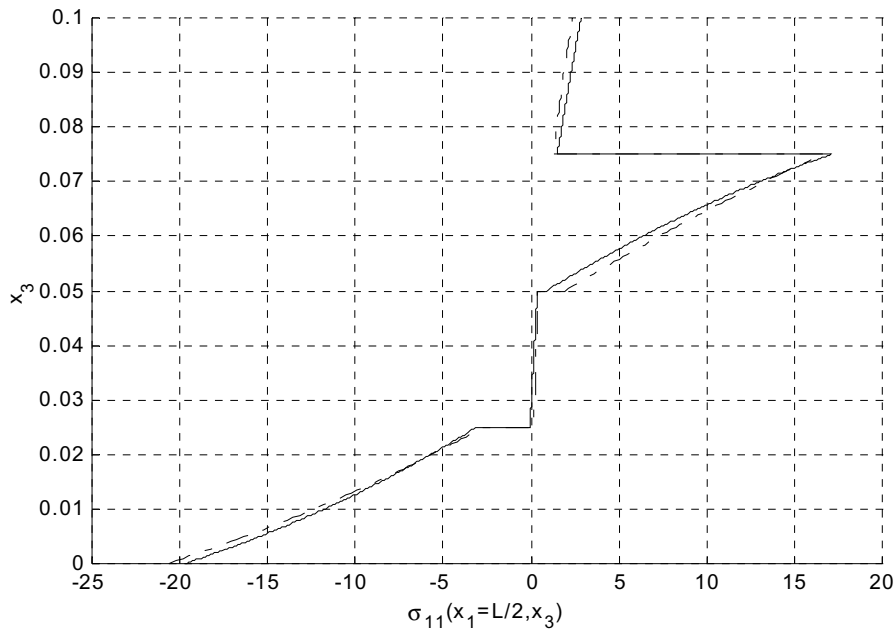


Figura 8.14: Andamento lungo lo spessore di σ_{11} (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1.

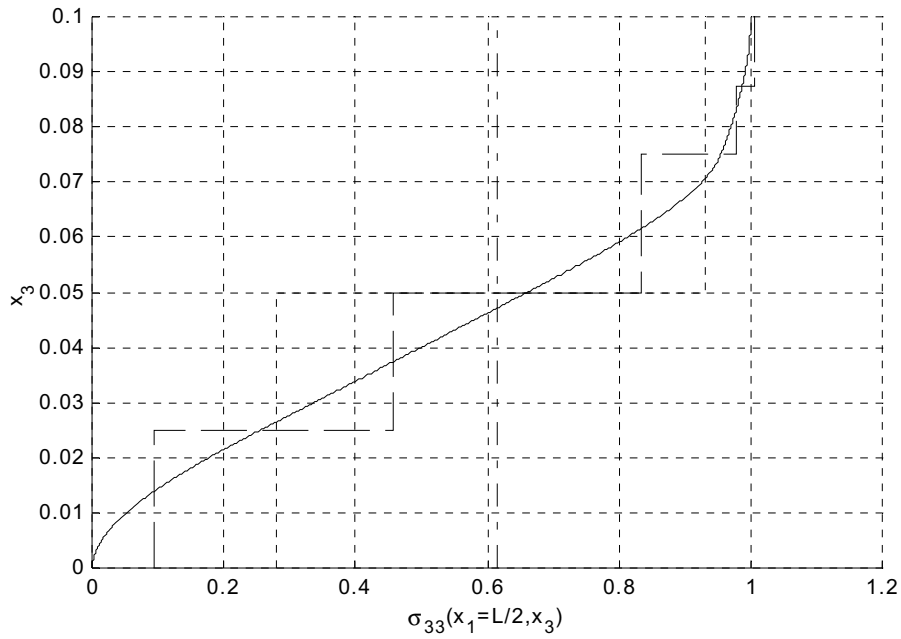


Figura 8.15: Andamento lungo lo spessore di σ_{33} (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1; linea a punti, modello HZZ2; linea tratteggiata, modello HZZ5.

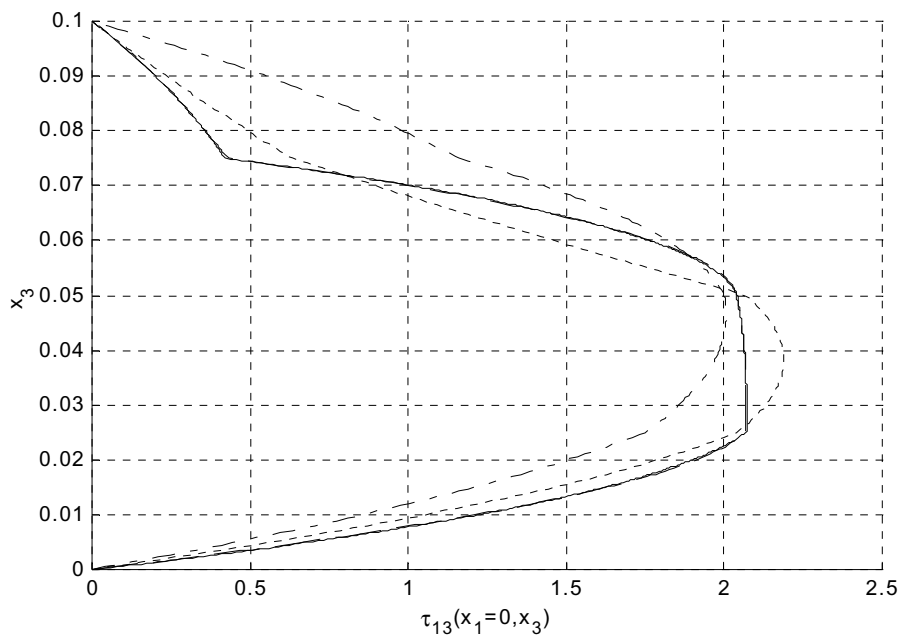


Figura 8.16: Andamento lungo lo spessore di τ_{13} (laminato 3, $L/h=4$): linea continua, soluzione esatta (Pagano); linea tratto-punto, modello HZZ1; linea a punti, modello HZZ2; linea tratteggiata, modello HZZ5.

Come anticipato nel Cap. 4, una delle possibilità offerte dal modello HZZ è quella di studiare laminati soggetti a carichi tangenziali distribuiti sulle sue facce esterne. Si pensi, per esempio, al problema di Fig. 8.17; una trave incastrata (laminato 4, $L/h=4$) ad una estremità è sottoposta a due carichi uniformi (intensità 0.5) sulle due facce esterne.

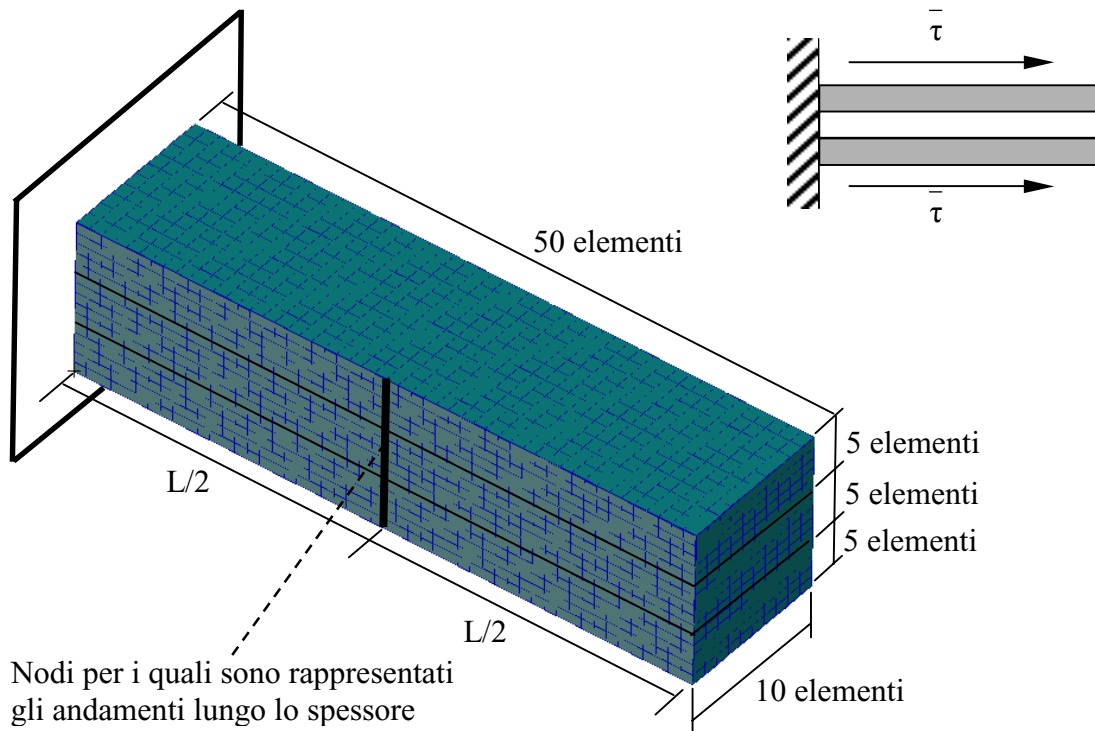


Figura 8.17: Geometria, carichi e vincoli della trave incastrata; schema della mesh utilizzata nel modello FEM PATRAN.

Sempre in Fig. 8.17, vediamo la modellizzazione che del problema è stata fatta con il codice industriale agli elementi finiti MSC PATRAN[®]/NASTRAN[®]; la soluzione così ottenuta ci è servita come riferimento per verificare la validità del modello HZZ, dato che in letteratura non sono rintracciabili soluzioni esatte del problema.

Il passaggio dalla schematizzazione con un solo sublaminato a quella con tre sublaminati (uno per ogni strato)¹, permette di ottenere soluzioni molto vicine a quelle ricavate con il modello dettagliato agli elementi finiti. Soprattutto nel caso della deformazione e della tensione tangenziali normali (Figg. 8.19 e 8.20), tale miglioramento è considerevole. Si noti, poi, come il modello HZZ (anche solo con un sublaminato) permetta di ottenere una tensione di taglio trasversale che assume, sulle due facce esterne, il valore dei carichi applicati (Fig. 8.21). Interessante è anche il confronto tra la soluzione dettagliata e quella con il modello HZZ3 (3 sublaminati) in termini di elementi, nodi e gradi di libertà (Tab. 8.1).

¹ In ogni caso, la trave è stata divisa in 10 elementi secondo la sua lunghezza.

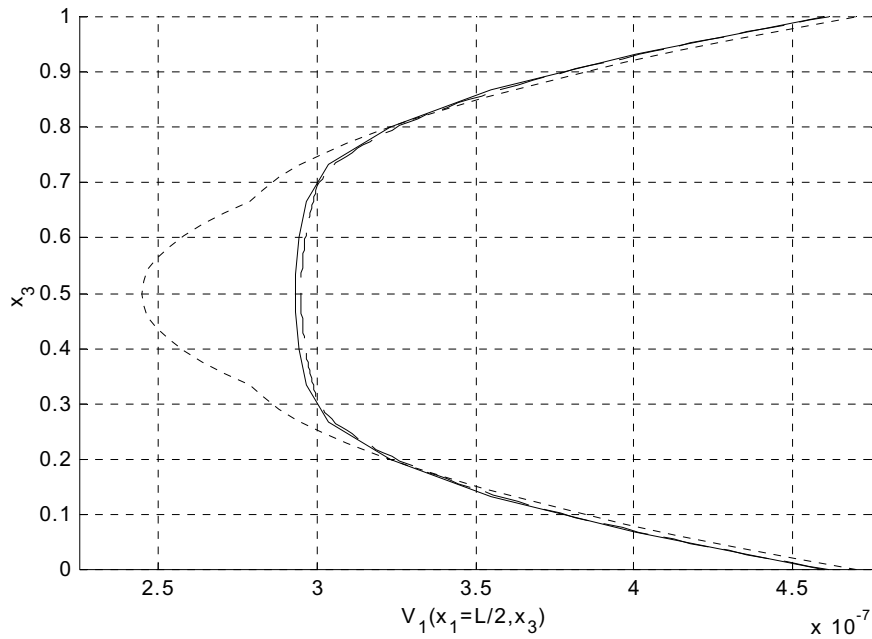


Figura 8.18: Andamento lungo lo spessore di V_1 (laminato 4, $L/h=4$): linea continua, soluzione FEM dettagliata (NASTRAN); linea a punti, modello HZZ1; linea tratteggiata, modello HZZ3.

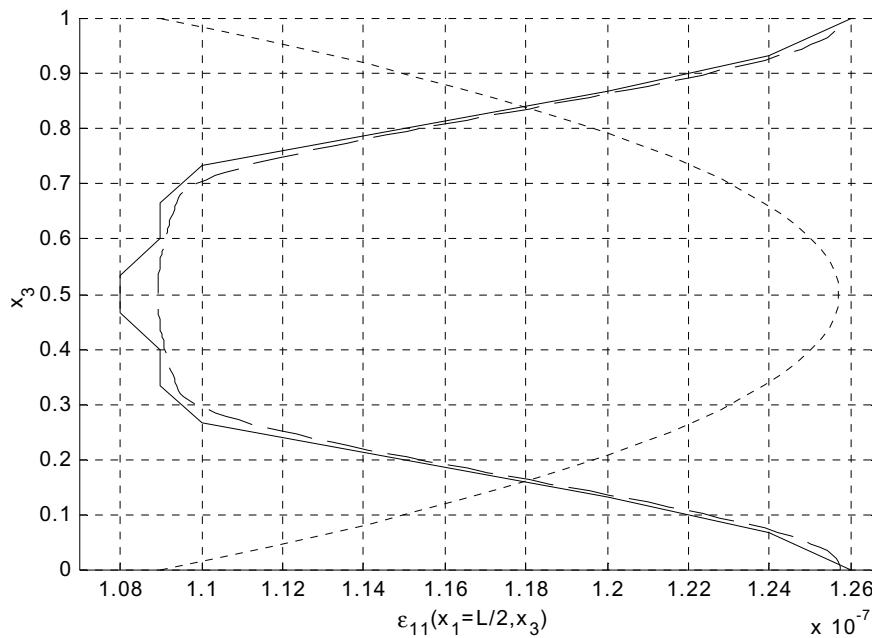


Figura 8.19: Andamento lungo lo spessore di ϵ_{11} (laminato 4, $L/h=4$): linea continua, soluzione FEM dettagliata (NASTRAN); linea a punti, modello HZZ1; linea tratteggiata, modello HZZ3.

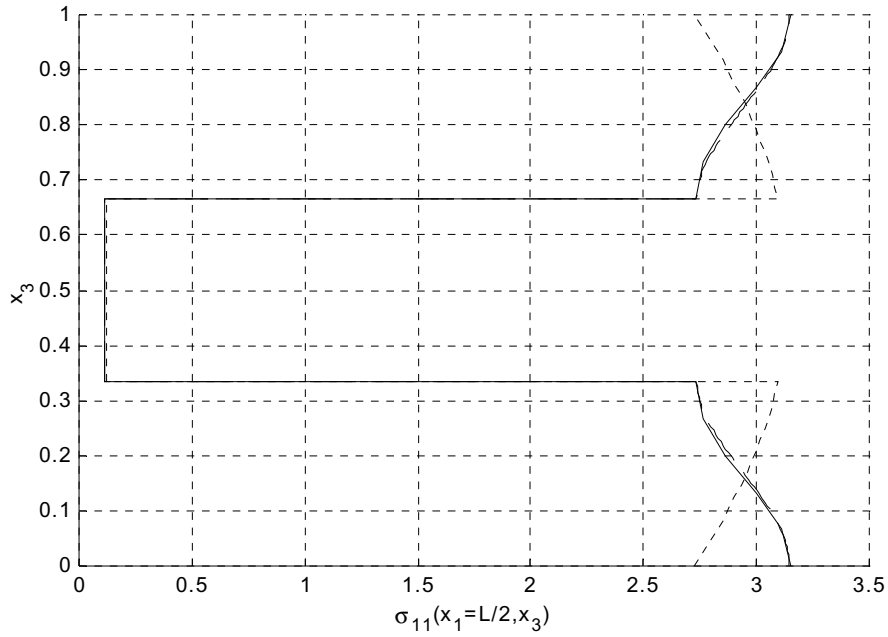


Figura 8.20: Andamento lungo lo spessore di σ_{11} (laminato 4, $L/h=4$): linea continua, soluzione FEM dettagliata (NASTRAN); linea a punti, modello HZZ1; linea tratteggiata, modello HZZ3.

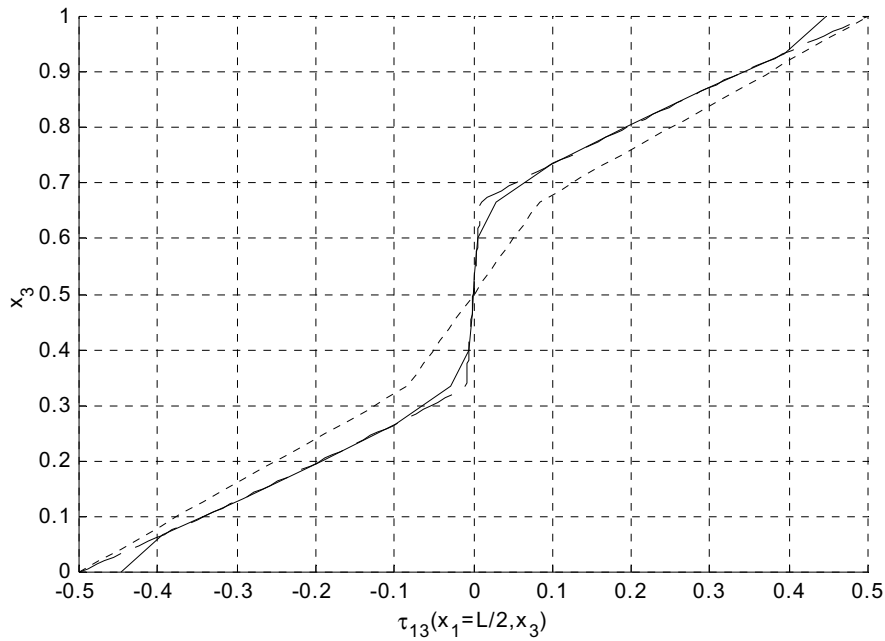


Figura 8.21: Andamento lungo lo spessore di τ_{13} (laminato 4, $L/h=4$): linea continua, soluzione FEM dettagliata (NASTRAN); linea a punti, modello HZZ1; linea tratteggiata, modello HZZ3.

Modello FEM	Elementi	Nodi (totali)	Nodi (liberi)	GDL (totale)	GDL (liberi)
NASTRAN	7500	8976	8800	26928	26400
NASTRAN*	750	816	800	2448	2400
HZZ3	30	44	40	256	200

Tabella 8.1: Elementi, nodi e gradi di libertà (GDL) per i due modelli FEM utilizzati nel problema di Fig. 8.17.

La notevole differenza sul numero di elementi, nodi e gradi di libertà, è dovuta al fatto che il modello FEM NASTRAN prevede anche la discretizzazione nel senso della larghezza della trave (non presente nel caso HZZ3). Un confronto più ragionevole è quello che considera solo la suddivisione nel senso dello spessore e della lunghezza (NASTRAN*). Anche in questo caso, però, il raffronto mette in evidenza un rapporto 1/25 sugli elementi, 1/20 sui nodi e 1/10 sui gradi di libertà, sempre a vantaggio del modello HZZ3.

8.4 Calcolo di frequenze proprie

Come visto nel Par. 2.3, è possibile calcolare le costanti ingegneristiche e la densità equivalenti a cuori honeycomb e corrugati, usando opportuni modelli analitici. Questa opportunità è di notevole importanza quando si vogliono usare dei modelli bi-dimensionali per lo studio dei pannelli sandwich; solo trasformando la complessa geometria dei cuori in un continuo ortotropo equivalente è possibile ricondurre la sequenza degli strati ad un problema trattabile con i tradizionali modelli. Al fine di verificare la validità di tale approccio nello studio dei pannelli sandwich e anche per effettuare un confronto tra tutti i campi di spostamento descritti in questa tesi (Capp. 3 e 4), consideriamo il problema del calcolo delle frequenze proprie di alcune travi sandwich con cuore honeycomb.

Considerando che per tale problema (trave incastrata ad una estremità con modellizzazione dettagliata della geometria del cuore) non esiste una soluzione esatta, abbiamo usato come risultato di riferimento quello ottenuto con il codice industriale MSC PATRAN[®]/NASTRAN[®]. In Fig. 8.22 è riportato uno schema dell'elemento ripetitivo di cuore honeycomb usato per l'analisi; oltre alla geometria è anche riportata la discretizzazione in elementi QUAD4. Aggiungendo le due facce (materiale composito multistrato, sempre discretizzato con elementi QUAD4), otteniamo l'elemento ripetitivo della trave sandwich (Fig. 8.23). Accostando opportunamente gli elementi ripetitivi (tanto in direzione x_1 che in direzione x_2), si ottiene la trave sandwich (Fig. 8.24).

Il cuore honeycomb è costituito da celle in materiale isotropo con $E=105000$, $\nu=0.3$ e $\rho=4.5e-9$; a seconda dei valori dei parametri geometrici, cambiano i valori delle costanti elastiche equivalenti e si ottengono, quindi, 4 diversi materiali ortotropi (f , g , h e i). Le costanti ingegneristiche sono calcolate nel seguente modo; E_1 , E_2 e ν_{12} sono ottenute a partire dal modello di Becker, G_{12} con quello di Masters e Evans (relazione (2.64)), G_{13} con l'approccio di Grediac (relazione (2.69)) e G_{23} con i modelli di Chang e Ebcioğlu o Penzien e Didriksson (relazioni equivalenti (2.66) e (2.68)), E_3 , ν_{13} e ν_{23} con le (2.70)-

(2.72). Le facce sono in composito multistrato (l'unidirezionale è il materiale e mentre spessori e angoli sono quelli indicati per i laminati 5, 6, 7 e 8). Sono state analizzate 4 diverse configurazioni; i dati relativi sono riportati in Tab. 8.2.

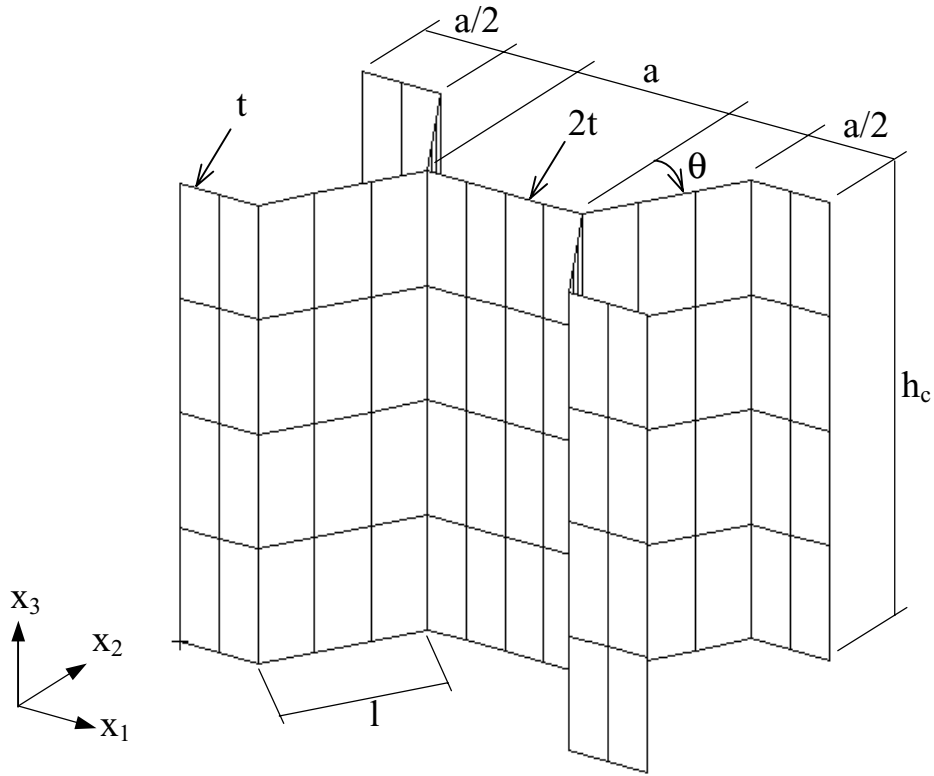


Figura 8.22: Geometria dell'elemento ripetitivo di cuore honeycomb.

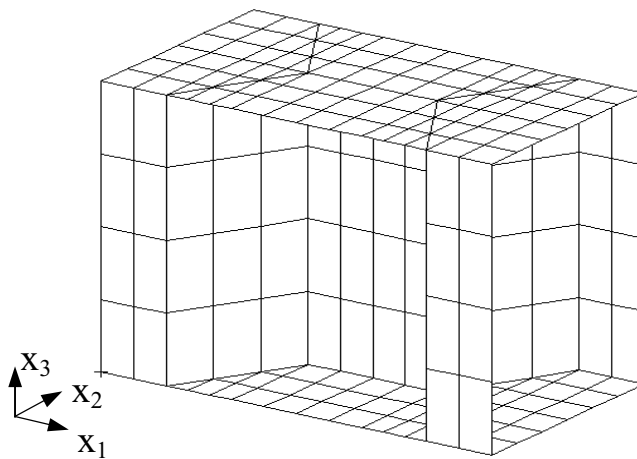
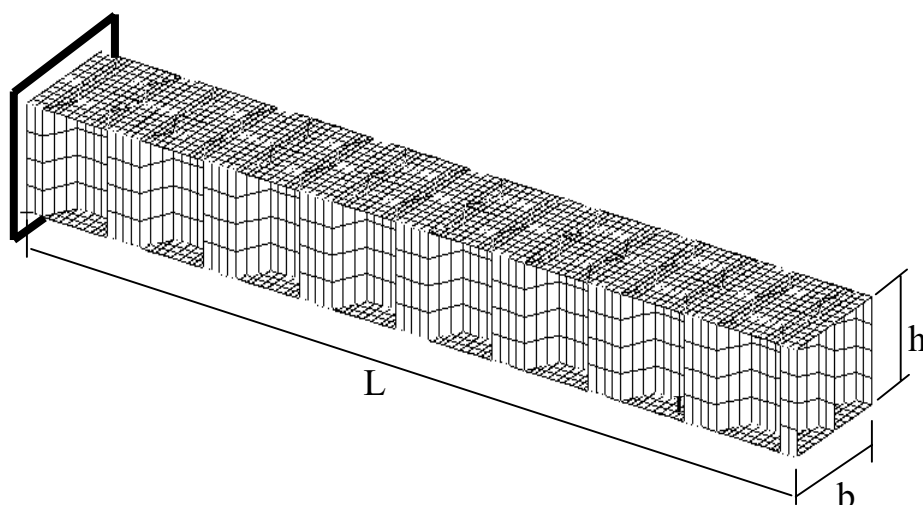


Figura 8.23: Geometria dell'elemento ripetitivo di trave sandwich.


Figura 8.24: Geometria della trave sandwich.

Lam.	Cuore					Materiale	Facce Materiale	Trave	
	Geometria							n ₁	n ₂
	a	l	θ	t	h _c				
5	4	4	30	0.05	10	f	e	8	2
6	2	2	30	0.05	10	g	e	16	4
7	2.29	2.29	30	0.05	11.43	h	e	14	4
8	4	4	30	0.05	12	i	e	8	2

Tabella 8.2: Caratteristiche geometriche delle diverse configurazioni di trave sandwich considerate.

I campi di spostamento utilizzati sono CLPT, FSDT (generalizzato con $K_T=5/6$), LZZ, HSDT (di Reddy), CZZ e HZZ. Quest'ultimo modello è stato impiegato in due versioni; nella prima (HZZ5) i 5 sublaminati sono le 2 facce e tre sottostrati nei quali è stato diviso il cuore, nella seconda (HZZ6) ci sono 2 sublaminati per faccia (di 2 e 3 strati, rispettivamente) e 2 sublaminati per il cuore.

In tutti i casi considerati abbiamo mantenuto fisso il rapporto $L/h=7.74$; per quanto riguarda il cuore, in ogni caso $a=l$ e $\theta=30^\circ$. Le 4 configurazioni analizzate, però, differiscono per quanto riguarda altri parametri geometrici; tali differenze ci permettono di confrontare i risultati (Tabb. 8.3-8.6²) e trarne alcune interessanti conclusioni.

² Nelle Tabb. 8.3-8.6 sono riportate le prime 5 frequenze proprie per ogni caso. Per il laminato 5 (Tab. 8.3)), vista l'elevata densità modale, non è stato possibile individuare la 4° forma modale con NASTRAN. Gli acronimi nF (n-esimo modo flessionale) e nM (n-esimo modo membranale) servono a indicare il tipo di modo. In alcuni casi le frequenze calcolate con i modelli equivalenti sono inferiori a quelle calcolate con NASTRAN; ciò si spiega con il fatto che la mesh utilizzata per il modello NASTRAN non era in tali casi eccessivamente fitta.

	NASTRAN	CLPT	FSDT	LZZ	HSDT	CZZ	HZZ5	HZZ6
1F	1860	2405	2151	1890	1944	1890	1880	1881
2F	6628	14499	9166	6918	7275	6920	6790	6790
3F	13144	38361	19379	13850	14672	13867	13546	13551
1M	?	18572	18572	18572	18572	18572	18524	18524
2M	>	56175	>	>	>	>	>	>
4F	19198	69941	29285	20486	21675	20550	19866	19879

Tabella 8.3: Prime frequenze proprie del laminato 5 calcolate con diversi modelli.

	NASTRAN	CLPT	FSDT	LZZ	HSDT	CZZ	HZZ5	HZZ6
1F	1922	2212	2020	1929	1947	1928	1921	1921
2F	7665	13388	8995	7913	8102	7913	7762	7762
3F	15885	35612	19341	16517	16999	16533	16140	16142
1M	17106	17069	17069	17069	17069	17069	17007	17007
4F	23717	65321	29612	24849	25639	24917	24150	24156

Tabella 8.4: Prime frequenze proprie del laminato 6 calcolate con diversi modelli.

	NASTRAN	CLPT	FSDT	LZZ	HSDT	CZZ	HZZ5	HZZ6
1F	1815	1950	1826	1804	1818	1807	1801	1801
2F	8060	11827	8664	8296	8530	8343	8169	8170
1M	14317	14216	14216	14216	14216	14216	14144	14144
3F	17318	31564	19155	18087	18775	18228	17701	17703
4F	26524	58115	29969	27998	29270	28261	27273	27281

Tabella 8.5: Prime frequenze proprie del laminato 7 calcolate con diversi modelli.

	NASTRAN	CLPT	FSDT	LZZ	HSDT	CZZ	HZZ5	HZZ6
1F	1705	1800	1706	1696	1709	1699	1694	1694
2F	7825	10933	8373	8180	8441	8250	8075	8075
1M	12055	12925	12925	12925	12925	12925	12861	12861
3F	16729	29229	18829	18232	19067	18459	17873	17875
4F	25493	53924	29858	28710	30336	29152	28004	28010

Tabella 8.6: Prime frequenze proprie del laminato 8 calcolate con diversi modelli.

In primo luogo è possibile notare come i modelli HZZ5 e HZZ6 siano tra loro praticamente equivalenti e molto più precisi degli altri modelli. Sulle prime 5 frequenze l'errore

massimo commesso è di circa il 10% (5° frequenza per il laminato 8); sulle prime frequenze l'errore non supera mai l'1.2%. I modelli LZZ e CZZ sono anche abbastanza corretti (i valori percentuali di prima sono, in questo caso, 14% e 1.6%). In particolare, il modello LZZ si dimostra particolarmente adatto allo studio delle travi sandwich, dato che si dimostra in molti casi migliore del modello CZZ e sempre del modello HSDT, entrambi cubici. I restanti modelli sono meno precisi, soprattutto CLPT e FSDT. Per quanto riguarda il modello HSDT, risulta particolarmente sfavorevole la combinazione di elevato ordine del campo di spostamenti (ϵ , quindi, elevato costo computazionale) ed elevati errori anche sulle prime frequenze.

Se ora ci soffermiamo su HZZ5 e HZZ6, come migliori rappresentanti dei modelli nei quali il cuore viene trasformato in uno strato ortotropo equivalente, possiamo vedere per quale laminato le loro prestazioni siano migliori rispetto al risultato di riferimento fornito da NASTRAN. Questa analisi ci permette di capire in quali condizioni geometriche l'equivalenza tra cuore honeycomb reale ed equivalente è più efficace. Si tenga in conto il fatto che in tutti i casi la trave sandwich ha le stesse dimensioni $L=96$ e $h=12.4$; per quanto riguarda b , questa è sempre pari a 13.86 tranne che per il laminato 7 ($b=15.84$).

- Confronto laminato 5 – laminato 6. Nei due casi le travi sandwich hanno lo stesso rapporto tra lo spessore delle facce e quello del cuore (h_c). Il laminato 6 ha più celle e quindi queste sono più strette ed alte. E' proprio nel caso del laminato 6 che i risultati dei modelli HZZ5 e HZZ6 sono più vicini a quelli di NASTRAN; questo ci permette di concludere che i modelli analitici per il calcolo delle costanti equivalenti sono tanto più validi quanto più le celle sono numerose e alte rispetto alle dimensioni dell'esagono.
- Confronto laminato 6 – laminato 7. Nei due casi le travi sandwich hanno lo stesso rapporto tra altezza delle celle (h_c) e lato dell'esagono (l). Il laminato 6 ha più celle in direzione x_1 ed un rapporto più elevato tra lo spessore delle facce (in termini di spessore) e quello del cuore (sempre h_c). Anche in questo caso il laminato 6 è quello per il quale i modelli equivalenti forniscono prestazioni migliori; anche la maggiore presenza delle facce nella trave sandwich permette di ottenere risultati migliori, anche se questo non può essere certo imputato ad una maggiore correttezza dei modelli analitici per il cuore honeycomb.
- Confronto laminato 5 – laminato 8. Nei due casi le travi sandwich hanno lo stesso numero di celle in entrambe le direzioni. Il laminato 8 ha celle più snelle (h_c/l maggiore) e, quindi, con un rapporto tra lo spessore delle facce e quello del cuore (h_c) minore. Tra i due effetti prevale quello della snellezza delle celle per la prima frequenza (calcolata meglio nel caso del laminato 8) mentre prevale quello dello spessore relativo di facce e cuore per le altre (migliori i risultati per il laminato 5).

8.5 Calcolo di carichi critici

I risultati che verranno presentati in questo paragrafo, sono relativi al calcolo dei carichi critici per piastre ortotrope, quadrate, semplicemente appoggiate sui 4 lati e soggette ai

carichi nel piano \bar{N}_{xx} e \bar{N}_{yy} con $\bar{N}_{yy}/\bar{N}_{xx}=0.2$. Per tale problema è possibile calcolare la soluzione esatta in modo analitico (Par. 5.1). Sulla base dei risultati ottenuti usando diversi modelli (CLPT, FSDT³, LZZ, HSDT e CZZ), cercheremo di fare alcune osservazioni sui rispettivi limiti di validità.

In primo luogo, consideriamo l'effetto del rapporto tra il lato del pannello e il suo spessore (a/h) nel caso del laminato 9, che è, evidentemente, un monostrato isotropo (Tab. 8.7). Tale rapporto è uno dei fattori che maggiormente influenzano la correttezza dei risultati forniti dai vari modelli.

a/h	CLPT	FSDT ($K_T=1$)	FSDT ($K_T=5/6$)	LZZ	HSDT	CZZ
4	1.8830E+02	1.4554E+02	1.3922E+02	1.4554E+02	1.3937E+02	1.3937E+02
5	1.2050E+02	1.0144E+02	9.8326E+01	1.0144E+02	9.8375E+01	9.8375E+01
6	8.3686E+01	7.4022E+01	7.2351E+01	7.4022E+01	7.2370E+01	7.2370E+01
7	6.1483E+01	5.6103E+01	5.5137E+01	5.6103E+01	5.5145E+01	5.5145E+01
8	4.7073E+01	4.3853E+01	4.3261E+01	4.3853E+01	4.3265E+01	4.3265E+01
9	3.7194E+01	3.5154E+01	3.4773E+01	3.5154E+01	3.4775E+01	3.4775E+01
10	3.0127E+01	2.8775E+01	2.8519E+01	2.8775E+01	2.8520E+01	2.8520E+01
12	2.0921E+01	2.0260E+01	2.0133E+01	2.0260E+01	2.0133E+01	2.0133E+01
14	1.5371E+01	1.5011E+01	1.4941E+01	1.5011E+01	1.4941E+01	1.4941E+01
16	1.1768E+01	1.1556E+01	1.1515E+01	1.1556E+01	1.1515E+01	1.1515E+01
18	9.2984E+00	9.1655E+00	9.1394E+00	9.1655E+00	9.1394E+00	9.1394E+00
21	6.8315E+00	6.7595E+00	6.7453E+00	6.7595E+00	6.7453E+00	6.7453E+00
24	5.2304E+00	5.1881E+00	5.1797E+00	5.1881E+00	5.1797E+00	5.1797E+00
27	4.1326E+00	4.1062E+00	4.1009E+00	4.1062E+00	4.1009E+00	4.1009E+00
30	3.3474E+00	3.3301E+00	3.3266E+00	3.3301E+00	3.3266E+00	3.3266E+00
35	2.4594E+00	2.4499E+00	2.4481E+00	2.4499E+00	2.4481E+00	2.4481E+00

Tabella 8.7: Carico critico del laminato 9 calcolato con diversi modelli al variare del rapporto a/h ; tutti i carichi critici si riferiscono al modo di buckling con $m=n=1$.

Come già osservato in precedenza (Par. 3.3.3), i modelli LZZ e CZZ sono equivalenti ai modelli FSDT (generalizzato) e HSDT (di Reddy), rispettivamente, nel caso dei pannelli monostrato. Una conferma di questa proprietà ci è fornita dai risultati raccolti in Tab. 8.7. Si noti come per valori elevati del rapporto a/h , tutti i modelli forniscano praticamente lo stesso valore del carico critico. Quando, invece, a/h è basso, le differenze sono molto elevate; usando come riferimento il carico critico dei modelli HSDT e CZZ, si ha che per $a/h=4$ CLPT “sbaglia” del 35% mentre FSDT ($K_T=1$) e LZZ del 4%. Certamente i modelli cubici sono i più precisi e, per questo forniscono il carico critico minore a parità di a/h ; se, però, introduciamo il fattore correttivo $K_T=5/6$ nel modello FSDT, riusciamo a migliorarne

³ Per la tipologia di problema considerato, i modelli di FSDT e FSDT generalizzato (vedere la Tab. 3.1) sono del tutto equivalenti.

le prestazioni fino a farlo diventare più corretto (seppur di poco) rispetto ai modelli HSDT e CZZ.

Un altro elemento che influenza in maniera decisiva le prestazioni dei modelli proposti, è l'anisotropia trasversale del laminato. Consideriamo allora il laminato 10; mentre il materiale isotropo 1 ha delle caratteristiche meccaniche fisse, il materiale m varia le sue proprietà in modo che il suo modulo di Young vari da 1/1000 a 1000/1000 rispetto a quello di 1. In tal modo passiamo da un pannello con forti variazioni di rigidezza da strato a strato ad un pannello isotropo monostrato. Supponiamo ancora che $a/h=35$, in modo che in questo particolare studio (Tab. 8.8) non entri in gioco il fatto che il pannello sia più o meno sottile.

$r=E_m/E_1$	CLPT	FSDT ($K_T=1$)	FSDT ($K_T=5/6$)	LZZ	HSDT	CZZ
1.E-03	1.2211E+00	1.2153E+00	1.2141E+00	5.2319E-01	1.2151E+00	5.2316E-01
2.E-03	1.2223E+00	1.2165E+00	1.2154E+00	7.3226E-01	1.2163E+00	7.3220E-01
5.E-03	1.2260E+00	1.2202E+00	1.2191E+00	9.6460E-01	1.2200E+00	9.6449E-01
1.E-02	1.2322E+00	1.2264E+00	1.2253E+00	1.0839E+00	1.2262E+00	1.0838E+00
2.E-02	1.2446E+00	1.2388E+00	1.2376E+00	1.1638E+00	1.2385E+00	1.1636E+00
5.E-02	1.2818E+00	1.2759E+00	1.2747E+00	1.2457E+00	1.2755E+00	1.2455E+00
1.E-01	1.3438E+00	1.3377E+00	1.3365E+00	1.3233E+00	1.3373E+00	1.3231E+00
2.E-01	1.4677E+00	1.4613E+00	1.4600E+00	1.4550E+00	1.4607E+00	1.4546E+00
5.E-01	1.8396E+00	1.8321E+00	1.8306E+00	1.8306E+00	1.8310E+00	1.8298E+00
1.E+00	2.4594E+00	2.4499E+00	2.4481E+00	2.4499E+00	2.4481E+00	2.4481E+00

Tabella 8.8: Carico critico del laminato 10 calcolato con diversi modelli al variare del rapporto $r=E_m/E_1$; tutti i carichi critici si riferiscono al modo di buckling con $m=n=1$ tranne che nei casi indicati con cornice più spessa ($m=2$ e $n=1$).

Dai risultati di Tab. 8.8 possiamo notare come tutti modelli di tipo ESL (CLPT, FSDT e HSDT) commettano dei notevoli errori nel calcolo del carico critico quando il rapporto r è molto basso (il pannello è fortemente anisotropo nella direzione trasversale). Viceversa, i modelli LZZ e CZZ sono più precisi in quanto permettono di valutare il cosiddetto effetto zig-zag, la discontinuità della derivata degli spostamenti (tangenziali) lungo lo spessore, fenomeno particolarmente presente proprio nei casi di marcata anisotropia trasversale. Nel problema in esame, quando $r=1e-3$, i modelli ESL prevedono un carico critico maggiore del 133% rispetto a quello previsto dai modelli zig-zag; inoltre sbagliano anche il modo di buckling, che è caratterizzato da 2 (e non 1) semionde in direzione x_1 e 1 in direzione x_2 . Si noti ancora come, in questo caso, l'uso del fattore correttivo del taglio $K_T=5/6$ nel modello FSDT non comporti un miglioramento apprezzabile dei risultati.

Fino ad ora abbiamo studiato separatamente gli effetti del rapporto a/h e del rapporto r (anisotropia trasversale) sull'efficacia dei diversi modelli (sempre nel caso del laminato 10). Vogliamo concludere questo paragrafo con alcuni risultati relativi ai due modelli "estremi", CLPT (Tab. 8.9) e CZZ (Tab. 8.10), al variare di entrambi i parametri.

r	1,0000E-03	5,0000E-03	1,0000E-02
a/h			
4	9,3489E+01	9,3868E+01	9,4343E+01
7	3,0527E+01	3,0651E+01	3,0806E+01
10	1,4958E+01	1,5019E+01	1,5095E+01

Tabella 8.9: Carico critico del laminato 10 calcolato con il modello CLPT al variare dei rapporti a/h e $r=E_m/E_1$; tutti i carichi critici si riferiscono al modo di buckling con $m=n=1$.

r	1,0000E-03	5,0000E-03	1,0000E-02
a/h			
4	2,7378E+00	5,9971E+00	9,2591E+00
7	1,4549E+00	4,0086E+00	6,6116E+00
10	1,1178E+00	3,2956E+00	5,5255E+00

Tabella 8.10: Carico critico del laminato 10 calcolato con il modello CZZ al variare dei rapporti a/h e $r=E_m/E_1$; tutti i carichi critici si riferiscono al modo di buckling con $m=n=1$ tranne che nei casi indicati con cornice più spessa ($m=2$ e $n=1$).

Le Tabb. 8.9 e 8.10 si riferiscono a casi nei quali il pannello è molto spesso e caratterizzato da una notevole variazione del modulo di Young da strato a strato. Le differenze tra i carichi critici ottenuti con i modelli CLPT e CZZ sono notevolissime (anche del 3000%) e, in alcuni casi, è diverso anche il modo di buckling relativo al carico critico minimo.

8.6 Analisi di impatti a bassa velocità

Come ultima applicazione dei modelli presentati in questa tesi, consideriamo gli impatti a bassa velocità. Per maggiori dettagli sul problema e per alcune analisi e risultati originali, si veda il report [R3]. In questa sede, ricordiamo solamente che il problema è quello di determinare la risposta di una struttura ad un impatto con un proiettile che viaggia a velocità non elevate.

Come risultato di riferimento usiamo quello ottenuto con il codice industriale agli elementi finiti MSC DYTRAN[®]; in Fig. 8.25 è rappresentato il modello FEM del problema analizzato. Si tratta di una trave multistrato (laminato 11, $L=0.3$, $b=0.01$), semplicemente appoggiata su entrambi gli estremi e colpita, nel suo punto centrale, da un cilindro di lunghezza $l_c=0.01$ e raggio $R=0.015$ (materiale \circ). Si noti che, grazie alla simmetria del problema, il modello studiato è meta di quello reale.

Trattandosi di un'analisi di risposta nel tempo, con notevoli effetti locali dovuti alla concentrazione della forza (di contatto), è certamente un banco di prova valido per il modello HZZ. Nell'approccio semplificato al problema, nel quale la struttura è discretizzata secondo la procedura dei sublaminati (si veda la Fig. 8.26, dove il vincolo sull'estremo destro è una serie di doppi pendoli, necessari a garantire l'equivalenza tra il

problema rappresentato e quello reale), sono introdotte delle ipotesi semplificative [R3] che vanno precisate. Il proiettile è immaginato come un corpo puntiforme di massa m_i che si muove con velocità V_0 e scambia con la trave impattata, quando i due corpi sono a contatto, una forza repulsiva F_c . Questa forza si suppone segua la classica legge del contatto Hertziano [R3]

$$F_c = k_c (w_i - w_s)^n \quad (8.5)$$

dove w_i è lo spostamento del proiettile, w_s lo spostamento di un punto della struttura posizionato idealmente all'infinito, k_c è la rigidezza di contatto (dipendente dalla geometria e dal materiale dei due corpi a contatto [R3]) e n è un'esponente che dipende anch'esso dalla geometria dei corpi. Nel nostro caso (impatto tra cilindro di lunghezza finita e superficie piana), non è possibile usare il classico valore $n=3/2$, come previsto dalla teoria del contatto Hertziano; anche per quanto riguarda k_c non sono valide le classiche relazioni modificate per materiali compositi [R3]. I due coefficienti sono stati ottenuti cercando di interpolare al meglio (metodo dei minimi quadrati) i risultati ottenuti dalle analisi DYTRAN con una legge del tipo (8.5). Nel caso di impatto tra un cilindro di lunghezza l_c e materiale \circ e una trave in materiale composito (laminato 11), valgono dunque le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} k_c &= 1.97 \cdot 10^{-9} \cdot l_c \\ n &= 1 \end{aligned} \quad (8.6)$$

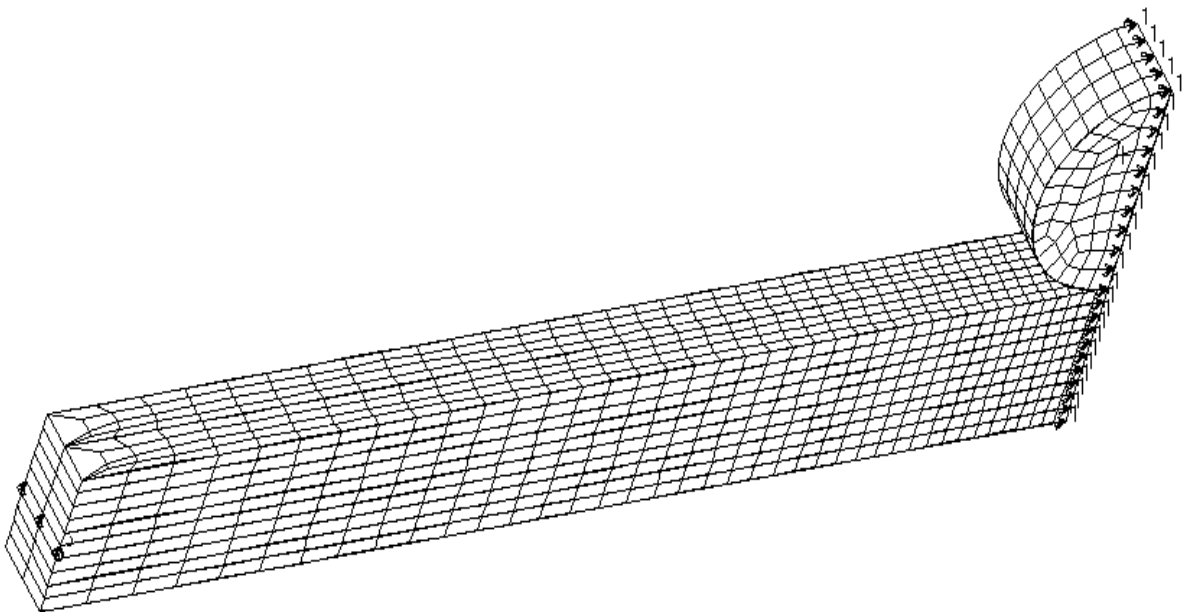


Figura 8.25: Geometria e vincoli del problema di impatto modellizzato con PATRAN/DYTRAN.

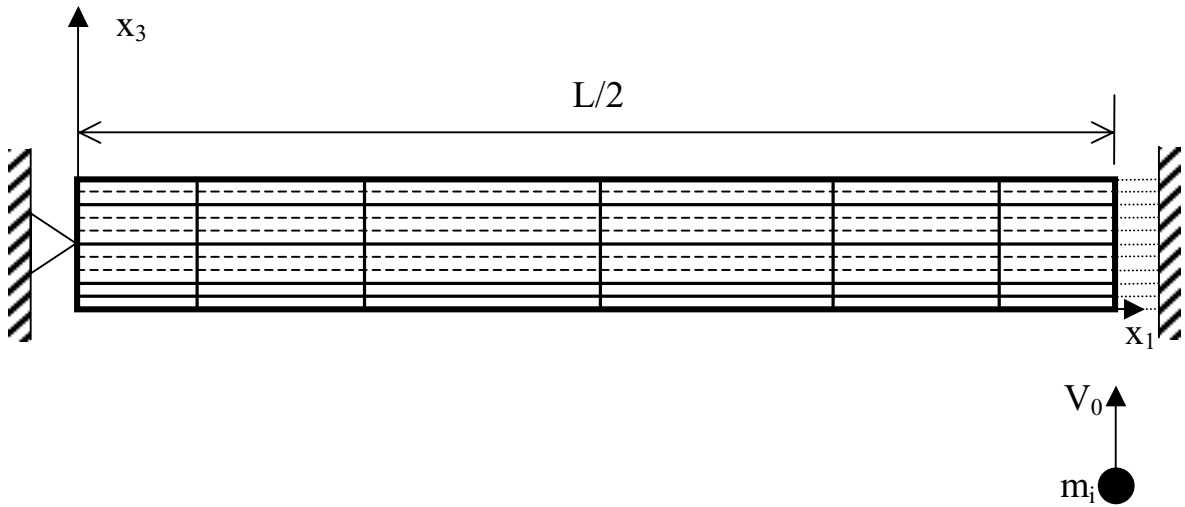


Figura 8.26: Geometria e vincoli del problema di impatto schematizzato con il modello HZZ5.

Nel modello semplificato basato sull'approccio dei sublaminati, la trave è stata discretizzata secondo lo schema di Fig. 8.26; si noti come la mesh sia più fitta, sia nel senso dell'asse x_1 che nel senso dello spessore, proprio nelle vicinanze del punto di impatto. Il sistema di equazioni del moto della trave è, come noto, il seguente

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (8.7)$$

dove

$$\{F\} \equiv F_c \{F_u\} \quad (8.8)$$

essendo $\{F_u\}$ il vettore dei carichi nodali equivalenti ad una forza unitaria verticale agente nel punto di impatto. L'equazione del moto del proiettile (supposto puntiforme) è [R3]

$$m_i \ddot{w}_i + F_c = 0 \quad (8.9)$$

Se esprimiamo F_c in funzione di w_i e di w_s (che coincide con una delle componenti di $\{q\}$), usando le (8.5)-(8.6), e ricordiamo le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \{q(0)\} &= \{0\} \\ \{\dot{q}(0)\} &= \{0\} \\ w_i(0) &= 0 \\ \dot{w}_i(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

il sistema delle (8.7) e (8.9) può essere facilmente risolto.

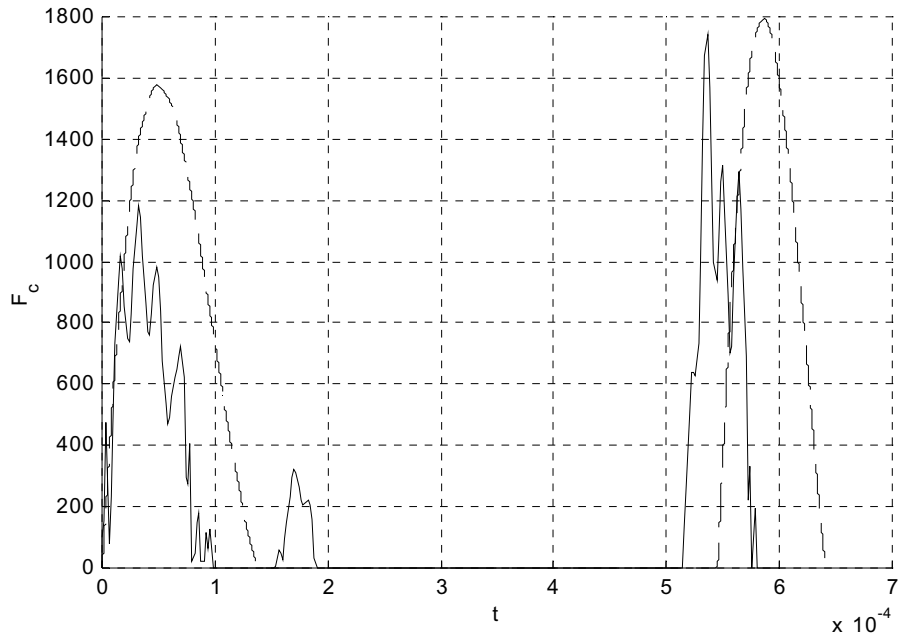


Figura 8.27: Andamento nel tempo di F_c (laminato 11): linea continua, soluzione dettagliata (DYTRAN); linea tratteggiata, soluzione con il modello HZZ5.

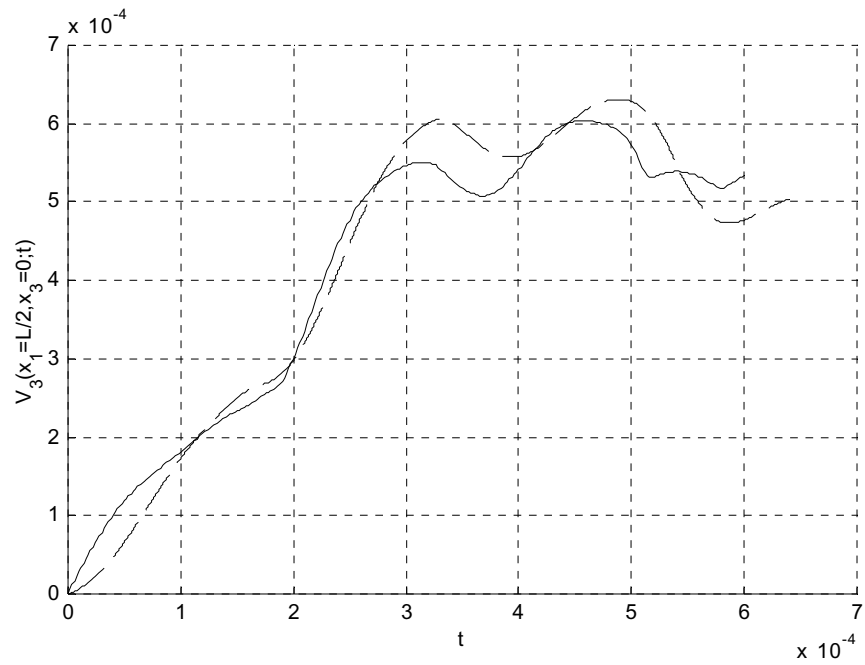


Figura 8.28: Andamento nel tempo di V_3 (laminato 11): linea continua, soluzione dettagliata (DYTRAN); linea tratteggiata, soluzione con il modello HZZ5.

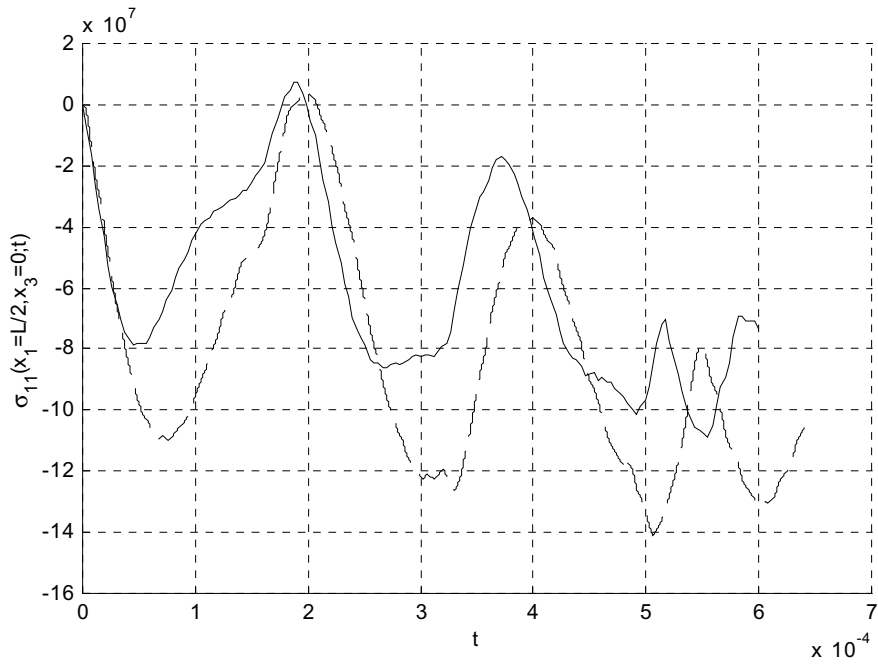


Figura 8.29: Andamento nel tempo di σ_{11} (laminato 11): linea continua, soluzione dettagliata (DYTRAN); linea tratteggiata, soluzione con il modello HZZ5.

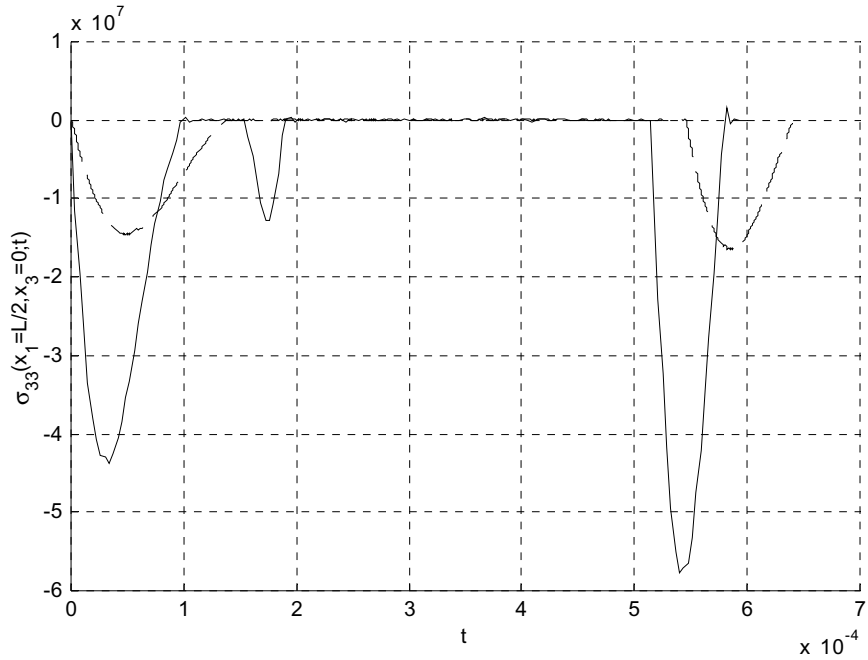


Figura 8.30: Andamento nel tempo di σ_{33} (laminato 11): linea continua, soluzione dettagliata (DYTRAN); linea tratteggiata, soluzione con il modello HZZ5.

Nelle Figg. 8.27-8.30 sono riportati alcuni confronti preliminari tra i risultati dell'analisi DYTRAN e quelli del nostro modello HZZ. Come si nota, l'andamento della forza di contatto (Fig. 8.27) e della deflessione nel punto impattato (Fig. 8.28) sono accettabili mentre, per quanto riguarda le tensioni (Figg. 8.29-8.30), i risultati sono meno corretti. Soprattutto la tensione trasversale normale (Fig. 8.30) è sottostimata dal nostro HZZ.

Conclusioni

L'introduzione dei materiali compositi nella progettazione Aerospaziale ha comportato notevoli vantaggi grazie alle loro innovative caratteristiche; elevati rapporti rigidità/peso e resistenza/peso, possibilità di sfruttare la direzionalità delle caratteristiche meccaniche e di realizzare multistrati con opportuni accoppiamenti tra i vari modi di deformazione. Con i materiali compositi, però, hanno anche fatto la loro comparsa alcuni comportamenti meccanici che i classici materiali isotropi non dimostravano. I materiali compositi hanno tipicamente una elevata deformabilità trasversale, una spiccata anisotropia trasversale e una notevole sensibilità al danneggiamento, soprattutto interlaminare. Come conseguenza, la deformazione dei laminati in composito è caratterizzata dal cosiddetto effetto zig-zag, dalla possibilità di scorrimenti interlaminari e dalla necessità, in ogni caso, che siano continue lungo lo spessore le tensioni trasversali.

Per i materiali isotropi potevano essere sufficienti i classici modelli Equivalent Single Layer, con gli spostamenti come incognite. Con la necessità di studiare multistrati in materiale composito l'attenzione si sofferma maggiormente sui modelli di tipo layerwise, con le tensioni trasversali tra le incognite; in questo modo è possibile cogliere al meglio i comportamenti meccanici, peculiari dei compositi, prima descritti. Va però notato che in letteratura esistono moltissimi modelli con proprietà e prestazioni molto diverse tra loro; l'ideale sarebbe trovare un compromesso tra semplicità computazionale e capacità di analisi.

Come punto di partenza ci è quindi sembrato opportuno considerare alcuni dei modelli che hanno riscosso maggior successo proprio dal punto di vista della semplicità, da un lato, e della completezza, dall'altro; i modelli zig-zag di Di Sciuva. Si tratta del modello zig-zag lineare e zig-zag cubico. Per entrambi lo spostamento trasversale è costante, le tensioni di taglio trasversale sono continue lungo lo spessore, è possibile studiare gli effetti dello scorrimento interlaminare e i gradi di libertà sono 5 come nel caso della classica First Shear Deformation Theory. Il modello cubico ha in più l'annullamento delle tensioni di taglio trasversale sulle due facce esterne del laminato. Per tali due modelli, e per alcuni dei classici ESL, abbiamo scritto in forma compatta campi di spostamento, equazioni del moto

(anche non-lineari) e condizioni al contorno; sono state inoltre ottenute alcune soluzioni (esatte, analitiche approssimate e di tipo FEM). Rispetto alle esistenti trattazioni abbiamo introdotto la possibilità di posizionare la superficie di riferimento ovunque lungo lo spessore. Inoltre, abbiamo appurato che i modelli zig-zag sono affetti dal fenomeno dello slip-locking, un “irrigidimento” della risposta che si verifica quando si studino multistrati con scorrimenti molto elevati. Infine, non è possibile studiare scorrimenti localizzati o di tipo non lineare.

Per risolvere i problemi relativi all’analisi dello scorrimento, per introdurre la deformabilità trasversale normale, non considerata dai classici modelli zig-zag, e per studiare più correttamente anche i casi nei quali il laminato sia soggetto a carichi tangenziali sulle due facce estreme, abbiamo sviluppato un modello originale; il modello zig-zag Hermitiano. Lo spostamento trasversale è lineare, la deformabilità trasversale normale è valutata ipotizzando che la relativa tensione sia costante lungo lo spessore e inserendo questa, e la deformazione corrispondente, nelle equazioni costitutive del materiale e i gradi di libertà sono gli spostamenti e le tensioni di taglio trasversale delle due facce esterne del laminato. Con queste caratteristiche, però, anche il modello Hermitiano soffrirebbe dello slip-locking e non riuscirebbe a descrivere correttamente il comportamento di laminati molto spessi e/o con laminazioni fortemente eterogenee. Per questo motivo abbiamo sviluppato un elemento finito trave basato sullo stesso modello ma utilizzabile in una particolare procedura descritta in letteratura; lo spessore è diviso in un numero di sottodomini detti sublaminati per ognuno dei quali usiamo un elemento finito. Alla discretizzazione nel senso dell’asse si sovrappone, così, quella lungo lo spessore. In questo modo non solo otteniamo “virtualmente” un modello di ordine superiore allo zig-zag Hermitiano iniziale (spostamento trasversale lineare a tratti, tensione trasversale normale costante a tratti, etc.) ma possiamo anche studiare in modo nuovo ed efficace il problema dello scorrimento interlaminare. Facendo in modo che alle interfacce danneggiate corrispondano le superfici di confine tra sublaminati-elementi, riusciamo a spingere la capacità di analisi fino a valori molto elevati del danno e senza che compaia lo slip-locking.

Con i risultati di alcune applicazioni abbiamo dimostrato la validità del modello Hermitiano, soprattutto se usato insieme all’approccio dei sublaminati. Nel caso di analisi statiche si nota un notevole miglioramento nella valutazione degli andamenti lungo lo spessore delle grandezze trasversali. Per il calcolo di frequenze proprie, le prestazioni sono notevoli anche per travi sandwich molto tozze. Il modello è anche stato testato (con risultati incoraggianti) sul complesso problema dello studio degli impatti a bassa velocità.

Chiaramente, per il modello Hermitiano, è auspicabile il passaggio dall’elemento finito trave a quello piastra. Ma alcune osservazioni conclusive vanno prese in considerazione. In primo luogo, è certamente una strada valida quella di incrementare le potenzialità dei modelli per strutture multistrato con il metodo dei sublaminati; lo dimostrano i risultati di questa tesi e altri in letteratura. L’approccio dei sublaminati è, poi, di notevole flessibilità perché permette di usare tutti i livelli di precisione, dall’uso di un sublaminato per strato al sublaminato unico, a seconda delle esigenze. In secondo luogo, però, dobbiamo sottolineare come il numero dei gradi di libertà cresca in modo notevole così come i tempi di calcolo. E’ questo un problema non solo del nostro modello ma di tutti quei modelli che, presentati come “refined”, “improved” o “higher-order” si dimostrano tanto precisi quanto

dispendiosi. Proprio per questo motivo la strada migliore per un corretto uso di tali modelli è quella definita degli approcci Multiple Model; per ogni parte della struttura da analizzare si usa un modello la cui accuratezza sia commisurata con la reale necessità di descrizione della risposta della parte stessa. Questo comporta, tipicamente, l'introduzione di modelli di passaggio tra quelli più semplici, usati per le regioni di minore interesse, e quelli più raffinati, usati per la porzione più critica della struttura. Nel caso più frequente degli elementi finiti, per esempio trave, si dovrebbero studiare elementi che hanno un numero diverso di gradi di libertà nei due nodi. Più che sviluppare modelli dalle sempre crescenti prestazioni, sembra sia più utile impiegare al meglio quelli già esistenti.

Dati numerici

Qui di seguito riportiamo i dati numerici utilizzati per effettuare i calcoli. I valori numerici sono da intendere adimensionali o, comunque, in unità tra loro coerenti.

Capitolo 7

Mat.	E_L	E_T	ν_{LT}	ν_{TT}	G_{LT}	G_{TT}
a	2.5e7	1e6	0.25		5e5	
b	2.5e7	1e6	0.25		5e5	2e5
c	2.29e7	1.39e6	0.32	0.49	8.6e5	4.68e5
d	1.508e4		0.30		5.8e3	

Lam.	Strati	Spessori	Angoli	Materiali
1	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(a ₃)
2	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(b ₃)
3	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(a ₂ /slip/a)
4	16	(0.00625 ₁₆)	(0 ₄ /90 ₄ /0 ₄ /90 ₄)	(c ₁₆)
5	33	(0.00625 ₁₆ /0.8/ 0.00625 ₁₆)	(90 ₄ /0 ₂ /90 ₄ /0 ₂ /90 ₄ /0/0 ₄ /90 ₂ /0 ₄ / 90 ₂ /0 ₄)	(c ₁₆ /d/c ₁₆)
6	2	(0.5 ₂)	(0/90)	(b/slip/b)
7	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(b/slip/b ₂)
8	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(b ₂ /slip/b)
9	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(b/slip(centr ale)/b ₂)
10	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(b/slip(later ale)/b ₂)

Capitolo 8

Mat.	E_1	E_2	E_3	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ρ	α_i
a	7e10			0.30			2.7e10			/	24e-6
b	1.35e8			0.30			5.2e7			/	30e-6
c	2.5e7	1e6		0.25			5e7	2e7		/	/
d	2.29e7	1.39e6		0.32	0.49		8.6e5	4.68e5		/	/
e	1.58e11	1e10		0.32	0.49		6e9	4e9		1.6e-6	/
f	1.74e8	1.51e8	2.02e9	0.89	2e-5	5e-6	2.68e5	4.52e8	2.91e8	8.7e-11	/
g	1.78e8	1.65e8	4.04e9	0.94	7e-5	2e-5	2.14e6	8.9e8	5.83e8	1.7e-10	/
h	1.55e8	1.44e8	3.54e9	0.94	5e-5	1e-5	1.43e6	7.78e8	5.10e8	1.5e-10	/
i	1.46e8	1.30e8	2.02e9	0.90	2e-5	5e-5	2.68e5	4.50e8	2.91e8	8.7e-11	/
l	1e3			0.3			3.85e2			/	/
m	1e3*r			0.3			3.84e2*r			/	/
n	120e9	7.9e9		0.3			5.5e9			1.58e3	/
o	210e9			0.33			78.95e9			7.96e3	/

Lam.	Strati	Spessori	Angoli	Materiali
1	3	(1/25/1)*1e-3	(0/0/0)	(a/b/a)
2	5	(0.2 ₅)	(0/90/0/90/0)	(c ₅)
3	16	(0.00625 ₁₆)	(0 ₄ /90 ₄ /0 ₄ /90 ₄)	(d ₁₆)
4	3	(0.33 ₃)	(0/90/0)	(c ₃)
5	11	(0.24 ₅ /10/0.24 ₅)	(0/90/0/90/0 ₃ /90/0/90/0)	(e ₅ /f/e ₅)
6	11	(0.24 ₅ /10/0.24 ₅)	(0/90/0/90/0 ₃ /90/0/90/0)	(e ₅ /g/e ₅)
7	11	(0.0971 ₅ /11.4286/0.0971 ₅)	(0/90/0/90/0 ₃ /90/0/90/0)	(e ₅ /h/e ₅)
8	11	(0.04 ₅ /12/0.04 ₅)	(0/90/0/90/0 ₃ /90/0/90/0)	(e ₅ /i/e ₅)
9	1	(1)	(0)	(1)
10	5	(0.1/0.3/0.2/0.3/0.1)	(0 ₅)	(l/m/l/m/l)
11	10	(2e-3 ₁₀)	(0/90/0/90/0/0/90/0/90/0)	(n ₁₀)

Bibliografia

- [1] **Reddy J. N.**,
“*Mechanics of laminated composite plates*”,
CRC Press, New York, **1997**
- [2] **Carrera E.**,
“*Developments, ideas and evaluations based upon Reissner’s Mixed Variational Theorem in the modelling of multilayered plates and shells*”,
Applied Mechanics Review, v. 54, n. 4, pp. 301-329, **2001**
- [3] **Di Sciuva M.**,
“*Sulla meccanica dei pannelli anisotropi multistrato. Modellizzazioni analitiche ed agli elementi finiti*”,
Report DIASP-35, **1990**
- [4] **Reissner E.**,
“*On a certain mixed variational theorem and a proposed application*”,
International J. for Numerical Methods in Engineering, n. 20, pp. 1366-1368, **1984**
- [5] **Reissner E.**,
“*On a mixed variational theorem and shear deformable plate theory*”,
International J. for Numerical Methods in Engineering, n. 23, pp. 193-198, **1984**
- [6] **Di Sciuva M.**,
“*A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered orthotropic plates*”,
L’Aerotecnica Missili e Spazio, v. 63, n. 2, pp. 84-92, **1984**
- [7] **Reissner E., Stavsky Y.**,
“*Bending and stretching of certain types of anisotropic elastic plates*”,
Journal of Applied Mechanics, n. 28, pp. 402-408, **1961**
- [8] **Timoshenko S.**,
“*On the correction for shear of differential equations for transverse vibrations of prismatic bars*”,
Philos. Mag. Series, n. 41, pp. 744-746, **1921**

- [9] **Mindlin R. D.**,
“*Influence of rotatory inertia and shear deformation on flexural motions of isotropic elastic plates*”,
ASME Journal of Applied Mechanics, n. 18, pp. 31-38, **1951**
- [10] **Reissner E.**,
“*The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*”,
ASME Journal of Applied Mechanics, n. 12, pp. 69-77, **1945**.
- [11] **Whitney J. M., Pagano N. J.**,
“*Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates*”,
Journal of Applied Mechanics, n. 37, pp. 1031-1036, **1970**.
- [12] **Reddy J. N.**,
“*A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness*”,
International Journal of Non-Linear Mechanics, v. 25, n. 6, pp. 677-686, **1990**
- [13] **Reddy J. N.**,
“*A simple higher-order theory for laminated composite plates*”,
Journal of Applied Mechanics, n. 51, pp. 745-752, **1984**
- [14] **Giavotto V.**,
“*Sulla meccanica dei pannelli anisotropi ed eterogenei*”,
Memorie dell’Istituto Lombardo, v. 25, n. 4, pp. 437-480, **1969**
- [15] **Tessler A.**,
“*An improved plate theory of {1,2}-order for thick composite laminates*”,
International Journal of Solids and Structures, v. 30, n. 7, pp. 981-1000, **1993**
- [16] **Cook G. M.**,
“*A higher-order bending theory for laminated composite and sandwich beams*”,
NASA Report 201674, **1997**
- [17] **Cook G. M., Tessler A.**,
“*A {3,2}-order bending theory for laminated composite and sandwich beams*”,
Composites Part B, n. 29B, pp. 565-576, **1998**
- [18] **Averill R. C.**,
“*Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage*”,
Composites Engineering, v. 4, n. 4, pp. 381-395, **1994**
- [19] **Reddy J. N.**,
“*A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates*”,
Communications in Applied Numerical Methods, v. 3, n. 1, pp. 173-180, **1987**
- [20] **Toledano A., Murakami H.**,
“*A composite plate theory for arbitrary laminate configurations*”,
Journal of Applied Mechanics, n. 54, pp. 181-189, **1987**
- [21] **Lu X., Liu D.**,
“*An interlaminar shear stress continuity theory for both thin and thick composite laminates*”,
Journal of Applied Mechanics, n. 59, pp. 502-509, **1992**
- [22] **Di Sciuva M.**,
“*A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates*”,
Atti Accademia delle Scienze di Torino, v. 118, pp. 279-295, **1984**

- [23] **Di Sciuva M.**,
“*Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model*”,
Journal of Sound and Vibration, n. 105, pp. 425-442, **1986**
- [24] **Di Sciuva M.**,
“*An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates*”,
Journal of Applied Mechanics, n. 54, pp. 589-596, **1987**
- [25] **Di Sciuva M.**,
“*Further refinement in the transverse shear deformation theory for multilayered composite plates*”,
Atti Accademia delle Scienze di Torino, v. 124, n. 5-6, pp. 248-267, **1990**
- [26] **Di Sciuva M.**,
“*Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses*”,
Composite structures, v. 22, n. 3, pp. 149-167, **1992**
- [27] **Di Sciuva M.**,
“*A generalization of the zig-zag plate models to account for general lamination configuration*”,
Atti Accademia delle Scienze di Torino, v. 128, n. 3-4, pp. 81-103, **1994**
- [28] **Di Sciuva M.**,
“*Geometrically non-linear theory of multilayered plates with interlayer slips*”,
AIAA Journal, v. 35, n. 11, pp. 1753-1759, **1997**
- [29] **Schmidt R., Librescu L.**,
“*Geometrically non-linear theory of laminated anisotropic composite plates featuring interlayer slips*”,
Nova J. of Mathematics, Game Theory and Algebra, v. 5, n. 2, pp. 131-147, **1996**
- [30] **Cheng Z. Q., Jemath A. K., Williams F. W.**,
“*Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces*”,
Journal of Applied Mechanics, n. 63, pp. 1019-1026, **1996**
- [31] **Icardi U.**,
“*Development of an improved third-order zig-zag model for multilayered plates with general lay-up*”,
Report DIASP-103, **1995**
- [32] **Di Sciuva M. Icardi U.**,
“*Analysis of thick multilayered anisotropic plates by a higher order plate element*”,
AIAA Journal, v. 33, pp. 2435-2437, **1995**
- [33] **Icardi U.**,
“*A three-dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams*”,
Composite structures, v. 52, pp. 123-135, **2001**
- [34] **Averill R. C., Yip Y. C.**,
“*Thick beam theory and finite element model with zig-zag sublaminar approximations*”,
AIAA Journal, v. 34, n. 8, pp. 1627-1632, **1996**

- [35] **Icardi U.**,
“Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with including transverse normal stress and sublaminates approximation”,
Composites Part B : Engineering, v. 32, pp. 343-354, **2001**
- [36] **Jones R. C.**,
“Mechanics of composite materials”,
Mc Graw Hill, New York, **1975**
- [37] **Becker W.**,
“The in-plane stiffnesses of a honeycomb core including the thickness effect”,
Archive of Applied Mechanics, n. 68, pp. 334-341, **1998**
- [38] **Masters I. G., Evans K. E.**,
“Models for the elastic deformation of honeycombs”,
Composite Structures, v. 35, n. 4, pp. 403-422, **1996**
- [39] **Chang C.C., Ebcioğlu I.K.**,
“Effect of cell geometry on the shear modulus and on density of sandwich panel cores”,
Journal of basic Engineering, v. 83(D4), pp. 513-518, **1961**
- [40] **Penzien J., Didriksson T.**,
“Effective shear modulus of honeycomb cellular structure”,
AIAA Journal, v. 2, n. 3, pp. 531-535, **1964**
- [41] **Grediac M.**,
“A finite element study of the transverse shear in honeycomb cores”,
International Journal of Solids and Structures, v. 30, n.13, pp. 1777-1788, **1993**
- [42] **Ko W. L.**,
“Elastic constants for sf/db corrugated sandwich cores”,
NASA Technical Paper 1562, **1980**
- [43] **Ko W. L.**,
“Structural properties of sf/db orthogonally corrugated core sandwich plates”,
AIAA Journal, v. 20, n. 4, pp. 536-543, **1982**
- [44] **Aitharaju V. R., Averill R. C.**,
“ C^0 zigzag kinematic displacement models for the analysis of laminated composites”,
Mechanics of Composite Materials and Structures, n. 6, pp. 31-56, **1999**
- [45] **Arfken G.**,
“Mathematical methods for physicists”,
Academic Press, Orlando, **1985**
- [46] **Skvortsov V., Bozhevolnaya E.**,
“Overall behaviour of shallow singly-curved sandwich panels”,
Composite Structures, v. 37, n. 1, pp. 65-79, **1997**
- [47] **Abrate S.**,
“Impact on laminated composite materials”,
Applied Mechanics Review, v. 44, n. 4, pp. 155-190, **1991**
- [48] **Abrate S.**,
“Modeling of impacts on composite structures”,
Composite Structures, v. 51, n. 1, pp. 129-138, **2001**

- [49] **Pandya B. N., Kant T.,**
“Flexural analysis of laminated composites using refined higher order C^0 plate bending elements”,
Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, n. 66, pp. 173-198, **1988**
- [50] **Kant T., Manjunath B. S.,**
“Higher-order theories for symmetric and unsymmetric fiber reinforced composite beams with C^0 finite elements”,
Finite Elements Analysis and Design, n. 6, pp. 303-320, **1990**
- [51] **Kant T., Marur S. R., Rao G. S.,**
“Analytical solution to the dynamic analysis of laminated beams using higher order refined theories”,
Composite Structures, v. 40, n. 1, pp. 1-9, **1998**
- [52] **Pagano N. J.,**
“Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending”,
Journal of Composite Materials, n. 3, pp. 398-411, **1969**

Publicazioni

Publicazioni su riviste

- [P1] **Di Sciuva M., Gherlone M., Librescu L.,**
“Implications of damaged interfaces and of other non-classical effects on the load carrying capacity of multilayered composite shallow shells”,
International Journal of Non-Linear Mechanics, v. 37, pp. 851-867, **2002**
- [P2] **Di Sciuva M., Gherlone M.,**
“A global/local third-order Hermitian displacement field with damaged interfaces and transverse extensibility: analytical formulation”,
Composite Structures, v. 59, n. 4, pp. 419-431, **2003**
- [P3] **Di Sciuva M., Gherlone M.,**
“A global/local third-order Hermitian displacement field with damaged interfaces and transverse extensibility: FEM formulation”,
Composite Structures, v. 59, n. 4, pp. 433-444, **2003**
- [P4] **Di Sciuva M., Gherlone M., Lomario D.,**
“Multiconstrained optimization of laminated and sandwich plates using evolutionary algorithms and higher-order theories”,
Composite Structures, v. 59, n. 1, pp. 149-154, **2003**

Contributi a congressi

- [C1] **Di Sciuva M., Gherlone M.,**
“The post-buckling behaviour of laminated composite and sandwich shallow shells with damaged interfaces”,
IV Int. Coll. on Comp. of Shell & Sp. Str., Chania, Creta, Grecia, 4-7 Giugno **2000**

- [C2] **Di Sciuva M., Gherlone M.,**
“Finite element analysis of damaged multilayered composite beams with transverse deformability”,
VI Int. Conf. on Comp. Str. Tech., Praga, Rep. Ceca, 4-6 Settembre **2002**
- [C3] **Di Sciuva M., Gherlone M., Lomario D.,**
“Discrete multiconstrained optimisation of laminated and sandwich plates”,
XVI Cong. Nazionale AIDAA, Palermo, Italia, 24-28 Settembre **2001**
- [C4] **Gherlone M., Lomario D., Mattone M., Ruotolo A.,**
“Application of wave propagation to pyroshock analysis”,
IMAC-2003, Orlando, Florida (USA), 3-6 Febbraio **2003**

Report interni DIASP

- [R1] **Di Sciuva M., Gherlone M.,**
“Modelli analitici per cuori di pannelli sandwich: rassegna, confronto e sviluppo”,
Report DIASP-213, **2002**
- [R2] **Di Sciuva M., Gherlone M.,**
“Qualche considerazione sui concetti di equilibrio e stabilità e sulla loro trattazione linearizzata”,
Report DIASP-183, **2000**
- [R3] **Di Sciuva M., Gherlone M.,**
“Low velocity impact on beams; a survey and a comparison between simplified and detailed models”,
Report DIASP-204, **2001**