

ANALISI DELLA RISPOSTA DINAMICA DI POLIURETANI TERMOPLASTICI

V. Fontanari^a, M. Avalle^b, M. Peroni^b, F. Dalla Torre^a, A. Rao^a, B.D. Monelli^a

^a *Università degli Studi di Trento, Dipartimento di Ingegneria dei Materiali e delle Tecnologie industriali*

Via Mesiano, 77 – 38100 Trento (Tn), Italia, e-mail: vigilio.fontanari@ing.unitn.it, bernardo.monelli@ing.unitn.it

^b *Politecnico di Torino – Sede di Vercelli, Dipartimento di Meccanica*

Piazza Sant'Eusebio, 5 – 13100 Vercelli (Vc), Italia, e-mail: massimiliano.avalle@polito.it

Sommario

Nell'ambito della progettazione di dispositivi shock-absorber basati sull'impiego di materiali polimerici, è di fondamentale importanza rappresentare accuratamente la dipendenza del comportamento del materiale dallo strain-rate. Nonostante il grande numero di modelli costitutivi sviluppati, non sono ancora stati stabiliti in modo definitivo i campi di validità e le criticità presenti nei vari approcci. Il presente lavoro mira ad affrontare tali tematiche, analizzando il comportamento di una delle più diffuse famiglie di materiali polimerici nell'ambito shock-absorbing: il poliuretano termoplastico. Una volta individuati gli approcci più promettenti, l'indagine è stata condotta per via numerico-sperimentale conducendo prove sperimentali di trazione e compressione a differenti strain-rate e confrontando poi, per i modelli costitutivi selezionati, i riscontri sperimentali con le predizioni numeriche fornite da opportuni modelli numerici in grado di simulare i test sperimentali.

Abstract

The proper modeling of the strain-rate dependence of rubber-like polymers is of paramount importance in energy-absorbing systems design. There are several possibilities for modeling the material dynamic response of such materials, but the field of applicability, drawbacks and criticalities of each developed approach are not definitely assessed yet. The present paper discusses these topics for Thermoplastic PolyUrethane (TPU), being TPU one of the most used shock-absorber materials. The qualification of the most promising approaches is numerically established by performing Finite Element Analysis (FEA) of tensile and compressive tests at different strain-rates. For the selected constitutive models, the corresponding constitutive parameters are experimentally determined and then implemented in FE models. The assessment of each material model is then carried out by comparing the predicted response with the experimental one.

Parole chiave: Impatto, Modelli costitutivi, Iper-elasticità, Viscoelasticità, TPU, FEA.

1. INTRODUZIONE

Nell'ambito della progettazione di sistemi di assorbimento di energia l'impiego di materiali polimerici oggi costituisce una pratica di uso comune. Come è noto tale classe di materiali presenta peculiari caratteristiche costitutive, soprattutto per ciò che concerne la dipendenza della risposta del materiale dallo strain-rate [1]. Date le finalità, la progettazione di tali dispositivi deve essere condotta dopo aver determinato accuratamente l'energia assorbita da parte dell'assorbitore durante l'impatto. E' indubbio che tale quantità è strettamente correlata al comportamento del materiale. La conoscenza delle risposte a trazione e compressione del materiale e come queste cambiano in funzione dello strain-rate risulta

pertanto di fondamentale importanza: durante un transitorio di impatto, infatti, il materiale può sperimentare sia stati tensionali di trazione che di compressione e deformarsi con un tasso di deformazione variabile nel tempo. Attualmente i test di impatto tensile e peso cadente costituiscono le prove più comuni per stimare le capacità di assorbimento offerte dal materiale in condizioni di trazione e compressione rispettivamente. Tuttavia, l'approccio sperimentale spesso risulta essere oneroso sia in termini di costo che di tempo, mentre il ricorso a modelli predittivi analitico-numeriche rappresenta senza dubbio una valida alternativa per la stima della suddetta grandezza.

Nei poliuretani termoplastici aventi caratteristiche elastomeriche la velocità di deformazione produce degli effetti significativi in tutte e tre le fasi che contraddistinguono il processo di deformazione subito dal materiale (Fig. 1) e dipendono dal tipo di sollecitazione applicata (trazione, compressione) [2-7]. Come esemplificato in Fig. 1, gli effetti più eclatanti interessano il primo tratto della risposta, che vede un incremento della sua pendenza, ed il caratteristico plateau il quale invece è oggetto di contrazioni. Tali evidenze sono il risultato delle difficoltà, più o meno accentuate dal tasso di deformazione, incontrate dalle catene polimeriche nel predisporre spazialmente a sostenere il carico [1].

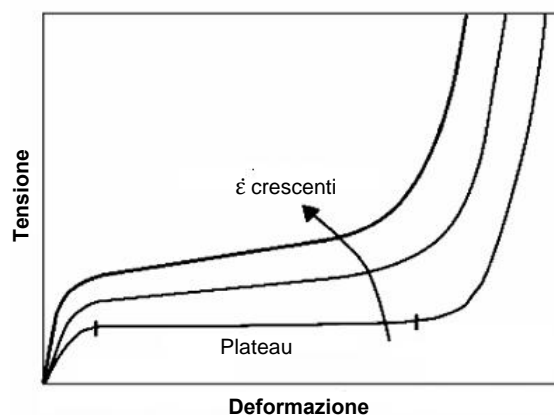


Figura 1: effetti dello strain-rate sulla caratteristica $\sigma - \varepsilon$ nei materiali polimerici aventi un comportamento elastomerico.

Diversi sono i modelli costitutivi reperibili in letteratura [3,8-17] in grado di contemplare gli effetti dello strain-rate sulla risposta di tale classe di materiali. Tuttavia, nonostante il numero significativo di modelli proposti, il campo di applicazione, i limiti e le criticità di ciascun approccio non sono stati ancora del tutto chiariti. Il presente lavoro, pertanto, mira ad affrontare tali problematiche mettendo a confronto tra loro le capacità predittive degli approcci costitutivi ritenuti più promettenti per uno dei più diffusi poliuretani termoplastici aventi caratteristiche elastomeriche tra quelli impiegati in dispositivi shock-absorber. L'indagine è stata condotta per via numerico-sperimentale conducendo prove di trazione e compressione a differenti strain-rate e confrontandone poi i risultati con le predizioni numeriche fornite da modelli computazionali opportunamente sviluppati per simulare i test sperimentali eseguiti per caratterizzare il materiale.

2. MODELLI COSTITUTIVI IPER-VISCOELASTICI NON LINEARI

Dal punto di vista della formulazione i modelli costitutivi attualmente sviluppati possono essere classificati in tre macro-gruppi: empirici [8,9], fenomenologici [10-13] e micro-meccanici [14-17]. Sebbene i modelli appartenenti ai primi due gruppi presentino l'indubbio vantaggio di disporre immediatamente di un chiaro quadro della risposta del materiale e delle sue capacità di assorbire energia, soltanto gli approcci di tipo micro-meccanico consentono di stabilire i meccanismi di risposta del materiale innescati dalle condizioni di carico. Da questo punto di vista, i modelli micro-meccanici offrono la possibilità, almeno in linea teorica, di intervenire direttamente sul materiale per ottimizzarne la sua risposta. E' indubbio comunque che il secondo ed il terzo dei tre gruppi sopra menzionati offrono il maggior numero di informazioni circa la risposta del materiale e la comprensione dei fenomeni innescati da condizioni di carico di tipo dinamico e per tale ragione

l'attenzione è stata concentrata su tali categorie: gli approcci di tipo meramente empirico, infatti, non possono essere oggetto di qualificazione, essendo calati direttamente sul materiale in esame.

Sebbene l'impiego di TPU elastomerico stia conoscendo solo di recente un incremento sostanziale del suo impiego in svariati campi dell'ingegneria, le sue proprietà costitutive ed il ruolo giocato dallo strain-rate nella definizione del legame costitutivo sono già ampiamente conosciuti [2-7]. Come già sottolineato nel precedente paragrafo, la caratteristica principale che contraddistingue tale categoria di materiali è rappresentata da un comportamento in cui è possibile riconoscere una componente iper-elastica ed una viscoelastica entrambe di natura non lineare ed influenzate dallo strain-rate. Se si vuole rappresentare correttamente il comportamento del materiale è opportuno, pertanto, considerare solo i modelli nella cui formulazione sono contemplate queste due caratteristiche. Di seguito sono descritti due tra i più promettenti modelli disponibili in letteratura che meglio interpretano le sopracitate caratteristiche costitutive: il modello iper-viscoelastico di Yang e quello di Bergstrom e Boyce [10,14]. Le indagini non sono state estese agli altri approcci citati in bibliografia, essendo questi derivati dai due modelli costitutivi appena menzionati.

2.1. Modello iper-viscoelastico non lineare di Yang

Le ipotesi che sono alla base del presente modello costitutivo consistono nell'assumere che il materiale sia omogeneo, isotropo ed incomprimibile e che il suo comportamento macroscopico sia il risultato di una combinazione di una risposta quasi-statica iper-elastica e di una viscoelastica non lineare agenti in parallelo. Il modello, pertanto, è basato su di un approccio di tipo fenomenologico.

Per quanto concerne la prima delle due risposte (σ^{hyp}), detti rispettivamente \mathbf{F} e $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ il gradiente della deformazione ed il tensore di deformazione sinistro di Cauchy-Green ed $I_1 = tr(\mathbf{B})$, $I_2 = [I_1^2 - tr(\mathbf{B}^2)]$ ed $I_3 = det(\mathbf{B})$ i tre invarianti, gli autori propongono il modello di Mooney-Rivlin [18-19]

$$\sigma^{hyp} = -p_e \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{B} + \alpha_2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (1)$$

come rappresentativo del comportamento iper-elastico, in cui σ^{hyp} è il tensore delle tensioni di Cauchy, p_e la pressione idrostatica ed $\alpha_1 = 2(\partial W / \partial I_1 + I_1 \partial W / \partial I_2)$ e $\alpha_2 = -2 \partial W / \partial I_2$ costituiscono i termini derivanti dal potenziale di energia di deformazione

$$W = A_1(I_1 - 3) + A_2(I_2 - 3) + A_3(I_1 - 3)(I_2 - 3) \quad (2)$$

I parametri A_1 , A_2 ed A_3 sono delle costanti che dipendono dal materiale, i cui valori possono essere determinati fittando opportunamente la curva $\sigma - \varepsilon$ del materiale (trazione/compressione) corrispondente a condizioni di prova quasi-statiche.

Per quanto riguarda invece la componente viscoelastica del comportamento (σ^v), questa viene riprodotta ricorrendo al modello T-BKZ [20-22], secondo il quale il corrispondente tensore delle tensioni di Cauchy σ^v può essere espresso tramite la seguente relazione

$$\sigma^v = -p^v + \mathbf{F}(t) \cdot \Omega_{\tau=-\infty}^t \{ \mathbf{C}(\tau) \} \cdot \mathbf{F}^T(t) \quad (3)$$

dove p^v è al solito una pressione arbitraria, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ il tensore di deformazione destro di Cauchy-Green ed infine Ω è il funzionale che descrive gli effetti della processo di deformazione nel tempo sulla tensione. Gli autori del presente modello hanno assunto per il funzionale Ω la seguente forma

$$\Omega_{\tau=-\infty}^t \{ \mathbf{C}(\tau) \} = \int_0^t \varphi(I_1, I_2) m(t - \tau) \dot{\mathbf{E}}(\tau) d\tau \quad (4)$$

dove $\dot{\mathbf{E}} = (\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}})$ rappresenta lo strain-rate mentre φ ed $m(t - \tau)$ le funzioni di smorzamento e rilassamento rispettivamente. Nell'ottica di ridurre il più possibile il numero di parametri, nel presente modello le seguenti espressioni:

$$\varphi = A_4 + A_5 [I_2'(\tau) - 3]$$

$$m(t - \tau) = e^{-(t-\tau)/A_6} \quad (5)$$

sono state assunte per le due funzioni che definiscono il funzionale, dove con I'_2 ($I'_2 = I_2$) si è indicato il secondo invariante del tensore \mathbf{C} e con A_4 , A_5 ed A_6 un set di costanti rappresentative del materiale che può essere determinato fittando contemporaneamente due o più curve $\sigma - \varepsilon$ corrispondenti a diversi strain-rate attraverso procedure di multi-fitting non lineare [10,23]. Combinando opportunamente le Eq. (1) – (5) si può ottenere la legge costitutiva rappresentativa del materiale. Nel caso mono-assiale, tenendo presente che $\sigma_{yy}^{hyp} = \sigma_{zz}^{hyp} = 0$ e $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, questa assume la seguente forma

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{hyp} + \lambda^2 \int_0^t \lambda [A_4 + A_5(I_2 - 3)] e^{-(t-\tau)/A_6} \dot{\lambda} d\tau + \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_0^t \lambda^{-2} [A_4 + A_5(I_2 - 3)] e^{-(t-\tau)/A_6} \dot{\lambda} d\tau \quad (6)$$

qualora si utilizzi l'allungamento λ ($\lambda = 1 + \varepsilon$) come variabile per la misura della deformazione subita dal materiale.

Nel modello di Yang, in definitiva, il comportamento del materiale risulta univocamente determinato una volta stabilito il set di parametri costitutivi A_1, \dots, A_6 . I primi tre parametri individuano la risposta iper-elastica del materiale e, adottando la procedura messa punto dagli autori, possono essere calcolati analizzando la risposta quasi-statica uni-assiale del materiale. I restanti invece costituiscono la risposta viscoelastica in cui la dipendenza dallo strain-rate risulta incorporata nella costante A_6 . La stima di tali parametri può essere condotta analizzando come varia la risposta uni-assiale del materiale all'interno di un dato intervallo di strain-rate.

Sebbene il presente modello sia relativamente semplice nella sua concezione ed implementazione, è opportuno osservare fin da subito che tale approccio presenta due importanti criticità. Il modello non è innanzitutto in grado di interpretare contemporaneamente sia la risposta a trazione che quella di compressione: ciò può costituire un limite molto importante se il materiale oggetto di studio presenta una risposta tensile diversa da quella a compressione. Secondo, la stima dei coefficienti costitutivi, infatti, è basata su procedure di multi-fitting non lineare e, come è noto da letteratura, i risultati ottenuti tramite queste procedure sono strettamente correlati ai valori iniziali e all'algoritmo di ricerca del minimo utilizzati nel calcolo dei parametri. In altri termini il comportamento del materiale può essere descritto da due o più set di parametri costitutivi, rendendo così vano ogni tentativo di stabilire delle correlazioni tra le caratteristiche di tale classe di materiale e i suddetti parametri.

2.2. Modello iper-viscoelastico non lineare di Bergstrom-Boyce

Nell'approccio sviluppato da Bergstrom e Boyce [14-16] si perviene ad una rappresentazione del comportamento iper-viscoelastico del materiale partendo da considerazioni di natura microstrutturale. Le ipotesi di base, tuttavia, sono identiche a quelle del modello di Yang. Anche in questo caso, pertanto, il materiale viene assunto isotropo, omogeneo ed incomprimibile e la sua risposta viene decomposta in una componente iper-elastica ed una viscoelastica agenti in parallelo. Delle due componenti, alla prima è demandato il ruolo di interpretare il comportamento del materiale in condizioni di equilibrio, alla seconda invece la dipendenza dal tempo da parte del comportamento del materiale.

Per quanto concerne la componente iper-elastica, si ipotizza che il comportamento del materiale sia schematizzabile mediante il modello di Arruda-Boyce [24]. In altri termini la risposta quasi-statica del materiale viene ricondotta a quella di una cella cubica contenente 8 catene di Langevin [...] che collegano il centro della cella con i relativi vertici. Se al solito con λ_i si indica l'allungamento del network misurato nella direzione i -esima, la seguente correlazione [24,25],

$$\sigma_i^1 = C_R^1 \sqrt{N^1} \frac{(\lambda_i^1)^2 - (\lambda_{chain}^1)^2}{\lambda_{chain}^1} L^{-1} \left(\frac{\lambda_{chain}^1}{\sqrt{N^1}} \right) + B \ln(I_3^1) \quad (7)$$

costituisce il legame tra la tensione lungo la suddetta direzione ed il corrispondente allungamento. Nell'Eq. (7) C_R^1 , $\sqrt{N^1}$ e B rappresentano rispettivamente il modulo elastico iniziale, l'allungamento limite del network ed il modulo di bulk; I_3^1 invece costituisce il terzo invariante del tensore della deformazione mentre $L^{-1}(x)$ l'inversa della funzione di Langevin $L(x) = \cot(x) - 1/x$.

Per quanto riguarda invece la componente viscoelastica del comportamento, le evidenze sperimentali ottenute da questa classe di materiali [14] suggeriscono di decomporla ulteriormente in due contributi, uno iper-elastico, schematizzabile con il modello di Arruda-Boyce, ed uno viscoso disposti in serie. Quest'ultimo è necessario per modellare il rilassamento della deformazione nell'elemento iper-elastico, permettendo così di catturare la dipendenza dal tempo da parte del comportamento del materiale. Mentre per il contributo del network iper-elastico, è immediato stabilire la correlazione tra la tensione e l'allungamento corrispondente, essendo questa formalmente identica all'Eq. (7),

$$\sigma_i^2 = C_R^2 \sqrt{N^2} \frac{(\lambda_i^2)^2 - (\lambda_{chain}^2)^2}{\lambda_{chain}^2} L^{-1} \left(\frac{\lambda_{chain}^2}{\sqrt{N^2}} \right) + B \ln(I_3^2) \quad (8)$$

la formulazione di un modello costitutivo tempo-dipendente sulla base di considerazioni microstrutturali risulta alquanto complessa. Ipotizzando, tuttavia, che la dipendenza temporale sia attribuibile principalmente ai movimenti reptazionali delle catene polimeriche totalmente o parzialmente inattive è possibile modellare il rilassamento della deformazione ricorrendo al seguente modello [14],

$$\dot{\gamma} = C_1 (\lambda_{chain}^2 - 1)^{C_2} \left(\frac{\tau_2}{\hat{\tau}_2} \right)^m \quad (9)$$

per quanto riguarda il legame tra il tasso effettivo di creep ($\dot{\gamma}$) e la tensione di taglio equivalente (τ_2) agente nel network iper-elastico. Nell'Eq. (9) $\hat{C}_1 \equiv C_1 / \hat{\tau}_2^m$, C_2 ed m rappresentano delle costanti del materiale, mentre $\lambda_{chain}^2 = I_1^2 / 3$, essendo I_1^2 il primo invariante del tensore delle deformazioni corrispondente al modello iper-elastico del secondo network. Nel presente modello pertanto la dipendenza della legge costitutiva dallo strain-rate risulta inglobata in quest'ultimo set di parametri costitutivi.

In definitiva, una volta determinate le costanti caratteristiche del materiale ($C_R^1, \sqrt{N^1}, C_R^2, \sqrt{N^2}, B, \hat{C}_1, C_2, m$), il comportamento del materiale risulta univocamente determinato dal set di equazioni (7)-(9). I primi cinque parametri ($C_R^1, \sqrt{N^1}, C_R^2, \sqrt{N^2}, B$) possono essere stabiliti sperimentalmente, analizzando la risposta quasi-statica uniassiale del materiale ed il suo comportamento in un ciclo di carico-scarico uniassiale ad un dato strain-rate (per la stima di tali parametri si veda l'appendice in [14]); la stima dei restanti, invece, può essere condotta soltanto per tentativi oppure mediante tecniche di tipo *trial and error* basate sul confronto tra la risposta sperimentale uniassiale del materiale in un dato range di strain-rate con quella fornita da un modello numerico in grado di simulare il test sperimentale considerato e nel quale è stata implementata la legge costitutiva contenente i parametri da stimare.

3. CARATTERIZZAZIONE SPERIMENTALE

L'implementazione dei modelli costitutivi di Yang e Bergstrom e Boyce richiede la determinazione di un set di parametri costitutivi che possono essere determinati attraverso un'opportuna campagna sperimentale. Dato che un generico dispositivo shock-absorber può sperimentare stati tensionali sia di trazione che di compressione ed essendo queste due risposte generalmente differenti tra loro, la campagna sperimentale è stata condotta in modo tale da determinare il set di parametri costitutivi corrispondenti a queste due differenti condizioni di sollecitazione. Per la caratterizzazione del materiale sono state pertanto condotte prove di trazione e compressione in condizioni quasi-statiche e a differenti strain-rate e di impatto tensile a differenti velocità di impatto. L'indagine è stata condotta considerando strain-rate compresi tra 10^{-3}s^{-1} e 10^2s^{-1} . Sebbene questo range possa apparire limitativo, è

opportuno osservare che ai valori di strain-rate considerati si trovano ad operare un numero considerevole di applicazioni ingegneristiche.

Come detto in precedenza, l'attenzione è stata focalizzata su una precisa classe di materiali polimerici, i poliuretani elastomerici, essendo questa largamente impiegata per realizzare dispositivi shock-absorber. Più precisamente l'indagine è stata condotta su di un TPU elastomerico (APILON 52, API SpA) le cui caratteristiche fisico-meccaniche principali sono riassunte nella Tab. 1. Nei due paragrafi seguenti sono riportati i risultati ottenuti dalla campagna sperimentale.

Tabella 1: caratteristiche fisico-meccaniche principali del TPU elastomerico oggetto di indagine (APILON 52).

Densità [kg/m ³]	Temperatura di transizione vetrosa [°C]	Durezza [Shore A]	Carico 100% allungamento [MPa]	Carico 300% allungamento [MPa]	Carico di rottura [MPa]	Allungamento a rottura [%]
1185	30	63	2.2	3.8	27	850

3.1. Risposta tensile

La Fig. 2 raccoglie i risultati della campagna di prove effettuata per determinare la risposta tensile del materiale oggetto di studio. La caratterizzazione sperimentale è stata condotta su di un set di provini normati (tipologia: 1BA, ISO 527-2), utilizzando una macchina elettro-meccanica (Instron 4502) per le prove quasi-statiche ($\dot{\epsilon} = 2.2 \cdot 10^{-3} s^{-1}$), mentre per gli strain-rate maggiori tramite una macchina servo-idraulica (DARTEC HA100) disponibile presso il Laboratorio di affidabilità e Sicurezza della II Facoltà dei Ingegneria del Politecnico di Torino [26]. Le prove cicliche di carico-scarico infine sono state effettuate mediante la stessa macchina utilizzata per la caratterizzazione quasi-statica del materiale. Per la definizione del ciclo, è stata impostata una deformazione ingegneristica massima pari al 65% mentre lo strain-rate è stato fatto variare come riportato in Fig. 2.

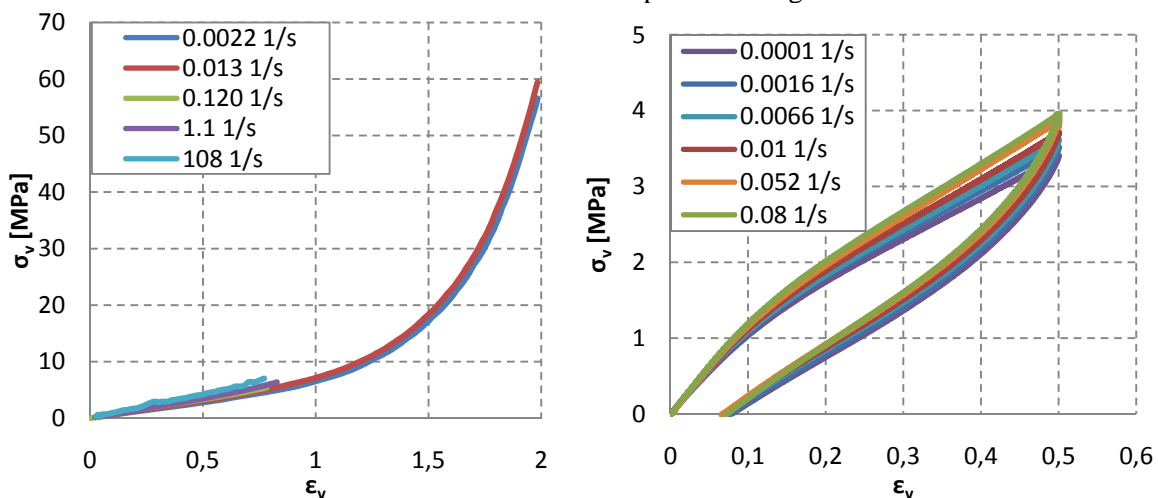


Figura 2: influenza dello strain-rate $\dot{\epsilon}$ sulla risposta tensile del TPU elastomerico e nella risposta ciclica carico-scarico in trazione rispettivamente.

Dall'esame delle curve ottenute emerge chiaramente lo spiccato carattere elastomerico del materiale oggetto di studio: il materiale è in grado, infatti, di sopportare significativi allungamenti e di recuperarli in buona parte. Gli andamenti permettono altresì di apprezzare in modo significativo gli effetti dello strain-rate sulla risposta del materiale, soprattutto per quanto riguarda l'incremento del modulo elastico iniziale del materiale mentre la contrazione del plateau non sembra particolarmente significativa. Sebbene non siano particolarmente marcati, gli effetti sono comunque apprezzabili in tutto il range di strain-rate esplorato.

Per quanto riguarda la risposta ad impatto tensile, la caratterizzazione è stata condotta mediante un pendolo strumentato (Resil Impactor 6596, CEAST) su di un set di provini normati (ISO 527-2). Le velocità di impatto sono state fatte variare tra 2 e 3 m/s corrispondenti a strain-rate medi compresi tra

70 e 100 s^{-1} . Nella Fig. 3 sono riportate a titolo esemplificativo le curve true stress-true strain ottenute elaborando opportunamente i risultati di tre prove corrispondenti a tre valori distinti di velocità: 2, 2.5 e 3 m/s. I risultati mostrano che gli effetti dello strain-rate sulla risposta del materiale non sono particolarmente apprezzabili quando il tasso di deformazione varia nei limiti sopra riportati, mentre lo sono quando lo strain-rate passa da un ordine di grandezza all'altro. Da questo punto di vista, sembrerebbe che la dipendenza dallo strain-rate da parte della risposta costitutiva del materiale sia non lineare anche nel regime di medio bassi strain-rate.

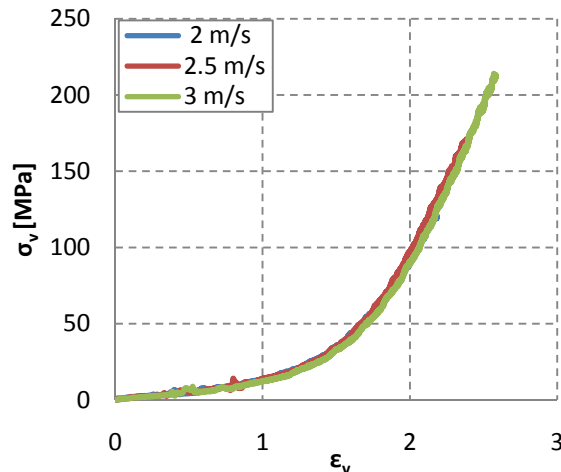


Figura 3: risposta ad impatto tensile del TPU oggetto di studio: effetti dello strain-rate sulla risposta del materiale corrispondenti a velocità di impatto comprese tra 2 e 3 m/s.

3.2. Risposta a compressione

La caratterizzazione sperimentale della risposta a compressione del materiale è stata ottenuta eseguendo una serie di prove di compressione uniassiale e cicliche di carico-scarico su di un set di campioni aventi una geometria cilindrica di altezza e diametro pari a 20mm. La caratterizzazione è stata condotta in modo tale da ottenere tutte le informazioni sia per ciò che concerne la risposta quasi-statica del materiale sia per valutare gli effetti dello strain-rate sulla curva costitutiva del materiale. Le prove sono state eseguite utilizzando lo stesso parco macchine impiegato per caratterizzare la risposta tensile del materiale e i risultati, espressi in termini di curve true stress-true strain sono riassunti nella Fig. 4.

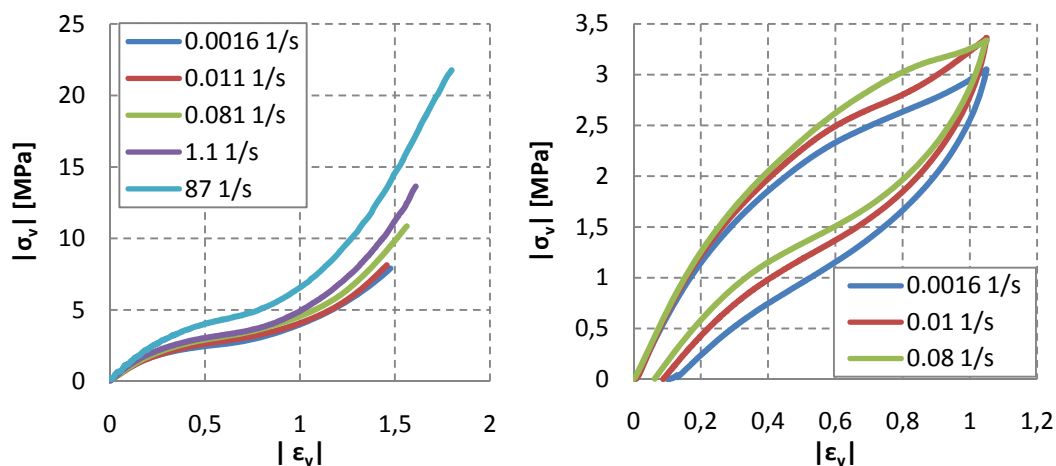


Figura 4: influenza dello strain-rate $\dot{\epsilon}$ sulla risposta a compressione del TPU elastomerico e nella risposta ciclica carico-scarico in compressione rispettivamente.

Anche in questo caso l'analisi dei trend delle curve sperimentali permette di riconoscere le caratteristiche già riscontrate nella risposta tensile del materiale. Tuttavia, se si esaminano in modo più

approfondito i dati sperimentali ottenuti da questa seconda campagna sperimentale, emergono chiaramente alcuni distinguo. Gli effetti dello strain-rate sull'andamento della curva costitutiva sono più marcati nella risposta a compressione piuttosto che in quella tensile: non solo si assiste ad un significativo incremento del modulo elastico iniziale, ma anche un'apprezzabile contrazione della seconda fase del processo di deformazione. E' opportuno inoltre notare che gli andamenti delle curve sperimentali differiscono in modo molto marcato da quelli caratteristici della risposta a trazione. Il materiale pertanto sembra rispondere in modo non simmetrico rispetto alle condizioni di carico considerate.

4. ANALISI DEI MODELLI COSTITUTIVI

La qualifica dei due modelli costitutivi precedentemente selezionati richiede innanzitutto la stima dei parametri costitutivi. Mentre per la determinazione dei parametri necessari all'implementazione del modello iper-viscoelastico di Yang è sufficiente fittare la risposta uniassiale del materiale utilizzando le Eqq. (1)-(5), la valutazione dei parametri caratteristici del modello proposto da Bergstrom e Boyce richiede anche la messa a punto di un'opportuna procedura di ottimizzazione, basata sullo sviluppo di modelli numerici in grado di simulare i test sperimentali, che consenta di desumere i suddetti parametri mettendo a confronto le predizioni numeriche con i risultati sperimentali. Di seguito sono riportati i metodi utilizzati per stimare i parametri del materiale ed i risultati ottenuti per i due modelli costitutivi.

4.1. Analisi del modello costitutivo di Yang

La stima dei parametri costitutivi propri del modello di Yang è stata condotta seguendo la procedura proposta dagli autori. I parametri A_1 , A_2 ed A_3 sono stati calcolati fittando le curve $\sigma - \varepsilon$ uniassiali di trazione e compressione quasi-statica mediante l'Eq. (1), mentre per quanto concerne la determinazione dei parametri A_4 , A_5 ed A_6 , ci si è ispirati all'approccio di multifitting non lineare già impiegato con successo in questo ambito da Doman et al. [3,23]. Più precisamente il calcolo dei suddetti parametri è stato effettuato minimizzando il seguente funzionale:

$$Err(A_4, A_5, A_6) = N - \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{M-1} \frac{[\hat{\sigma}_n(i\Delta t, A_4, A_5, A_6) - \sigma_n(i\Delta t)]^2}{[\bar{\sigma}_n - \sigma_n(i\Delta t)]^2} \quad (10)$$

dove N ed M rappresentano rispettivamente il numero di curve sperimentali considerate nel fitting ed il numero di punti, mentre $\hat{\sigma}_n$ e σ_n e $\bar{\sigma}_n$ rappresentano la tensione stimata tramite il modello costitutivo (Eq. (6)), il valore sperimentale della tensione per la curva n -esima ed il valore medio della tensione sperimentale, rispettivamente. Per la stima di tali parametri sono state utilizzate tutte le curve $\sigma - \varepsilon$ uniassiali di trazione e compressione incluse nell'intervallo di strain-rate investigato sperimentalmente. Il passo temporale Δt è stato scelto con i criteri definiti da Wineman [27] per la soluzione dell'equazione di Volterra.

Nella Tab. 2 sono riportati a titolo esemplificativo i parametri di fitting caratteristici del comportamento a compressione del materiale per strain-rate compresi tra $1.0 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ e $0.8 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$. Risultati simili sono stati trovati analizzando la risposta a trazione del materiale.

Tabella 2: valori assunti dai parametri di fitting del materiale nel caso della compressione.

A_1 [MPa]	A_2 [MPa]	A_3 [MPa]	A_4 [MPa]	A_5 [MPa]	A_6 [μs]
1.9584	-0.627	0.0434	1.85	-4.2	15.6

I valori ottenuti permettono di ottenere curve costitutive il cui scostamento percentuale rispetto a quelle sperimentali si mantiene mediamente intorno al 2%, sia nell'ambito della trazione che in quello della compressione. Sebbene i parametri così ottenuti consentano di interpretare in modo eccellente il comportamento del materiale in una qualunque delle condizioni di carico considerate nella presente indagine, è doveroso notare che le procedure utilizzate non permettono di individuare in modo univoco il set di parametri costitutivi effettivamente rappresentativo del materiale in una data

condizione di carico: a seconda dell'algoritmo di ricerca del minimo e dei valori iniziali di tentativo, sono stati individuati diversi set di parametri in grado di interpretare in modo molto buono il comportamento del materiale. La mancanza di rappresentatività da parte del set di parametri costituisce una criticità molto importante per questo modello: dall'elaborazione delle curve di fitting corrispondenti a diversi set di parametri A_1, \dots, A_6 , infatti, è emerso che a piccole variazioni dei valori ottenuti corrispondono significative variazioni nella stima dell'energia assorbita dal materiale. Occorre infine osservare che i valori di best fitting possono non avere anche un significato fisico. Dal punto di vista analogico, la formulazione integrale rappresentata dall'Eq. (4) corrisponde ad un sistema di Maxwell modificato [1,10], in cui gli elementi molla e smorzatore hanno rispettivamente una rigidezza $E = A_4 + A_5(I_2 - 3)$ ed una viscosità $\eta = A_6[A_4 + A_5(I_2 - 3)]$. È immediato verificare ad esempio che per il materiale in esame sottoposto a condizioni di carico di compressione, ai valori riportati in Tab. 2 corrispondono valori negativi della rigidezza dell'elemento elastico. Tale evidenza, purtroppo, preclude qualsiasi possibilità di formulare ipotesi e correlazioni tra le caratteristiche fisico-meccaniche e microstrutturali del materiale ed i parametri rappresentativi.

4.2. Analisi del modello costitutivo di Bergstrom e Boyce

Per quanto concerne il modello di Bergstrom e Boyce, i parametri costitutivi debbono essere desunti attraverso un'appropriata elaborazione dei dati sperimentali. Tuttavia, se i parametri caratterizzanti gli elementi elastici $(C_R^1, \sqrt{N^1}, C_R^2, \sqrt{N^2}, B)$ possono essere determinati in modo univoco a partire dai risultati sperimentali (cfr. § 2.2), le caratteristiche costitutive che individuano la dipendenza dal tempo della risposta del materiale (\hat{C}_1, C_2, m) possono essere determinate soltanto per tentativi oppure implementando opportune tecniche di tipo *trial and error* basate sul confronto tra la risposta sperimentale del materiale con quella fornita da modelli numerici in grado di simulare i test sperimentali ai quali il materiale è stato sottoposto. Non disponendo di un'idea precisa di quanto i parametri costitutivi possano incidere sulla stima dell'energia assorbita dal materiale durante una data condizione di carico, la valutazione dei parametri è stata condotta adottando gli approcci *trial and error* tipo quello proposti in [28-29], essendo questi in grado di fornire stime molto accurate delle grandezze in gioco.

Dato che dalla campagna sperimentale è emerso che la risposta del materiale a compressione differisce in modo marcato da quella di trazione, è lecito aspettarsi che i parametri costitutivi per i due regimi di sollecitazione siano diversi. Per stabilire, pertanto, i set di costanti del materiale corrispondenti alla due tipologie di comportamento, sono stati messi a punto due modelli agli Elementi Finiti: uno per la simulazione di prove di compressione a strain-rate prefissato ed uno per la simulazione di prove di impatto tensile. Gli schemi concettuali dei due modelli computazionali dai quali è possibile desumere il set di ipotesi semplificative sono illustrati in Fig. 5.

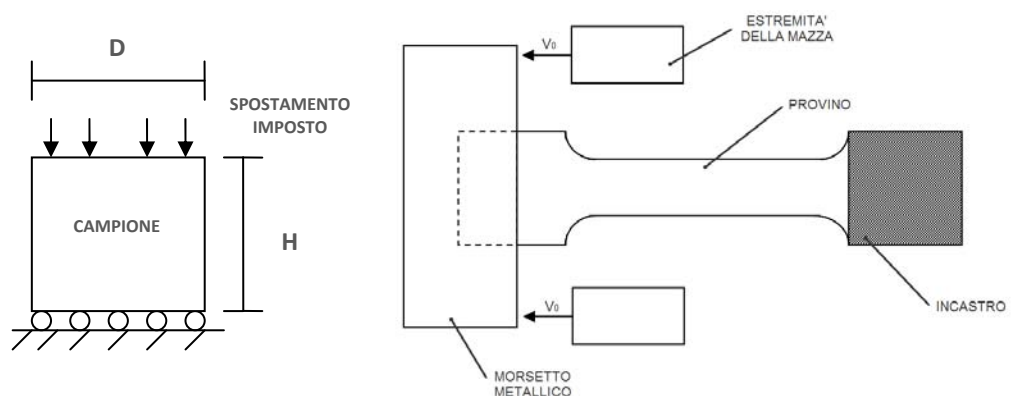


Figura 5: schemi concettuali dei modelli numerici sviluppati per simulare i test sperimentali di compressione ed impatto tensile.

Per quanto riguarda la prova a compressione si è deciso di modellare esclusivamente il provino polimerico, vincolandolo alla base con dei carrelli che fungano da piano da appoggio (contatto privo di attrito), ed impedendo la rotazione stessa del campione attorno al suo asse longitudinale tramite un opportuno vincolamento radiale. Le condizioni di carico sono state implementate imponendo sulla sezione non vincolata uno spostamento dipendente dal tempo tale da introdurre nel materiale uno stato di tenso-deformativo di compressione e caratterizzato dallo strain-rate desiderato.

Data la notevole complessità dell'apparato strumentale necessario a realizzare la prova di impatto tensile, invece, soltanto una parte dell'intero sistema è stato considerato nel corrispondente modello e più precisamente la parte terminale del battente, alla quale è stata assegnata una densità equivalente in modo tale da mantenere inalterate le masse in gioco, ed il sistema bersaglio-provino. Il provino è stato poi vincolato in modo tale da riprodurre le condizioni di fissaggio proprie della prova sperimentale. Le condizioni di carico invece sono state implementate assegnando al battente un profilo di velocità nel tempo identico a quello registrato durante il test sperimentale.

I modelli, dopo opportune analisi di convergenza e sensitività, sono stati discretizzati con elementi strutturali 3D a 20 nodi, aventi una dimensione caratteristica pari ad $H/14$ nel caso della prova a compressione e pari a metà dello spessore del provino nel caso della simulazione dell'impatto tensile (Fig. 6). Per questa seconda simulazione, che richiede la modellazione dell'interazione tra il battente ed il bersaglio, il contatto tra i due corpi è stato modellato ricorrendo ad elementi *surface to surface* ad 8 nodi. Entrambi i modelli sono stati concepiti all'interno del software commerciale ANSYS Rel. 12.0 e per la loro risoluzione si è impiegato l'approccio implicito basato sull'algoritmo di Newmark. I modelli sono stati validati in regime quasi-statico impiegando delle relazioni costitutive iper-elastiche.

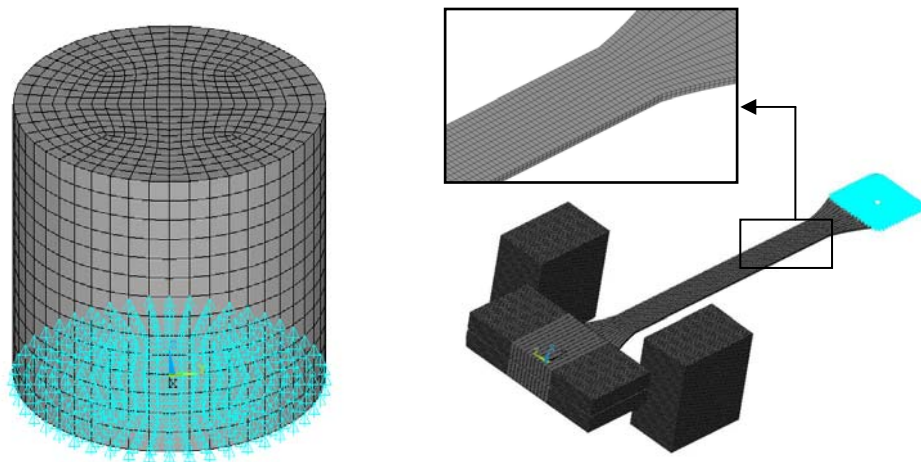


Figura 6: maglie adottate per la valutazione dei parametri rappresentativi della dipendenza dal tempo da parte del materiale nel caso della compressione e di trazione rispettivamente.

Il calcolo dei primi cinque parametri (Tab. 3) è stato condotto analizzando le risposte sperimentali quasi-statiche e di carico-scarico a trazione e compressione facendo proprie le formule riportate in appendice del lavoro citato in [14].

Tabella 3: valori dei parametri di fitting degli elementi elastici per le due tipologie di risposta.

	C_R^1 [MPa]	$\sqrt{N^1}$ [μ]	C_R^2 [MPa]	$\sqrt{N^2}$ [μ]	B [MPa]
compressione	0.294	2.04	1.32	2.04	147
trazione	0.233	4.92	1.42	4.92	117

La stima dei restanti tre parametri (\hat{C}_1, C_2, m), invece, è stata basata sul confronto tra la caratteristica forza di impatto F vs. tempo t cui è sottoposto il provino nel caso della trazione e l'evoluzione nel tempo della tensione di compressione media nella sezione del provino cilindrico nel caso della

compressione e minimizzando un funzionale formalmente identico ($N = 1$) a quello utilizzato da Doman [3,23] (vedi Eq. 10 con $N = 1$).

Tabella 4: valori dei parametri di fitting attinenti l'elemento viscoso per le due tipologie di risposta.

	\hat{C}_1 [s ⁻¹ MPa ^{-m}]	C_2 [/]	m [/]
compressione	$2.5 \cdot 10^{-5}$	-0.80	3.50
trazione	$3.1 \cdot 10^{-3}$	-0.97	3.81

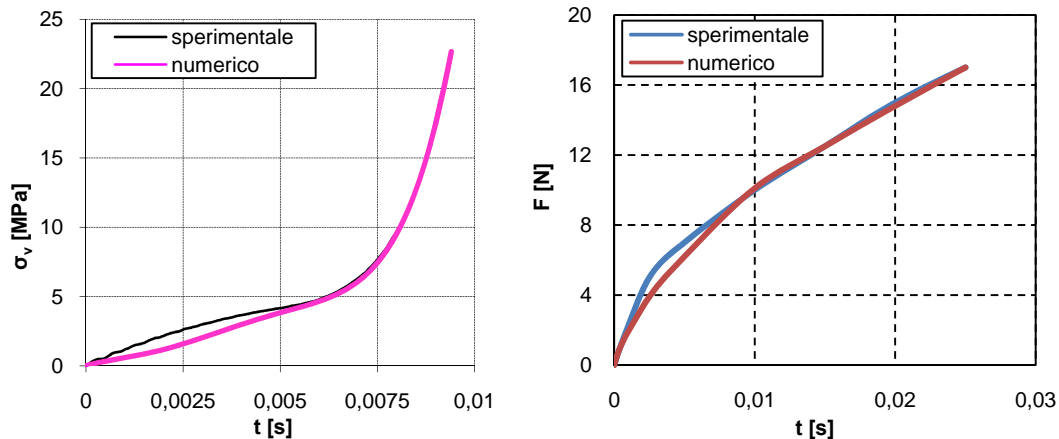


Figura 7: confronto tra i trend sperimentali e le predizioni numeriche nel caso di compressione ad un strain-rate pari ad 88s^{-1} e ad una prova di impatto tensile ad una velocità di impatto di 3m/s .

Nella Fig. 7 sono riportati i confronti tra le grandezze sperimentali e numeriche per le due condizioni di sollecitazione, mentre nella Tab. 4 sono riassunti i valori dei parametri (\hat{C}_1, C_2, m) corrispondenti. I confronti si riferiscono rispettivamente ad una prova di compressione ad uno strain-rate pari ad 88 s^{-1} e ad una prova di impatto tensile a 3 m/s e. Entrambi i diagrammi mostrano come il modello di Bergstrom e Boyce sia in grado di cogliere molto bene il comportamento del materiale nelle due condizioni di carico; le predizioni numeriche si sovrappongono, poi, quasi perfettamente ai trend sperimentali in corrispondenza di deformazioni molto elevate. Tuttavia, non si possono non sottolineare le difficoltà incontrate da tale modello nel interpretare la risposta del materiale a bassi valori della deformazione: dall'elaborazione dei trend delle curve numeriche ed sperimentali è emerso infatti che lo scostamento percentuale in questo range di deformazione mediamente è superiore al 20%. Essendo la risposta sperimentale sistematicamente sottostimata dal modello, ci si deve aspettare una significativa sottostima dell'energia immagazzinata dal materiale da parte del presente modello.

5. CONCLUSIONI

L'impiego di materiali polimerici ed in modo particolare di poliuretani termoplastici aventi caratteristiche elastomeriche sta conoscendo un sensibile incremento tra i dispositivi shock-absorber. Essendo l'energia assorbita dal materiale uno dei parametri chiave nella progettazione di tali dispositivi, la stima di tale grandezza acquista un significato molto importante. Sebbene le tecniche sperimentali costituiscano sicuramente l'approccio più accurato ed affidabile per la valutazione delle capacità di assorbimento offerte da un dato materiale, gli approcci analitico-numeriche al problema costituiscono un'alternativa altrettanto valida in quanto in grado di restituire stime molto buone in tempi brevi e con costi contenuti. E' indubbio però che la bontà della stima dell'energia assorbita sia strettamente correlata alle capacità con cui i modelli costitutivi utilizzati siano in grado di interpretare l'effettivo comportamento del materiale. Nel presente lavoro è stata giustappunto focalizzata la seguente tematica. A tale scopo è stato dapprima caratterizzato sperimentalmente uno tra i più diffusi poliuretani termoplastici e successivamente sono stati analizzati ed individuati tra i modelli costitutivi reperibili in letteratura quelli che meglio interpretano i fenomeni che caratterizzano la sua risposta dinamica sia in trazione che in compressione.

L'analisi condotta ha permesso *in primis* di individuare come più promettenti ed affidabili gli approcci di tipo iper-viscoelastico non lineare proposti da Yang e Bergstrom e Boyce. Nonostante i due modelli siano stati concepiti in modo molto diverso fra loro, il primo si fonda su osservazioni di natura fenomenologica il secondo su considerazioni attinenti la microstruttura, le loro capacità predittive sono risultate essere piuttosto buone. Dal punto di vista della stima dell'energia assorbita, il modello costitutivo proposto da Yang sembra restituire risultati molto più precisi di quanto faccia il modello di Bergstrom e Boyce. Lo scarto percentuale tra le curve $\sigma - \varepsilon$ sperimentali di trazione e compressione e le corrispondenti previste dal modello di Yang si mantiene mediamente intorno al 2% per il materiale ed per l'intervallo di strain-rate (10^{-3}s^{-1} - 10^2s^{-1}) considerati nel presente lavoro. Scostamenti percentuali superiori al 20%, sia nella trazione che nella compressione, sono stati riscontrati invece quando le risposte sperimentali vengono confrontate con quelle predette tramite il modello di Bergstrom e Boyce. E' opportuno sottolineare tuttavia che, se da un lato il modello di Yang è in grado di restituire comunque una stima abbastanza precisa dell'energia assorbita dal materiale, il metodo utilizzato per dedurre la legge costitutiva non consente di stabilire una correlazione biunivoca tra il comportamento del materiale ed i parametri costitutivi: la determinazione di quest'ultimi, infatti, è affidata a procedure di fitting non lineare i cui risultati si sono dimostrati essere dipendenti sia dall'algoritmo che dai valori iniziali di tentativo utilizzati per ricavare le suddette quantità. L'approccio di Yang non consente pertanto di lavorare sui parametri costitutivi per ottimizzare ad esempio la risposta del materiale. Per contro, il modello di Bergstrom e Boyce non presenta tale ostacolo: le costanti caratteristiche del modello presentano un chiaro significato fisico e possono essere univocamente determinate svolgendo un'opportuna campagna sperimentale e numerica. Non si può comunque non annotare che entrambi i modelli presentano un limite significativo: sia l'approccio di Yang che quello di Bergstrom e Boyce, infatti, sono stati concepiti per interpretare separatamente le due tipologie possibili di risposta. Tuttavia, durante un transitorio di impatto, è lecito aspettarsi che il materiale sperimenti contemporaneamente sia stati di trazione che di compressione. Data la criticità presentata dalle applicazioni che impiegano questa classe di materiali, lo sviluppo di un modello costitutivo capace di inglobare nella sua formulazione entrambe le risposte è sicuramente auspicabile, soprattutto se il materiale presenta una risposta tensile differente da quella a compressione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F.J. Lockett, *Non-linear viscoelastic solids*, Academic Press, 1972.
- [2] S. Rao, V.P.W. Shim, S.E. Quah, "Dynamic Mechanical Properties of Polyurethane Elastomers using a non-metallic hopkinson bar", *J. Appl. Polym. Sci.*, 66, 619-631, 1997.
- [3] D.A. Doman, D.S. Cronin, C.P. Salisbury, "Characterization of Polyurethane Rubber at High Deformation Rates", *Experimental Mechanics*, 46, 367-376, 2006.
- [4] J. Yi, M.C. Boyce, G.F. Lee, E. Balizer, "Large deformation rate-dependent stress-strain behaviour of polyurea and polyurethanes", *Polymer*, 47, 319-329, 2006.
- [5] S.S. Sarva, S. Deschanel, M. Boyce, W. Chen, "Stress-strain behaviour of a polyurea and a polyurethane from low to high strain rates", *Polymer*, 48, 2208-2213, 2007.
- [6] C.M. Roland, J.N. Twigg, Y. Lu, P.H. Mott, "High strain rate mechanical behaviour of polyurea", *Polymer*, 48, 574-578, 2007.
- [7] V. Kanyanta, A. Ivankovic, "Mechanical characterisation of polyurethane elastomer for biomedical applications", *J. Mech. Behavior Bio. Mater.*, 3, 51-62, 2010.
- [8] P.S. Symonds, *Survey of methods of analysis for plastic deformation of structures under dynamic loading*, Report N° BU/NSRDC, Brown University, 1967.
- [9] G.R. Johnson, W.H. Cook, "Fracture Characteristics of three metals subjected to various strains strain rates, temperatures and pressures", *Eng. Frac. Mech.*, 21(1), 31 -48, 1985.
- [10] L.M. Yang, V.P.W. Shim, C.T. Lim, "A visco-hyperelastic approach to modelling the constitutive behaviour of rubber", *Int. J. Impact Eng.*, 24, 545-560, 2000.
- [11] V. P. W. Shim, L. M. Yang, C. T. Lim, P. H. Law, "A Visco-Hyperelastic Constitutive Model to Characterize Both Tensile and Compressive Behavior of Rubber", *Journal of Applied Polymer Science*, 92, 523-531, 2004.

- [12] M.S. Hoo Fatt, X. Ouyang, “Integral-based constitutive equation for rubber at high strain rates”, *Int. J. Sol. Struct.*, 44, 6491-6506, 2007.
- [13] C. Li, J.Lua, “A hyper-viscoelastic constitutive model for polyurea”, *Mat. Letters*, 63 (11), 877-880, 2009.
- [14] J. Bergstrom, M. Boyce, “Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers”, *J. Mech. Phys. Solids*, 46, 931-954, 1998.
- [15] J. Bergstrom, M. Boyce, “Large strain time-dependent behaviour of filled elastomers”, *Mech. Mater.*, 32, 627-644, 2000.
- [16] J. Bergstrom, M. Boyce, “Constitutive modeling of the time-dependent and cyclic loading of elastomers and application to soft biological tissue”, *Mech. Mater.*, 33, 523-530, 2001.
- [17] S.J. Quintavalla, S.H. Johnson, “Extension of the Bergstrom-Boyce model to high strain rates”, *Rubber Chem. and Tech.*, 77 (5), 972-981, 2004.
- [18] M. Mooney, “A theory of large elastic deformation”, *J. Appl. Phys.*, 11, 582-592, 1940.
- [19] R.S. Rivlin, “Some topics in finite elasticity”, Proceedings of the First Symposium on Naval Structural Mechanics, 169-198, 1960.
- [20] C. Truesdell, W. Noll, “The non-linear field theories of mechanics”, In Handbuch der Physik, Fugge S. Editor, Springer-Verlag, 1965.
- [21] B. Bernstein, A. Kearsley, L.J. Zapas, “A study of stress relaxation with finite strain”, *Trans. Soc. Rheol.*, 7, 391-410, 1963.
- [22] B. Bernstein, A. Kearsley, L.J. Zapas, “A study of stress relaxation with finite strain”, *Rubber Chem. Technol.*, 38, 76-89, 1965.
- [23] D.A. Doman, *Modeling of the high rate behaviour of polyurethane rubber*, MASc Thesis, University of Waterloo, 2004.
- [24] E.M. Arruda, M.C. Boyce, “A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, 41 (2), 389-412, 1993.
- [25] L. Anand, “A constitutive model for compressible elastomeric solids”, *Comput. Mech.*, 18, 339-355, 1996.
- [26] M. Peroni, A. Avalle, L. Peroni, “Caratterizzazione dell’influenza della velocità di deformazione sul comportamento meccanico di materiali polimerici” Atti del XXXVI Convegno Nazionale AIAS, 2007.
- [27] A. Wineman, “Nonlinear viscoelastic solids. A review”, *Math. Mech. Solids*, 14, 300-366, 2009.
- [28] L. Peroni, “Evaluation of dynamic characteristics by uni-axial tensile impact”, Proceedings of ICEM12, 12th International Conference on Experimental Mechanics, 2004.
- [29] M. Peroni, L. Peroni, G. Belingardi, “Identification of strain-rate sensitivity of steels with an inverse method”, Proceedings ICEM13, 13th International Conference on Experimental Mechanics, 2007.