El Teorema de Dehn

El Teorema de Dehn

Antonio J. Di Scala

Post print (i.e. final draft post-refereeing) version of an article published on *Revista de Educacion de la Union Matematica Argentina 16, Nro. 2, p. 22-35, (2001).*.
Beyond the journal formatting, please note that there could be minor changes from this document to the final published version. The journal is accessible from here:
http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu

1 Introducción

En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 en París, Hilbert propuso 23 problemas con el objeto de estimular la investigación matemática durante el nuevo siglo. El tercer problema fue quizás el más rápido en ser resuelto: Bricard en 1896 (es decir, antes de ser propuesto) y Max W. Dehn (alumno de Hilbert, conocido además, por haber formulado dos problemas clásicos en teoría de grupos presentados por generadores y relaciones, a saber: el problema de la palabra y el problema de isomorfismo [MT]) en 1900. Este artículo está destinado a exponer dos soluciones de este problema.

Desde la antigüedad sabemos que una manera de calcular el área de un polígono P es dividirlo en sub-polígonos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ buscando que éstos sean a su vez una subdivisión de un polígono al cual sabemos calcularle el área (e.g. un rectángulo o triángulo). El teorema de Bolyai-Gerwien justifica en cierto modo esta idea: *Dados dos polígonos A y B que tengan la misma área se pueden subdividir en sub-polígonos $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ de manera que los A_i's son congruentes con los B_i's* [B], [F, pág.270]. En palabras más sencillas, dados dos polígonos A y B de igual área, es posible dividir a A en sub-polígonos que reagrupados (sin solaparse) adecuadamente forman B. El matemático húngaro Farkas Bolyai (padre de János Bolyai conocido por las geometrías no-euclideanas junto con Gauss y Lobatchevsky; cabe destacar que Farkas Bolyai conoció al joven Gauss en Göttingen y recomendó a su hijo no enredarse con el axioma de las paralelas el cual le obsesionó toda su vida

[MT]) y el oficial alemán aficionado a las matemáticas Gerwien demostraron casi simultáneamente el teorema en 1832 y 1833 respectivamente [B].

Para calcular el volumen de un poliedro podemos proceder en forma análoga, buscando dividirlo en sub-poliedros de manera que estos sub-poliedros sean congruentes con los que provienen de una subdivisión de un poliedro al cual sabemos el volumen. El **Tercer Problema de Hilbert** pregunta: *¿es posible dividir un tetraedro regular de volumen* 1 *en sub-poliedros de manera que estos sub-poliedros sea congruentes con los que provienen de una subdivisión del cubo de lado* 1*?* La respuesta, conocida con el nombre de Teorema de Dehn, es: **No**. A continuación exponemos dos demostraciones de este enunciado. La primera, es la que se encuentra en [F, pág. 288]. Luego, damos una demostración más general y conceptual basada en la idea de *invariante* . Concluímos el artículo señalando algunos resultados relacionados con el Teorema de Dehn y generalizaciones. Deseo agradecer a Leandro Cagliero, Juan Pablo Rossetti y Juan José Bigeón los númerosos comentarios y la invalorable ayuda en la presentación del artículo. También expreso mi agradecimento al Dr. Jorge Vargas por invitarme a escribir el artículo.

2 El Teorema de Dehn, primera versión

Se dice que dos poliedros A y B son *equicompuestos* si existe una subdivisión de A en sub-poliedros $A_1, \dots, A_n$ y una subdivisión de B en sub-poliedros $B_1, \dots, B_n$ tales que A_i es congruente con B_i para $i = 1, \dots, n$. En palabras mas sencillas, es posible encontrar poliedros $P_1, \dots, P_n$ tales que tanto A como B se obtienen reagrupandolos (sin solapamiento).

La idea en la demostración de Dehn es establecer una relación entre los ángulos diedrales de poliedros equicompuestos. Luego, mostrar que esto no se cumple para un cubo y un tetraedro regular de igual volumen.

Un poliedro A consta de caras y aristas. A cada arista a de A le corresponden dos números, su longitud $l(a)$ y su *ángulo diedral* $\alpha(a)$. Recordemos que el ángulo diedral es el ángulo entre las caras que se unen en la arista a visto desde adentro del poliedro. En realidad, convendría escribir $\alpha(a, A)$ para resaltar la dependencia del ángulo diedral respecto al poliedro A, debido a que una misma arista podría ser parte de varios poliedros. Dado el poliedro A denotamos con $\mathcal{A}$ el conjunto de aristas de A.

Vamos a demostrar, en primer lugar, que si A y B son equicompuestos entonces existen enteros positivos m_a, n_b y un entero n de manera que:

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} m_a \alpha(a,A) = \sum_{b\in\mathcal{B}} n_b \alpha(b,B) + n\pi \qquad (*)$$

Luego, vamos a aplicar la identidad anterior a un tetraedro regular de volumen 1 y a un cubo de lado 1. Llamemos θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) al ángulo diedral del tetraedro regular. Este ángulo diedral satisface: $cos(\theta) = \frac{1}{3}$. En efecto, en un triángulo equilatero de lado l y mediana m se verifica $(\frac{l}{2m})^2 = \frac{1}{3}$ como muestra una sencilla aplicacion del teorema de Pitágoras. Ahora, cortamos el tetraedro con un plano perpendicular a una cara que contenga una mediana por esa cara. En este plano queda entonces dibujado un triángulo isósceles (dos de sus lados miden m y otro l) donde θ es el ángulo entre las medianas. Finalmente, usando el teorema del coseno y la relación $(\frac{l}{2m})^2 = \frac{1}{3}$ obtenemos $cos(\theta) = \frac{1}{3}$.

Además la identidad $(*)$ implica que existen enteros no nulos r, s tales que: $s\theta = r\pi$. Vamos a demostrar, en segundo lugar, que si $s\theta = r\pi$ entonces $r = s = 0$. De donde se sigue el Teorema de Dehn.

Resumiendo:

1- Si un cubo de lado uno y un tetraedro regular de igual volumen fueran equicompuestos entonces existirían enteros r, s no nulos tales que $r\pi = s\theta$.

2- Si dos enteros r, s satisfacen $r\pi = s\theta$ entonces son ambos nulos.

Prueba de 1-. En realidad, vamos a demostrar la identidad $(*)$. Llamemos $P_1, \ldots, P_n$ a los poliedros que reagrupados (sin solapamientos) de cierto modo forman A y de cierto otro modo forman B. La idea es calcular la suma de todos los ángulos diedrales de todos los poliedros P_i's utilizando que una reagrupación forma A y otra forma B. Sea entonces,

$$S = \sum \alpha(a, P_j)$$

la suma de todos los ángulos diedrales de todos los poliedros P_i's.

Ahora, pensando en A podemos decir que las aristas de los poliedros P_i's se agrupan en tres clases: I las aristas que son parte de una arista de A, II las aristas que son parte de una cara de A y no están en una arista de A y finalmente III las aristas que están en el interior de A, salvo posiblemente por los extremos. Escribimos entonces,

$$S = \sum_{a \in I} \alpha(a, P_j) + \sum_{a \in II} \alpha(a, P_j) + \sum_{a \in III} \alpha(a, P_j)$$

Donde $a \in I$ indica que la arista a está en la situación I y de manera análoga $a \in II$ y $a \in III$.

Ahora, calculamos separadamente cada una de estas sumas. Para la primera suma, notemos que cada arista de A está subdividida en segmentos que pueden ser aristas de varios P_i's. Resulta claro que dependiendo de si el ángulo $\alpha(a, A)$ es obtuso o no la suma de los ángulos diedrales de los poliedros que se encuentran en este segmento de esta arista será $\alpha(a, A) - \pi$ o $\alpha(a, A)$. De esta manera recorriendo una por una las arista de A obtenemos :

$$\sum_{a \in I} \alpha(a, P_j) = \sum_{a \in \mathcal{A}} n_a \alpha(a, A) - m\pi$$

donde $m, n_a \in \mathbb{N}$.

La suma sobre las aristas de tipo II es quizás la más sencilla de calcular, ya que los poliedros que comparten una arista dada que está en una cara deben acomodarse para formar esa cara. De donde está suma es π. De donde obtenemos:

$$\sum_{a \in II} \alpha(a, P_j) = r\pi$$

donde $r \in \mathbb{N}$.

Finalmente, las aristas de poliedros que están en el interior de A se pueden agrupar, a su vez, en aquellas que no están en ninguna cara de ninguno de los poliedros P_i's y las que están en una cara de algun poliedro P_i's. En el primer caso resulta claro que la suma de los ángulos es 2π mientras que en el segundo debe ser π. Podemos entonces escribir:

$$\sum_{a \in III} \alpha(a, P_j) = s\pi + l2\pi$$

donde $s, l \in \mathbb{N}$.

Incorporando estos cálculos parciales a la suma de S arribamos a:

$$S = \sum_{a \in \mathcal{A}} n_a \alpha(a, A) - m\pi + r\pi + s\pi + l2\pi$$

Razonando análogamente con B hemos demostrado $(*)$. Usando $(*)$ para un cubo de lado 1 y un tetraedro regular de volumen 1 obtenemos la relación **1**$-$.

Prueba de 2- [B, pág. 50]. Recordemos que debemos demostrar que si $r\theta = s\pi$ donde $cos(\theta) = \frac{1}{3}$ entonces $r = s = 0$. La idea en este tipo de afirmación es razonar por el absurdo. Supongamos que exista dicha relación. Luego, de las fórmulas de De Moivre, se sigue que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $cos(n\theta) = \pm 1$. En realidad, las fórmulas de De Moivre son un caso particular de las formulas de **adición** del *seno* y del *coseno*. Estas fórmulas de adición nos permiten razonar por inducción, es decir definiendo la sucesión $a_k := cos(k\theta)$ podemos hallar una relación de recurrencia la cual esta sucesión satisface . Más precisamente, de las fórmulas de adición resulta:

$$\begin{cases} cos((k+1)\theta) = cos(k\theta+\theta) = cos(k\theta)cos(\theta) - sen(k\theta)sen(\theta) \\ cos((k-1)\theta) = cos(k\theta-\theta) = cos(k\theta)cos(\theta) + sen(k\theta)sen(\theta) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades resulta que la sucesión $a_k := cos(k\theta)$ satisface:

$$\begin{cases} a_{k+1} = \frac{2}{3}a_k - a_{k-1} \\ a_1 = \frac{1}{3} \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Ahora, utilizando el principio de inducción no es difícil verificar que $a_k = \frac{c_k}{3^k}$ para $1 \leq k$, donde c_k es un entero que no es divisible por 3. Luego, $cos(k\theta)$ nunca es un entero salvo que $k = 0$, esto contradice que $cos(n\theta) = \pm 1$ con $n \neq 0$ y demuestra **2**$-$.

Nota 2.1 *En [F, pág. 290], se da la siguiente demostración de* **2**$-$. *De* $cos(\theta) = \frac{1}{3}$, *(*$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$*), resulta* $sen(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. *Es decir, usando números complejos* $cos(\theta) + isen(\theta) = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1+i2\sqrt{2}}{3}$. *Supongamos que existe* $n \neq 0$ *tal que* $cos(n\theta) = \pm 1$. *Luego, de las formula de De Moivre:* $cos(n\theta) + isen(n\theta) = (\frac{1+i2\sqrt{2}}{3})^n$ *obtenemos que la parte imaginaria de* $(\frac{1+i2\sqrt{2}}{3})^n$ *debe ser cero (pues* $cos(n\theta) = \pm 1$ *implica* $sen(n\theta) = 0$*). Es decir,* $0 = Im((\frac{1+i2\sqrt{2}}{3})^n) = Im((1+i2\sqrt{2})^n)$. *Utilizando la fórmula del binomio de Newton resulta:*

$$0 = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k 2^{3k} = n + \sum_{1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1} (-1)^k 2^{3k}$$

Ahora, escribamos $n = 2^r m$ con m impar. Vamos a demostrar que en la sumatoria $\sum_{1\leq k\leq \frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} n \\ 2k+1 \end{pmatrix} (-1)^k 2^{3k}$ cada sumando es divisible por 2^{r+1}, lo cual es absurdo ya que implica m par. En efecto, escribamos $(2k+1)! = 2^{o_k}.m_k$ con m_k impar, donde $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$. No es difícil demostrar que $o_k < 2k+1 \leq 3k$. Finalmente,

$$\begin{pmatrix} n \\ 2k+1 \end{pmatrix} (-1)^k 2^{3k} = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-2k)2^{3k}}{(2k+1)!} =$$

$$= (-1)^k \frac{2^r m(n-1)\dots(n-2k)2^{3k}}{2^{o_k}.m_k} = (-1)^k 2^{(r+3k-o_k)} \frac{m(n-1)\dots(n-2k)}{m_k}$$

Como sólo hemos manipulado potencias de 2 el número $\frac{m(n-1)\dots(n-2k)}{m_k}$ es entero y esto concluye la demostración, ya que $3k - o_k > 0$.

3 El Teorema de Dehn, segunda versión

3.1 La idea de invariante

La idea central en la segunda versión, al igual que en muchos otros problemas de la matemática moderna, es calcular un *invariante* . En general, la idea del cálculo de un invariante es posible ilustrarla de la siguiente manera: Supongamos que se nos pregunta si podemos transformar el objeto A en el B utilizando solamente transformaciones permitidas $\mathcal{R}$. Luego, si podemos definir una función f del conjunto de todos los transformados de A y B de manera que $f(A) \neq f(B)$ y f sea invariante por las transformaciones permitidas $\mathcal{R}$ (i.e. Si $A' = T(A)$, donde T es una transformación permitida entonces $f(A') = f(A)$), entonces claramente no podremos transformar A en B. Por ejemplo, podemos pensar en el famoso *cubo mágico* o *cubo de Rubik* . Aquí, el objeto B es el cubo cuyas caras contienen un solo color mientras que el objeto A es un cubo *desordenado* , es decir cuyas caras contienen diferentes colores. Finalmente, las reglas permitidas son los movimientos que admite el cubo. Naturalmente, que el cubo que se vende en los negocios se puede ordenar.

En Física aparecen *leyes de conservación* (energía, momento, etc) que son ejemplos de invariantes en el sentido que estamos hablando. Es decir, un sistema físico se halla en el estado $\mathbf{e_0}$ y queremos ver si es posible, sin romper las leyes de la física, alcanzar el estado final $\mathbf{e_1}$. Luego, si el valor de la energía (o de una ley de conservación) es distinto en $\mathbf{e_0}$ y en $\mathbf{e_1}$ esto no será posible. Sin embargo, muchas veces el problema que uno tiene que resolver no está aparentemente vinculado con el cálculo de un invariante. Muchas veces se necesita mucho tiempo, un gran esfuerzo e ingenio para descubrir el invariante adecuado. Otras veces los matemáticos siguen buscándolo (e.g. la conjetura de Poincaré en dimensión 3, que pregunta si una variedad cerrada (i.e. compacta y sin borde) simplemente conexa de dimensión 3 es (homeomorfa a) la esfera de dimensión 3).

Existen situaciones en las cuales el conjunto de transformaciones permitidas tiene la estructura de *grupo* . En otras palabras, los objetos A y B son dos elementos de un cierto conjunto X y las transformaciones permitidas son un conjunto $\mathcal{R}$ de biyecciones de X. Ésta es precisamenta la situación que encontramos en *Geometría* donde se tiene el grupo de los movimientos rigidos y el problema esencial es descubrir cuáles son los invariantes geométricos. Por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo arbitrario es π. Otro ejemplo es la curvatura de una curva plana, que permite determinar si dos curvas son las mismas, salvo su posición en el plano, o de manera análoga, la curvatura y la torsión que resuelve el mismo problema en el caso de curvas en el espacio. Alrededor de 1870, el matemático alemán Felix Klein definió **Geometría**, en general, como la totalidad de invariantes de un mismo grupo y se lanzó (él y colaboradores) al cálculo y búsqueda sistemática de estos invariantes para una diversa gama de grupos en lo que se conoció como el *Programa de Erlangen* (Erlangen es el nombre de la ciudad en Alemania donde se realizó el proyecto).

3.2 El invariante de Dehn

Si bien no lo vamos a usar, se conoce como *invariante de Dehn* al producto tensorial:

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} l(a)\otimes\alpha(a)$$

Para el lector que conozca la noción de producto tensorial nos referimos aquí a $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Una manera de evitar la noción de producto tensorial es siguiendo a [B]. Para ello, sea f una función, en principio arbitraria, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Definimos

D_f como el número real:

$$D_f = \sum_{a \in \mathcal{A}} l(a) f(\alpha(a))$$

En realidad, podemos pensar a D_f como una función. Es decir, al poliedro A le asignamos $D_f(A) := \sum_{a \in \mathcal{A}} l(a) f(\alpha(a))$.

Sean $P_1, \ldots, P_n$ poliedros y armemos con ellos dos poliedros A y B. Notemos que el número real $I = \sum_{i=1}^{n} D_f(P_i)$ no depende ni de A ni B. Cuando reagrupamos los poliedros P_i's para formar el poliedro A algunas aristas de los poliedros P_i se identifican, de esta forma obtenemos otra expresión para I, a saber:

$$I = \sum_{a} l(a) \sum_{\mathcal{P}_j \ni a} f(\alpha(a, P_j))$$

La expresión anterior para I sugiere tratar de obtener funciones aditivas con respecto a los ángulos diedrales, de manera que podamos pasar la suma dentro del argumento de la función f y obtener:

$$I = \sum_{a} l(a) f(\sum_{\mathcal{P}_j \ni a} \alpha(a, P_j))$$

Bajo la hipótesis de que tenemos una tal función aditiva respecto a los ángulos diedrales, observamos que si una arista a está en el interior del poliedro A entonces debe valer o bien $\sum_{\mathcal{P}_j \ni a} \alpha(a, P_j) = 2\pi$ ó igual a π (esto último en caso de que la arista esté en una cara de un sub-poliedro). De otra forma la arista está en una cara. Supongamos que no pertenezca a una de las aristas de A. Luego, no es difícil verificar que en este caso $\sum_{\mathcal{P}_j \ni a} \alpha(a, P_j) = \pi$. Queda entonces la suma sobre las aristas que son partes de aristas de A. En este caso, dependiendo si el ángulo $\alpha(a, A)$ es obtuso o no la suma es igual a $\pi - \alpha(a, A)$ ó $\alpha(a, A)$ respectivamente. Esto sugiere agregar a π al conjunto de aditividad de f, es decir, supongamos además que $f(n\pi + m\alpha) = nf(\pi) + mf(\alpha)$ siempre que α sea un ángulo diedral y $n, m \in \mathbb{Z}$. Dicho esto, el análisis anterior arroja la siguiente relación entre I y $D_f(A)$:

$$I = D_f(A) + f(\pi) c_A$$

La explicación de la aparición de $D_f(A)$ en la igualdad anterior, radica en la observación de que al sumar las longitudes de las aristas de los poliedros P_j que son sub-aristas de la arista a de A se obtiene la longitud de la arista a. La constante c_A dependen naturalmente de A. Si además, suponemos que f posee la propiedad de aditividad respecto de los ángulos diedrales de B también obtenemos, igualando la expresiones obtenidas de I, que:

$$D_f(A) - D_f(B) = f(\pi)d_{A,B}$$

donde la constante $d_{A,B}$ depende de los poliedros A y B. Convengamos en decir que una función f es *aditiva* respecto a un conjunto X si $f(nx+my) = nf(x) + mf(y)$ para $x, y \in X$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Resulta que hemos establecido la siguiente proposición:

Proposición 3.1 *Sean A y B dos poliedros equicompuestos. Sea $X(A,B) := \{\pi\} \cup \{\alpha(a,A)\} \cup \{\alpha(b,B)\}$, el conjunto de todos los ángulos diedrales de A,B unión $\{\pi\}$. Entonces, para toda función f aditiva respecto a X, existe una constante $d_{A,B}$ tal que:*

$$D_f(A) - D_f(B) = f(\pi)d_{A,B}$$

Además, si f se anula en π obtenemos: $D_f(A) = D_f(B)$.

Diremos que una función f aditiva, en las condiciones de la última parte de la proposición anterior es π-nula para los poliedros A y B. Precisamos esto en la siguiente definición:

Definición 3.1 *Sean A y B dos poliedros. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva respecto a $X(A,B)$ tal que $f(\pi) = 0$ se llama π-nula para A y B.*

Notemos que en realidad nos interesa cuánto vale f en las combinaciones lineales enteras de elementos de $X(A,B)$. De esta forma para construir funciones π-nulas sólo necesitamos definirlas bien en $X(A,B)$ (i.e. que esta definición permita extenderlas luego por linealidad en los enteros) y definirlas de manera arbitaria en el resto de los números reales que no sean combinaciones lineales enteras de elementos en $X(A,B)$.

Para demostrar el Teorema de Dehn alcanza con construir una función π-nula para el cubo A de lado unidad y el tetraedro regular B de volumen 1, de manera que: $D_f(A) \neq D_f(B)$.

Nota 3.2 *Una manera alternativa de motivar la introducción de funciones π-nulas es pensando en ellas como una generalización de la identidad $(*)$ en la primera versión. Es decir, si no existen enteros no todos nulos $m_a, n_b, n \in \mathbb{Z}$ tales que $(*)$ se cumple entonces no es difícil construir un función π-nula f tal que $D_f(A) \neq D_f(B)$. En efecto, definimos f igual a cero sobre los ángulos diedrales de B, uno en los ángulos diedrales de A y cero en π. Como el 0 se escribe de una única manera como combinación entera de los ángulos diedrales de A y B junto con π la definición anterior se extiende sin problemas a las combinaciones lineales enteras de elementos de $X(A, B)$. Sin embargo, en la identidad $(*)$ los enteros m_a, n_b, n son positivos y no es evidente a priori que de la no existencia de enteros positivos que satisfagan $(*)$ se siga que no existan enteros arbitrarios que satisfagan $(*)$ y así construir una función π-nula tal que $D_f(A) \neq D_f(B)$. Es interesante notar que si nos olvidamos de los poliedros y pensamos en la identidad $(*)$ como una identidad entre números reales α's y β's positivos menores o iguales a 2π no es equivalente la existencia de enteros positivos que satisfagan $(*)$ con la existencia de enteros de signo arbitrario que la satisfagan. Podría entonces suceder que $(*)$ no se cumpla para enteros positivos por un lado y por otro lado, toda función f π-nula para A y B verifique: $D_f(A) = D_f(B)$. No obstante, el Teorema de Sydler demuestra que esto no es posible (ver Algunos comentarios finales).*

3.3 Las funciones π-nulas del cubo y el tetraedro regular

En el caso del cubo hay un solo ángulo diedral: $\frac{\pi}{2}$. Sea θ el único ángulo diedral del tetraedro regular de volumen 1. Si f es π-nula para el cubo unidad A y el tetraedro regular B vamos tener que: $D_f(A) = 0$. En efecto, $D_f(A) = 12f(\frac{\pi}{2}) = 6f(2\frac{\pi}{2}) = 6f(\pi) = 0$. Entonces, debemos definir $f : L \to \mathbb{R}$, donde $L = \{n\theta + m\pi + r\frac{\pi}{2} : n, m, r \in \mathbb{Z}\}$ de manera que $f(n\theta + m\pi + r\frac{\pi}{2}) = nf(\theta) + mf(\pi) + rf(\frac{\pi}{2})$. Es decir, alcanza con definir f en θ,π y $\frac{\pi}{2}$. El problema es que un mismo elemento de L se puede, en principio, expresar de varias formas como combinacion lineal entera de θ,π y $\frac{\pi}{2}$. Luego, queda claro que para evitar este inconveniente hay que *identificar* todas las combinaciones enteras que expresan el 0 y definir f en ellas de manera que valga 0. Esto impondrá las condiciones que deben satisfacer $f(\theta)$,$f(\pi)$ y $f(\frac{\pi}{2})$ para que la definición se extienda sin problemas. Anteriormente se demostró que si $0 = n\theta + m\pi$ entonces $n = m = 0$. Usando esto, resulta que si $n\theta + m\pi + r\frac{\pi}{2} = 0$

entonces $n = 0$ y $2m + r = 0$. De donde obtenemos que $f(\theta)$ podemos definirlo arbitrariamente, mientras que $f(\pi) = 2f(\frac{\pi}{2})$. Definiendo entonces, $f(\theta) := 1$,$f(\pi) := f(\frac{\pi}{2}) := 0$ concluímos que $D_f(B) = 6l \neq 0$, donde l es la longitud de la arista del tetraedro regular de volumen 1. Lo que demuestra el Teorema de Dehn.

4 Algunos comentarios finales

Resulta claro que la segunda demostración es más general que la primera debido a que podría suceder, en principio, que entre los ángulos diedrales de dos poliedros A y B exista una relación como la $(*)$ de la primera demostración y sin embargo los poliedros A y B no sean equicompuestos. En 1965, Sydler [Sy] demostró que si dos poliedros A y B poseen el mismo volumen y el mismo invariante de Dehn entonces son equicompuestos. En términos de funciones π-nulas, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.1 *[Dehn (1900), Sydler (1965)]. La condición necesaria y suficiente para que dos poliedros A y B sean equicompuestos es que tengan el mismo volumen y que para toda función π-nula para A y B se satisfaga $D_f(A) = D_f(B)$.*

Este resultado puede consultarse también en [B1], [C] y [S].

Una generalización del problema de equicomposición se obtiene considerando un subgrupo G de movimientos más pequeño que el grupo de todos los movimientos rígidos. Más precisamente, diremos que dos polígonos A y B (resp. poliedros) son G-equicompuestos si existen polígonos (resp. poliedros) $P_1, \ldots, P_n$ y elementos $g_1, \ldots, g_n$ en G tales que:

$$\begin{cases} A = P_1 \cup \cdots \cup P_n \\ B = g_1(P_1) \cup \cdots \cup g_n(P_n) \end{cases}$$

Cuando G es el grupo de traslaciones, es posible decidir si dos poliedros (resp. polígonos) son G-equicompuestos o no calculando el *invariante de Hadwiger* .

Otra generalización es considerar el problema de equicomposición de polígonos o poliedros en las esferas o los espacios hiperbólicos. En este caso sólo se conoce la respuesta en dimensiones bajas [C].

Finalmente, es interesante notar que en la actualidad se utilizan conceptos y herramientas de álgebra homológica para demostrar estos resultados (e.g.

el Teorema 4.1 equivale a probar la exactitud de una sucesión de morfismos de grupos abelianos, llamada sucesión de Jessen, ver más abajo). También existen conexiones de estos temas con K-teoría algebraica, homología de grupos de Lie, teoría de haces, fibrados con conexiones integrables, etc. La aparición de grupos abelianos se explica muy someramente (e informalmente) de la siguiente manera: en el conjunto $\mathcal{P}$ de poliedros uno define $+$ como la operación de apoyar un poliedro contra otro. De esta manera queda definido un grupo abeliano, dentro del cual los prismas Z (poliedros que se obtienen multiplicando un polígono por un intervalo) juegan un papel central ya que su invariante de Dehn es 0 (i.e. toda función π-nula f para un prisma y otro poliedro arbitrario satisface: $D_f(Z) = 0$). Luego, el invariante de Dehn induce un morfismo $\bar{D}$ entre $\mathcal{P}/\mathcal{Z}$ y $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donde $\mathcal{Z}$ es el subgrupo de $\mathcal{P}$ generado por los prismas Z. Luego, el Teorema de Sydler resulta de la igualdad entre $\mathcal{Z}$ y el núcleo de $\bar{D}$. Más precisamente, se debe demostar la exactitud de la sucesión de Jessen (la cual tiene en cuenta el volumen del poliedro):

$$0 \to \mathcal{P}/\mathcal{Z} \xrightarrow{\bar{D}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \to 0$$

para más detalles (e.g. definición de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$) consultar [C].

References

[B] Boltiansky, V.G.: *Figuras equivalentes y equicompuestas,* Lecciones Populares de matemáticas, Editorial Mir, Moscú 1981.

[B1] Boltiansky, V.G.: *Hilbert's Third Problem,* New York: Wiley (1978).

[C] Cartier, P.: *Décomposition des Polyédres: le point sur le troisiéme probléme de Hilbert,* Sémin. Bourbaki (1984-1985), No. 646. También en: Astérisque 133-134, pág. 261-288 (1986).

[F] Forder, H.G.: *The foundations of euclidean geometry,* Dover Publications, Inc. New York 1958.

[K] Kantor, J-M.: *Hilbert's problems and Their Sequels,* THE MATHEMATICAL INTELLIGENCER VOL.18 NO.1 (1996), pág. 21-30, Springer-Verlag New York.

[MT] *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians*

[S] Sah, G.: *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence,* London: Pitman (1979).

[Sy] Sydler, J.-P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyédres de l'espace euclidien á trois dimensions,* Comment. Math. Helv. **40** (1965), pág. 43-80.

Fa.M.A.F., Universidad Nacional de Córdoba, Ciudad Universitaria, 5000 Córdoba, Argentina
E-mail address: `discala@mate.uncor.edu`