

Pattern nella geometria euclidea

«As David Hilbert pointed out, the logical structure of geometry should remain equally valid if the words "point, line, plane" are replaced by "beer-mug, chair, table"».

«Come sottolineò David Hilbert, la struttura logica della geometria dovrebbe rimanere ugualmente valida qualora le parole "punto, linea, piano" fossero sostituite con "boccale di birra, sedia, tavolo"».

IAN STEWART, *Geometry in Victorian England*, «New Scientist», n. 1657, 1989, p. 60.

Sicuramente i *pattern* più diffusi sono quelli destinati ad essere riprodotti nello spazio euclideo. Tutte le tassellazioni e i *pattern* finora descritti sono infatti concepiti per essere disegnati all'interno del piano cartesiano, in un contesto che ha trovato, oggi come in passato, le maggiori applicazioni nell'ambito decorativo e architettonico. Tuttavia il loro uso sembra per il momento limitato alla ricerca matematica e al campo artistico, dove ha prodotto risultati di alto livello estetico; risulta, invece, più complesso impiegarli per ottenere *performance* strutturali o decorative in architettura, poiché le accortezze e le perizie tecniche che richiedono ne rendono difficoltoso l'impiego.

Come già ribadito i *pattern* euclidei si fondano sulle nozioni della geometria a cui ricorriamo quotidianamente che ha visto l'inizio della sua formalizzazione con la cultura greca, alla quale si deve tutto l'impianto, su base logica, delle conoscenze relative alla misurazione che erano note a quel tempo. Questa raccolta e l'assetto organizzativo delle informazioni ha costituito il punto di partenza per le scoperte successive.

Euclide fondò lo studio della geometria su un numero minimo di assiomi da cui poter ricavare tutti gli altri enunciati. Nel primo libro degli *Elementi* possiamo trovare le definizioni, i postulati e le nozioni che segnano i confini della sua geometria

formata da “punti” adimensionali (definizione I) e “superfici” bidimensionali (definizione V). Si tratta di affermazioni di per sé evidenti ma non dimostrabili, «verità derivate dai sensi e che si scelgono come primitive, non sapendo dedurle dagli assiomi¹»: ne furono sufficienti cinque per costruire le basi di tutto l’edificio del sapere geometrico-matematico.

Dal punto di vista filosofico va sottolineato che l’uso dei postulati (o assiomi) come fondamento di tutte le dimostrazioni, e quindi della conoscenza, non è né il risultato di una ricerca né l’insieme di nozioni innate nella mente dell’uomo, bensì il palesarsi di verità evidenti seppure indimostrabili. Non deve quindi sorprendere che nella cultura greca antica, in particolare nei circuiti pitagorici, la matematica avesse un carattere sacrale e che in seguito venisse indicata come linguaggio divino anche da Galileo, con una dignità pari alle Sacre Scritture,².

I cinque postulati su cui si costruisce la geometria euclidea affermano che:

- I. Per due punti distinti passa una ed una sola retta.
- II. Un segmento $\overline{AB}$ può sempre essere prolungato indefinitamente oltre i suoi limiti.
- III. Dati due punti O e A , esiste un cerchio di centro O che ha come raggio il segmento $\overline{OA}$.
- IV. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
- V. Data una retta l e un punto P non appartenente ad l , esiste un’unica retta m parallela ad l passante per P (postulato delle parallele).

Per Euclide costituiscono l’origine dell’intero impianto geometrico, in quanto da essi è possibile derivare qualsiasi altro enunciato attraverso regole di deduzione logica. Oggi sappiamo però che questi assiomi non sono sufficienti per costruire

¹ ENRICO BETTI, FRANCESCO BRIOSCHI, *Gli Elementi d’Euclide*, Firenze, Successori Le Monnier 1899, p. 3.

² EUCLIDE, *Gli elementi*, Torino, Utet 1970, p. 71.

HENRY BILLINGSLEY, *The Elements of geometrie of the most ancient Philosopher Euclide of Megar*, London, John Daye 1570.

tutto ciò che egli avrebbe voluto; nel corso degli anni molti matematici hanno dedicato i loro studi nel tentativo di migliorarli, pur nel rispetto della struttura concettuale di base: far scaturire tutte le verità da un numero minimo di affermazioni intuitive.

Poiché negli assiomi si menzionano solamente punti, linee, segmenti, cerchi e angoli, tutti gli altri enti geometrici hanno origine da questi. Ogni identità deve quindi ridursi ad un insieme di elementi primitivi che renda possibile ricondurre la geometria piana a due soli tipi di oggetti: punti e linee che non richiedono alcuna definizione essendo il loro comportamento determinato dai postulati stessi.

A partire dal XIX secolo, quando il primato della geometria euclidea fu messo in discussione, i matematici hanno intrapreso nuovi studi per definire modelli alternativi logicamente coerenti³. Dal momento che, in seguito ai tentativi di sostituire il V postulato con forme equivalenti, si è potuto dimostrare la sua indipendenza dai precedenti, sono nate le geometrie non euclidee, quelle che hanno negato l'esistenza di rette parallele, come la geometria ellittica, e quelle che invece hanno ammesso più rette parallele, passanti per lo stesso punto, come si verifica nella geometria iperbolica⁴.

A quest'ultima, e ai *pattern* che permette di costruire, è dedicato tutto il quinto capitolo mentre nei paragrafi seguenti vengono trattati i *pattern* geometrici islamici, che rappresentano probabilmente una delle categorie più ricche tra quelli euclidei.

³ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 14.

⁴ DAMIANO VERDA, *Dire e contraddire. Diversi modi per esplorare*, Roma, Armando Editore 2005, p. 26.

MARVIN J. GREENBERG, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*, New York, W. H. Freeman and Company 1993³, p. 14.

4.1

Pattern islamici

«È degno di nota che tutte le teorie superbe della natura si siano rivelate straordinariamente feconde come fonti di idee matematiche. C'è un mistero bello e profondo nel fatto che queste teorie superbamente esatte siano anche straordinariamente feconde semplicemente dal punto di vista matematico».

ROGER PENROSE, *La mente nuova dell'imperatore*, Milano, Rizzoli 1992, p. 229.

Tutte le civiltà antiche hanno applicato intensivamente i *pattern* decorativi; esempi eccellenti sono riscontrabili nell'architettura romana, cinese e celtica, sebbene i risultati più apprezzabili siano stati conseguiti dalla cultura islamica¹. I suoi artisti e artigiani sono riusciti nell'intento di sviluppare allo stesso tempo bellezza, armonia e ordine in forme geometriche elegantemente ripetitive, favoriti dall'avvento e dalla diffusione della tradizione islamica che, a partire dal VII secolo, ha prodotto uno dei maggiori patrimoni in campo decorativo. Ancora oggi, in una vasta area compresa tra Europa, Africa e Asia, troviamo tesori di incomparabile bellezza nei campi espressivi della calligrafia, dei disegni floreali stilizzati², nell'architettura e soprattutto nei *pattern* geometrici³ (fig. 85).

¹ ISSAM EL-SAID, *Islamic Art and Architecture: The System of Geometric Design*, London, Garnet Publishing 2008.

SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, p. 7.

KEITH CRITCHLOW, *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach*, London, Thames and Hudson 1976.

² JEAN-MARC CASTÉRA, FRANÇOISE PEURIOT, PHILIPPE PLOQUIN, KIRK McELHEARN, *Arabesques: Decorative Art in Morocco*, Paris, ACR Edition 1999.

³ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 45.



Fig. 85 – Esempi di *pattern* decorativi ideati da differenti culture.

OWEN JONES, *The Grammar of Ornament: All 100 Color Plates from the Folio Edition of the Great Victorian Sourcebook of Historic Design*, New York, Dover Publications 1987.

La calligrafia ricopriva un ruolo particolare per questa civiltà in quanto la parola divina, trascritta nel Corano e poi diffusa, costituiva l'unica testimonianza della rivelazione ricevuta oralmente da Maometto. Una rivelazione che nel Corano stesso viene definita "scrittura ben proporzionata", "bella" e "insuperabile", custodita presso Dio su "fogli immacolati"⁴ (fig. 86).

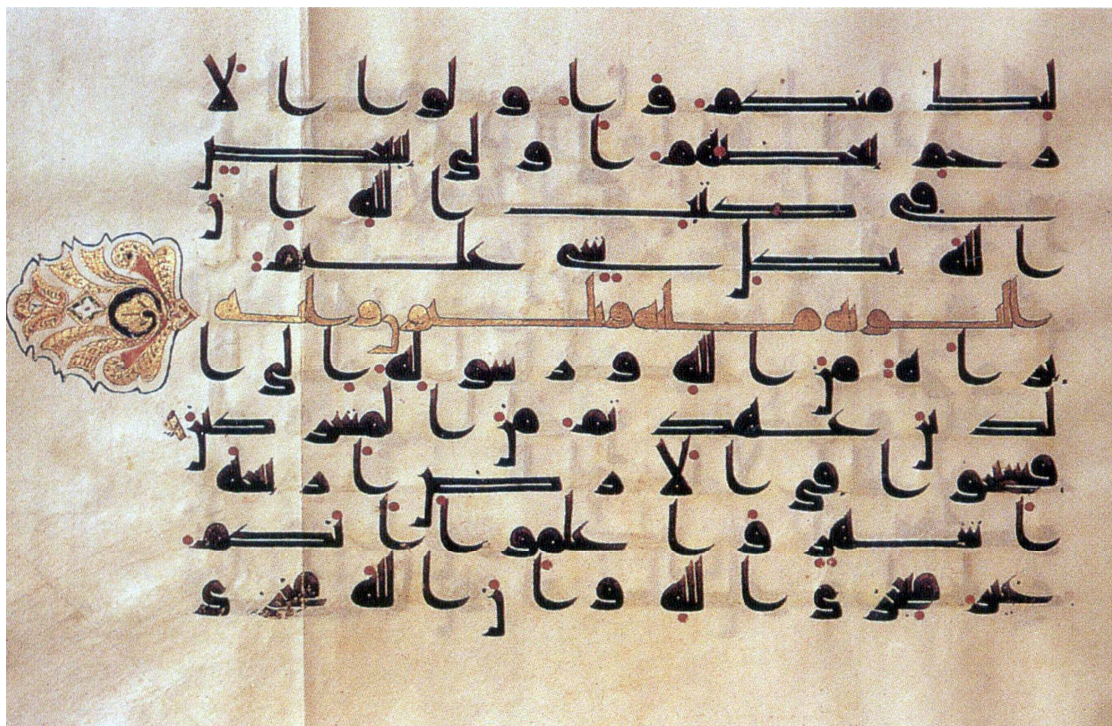


Fig. 86 – Manoscritto del Corano in "stile cufico", X secolo, Tunisi, Biblioteca Nazionale.

MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 46.

Non vi è un'unica spiegazione sul motivo per cui l'arte islamica tenda così fortemente verso l'astrazione geometrica. Molti studiosi sostengono sia dovuto alle limitazioni nei confronti della rappresentazione artistica, dominio esclusivo di Allah il quale, attraverso uno dei suoi molti nomi viene definito come "Colui che dà Forma"

⁴ MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 574.

(*Al-Mussawir*)⁵: «Vedi, ogni cosa abbiamo creato nella giusta misura e proporzione⁶»
- si legge nel Corano.



Fig. 87 – Ritratto di poeta, 1605-1615, Boston, Museum of Fine Arts.

MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 53.

⁵ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 45.

⁶ Verso 49, surah 54.

Questa spiegazione dogmatica non risulta però confermata se si pensa alla diffusione della ritrattistica e della miniatura nell'arte tradizionale (fig. 87).

Un'altra motivazione ritiene invece che nell'Islam Dio sia concepito come perfezione assoluta, per cui nessuna immagine creata dall'uomo può sperare di coglierne la natura. La matematica e tutte le espressioni artistiche che da lei traggono ispirazione rappresentano quindi l'unica disciplina in grado di avvicinarsi ad un simile risultato. Con la geometria, intesa come specchio della perfezione divina in un mondo estremamente imperfetto, gli artisti lavoravano in un contesto religioso e traducevano l'infinità di Dio disegnando *pattern* periodici idealmente estendibili all'infinito⁷.

Tra i vari tipi di *pattern* ve ne sono alcuni spiraliformi⁸ che vanno aggiunti ai più conosciuti *pattern* stellati, ai *key pattern*⁹, agli arabeschi¹⁰ (fig. 89) e ai *pattern* calligrafici Kufi¹¹ (fig. 88), mentre altri ricadono in più di una categoria¹².

⁷ SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995.

⁸ ISTVÁN HARGITAI, CLIFFORD A. PICKOVER, *Spiral Symmetry*, London, World Scientific Publishing 2000³.

⁹ Pattern ornamentali che consistono nella ripetizione di linee verticali e orizzontali, spesso in rilievo.

¹⁰ «Motivo ornamentale a racemi risalente all'epoca ellenistica e basato su forme naturali fortemente stilizzate. Il fantasioso intreccio di racemi, allontanandosi nettamente dai modelli naturali, ben si adatta alla fede islamica secondo la quale l'uomo non deve mai imitare l'opera divina. L'arabesco costituisce una decorazione ordinata, composta da steli fogliari intrecciati tra loro secondo un sistema geometrico bidimensionale».

MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 620.

¹¹ Decorazioni che ripropongono frasi scritte in calligrafia Kufi, un particolare tipo di scrittura che prende il nome dalla città di Kufa. Trattandosi del più antico carattere utilizzato per redigere il Corano gli era attribuito un significato sacro. Questa calligrafia «è squadrata, geometrica, caratterizzata da forti elementi verticali e da parti di lettere sviluppate in orizzontale».

MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 621.

¹² CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 45.



Fig. 88 – Doppia cupola del mausoleo di *Kazi Zade Rumi*, Shah-i-Zinda, Uzbekistan, XV sec.

I due tamburi sono decorati con *pattern* calligrafici, quello di sinistra mostra una calligrafia Kufica, quello di destra un *key pattern*.

<http://www.traveladventures.org/continents/asia/images/shah-i-zinda-mausolea04.jpg>
(consultato 08-12-2011).

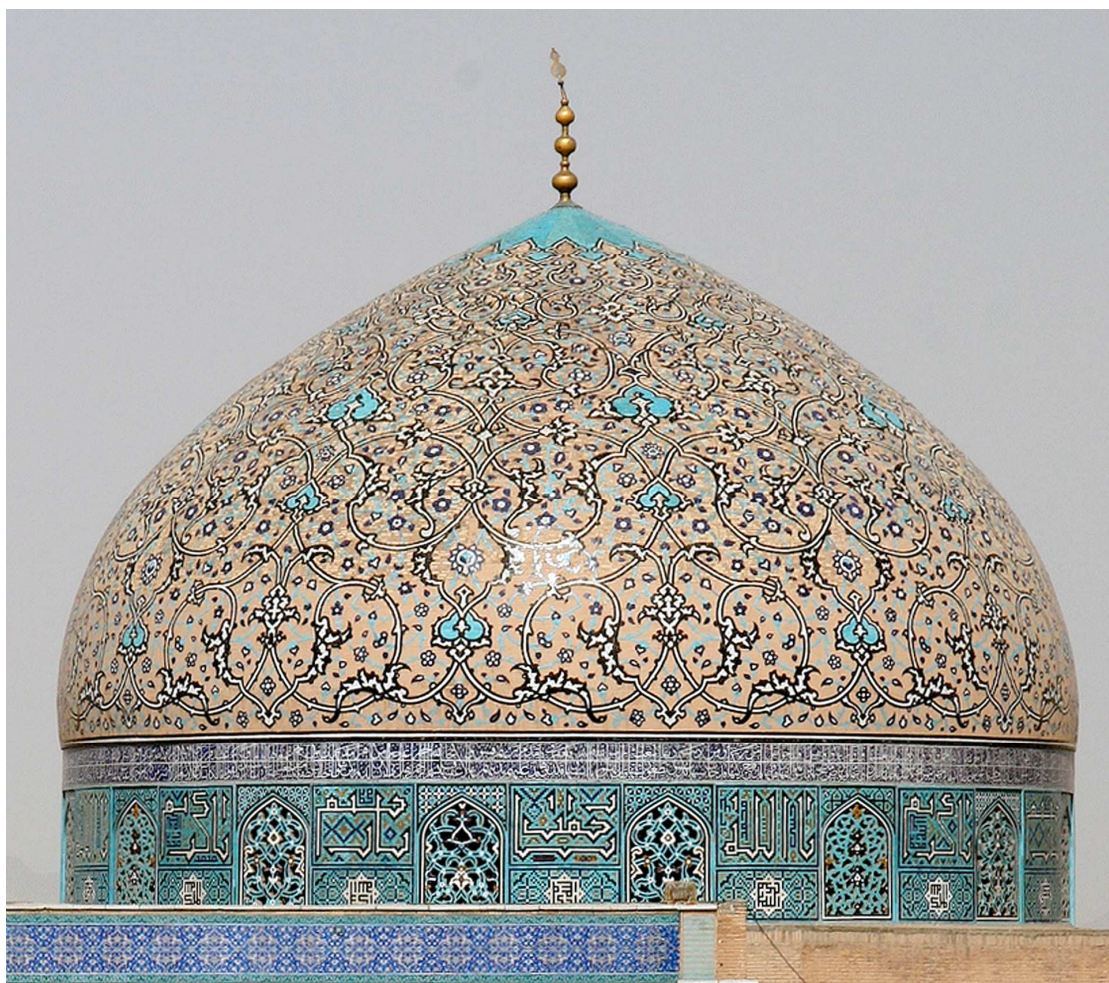


Fig. 89 – Decorazione ad arabesco sulla cupola della Moschea Sheikh Lotf Allah, Esfahan, Iran, 1603-1618.

<http://www.flickr.com/photos/27784269@N06/2721667842/sizes/l/in/photostream/>
(consultato 08-12-2011).

Queste tipologie di ornamenti decorano gli edifici di tutto il mondo islamico, in particolare moschee e tombe, sebbene i casi più noti alla cultura occidentale, proprio perché conosciuti per primi, siano quelli riscontrabili sui rivestimenti parietali o nei pavimenti del palazzo dell'Alhambra a Granada in Spagna¹³.

Nel 711, infatti, gli Arabi estesero il loro dominio oltre lo stretto di Gibilterra giungendo a conquistare rapidamente tutta la Spagna, ad eccezione delle Asturie, e a fondare un nuovo regno, *Al Andalus*, inizialmente soggetto all'impero arabo e poi

¹³ WASHINGTON IRVING, *The Alhambra*, New York, George Palmer Putnam 1861.

autonomo dal 756, sotto il governo dell'emiro di Cordoba che assunse il titolo di califfo nel 929. A partire dall'XI secolo l'emirato cominciò ad entrare in crisi e venne eroso a vantaggio del regno di Castiglia. La sua capitolazione, in un'Europa cristiana, venne sancita il 2 gennaio 1492, quando il sultano Muhammad XII, detto Boabdil, consegnò le chiavi della capitale a Isabella di Castiglia¹⁴.

L'Alhambra, la "fortezza rossa", fu residenza dei sultani di Granada e successivamente dei re cattolici. Gli esempi presenti nel complesso edilizio sono frutto dell'arte e dei gusti arabi della dinastia Nasride¹⁵ ma, se già stupiscono per la ricchezza e la varietà dei motivi geometrici, la loro rilevanza è ancora maggiore dal punto di vista matematico, essendo possibile incontrarvi ognuna delle diciassette classi cristallografiche¹⁶.

L'interesse europeo per l'arte islamica ha inizio con le riproduzioni a colori di Owen Jones¹⁷ e trova riscontro nell'opera di Jules Bourgoïn¹⁸ che è riuscito a catalogare 190 esempi per i soli *pattern* geometrici stellati con un'ampia varietà di modelli costruiti su forme pentagonali, esagonali, ottagonali, ettagonali, e dodecagonali¹⁹ o attraverso la combinazione di stelle e rosette o ancora tra quadrati e ottagoni²⁰.

¹⁴ PIERGIORGIO ODIFREDDI, *Una via di Fuga. Il grande racconto della geometria moderna*, Milano, Mondadori 2011, pp. 5-6.

¹⁵ Ultima dinastia islamica di Spagna, presente tra il 1232 e il 1338 con capitale a Granada.

MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 616.

¹⁶ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 45.

¹⁷ OWEN JONES, *The Grammar of Ornament*, London, Bernard Quaritch 1868, pp. 55-79.

¹⁸ JULES BOURGOÏN, *Arabic Geometrical Pattern and Design*, New York, Dover Publications 1973.

¹⁹ ISTVÁN HARGITAI, *Fivefold Symmetry*, London, World Scientific Publishing 1994², pp. 263-281.

²⁰ Per la loro natura geometrica questi *pattern* sono anche definiti "*Islamic Geometric Pattern*" o IGP.

I *pattern* geometrici rappresentano la categoria più nota e conducono naturalmente al concetto di simmetria²¹ e alla nozione astratta di armonia. Si possono ritrovare in materiali differenti, come ceramica, terracotta, legno, ottone, carta, stucco, vetro, applicati alla scala architettonica e in diversi tipi di oggetti; si trovano, altresì, nella decorazione di tappeti, manoscritti, oggetti in legno e in particolar modo su porte, pannelli e *minbar*²².

I presupposti che hanno favorito lo sviluppo di questa forma estetica nella cultura araba sono da ricercarsi nella convergenza tra le conoscenze geometriche, acquisite dalla cultura greca, e il sistema numerico indo-arabico. L'intellettuale musulmano riconosceva nella geometria un elemento capace di congiungere mondo materiale e spirituale: è questa la ragione per cui le opere di Euclide e Pitagora furono le prime ad essere tradotte dal Greco all'Arabo²³.

²¹ Paragrafi 2.2 e 2.2.

²² In arabo significa "poltrona", "sedia", "trono", «pulpito collocato su una struttura a gradini posta all'interno della moschea [...]».

MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 626.

²³ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 46.

4.1.1

Pattern islamici stellati

«When the religion of Mohammed spread with such astounding rapidity over the East, the growing wants of a new civilization naturally led to the formation of a new style of Art; and whilst it is certain that the early edifices of Mohammedans were either old Roman or Byzantine buildings adapted to their own use, or buildings constructed on the ruins and with the materials of ancient monuments, it is equally certain that the new wants to be supplied, and the new feelings to be expressed, must at the very early period have given a peculiar character to their architecture».

«Dal momento che la religione di Maometto si diffuse con sorprendente rapidità in Oriente, la nuova civiltà con le proprie necessità portò alla comparsa di un nuovo stile artistico; e mentre è certo che i primi edifici dei Maomettani erano romani o bizantini adattati ai loro usi, o edifici costruiti su rovine con materiali di spoglio, è altrettanto certo che le nuove necessità e il nuovo credo devono aver dato sin dall'inizio un particolare carattere alla loro architettura».

OWEN JONES, *The Grammar of Ornament*, London, Bernard Quaritch 1868, p. 56.

I *pattern* islamici stellati rappresentano una delle più raffinate tradizioni nel disegno ornamentale¹ in quanto sono riusciti a raggiungere una fusione armoniosa tra matematica, arte e religiosità, ottenendo notevoli risultati nella simmetria e nell'equilibrio formale. La loro diffusione, iniziata a partire dal X secolo per raggiungere l'apice verso la metà del XIV, è poi andata scemando nel corso del secolo successivo.

L'interesse e la curiosità che suscitano sono motivati dal fatto che si hanno solo conoscenze limitate sulle tecniche costruttive in uso dagli artigiani dell'epoca. Data la grande varietà a disposizione si è propensi a supporre che non esistesse

¹ SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, pp. 14-27.

JULES BOURGOIN, *Arabic Geometrical Pattern and Design*, New York, Dover Publications 1973.

un unico modo per realizzarli; si sono pertanto avanzate varie ipotesi e sperimentate con successo altrettante soluzioni per riprodurli², anche se manca la certezza su come, in origine, si procedesse al loro tracciamento. Dal momento che i metodi di disegno erano preziosamente custoditi e venivano tramandati da maestro ad apprendista nel corso delle generazioni, risulta difficile comprendere come i matematici e gli artigiani islamici siano riusciti a raggiungere simili traguardi. Di conseguenza, in merito alla progettazione di questi particolari *pattern* ci sono pervenute solo alcune nozioni tecniche raccolte in documenti come il rotolo di pergamena Topkapi del XVI secolo³.

Quando iniziò il declino della cultura e dell'arte islamica, anche i *pattern* persero la loro forza propulsiva, pur continuando a mantenere nell'artigianato di alcune aree, come il Marocco, una certa vitalità, legata però alla riproposizione di modelli consolidati che impediva ulteriori possibili sperimentazioni.

Per lo studio di queste geometrie abbiamo quindi a disposizione unicamente gli esiti finali: centinaia di esempi sparsi per il mondo, grandi famiglie di *pattern* che sembrano condividere una struttura comune e numerosi casi unici, forse concepiti in un lampo geniale di ispirazione⁴. La maggior parte di essi risulta composta da

² VICTOR OSTROMOUKHOV, *Mathematical Tools for Computer-Generated Ornamental Patterns*, in: *Electronic Publishing, Artistic Imaging and Digital Typography*, «Lectures Notes in Computer Science», vol. 1375, 1998, pp. 193-223.

SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Geometric and Group-theoretic Methods for Computer Graphics Studies of Islamic Symmetric Patterns*, «Computer Graphics Forum», n. 1, vol. 11, 1992, pp. 43-53.

BRANKO GRÜNBAUM, GEOFFREY C. SHEPHARD, *Interlace Patterns in Islamic and Moorish Art*, «Leonardo», n. 3-4, vol. 25, 1992, pp. 331-339.

<http://members.tripod.com/vismath4/kaplan/index.html> (consultato 05-05-2011).

http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/washington/tile/papers/kaplan_bridges2000.pdf (consultato 05-05-2011).

³ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 46.

⁴ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 46.

poligoni complessi, immagini *space-filling* (riempi-spazio), che ricoprono completamente le superfici attraverso la ripetizione di una singola figura-semema o di un *patch*⁵. L'occhio dell'osservatore può così scorrere da un elemento all'altro senza riuscire a trovare un punto di osservazione privilegiato.

Gli artigiani islamici, che oltre un mille anni fa cominciarono a decorare palazzi, moschee e minareti con le loro geometrie, ne hanno riempito le superfici con figure simili a costellazioni⁶, facendo massicciamente ricorso alla simmetria.

Questi *pattern* non possono essere compresi, se non in modo superficiale, senza prendere coscienza dei fattori culturali che hanno indirizzato l'arte islamica verso la geometria. Si tratta di una condizione che spesso viene legata alle prescrizioni religiose, ma simili vincoli si riscontrano pure nella religione cristiana, la più prolifica dal punto di vista della raffigurazione antropomorfa. La differenza fondamentale va ricercata nella concezione che per un musulmano Dio non può incarnarsi e dunque l'unica rappresentazione possibile è attraverso la luce.

In proposito il Corano dice esplicitamente che «Dio è la Luce dei cieli e della terra, e si rassomiglia la sua Luce a una nicchia, in cui è una Lampada, e la Lampada è un Cristallo, e il Cristallo è come una Stella lucente, e arde la Lampada dell'olio di un albero benedetto, un Olivo né orientale né occidentale, il cui olio per poco non brilla anche se non lo tocchi fuoco. È Luce su Luce; e Iddio guida alla Sua Luce chi Egli vuole, e Dio narra parabole agli uomini, e Dio è su tutte le cose sapiente»⁷.

L'astronomia ha da sempre affascinato la psiche umana oggi come nelle civiltà antiche, le stelle sono infatti straordinariamente importanti per l'uomo. Le

⁵ Ivi, p. 45.

⁶ SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, pp. 8-12.

GEORGE SALIBA, *A History of Arabic Astronomy. Planetary Theories During the Golden Age of Islam*, New York, New York University Press 1994.

⁷ Corano, surah 24.

popolazioni musulmane che conducevano una vita nomade, oltre agli spostamenti lungo le rotte carovaniere, erano dedite alla navigazione e anche in tale circostanza i corpi celesti permettevano al fedele devoto di trovare la direzione verso cui pregare cinque volte al giorno.

A partire dal IX secolo, quando gli scritti di Tolomeo furono tradotti in lingua araba, e fino al XV secolo, l'astronomia divenne la principale attività intellettuale nel mondo islamico. Proprio in questo periodo furono costruiti i primi osservatori⁸, a molte stelle venne dato un nome ancora oggi in uso e furono inventati strumenti come l'astrolabio.

L'interesse per le scienze astronomiche potrebbe rappresentare una delle ragioni che giustificano la complessità dei *pattern* islamici; i disegni e i diagrammi presenti nei trattati di astronomia (fig. 90) risultano infatti particolarmente articolati e sono costruiti a partire da strutture circolari, dove circonferenze più piccole vengono disposte lungo il perimetro di altre con dimensioni maggiori: è la stessa struttura che compare sottesa ai *pattern* islamici più elaborati⁹.

In essi si incontrano forme stellate a 6, 8, 10, 12 e 16 punte, ma possono essere identificate figure con un diverso numero di raggi, in particolar modo multipli di 8, fino ad un massimo di 96 (fig. 91), in accordo con un simbolismo che fonde le ragioni geometriche di tassellazione dello spazio e quelle decorative con motivazioni religiose e simboliche.

⁸ Il primo osservatorio astronomico che riunì studiosi di diversi Paesi e condusse a osservazioni estensive e alla loro elaborazione venne costruito a Maraghah in Iran nel XIII secolo.

⁹ SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, pp. 8-12.

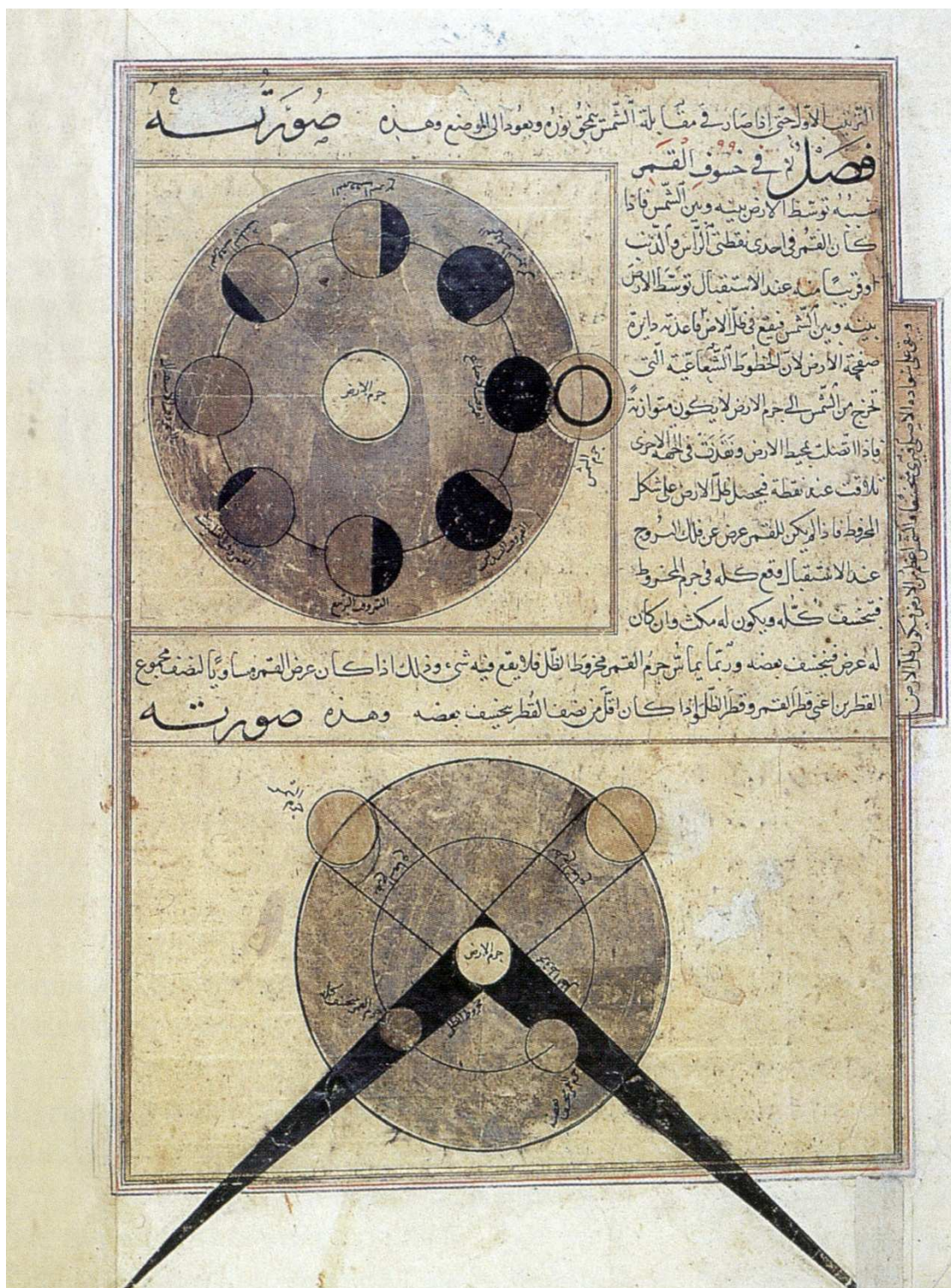


Fig. 90 – Calcolo delle eclissi solari e lunari, dall'opera *I miracoli della creazione* di al-Qazwini, XIV secolo.

MARKUS HATTSTEIN, PETER DELIUS, *Islam. Arte e Architettura*, Köln, Könemann 2000, p. 56.

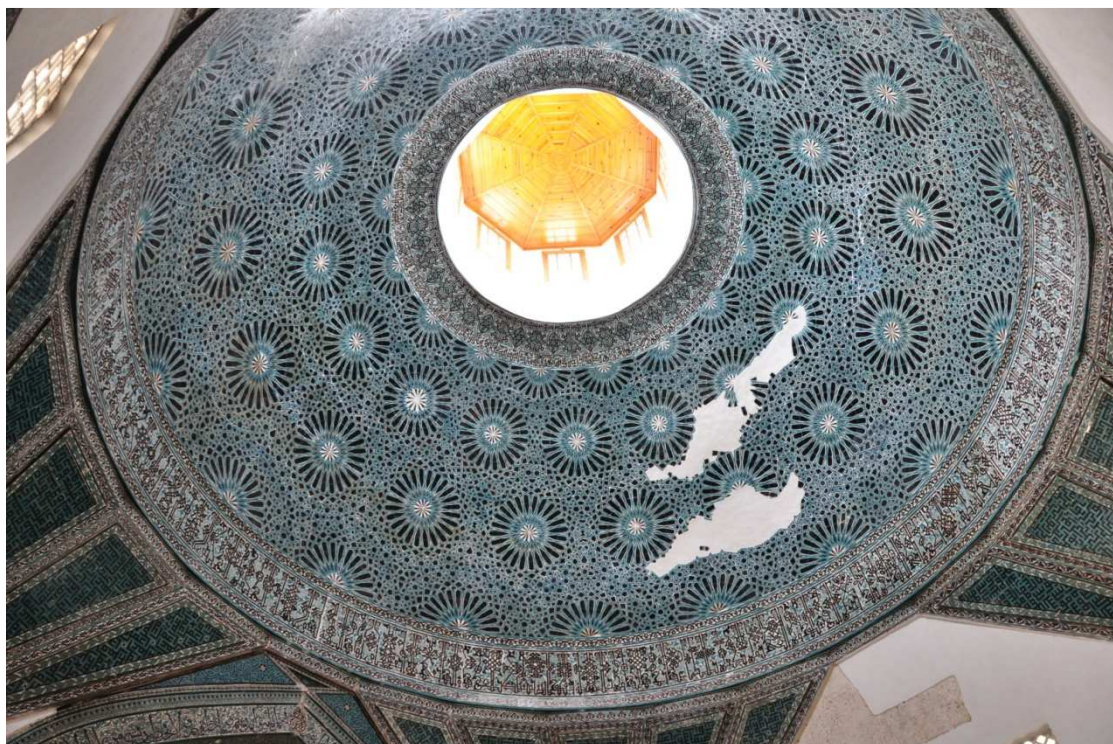


Fig. 91 – Interno Cupola del Karatay Madrassah, Konya, Turchia, metà XIII secolo.

http://dome.mit.edu/bitstream/handle/1721.3/65652/157209_sv.jpg?sequence=2
(consultato 08-12-2011).

Molto spesso i disegni presentano bordi intrecciati¹⁰, caratteristica che probabilmente trae origine da un'altra eredità culturale delle popolazioni musulmane: l'arte di tessere tende e tappeti. Arabi, Persiani, Turchi dell'Asia centrale, Mongoli e Berberi, in origine popolazioni nomadi, vissero per molto tempo nelle tende ma, una volta divenute stanziali, conservarono questa loro tradizione, portandola con sé lungo i percorsi delle rotte commerciali.

La presenza di forme stellate e poligoni ricorrenti ha permesso la diffusione di una tecnica originale, detta *Zellij*¹¹ e sviluppatasi in Marocco, che si fonda sull'utilizzo di

¹⁰ OWEN JONES, *The Grammar of Ornament*, London, Bernard Quaritch 1868, p. 60.

¹¹ Piccolo pezzo di ceramica che differisce dal modulo base del mosaico occidentale, chiamato "tessera", in quanto comprende una famiglia di oltre 300 forme diverse, ognuna con un proprio nome. Questi elementi si accostano quasi perfettamente l'un l'altro per creare complessi disegni geometrici.

particolari sagome codificate per la composizione dei *pattern*. Una figura particolarmente frequente e riconoscibile in tutte le decorazioni di matrice islamica è il *Khatem Sulemani*, una stella ottagonale che simboleggia il “Sigillo del Profeta” o Maometto stesso. Questo elemento, molto ricorrente, lo si riscontra in molteplici variazioni¹², dove il disegno è ottenuto dalla suddivisione di un cerchio in otto archi regolari, che forniscono i vertici per la costruzione di due quadrati. Si può conseguire un analogo risultato sovrapponendo due quadrati, ruotati tra loro di 45° tenendo fisso il centro; un procedimento utilizzato forse solo all’inizio, poiché risulta assai meno preciso del precedente¹³.

Per realizzare un modello parametrico del *Khatem*, e delle altre rosette che ricorrono nell’arte islamica, si parte da un numero limitato di parametri che poi dovranno interagire tra loro per produrre il risultato finale. Le variabili da introdurre sono quattro: tre consistono in raggi di circonferenze mentre l’ultima è un numero intero che stabilisce quante saranno le punte della forma stellata. Si conferma così quanto affermato precedentemente sulla ricorrenza delle circonferenze nei *pattern* islamici.

Il modello si compone di tre parti tra loro correlate: una stella centrale, una corona, composta da figure quadrate ruotate tra loro di frazioni dell’angolo giro, e gli elementi di raccordo tra le due forme (fig. 92, 93, 94 e 95).

¹² ANNA MAROTTA, ALESSANDRO DE SANTIS, *Oriente e Occidente nella decorazione come linguaggio complesso. Dalle Zelliges nek Khatem al Drakslingor celtico*, in: AGOSTINO DE ROSA (a cura di) *Orienti e Occidenti della Rappresentazione*, Padova, Il Poligrafico 2005, pp. 139-150.

¹³ SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, pp. 14-18.

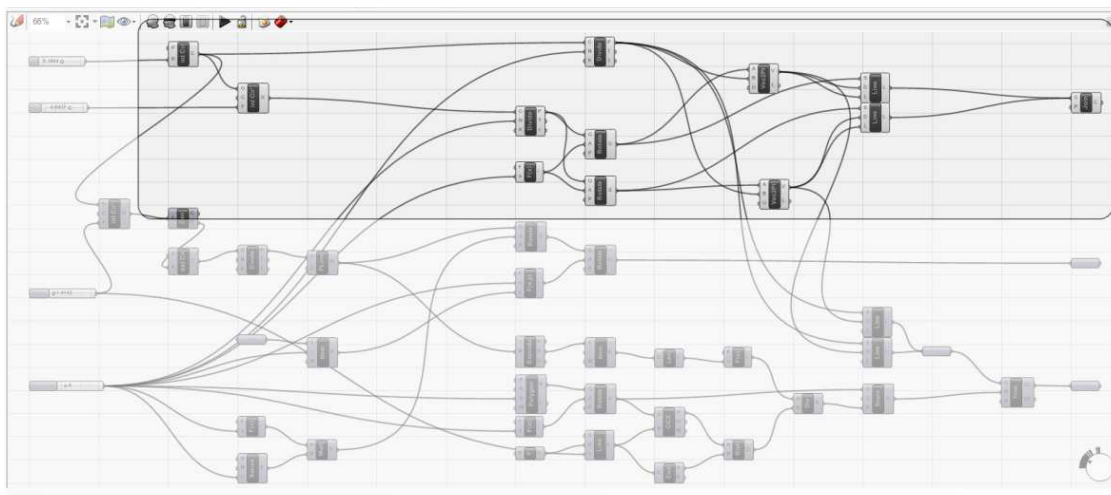


Fig. 92 - Sezione del modello parametrico relativo alla stella centrale.

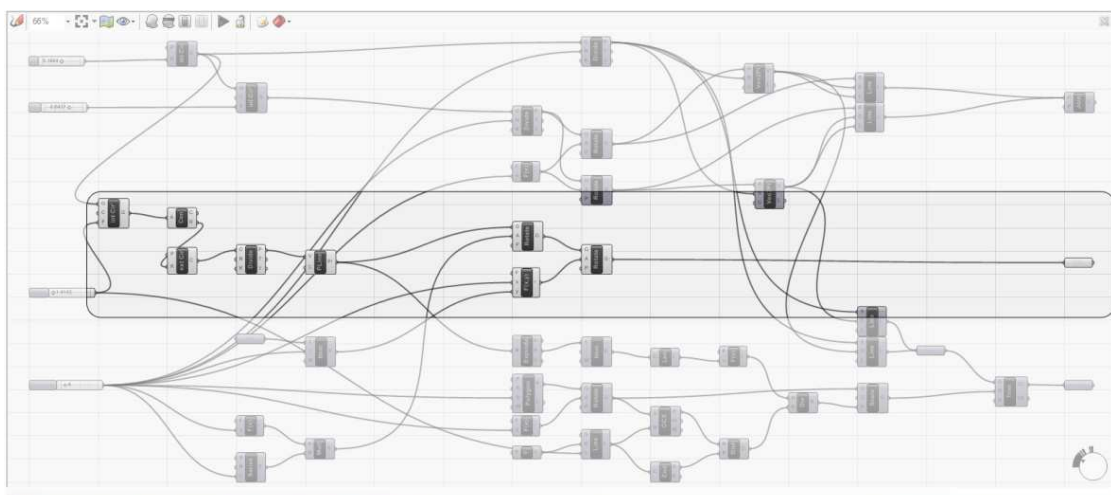


Fig. 93 - Sezione del modello parametrico relativo alla corona.

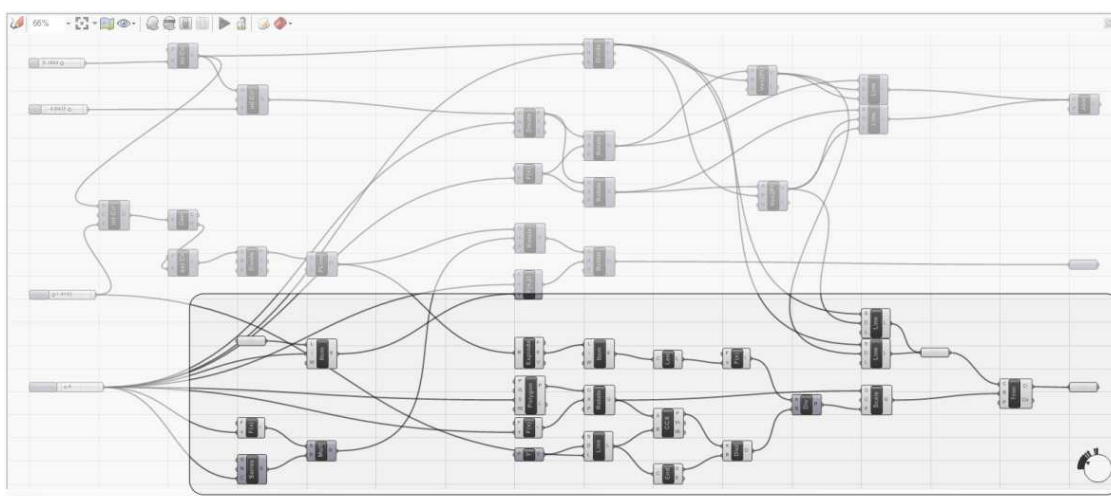


Fig 94 - Sezione del modello parametrico relativo agli elementi di raccordo tra la stella centrale e la corona.

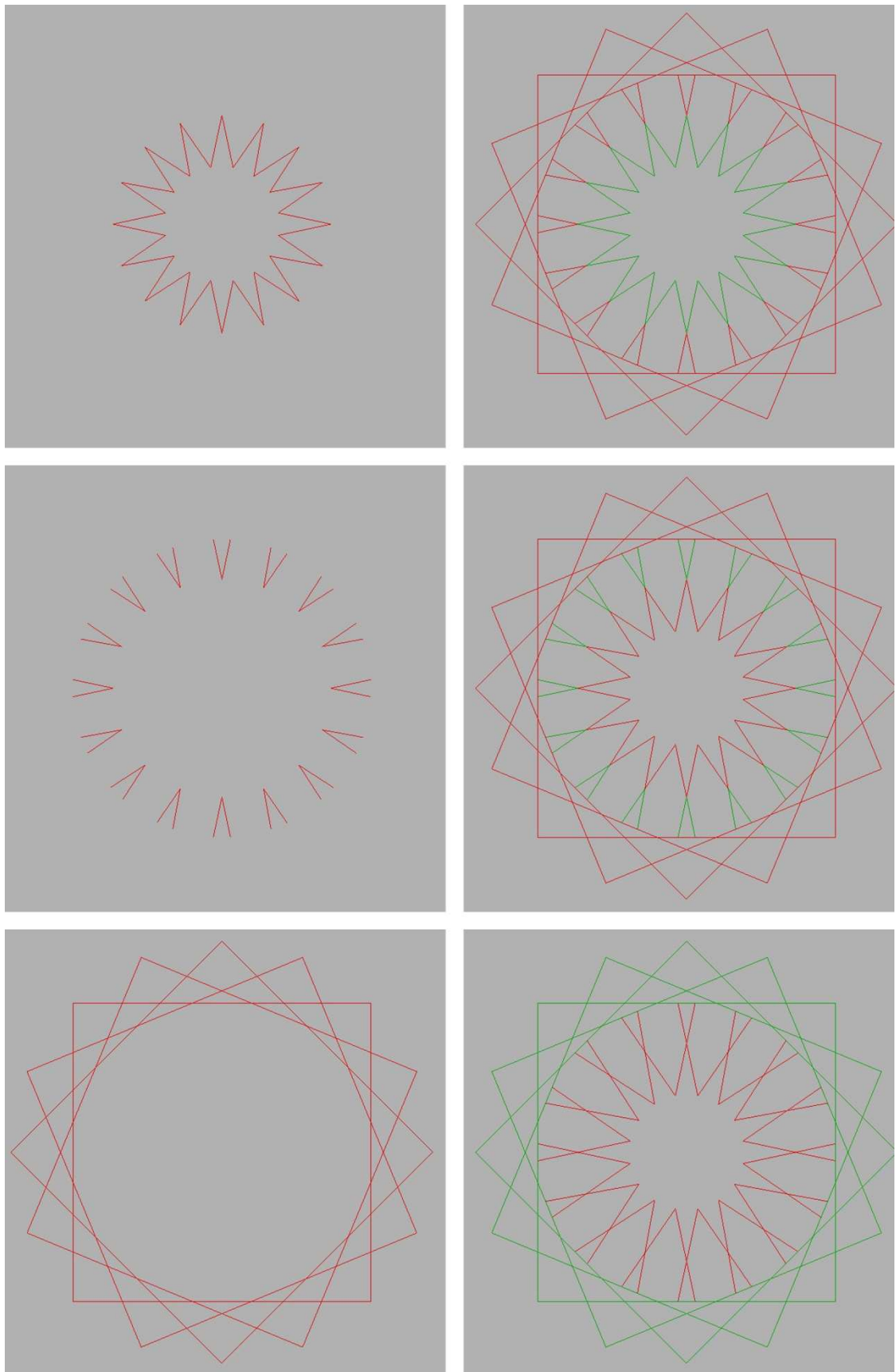


Fig. 95 – Modello parametrico scomposto in stella centrale, corona ed elementi di raccordo.

Per definire la stella centrale occorre fissare il numero dei suoi raggi e due circonferenze; stabilito il raggio della prima, la seconda, interna e concentrica, potrà essere derivata stabilendo un rapporto di proporzione con la precedente. Le due circonferenze devono poi essere divise in archi, secondo un multiplo di quattro, per ricavare la stella circoscritta alla minore e iscritta nella maggiore. Congiungendo ordinatamente tutti i punti individuati sulla circonferenza minore, dopo averli fatti ruotare di una frazione dell'angolo giro, in modo che si dispongano in asse con la mezzeria degli archi della circonferenza maggiore, si otterrà una stella a n -punte con n multiplo di quattro (fig. 96).

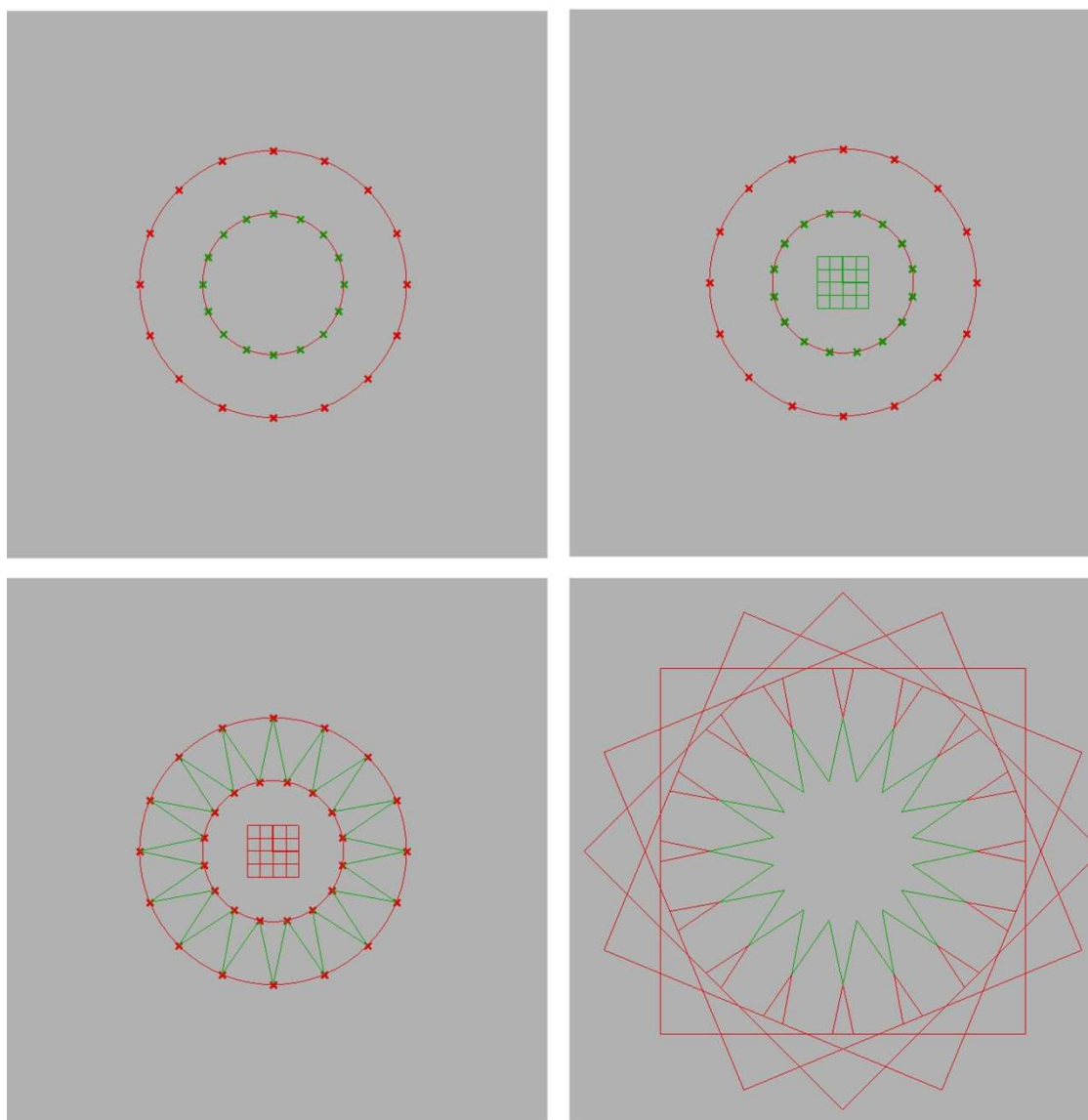


Fig. 96 – Fasi successive nel disegno della stella centrale.

Variando il raggio della circonferenza maggiore la dimensione della stella verrà scalata senza cambiarne le proporzioni. Intervenendo sul rapporto con la circonferenza minore si otterranno punte con angoli più o meno acuti, compresi tra i due estremi in cui la stella non esiste più, in quanto priva di area, e quello per il quale coincide con un poligono di $2n$ lati iscritto nella circonferenza maggiore (fig. 97).

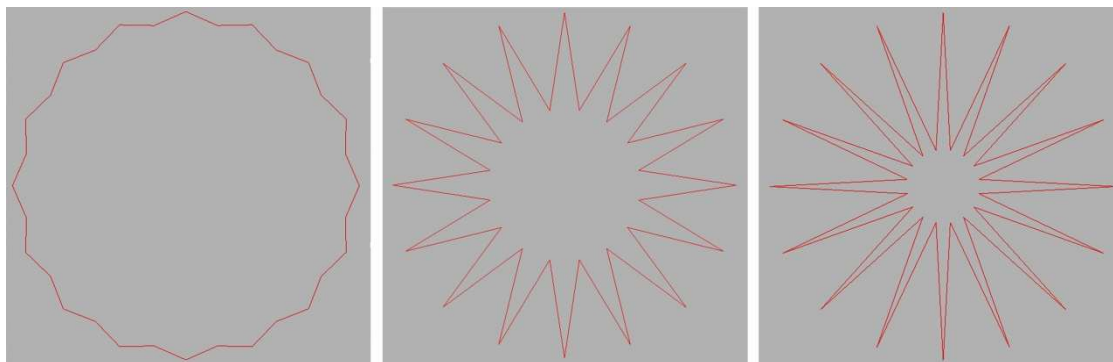


Fig. 97 – Deformazione della stella centrale al crescere del valore del rapporto.

Per tracciare la corona esterna occorre definire un'ulteriore circonferenza e suddividerla in quattro archi; collegando i punti così ottenuti sarà possibile ottenere il quadrato iscritto che, ruotato di una frazione n (numero intero) dell'angolo giro attorno al suo centro, genererà la corona (figg. 98 e 99).

A questo punto occorre indicare alcune limitazioni nei rapporti tra i raggi dei vari cerchi: il secondo cerchio dovrà avere un rapporto di scala minore di uno rispetto al primo, dovendo essere contenuto in questo; il terzo non necessita di un limite massimo bensì di un limite minimo in base al quale il suo rapporto di scala rispetto al primo cerchio non potrà mai essere inferiore a $\sqrt{2}$, in quanto i quadrati iscritti nella terza circonferenza non dovranno mai intersecare la stella centrale.

Visivamente è possibile verificare che, se il valore immesso è inferiore a 1,4142 (valore approssimato di $\sqrt{2}$), la corona e la stella si intersecano.

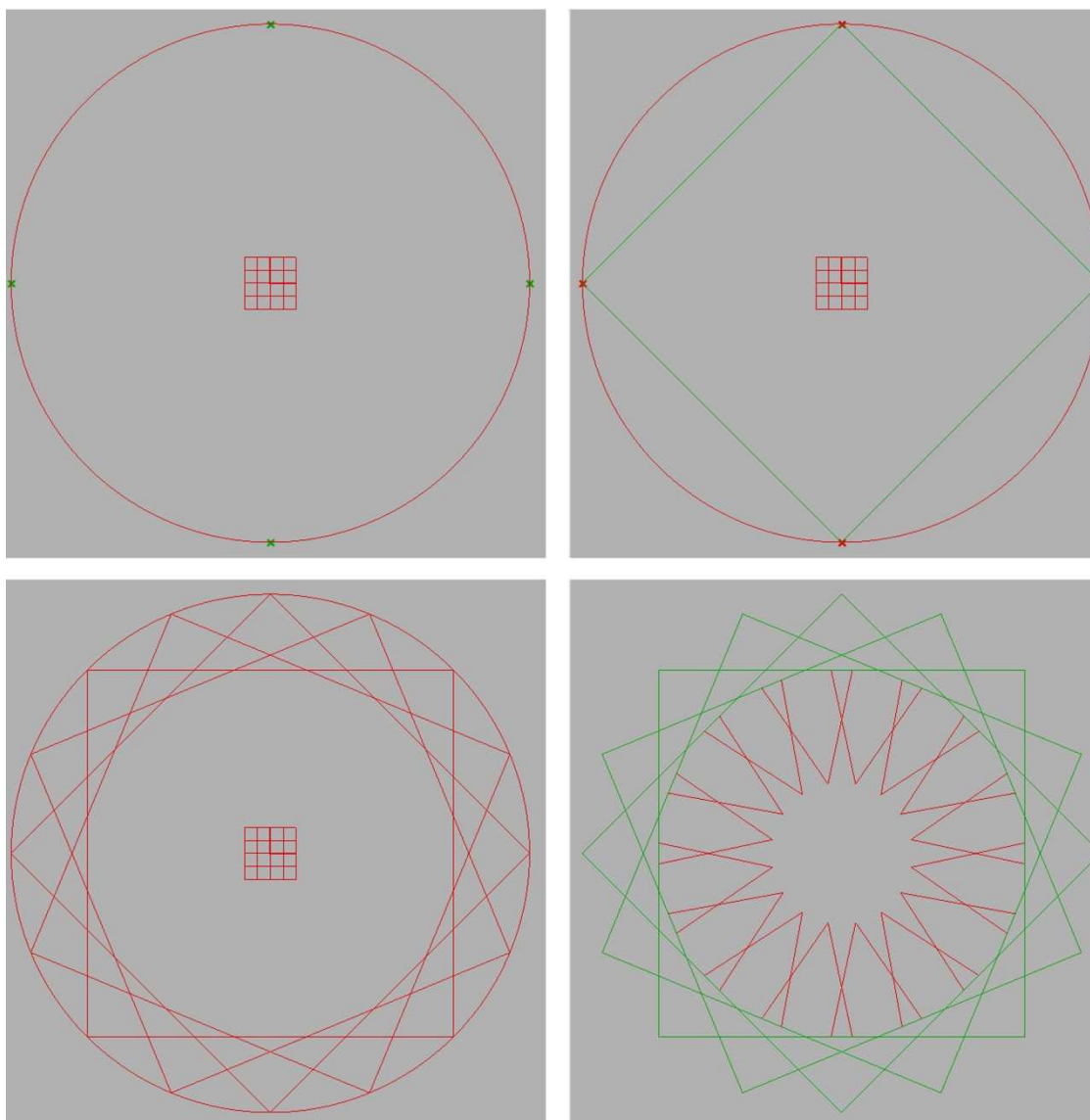


Fig. 98 – Fasi successive nel disegno della corona.

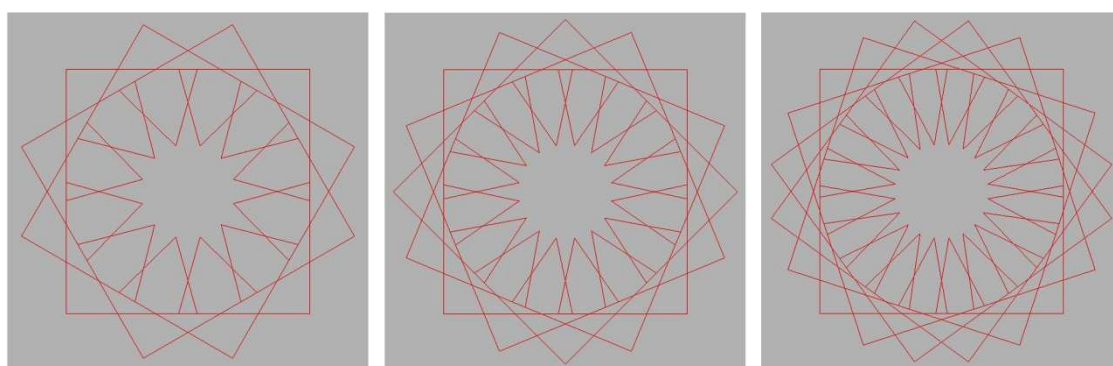


Fig. 99 – Variazione della corona all'aumentare del numero di quadrati iscritti nella circonferenza.

L'ultimo elemento che completa il modello parametrico è rappresentato dalle linee di raccordo tra la stella e la corona, ottenute prolungando i lati della stella fino ad intersecare la prima linea della corona circostante (fig. 100).

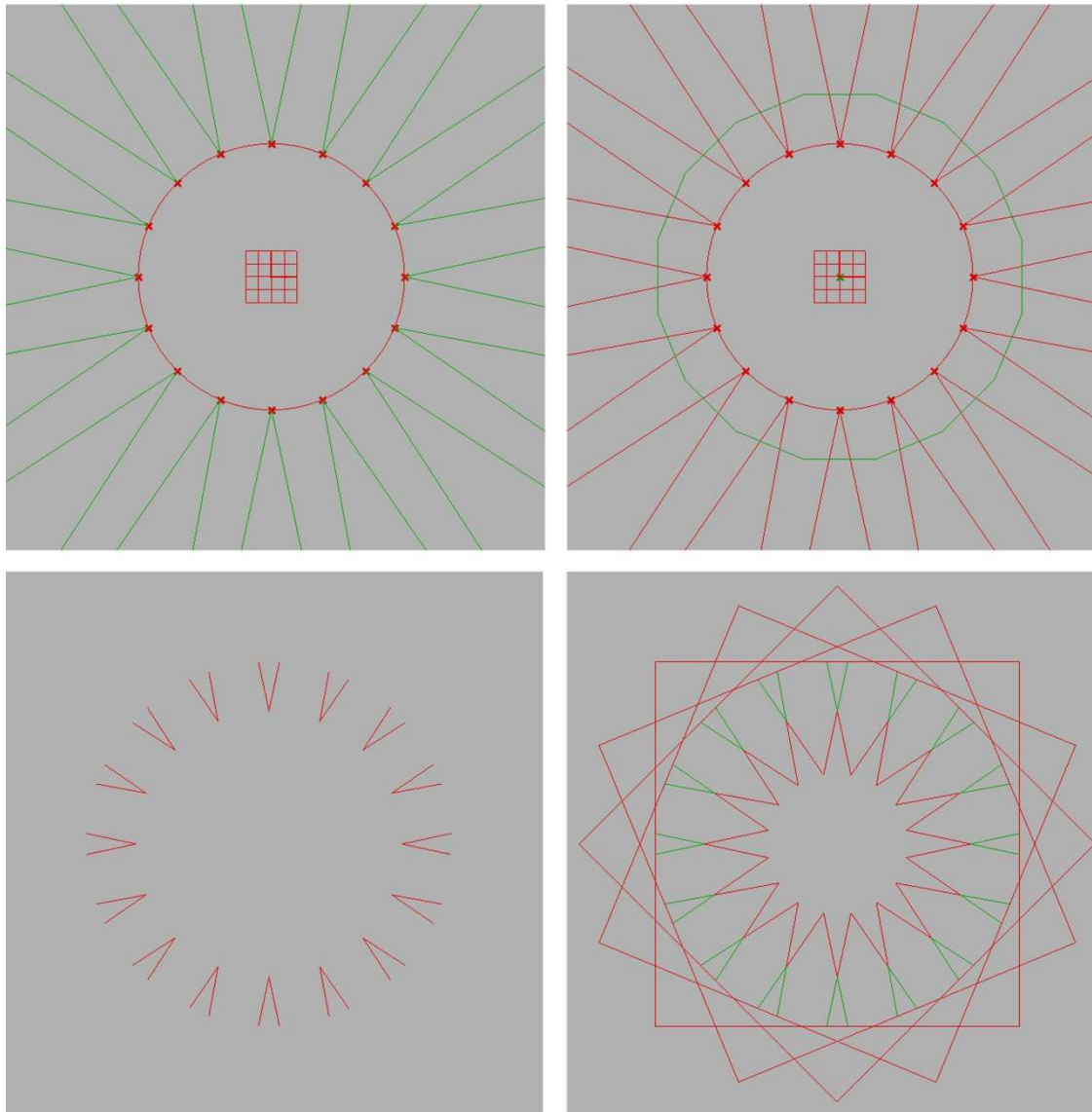


Fig. 100 – Fasi successive nel disegno degli elementi di raccordo tra la stella e la corona.

Provando a variare i dati immessi si potranno osservare alcune situazioni notevoli (fig. 101). Considerando l'ipotesi più semplice, quella del *Khatem* (stella a 8 punte), si noterà come risulti particolarmente gradevole alla vista il caso in cui il rapporto tra primo e secondo cerchio sia 0,54120 oppure 0,76537; questa seconda eventualità è la

più interessante in quanto comporta la formazione di un altro *Khatem* all'interno del precedente (fig. 102) che riduce l'arbitrarietà della composizione: il risultato finale rispecchia quel desiderio di armonia proprio della cultura islamica¹⁴.

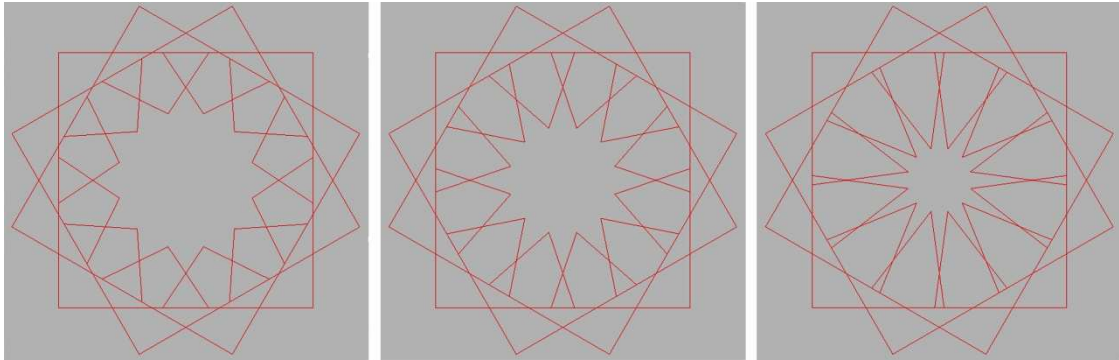


Fig. 101 – Variazione dell'aspetto della stella centrale in funzione del rapporto tra i raggi dei due cerchi che la definiscono.

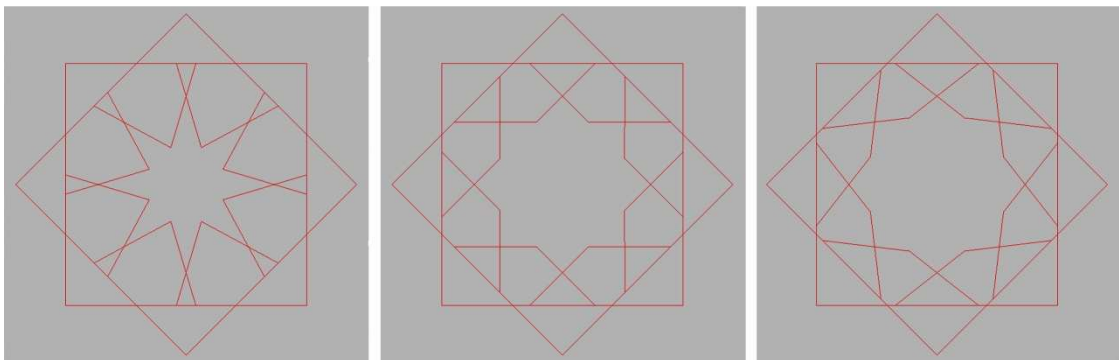


Fig. 102 – Nel caso di una corona formata da soli due quadrati, modificando il rapporto tra i raggi dei due cerchi che definiscono la stella centrale, è possibile arrivare ad inscrivere un secondo *Khatem* nel primo, ottenendo un risultato estetico di maggiore interesse.

Nel caso di tre quadrati iscritti in una circonferenza (stella a 12 punte) (fig. 103) aumenteranno le possibilità di parallelismo tra i lati della stella centrale, in particolare il rapporto vale approssimativamente 0,51764; 0,70711; 0,81650 o ancora 0,89658. Questo continua ad essere vero se il numero di punte della stella

¹⁴ SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, p. 17.

aumenta ulteriormente: si avranno pertanto 6 situazioni di parallelismo nel caso di una stella a 16 punte, 8 nel caso di una a 20 punte e così via.

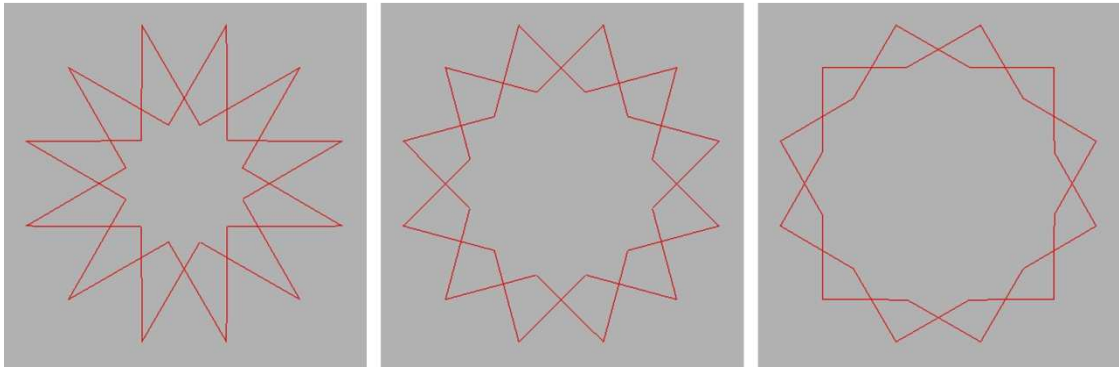


Fig. 103 – Esempi di parallelismo tra i lati di una stella a 12 punte.

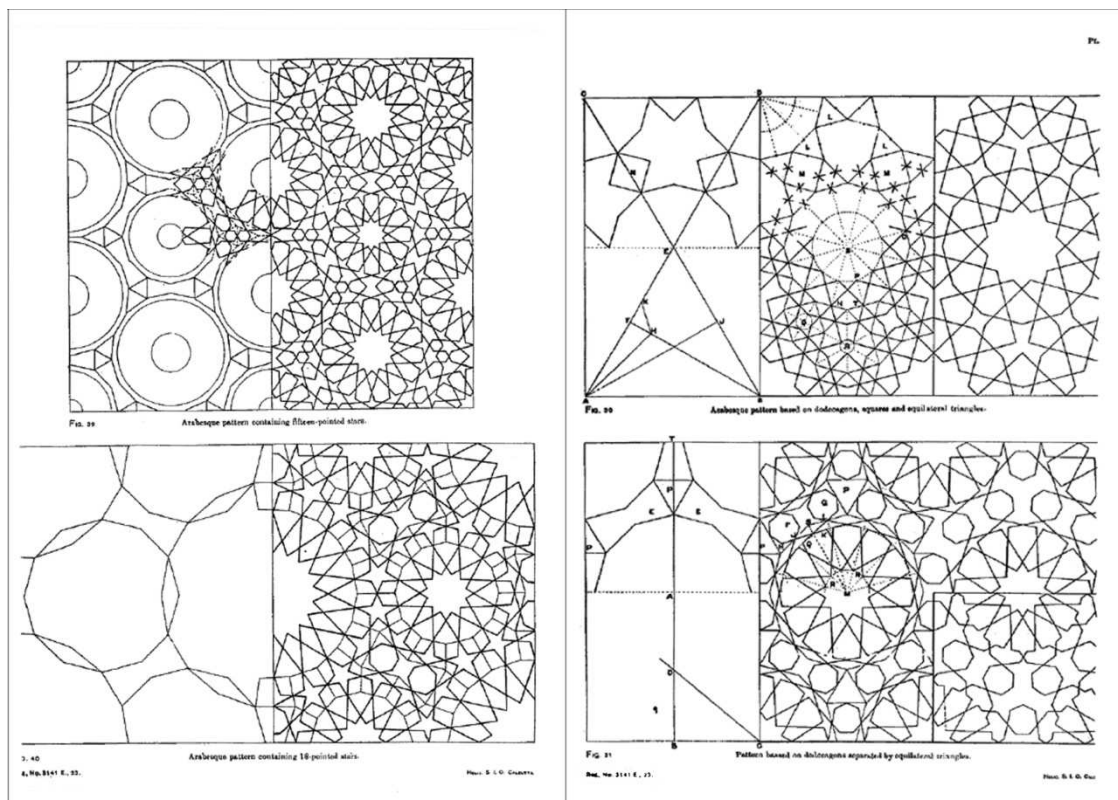


Fig. 104 – Esempi del metodo dei “poligoni a contatto” di Ernest Hanbury Hankin.

ERNEST HANBURY HANKIN, *The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art*, «Memoirs of the Archaeological Society of India», vol. 15, 1925.

I *pattern* islamici stellati sono sempre estremamente elaborati e spesso presentano bordi intrecciati in maniera complessa¹⁵. Un modello parametrico comune a più classi può essere realizzato automatizzando la tecnica dei “poligoni a contatto”¹⁶ (*polygons-in-contact*), messa a punto da Ernest Hanbury Hankin all’inizio del secolo scorso¹⁷, che permette di costruire *pattern* stellati a partire da una tassellazione del piano e da un ridotto numero di parametri¹⁸.

Hankin suggerisce di ricoprire la superficie da decorare con una tassellazione formata da poligoni contigui per poi disegnare, partendo dal centro del lato di ogni singolo poligono, una coppia di linee che si incrociano ad X e proseguono finché non incontrano altre linee con la medesima origine. Anche A. J. Lee¹⁹ e Keith Critchlow²⁰

¹⁵ ACHILLE-CONSTANT PRISSE D’AVENNES, *Arabic Art*, Chicago, L’Aventurine 2008.

¹⁶ «*In making such patterns, it is first necessary to cover the surface to be decorated with a network consisting of polygons in contact. Then through the centre of each side of each polygon two lines are drawn. These lines cross each other like a letter X and are continued till they meet other lines of similar origin. This completes the pattern*».

«Nel realizzare simili *pattern*, è necessario prima di tutto ricoprire la superficie che deve essere decorata con un reticolo formato da poligoni contigui. Poi, partendo dal centro di ciascun lato di ogni singolo poligono, si disegnano due linee. Queste linee incrociano le altre formando una X e continuano finché non incontrano altre linee che hanno la medesima origine. In tal modo si completa il *pattern*».

ERNEST HANBURY HANKIN, *The Drawing of Geometric Patterns in Saracenic Art*, «Memoirs of the Archaeological Society of India», vol. 15, 1925, p. 4.

¹⁷ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, pp. 50-57.

¹⁸ ERNEST HANBURY HANKIN, *Some difficult Saracenic designs III*, «The Mathematical Gazette», n. 241, vol. 20, 1936, pp. 318-319.

ERNEST HANBURY HANKIN, *Some difficult Saracenic designs II*, «The Mathematical Gazette», n. 229, vol. 18, 1934, pp. 165-168.

ERNEST HANBURY HANKIN, *Examples of Methods of Drawing Geometrical Arabesque Patterns*, «The Mathematical Gazette», n. 176, vol. 12, 1925, pp. 370-373.

¹⁹ A. J. LEE, *Islamic star patterns*, «Muqarnas», n. 4, 1987, pp. 182-197.

²⁰ KEITH CRITCHLOW, *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach*, London, Thames and Hudson 1976.

nei loro studi hanno fatto riferimento alla tecnica dei “poligoni a contatto” di Hankin (fig. 104).

Per riprodurre questo processo attraverso la modellazione parametrica occorre innanzitutto disegnare una tassellazione composta da poligoni regolari, quali possono essere le tre tassellature regolari o le otto semiregolari²¹.

Selezionati i poligoni è necessario imporre al software di considerare un lato alla volta. Dopo aver segnato il punto medio del primo lato si crea per ogni figura un piano cartesiano con un asse allineato al lato in esame. A questo punto, dalla sua mezzeria è possibile far partire una linea passante per il centro del poligono che, sulla base di due variabili, potrà essere ruotata e traslata, rispetto al proprio sistema di riferimento, lungo il lato a cui appartiene; detta linea verrà in seguito specchiata rispetto al piano verticale passante per il centro della figura e per uno degli estremi del lato stesso. La linea iniziale dovrà essere troncata dove interseca la sua specchiata e il segmento ottenuto permetterà di disegnare, attraverso riflessioni e rotazioni, le forme stellate iscritte in ogni figura, che rappresentano il “motivo” di ciascun poligono (fig. 108).

Come verificato in precedenza, motivi particolarmente apprezzabili sotto il profilo estetico sono quelli in cui le linee risultano tra loro parallele; questi sono i più utilizzati nell’arte islamica in quanto, oltre ad assecondare una finalità estetica, riducono al minimo la somma delle lunghezze di tutti i segmenti all’interno del motivo.

Si tratta di un modello che consente di disegnare *pattern* islamici aperiodici, a partire dai poligoni regolari contenuti nella prima tassellazione di Penrose (*P1*) o in quella di Socolar. Con esso appare evidente come la decorazione si componga di una tassellazione base su cui viene applicato un disegno²² (figg. 105, 106 e 107).

²¹ Paragrafo 1.1.1.

²² CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 49.

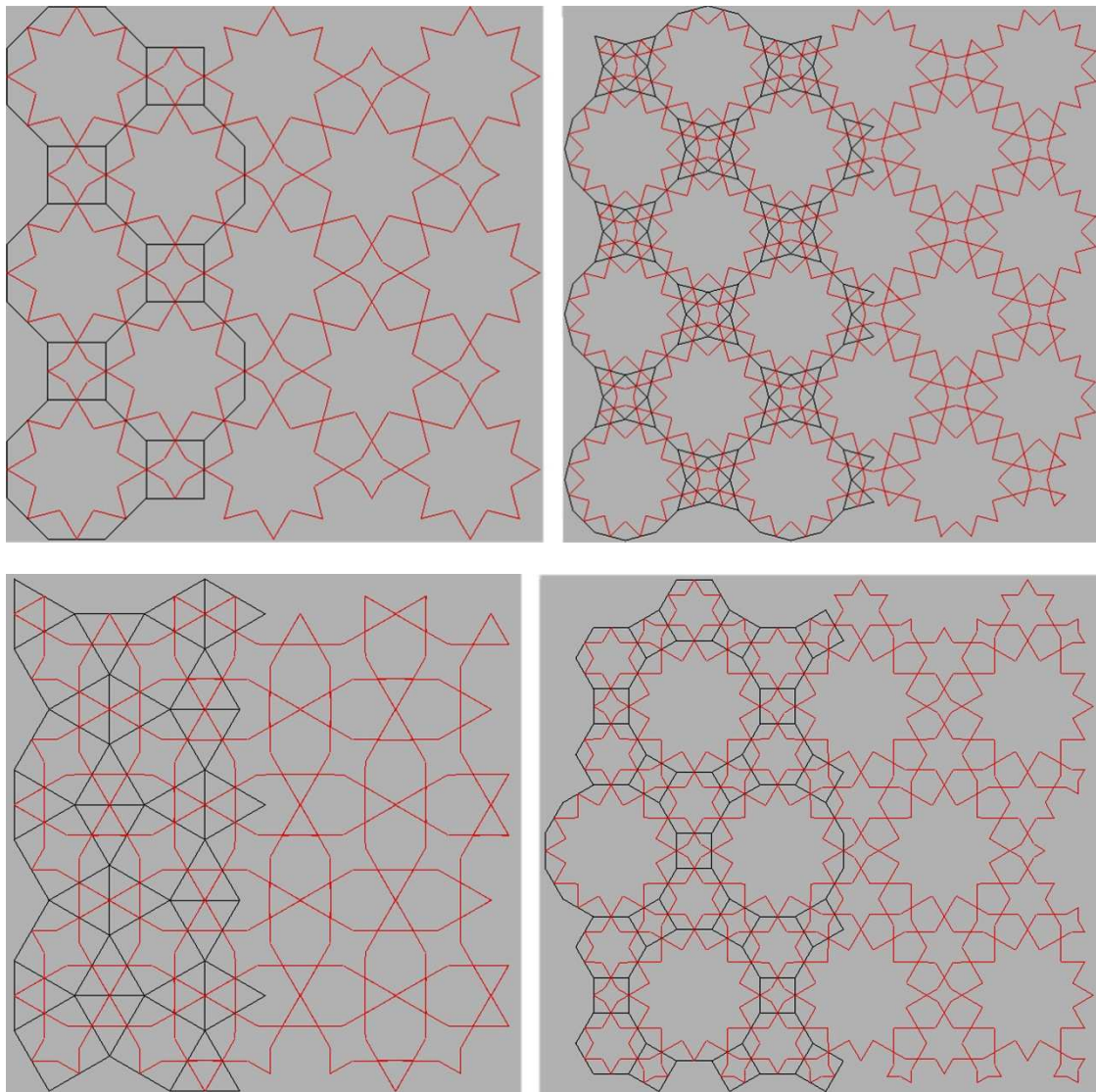


Fig. 105 – Applicazione del metodo dei “poligoni a contatto” di Ernest Hanbury Hankin alle tassellazioni regolari e semiregolari per ottenere *pattern* stellati islamici.

BRANKO GRÜNBAUM, GEOFFREY C. SHEPHARD, *Spherical tilings with transitivity properties*, in: CHANDLER DAVIS, BRANKO GRÜNBAUM, F. A. SHERK, *The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift*, New York, Springer-Verlag 1982, pp. 65-94.

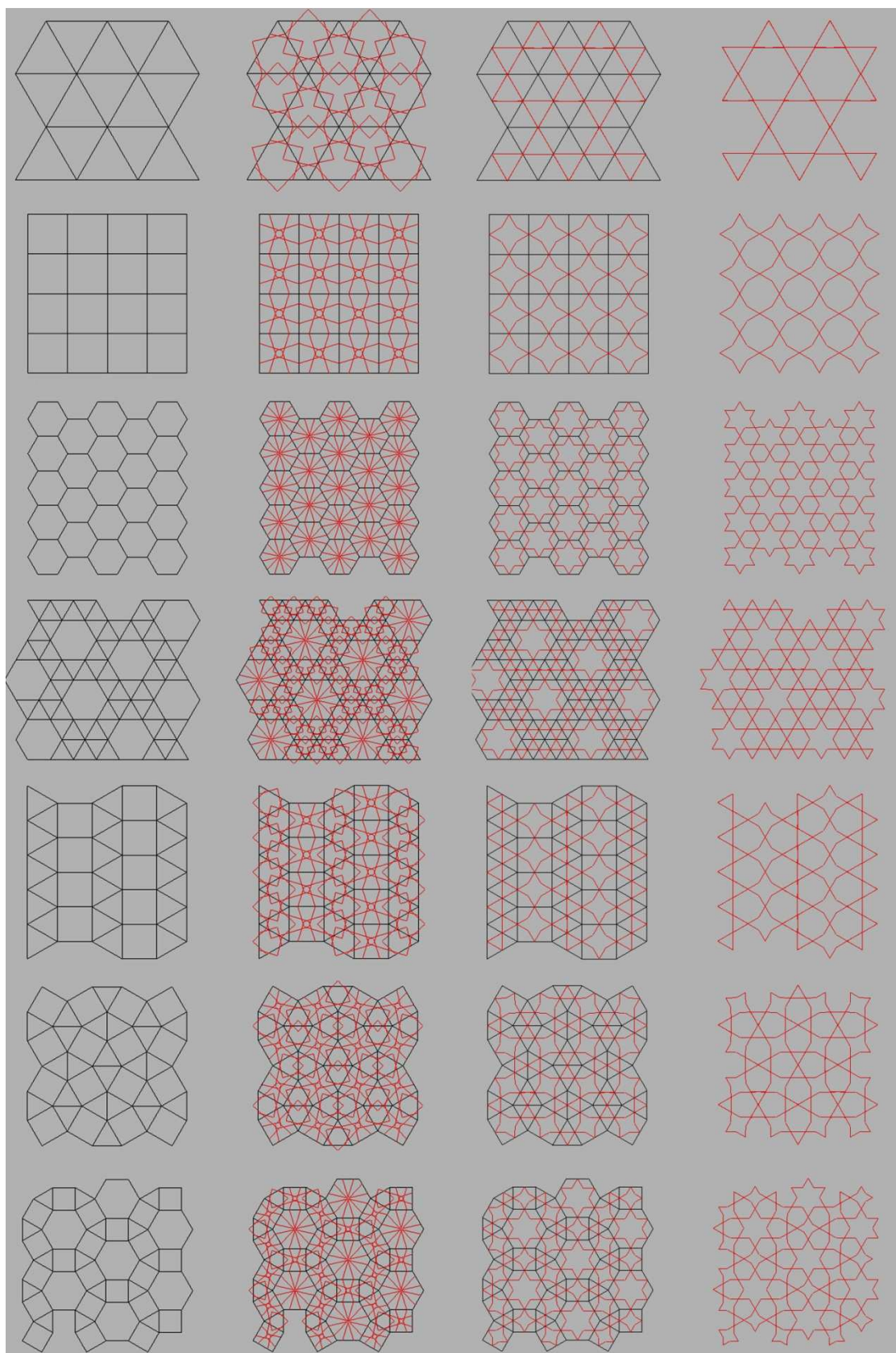


Fig. 106 – Applicazione del metodo dei “poligoni a contatto” di Ernest Hanbury Hankin alle tassellazioni regolari e semiregolari.

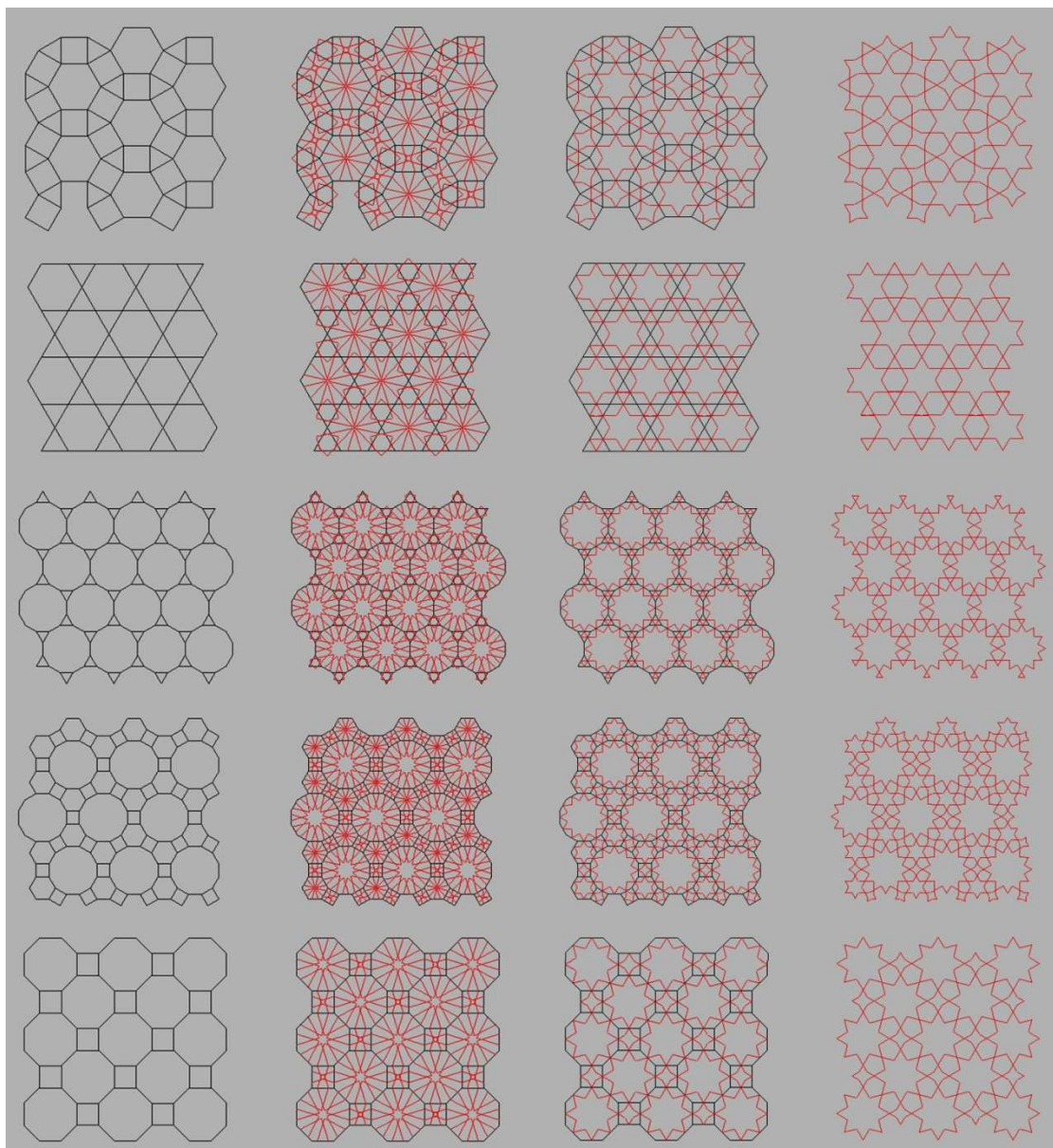


Fig. 107 – Applicazione del metodo dei “poligoni a contatto” di Ernest Hanbury Hankin alle tassellazioni regolari e semiregolari.