Introduzione alla geometria della sottovarietà

Introduzione alla geometria delle sottovarietà.*

Antonio J. Di Scala †

In ricordo del Prof. Giuseppe Vaccaro.

1 Prefazione.

Questi appunti informali sono tratti da un corso da me tenuto per studenti di dottorato, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università "La Sapienza" di Roma, durante il trimestre Ottobre-Dicembre del 2004.

Desidero ringraziare Stefano Marchiafava per avermi invitato a Roma e per il costante aiuto che mi ha dato per migliorare la mia conoscenza dell'italiano.

Vorrei inoltre ringraziare il mio amico Andrea Sambusetti per la revisione del testo, e tutti i miei studenti per l'interesse con cui hanno seguito il corso e le loro correzioni al mio italiano.

2 Seminario I.

2.1 Varietà differenziabili, varietà riemanniane e loro sottovarietà.

Ricordiamo che una *varietà differenziabile* M^n è uno spazio topologico di Hausdorff munito di un *atlante differenziabile*, cioè una famiglia $\mathcal{A} = (U_\alpha, \phi_\alpha)$, dove gli U_α sono aperti tali che $\cup_\alpha U_\alpha = M$, e le $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ sono applicazioni continue tali che il cambiamento di coordinate $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ sia una funzione C^∞. Si dice anche che $\mathcal{A}$ definisce una *struttura differenziabile* su M.
Ricordiamo anche che una varietà M si dice una *sottovarietà* di una varietà $\tilde{M}$ se esiste un'immersione iniettiva $i : M \to \tilde{M}$.

Osservazione 2.1 *Vi sono spazi topologici M con diverse strutture differenziabili non compatibili: cioè tali che il cambiamento di coordinate tra i due atlanti non sia C^∞. (e.g. le sfere esotiche S^7 scoperte da J. Milnor).*

*Pubblicato come Rapporto interno Universita' degli Studi di Roma "La Sapienza", n.22/04, (2004)

†Lavoro svolto nell'ambito delle attività del gruppo G.M.S.A.G.A. dell'I.N.D.A.M.

Proseguiamo ricordando che una *varietà Riemanniana* (M, g) è una varietà differenziabile con un prodotto scalare definito positivo $g(X, Y)$ definito su ogni fibra del fibrato tangente TM, che varia in modo C^∞. Si dice anche che g è la *metrica* o la *struttura Riemanniana* di (M, g).

Se $i : M \to \tilde{M}$ è una sottovarietà di una varietà riemanniana $(\tilde{M}, g)$, possiamo dotare M della metrica indotta su TM da g; si dice allora che M è una *sottovarietà riemanniana* di $(\tilde{M}, g)$.

2.2 Teorema di Frobenius.

Ricordiamo che una *distribuzione* sulla varietà differenziabie M è una scelta C^∞ di sottospazi $\mathcal{H}_p \subset T_pM$ tutti di ugual dimensione.
Una distribuzione si dice *integrabile* se per ogni $p \in M$ passa una sottovarietà F_p, detta anche *foglia* della distribuzione in p, tale che $T_qF_p = \mathcal{H}_p$.
Una distribuzione $\mathcal{H}$ si dice *involutiva* se $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$, così il crochet $[X, Y]$ di campi vettoriale a valori in $\mathcal{H}$ è ancora a valori in $\mathcal{H}$.

Teorema 2.2 (di Frobenius) *Una distribuzione $\mathcal{H}$ è involutiva se e solo se è integrabile.*

Una dimostrazione rapida si basa sul seguente lemma:

Lemma 2.3 *Sia F_t^X il flusso di un campo vettoriale X tangente a $\mathcal{H}$, cioè tale che $X_p \in \mathcal{H}_p$ per ogni p. Allora, se $\mathcal{H}$ è involutiva, il flusso F_t^X lascia $\mathcal{H}$ invariante, cioè*

$$F_t^X \mathcal{H} \subset \mathcal{H}.$$

Questo lemma si dimostra facilmente facendo uso dell'espressione locale di un flusso. Sia allora $X_1, \dots X_k$ una base locale di $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{H}$ è involutiva il lemma implica che

$$(s_1, s_2, \cdots, s_k) \to F_{s_1}^{X_1} \circ F_{s_2}^{X_2} \circ \cdots \circ F_{s_k}^{X_k}(p)$$

è una foglia che passa per p. Viceversa, se esiste una foglia $i : F_p \to M$ che passa per ogni punto p, è facile mostrare che $i([X, Y]) = [i(X), i(Y)]$, e quindi H è involutiva. □

Osservazione 2.4 *Si può pensare alle parentesi di Lie $[X, Y]_p$ come al secondo termine del seguente sviluppo di Taylor, in una carta locale:*

$$F_s^X \circ F_s^Y \circ F_{-s}^X \circ F_{-s}^Y(p) = s^2[X, Y]_p + O(s^3)$$

Da ciò si vede ancora, immediatamente, che una distribuzione integrabile è necessariamente involutiva.

Il ragionamento precedente mostra che se la distribuzione $\mathcal{H}$ è involutiva allora esistono delle coordinate locali $s_1, s_2, \cdots, s_k, s_{k+1}, \cdots, s_n$ tali che le foglie di $\mathcal{H}$ siano date, localmente, precisamente dalle equazioni $s_{k+1} = c_1, \cdots, s_n = c_n$. Per trovare tale sistema di coordinate è infatti sufficiente considerare una sottovarietà T trasversale a $\mathcal{H}$ e usare tale ragionamento partendo dai punti di T.

2.3 Fibrati: connessione, curvatura, trasporto parallelo e olonomia.

Sia $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale, un fibrato cioè la cui fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ è uno spazio vettoriale; per esempio, il fibrato tangente $TM \to M$ o il fibrato normale $\nu(M) \to M$ di una sottovarietà riemanniana M. La dimensione delle fibre E_p si chiama *rango* del fibrato.
Una *connessione* o *derivata covariante* su E è un'applicazione

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$\mathbb{R}$-bilineare, C^∞-lineare in $\Gamma(TM)$ e che verifica l' identità di Leibniz

$$\nabla_X(f\xi) = X(f)\xi + f\nabla_X\xi$$

Una sezione ξ di E si dice *parallela lungo la curva* $\gamma(t)$ di M se soddisfa l'equazione differenziale

$$\nabla_{\gamma'(t)}\xi = 0.$$

Questa è un' equazione differenziale lineare. In particolare, una sezione parallela $\xi(t)$ lungo una curva $\gamma(t)$ dipende solo dal valore che ξ assume in un qualsiasi punto di $\gamma(t)$ (cioè dalla condizione iniziale). Il *trasporto parallelo lungo una curva* γ è l'applicazione $\tau_\gamma : E_{\gamma(t)} \to E_{\gamma(0)}$, che si ottiene prendendo $\xi_p \in E_{\gamma(t)}$ come condizione iniziale.

Proposizione 2.5 *Sia $\xi \in \Gamma(E)$ una sezione definita in un intorno di una curva $\gamma(t) \subset M$. La relazione tra derivata covariante e trasporto parallelo è data dalla seguente equazione*

$$\frac{d\tau_\gamma\xi}{dt}|_{t=0} = \nabla_{\gamma'(0)}\xi$$

Osservazione 2.6 *L' equazione precedente mostra che una sezione è* parallela *(cioè $\nabla_{(\cdot)}\xi = 0$) se e solo se essa è invariante per trasporto parallelo.*

Il *gruppo di olonomia* $Hol_p(\nabla) \subset GL(E_p)$ è il gruppo generato da tutti i trasporti paralleli $\tau_\gamma : E_p \to E_p$ lungo ogni curva chiusa (cappio) con origine in $p \in M$. Il gruppo di olonomia *ristretta* $Hol_p^*(\nabla) \subset GL(E_p)$ è il gruppo generato dai trasporti paralleli $\tau_\gamma : E_p \to E_p$ lungo ogni cappio omotopicamente banale con origine in $p \in M$.

Osservazione 2.7 *Sfruttando la contraibilità dei cappi che definiscono i gruppi di olonomia ristretta, si mostra che tali gruppi sono sottogruppi connessi per archi (C^1) di $GL(E_p)$. Poiché i sottogruppi connessi per archi (C^1) di un gruppo di Lie sono sottogruppi di Lie (si veda [KNI, Appendix 4]) si deduce che i gruppi di olonomia ristretta sono gruppi di Lie. Quindi, $Hol_p^*(\nabla)$ è un sottogruppo normale di $Hol_p(\nabla)$, e da questo segue (se il gruppo fondamentale di M è numerabile, e.g. per M paracompatta) che $Hol_p^*(\nabla)$ è la componente connessa dell' identità di $Hol_p(\nabla)$.*

Il *gruppo di olonomia locale* $Hol_p^{loc}(\nabla) \subset GL(E_p)$ è il gruppo ottenuto prendendo l'intersezione di tutti i gruppi di olonomia di ogni intorno di p. Sfruttando il fatto che questi sono gruppi di Lie ed hanno dimensione finita, si dimostra che esiste un aperto U di p tale che $Hol_p^{loc}(\nabla)$ è uguale al gruppo di olonomia ottenuto facendo il trasporto parallelo lungo le curve chiuse contenute in U.

Il *tensore di curvatura* $R^{\nabla}_{X,Y}$ si definisce come

$$R^{\nabla}_{X,Y}\xi := \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi.$$

Osservazione 2.8 *Sia ∇ una connessione del fibrato vettorial $E \to M$ e sia $f(s,t)$ una superficie parametrizzata di M, un'applicazione cioè $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$. Assumiamo che $(0,0) \in U$ e che $f(0,0) = p$. Fissato un $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, si faccia il trasporto parallelo $\tau(\epsilon)$ lungo il perimetro del rettangolo s,t di lato ϵ. Facendo uso della relazione tra ∇ e trasporto parallelo, si può sviluppare $\tau(\epsilon)$ in serie di Taylor e mostrare che*

$$\tau(\epsilon)(\cdot) = Id(\cdot) + \epsilon^2 R^{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial t}|_{(0,0)}, \frac{\partial f}{\partial s}|_{(0,0)}}(\cdot) + O(\epsilon^3).$$

Teorema 2.9 *Il tensore di curvatura R^{∇} è nullo se e solo se il gruppo di olonomia ristretto è banale, cioè $Hol_p^*(\nabla) = \{e\}$.*

Idea della dimostrazione. Supponiamo che $Hol_p^*(\nabla) = \{e\}$. Sia $\xi_1(p), \cdots, \xi_k(p)$ una base di E_p. Sia U un intorno di p diffeomorfo a una palla. Se si fa il trasporto parallelo dei ξ_i lungo i raggi, per $i = 1, \cdots, k$, si definisce una base C^∞ del fibrato su U. Poiché il gruppo di olonomia $Hol_p^*(\nabla)$ è banale, questa base non dipende dal trasporto lungo i raggi, quindi ogni sezione ξ_i è parallela, cioè $\nabla \xi_i = 0$. Di conseguenza, si trova che $R^{\nabla}_{X,Y}\xi_i = \nabla_X \nabla_Y \xi_i - \nabla_Y \nabla_X \xi_i - \nabla_{[X,Y]}\xi_i = 0$ per $i = 1, \cdots, k$, cioè che il tensore di curvatura è nullo.
Assumiamo ora che $R^{\nabla} = 0$. Per dimostrare che $Hol_p^*(\nabla) = \{e\}$ basta mostrare che, data un'omotopia $\gamma_s(t)$ tra due curve da $p = \gamma_s(0)$ a $q = \gamma_s(1) \in M$, il trasporto parallelo di un vettore ξ_p lungo $\gamma_s(t)$ non dipende da s. Scriviamo $f(s,t) = \gamma_s(t)$ e sia $\xi(s,t)$ il trasporto parallelo di ξ_p lungo la curva $\gamma_s(t)$ per s fissato. Allora,

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \xi(s,t) - \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \xi(s,t) = R^{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}} \xi(s,t).$$

L' ipotesi $R^{\nabla} = 0$ e la costruzione di $\xi(s,t)$ (cioè $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \xi(s,t) = 0$) implicano che

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \xi(s,t) = 0$$

quindi $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \xi(s,t)$ è ancora parallelo lungo $\gamma_s(t)$. Poiché $\xi(s,0) = \xi_p$, segue che la condizione iniziale $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \xi(s,0)$ è nulla. Dunque $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \xi(s,t) = 0$ e ponendo $t = 1$ si trova che $\xi(s,1)$ è costante, cioè che il trasporto parallelo non dipende da $\gamma_s(t)$. $\square$

Osservazione 2.10 *L' idea precedente è un primo esempio di "principio di olonomia": se il gruppo di olonomia lascia fisso un oggetto, allora questo oggetto si può estendere parallelamente. Per esempio, dato un fibrato vettoriale con una connessione* ∇ *, ci si chiede se esista una metrica* g *su* E *compatibile con* ∇ *, cioè per cui il trasporto parallelo sia un' isometria. La risposta è che la metrica* g *esiste se e solo se* $Hol_p(\nabla)$ *è relativamente compatto in* $GL(E_p)$ *.*

L'*algebra di olonomia* $hol_p(\nabla)$ è l'algebra di Lie del gruppo $Hol_p(\nabla)$. L'osservazione 2.8 mostra che gli operatori di curvatura si trovano nell' algebra di olonomia, cioè $R^{\nabla}_{X_p,Y_p} \in hol_p(\nabla)$. Sia $\gamma(t)$ una curva di origine $p = \gamma(0)$. Tramite il trasporto parallelo, è possibile trasportare in p tutti gli operatori di curvatura di E_q, con $q = \gamma(t)$, cioè considare $\tau_\gamma \circ R^{\nabla}_{X_q,Y_q} \circ \tau_\gamma^{-1}(t)$. I gruppi di olonomia $Hol_p(\nabla)$ e $Hol_q(\nabla)$ sono coniugati, quindi $\tau_\gamma \circ R^{\nabla}_{X_q,Y_q} \circ \tau_\gamma^{-1}(t) \in hol_p(\nabla)$.
Questo dimostra una parte del seguente teorema:

Teorema 2.11 (Teorema di olonomia di Ambrose-Singer) *L'algebra di olonomia* $hol_p(\nabla)$ *è uguale al sottospazio di* $gl(E_p)$ *generato da tutti gli operatori di curvatura* $R^{\nabla}_{X_q,Y_q}$ *trasportati parallelamente in* $gl(E_p)$ *lungo qualunque curva.*

Idea della dimostrazione. Sia $\pi : L(E) \to M$ il *fibrato delle basi di* E, cioè la cui fibra $\pi^{-1}(p)$ è l' insieme di tutte le basi di E_p. Esiste un' azione di $GL(k)$ su $L(E)$ (se $k = rango(E)$) che può interpretarsi come un cambiamento di base; si dice allora che $\pi : L(E) \to M$ è un *fibrato principale con gruppo strutturale* $GL(k)$. Lo spazio tangente $TL(E)$ si spezza come

$$TL(E) = V \oplus H$$

dove V (lo *spazio verticale*) è lo spazio tangente alla foliazione determinata da π^{-1}, cioè tangente a ogni fibra, e H (lo *spazio orizzontale*) è definito come lo spazio generato dai vettori velocità di tutte le curve $b(t) \subset L(E)$ parallele lungo qualsiasi curva di M. Per definizione di H allora, il trasporto parallelo lungo una curva $\gamma(t) \subset M$ si identifica con il sollevamento orizzontale $b(t) \subset L(M)$ di $\gamma(t)$.

Osservazione 2.12 *Il Teorema 2.9 implica che la distribuzione* H *è integrabile se e solo se* $R^{\nabla} = 0$ *.*

Fissata una base $b \in L(E)_p$, la fibra $L(E)_p$ si identifica naturalmente con $GL(E_p)$. Quindi, la distribuzione $hol_p(\nabla) \oplus H \subset TL(E)$ è integrabile e le sue foglie sono i sottofibrati di olonomia ottenuti facendo il trasporto parallelo di b lungo tutte le curve di M con origine in $p \in M$.
Consideriamo ora la distribuzione $\tilde{H} = \mathcal{R} \oplus H$ di $TL(E)$ ottenuta sommando a H la distribuzione $\mathcal{R}$ generata da tutti gli operatori di curvatura $\tau_{\gamma(t)} \circ R^{\nabla}_{X_q,Y_q} \circ \tau_\gamma^{-1}(t)$ che provengono da qualunque punto q. Sappiamo che $\tilde{H} \subset hol_p(\nabla) \oplus H$; per finire la dimostrazione basta mostrare che vi è uguaglianza, cioè $\tilde{H} = hol_p(\nabla) \oplus H$. Per

far ciò, è sufficiente provare che $\tilde{H}$ è integrabile. Infatti, poiché $H \subset \tilde{H}$, se $\tilde{H}$ è integrabile allora il trasporto parallelo (o sollevamento orizzontale) di un cappio con origine in p rimane nella foglia di $\tilde{H}$ che passa per il punto iniziale del sollevamento. Per provare che $\tilde{H}$ è integrabile si osserva che:

(I) Facendo il sollevamento orizzontale $\tilde{X}$ di un campo vettoriale X su M si trova che il flusso di $\tilde{X}$ è il trasporto parallelo lungo il flusso di X. Come conseguenza, si deduce che $[\tilde{X}, \mathcal{R}] \subset \mathcal{R}$.

(II) Il calcolo delle parentesi di Lie di due sezioni di $\mathcal{R}$ si esprimere tramite il trasporto paralelo. Quindi si usa (I) per provare che $[\mathcal{R}, \mathcal{R}] \subset \mathcal{R} \oplus H$.

(III) Lo sviluppo di Taylor visto nell'Osservazione 2.8, insieme all'interpretazione delle parentesi di Lie data nell'Osservazione 2.4, implica che $R^{\nabla}_{X,Y} = ([\tilde{X}, \tilde{Y}])^V$, dove $(\ )^V$ indica la proiezione verticale lungo H. Da ciò segue che $[H, H] \subset \mathcal{R} \oplus H$. □

Osservazione 2.13 *Se $\mathcal{D}$ è una distribuzione in una varietà, la più piccola distribuzione involutiva che contiene $\mathcal{D}$ è $\bar{\mathcal{D}} := \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}] + [\mathcal{D}, [\mathcal{D}, \mathcal{D}]] + \cdots$. Dunque, è interessante notare che il teorema di Ambrose-Singer afferma che la chiusura della distribuzione orizzontale H è $\bar{H} = H + [H, H] + [H, [H, H]]$. Nella dimostrazione precedente, questo fatto è nascosto nel punto (II), ed è conseguenza dell'invarianza per l'azione del gruppo $GL(k)$.*

3 Seminario II.

3.1 Geometria riemanniana.

Sia (M, g) una varietà riemanniana; in questi appunti useremo anche la notazione $\langle X, Y \rangle$ per denotare il prodotto scalare $g(X, Y)$. Per mezzo della metrica g di M è possibile misurare la *lunghezza* $L(\gamma)$ di una curva $\gamma : [a, b] \to M$, e cioè

$$L(\gamma) := \int_a^b g(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt.$$

Possiamo quindi munire M di una struttura naturale di spazio metrico, definendo una distanza d_g come:

$$d_g(p, q) := inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma),$$

dove Γ è l'insieme di tutte le curve che uniscono p a q.

Sul fibrato tangente TM di una varietà riemanniana (M, g) si può definire un'unica connessione "naturale":

Teorema 3.1 (Tullio Levi-Civita) *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana. Esiste un'unica connessione* ∇ *su* TM *, detta* connessione di Levi-Civita*, tale che:*

- *Il trasporto parallelo è una isometria, cioè* $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- ∇ *è priva di torsione, cioè* $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

Idea della dimostrazione. Nel suo articolo originale, T. Levi-Civita pensa (M, g) come una sottovarietà dello spazio euclideo e osserva (genialmente!) che la proiezione della derivata dello spazio euclideo sullo spazio tangente non dipende dal fatto che (M, g) è una sottovarietà dello spazio euclideo, cioè che la derivata di un campo lungo una curva può essere definita intrinsecamente. Nella letteratura moderna si trova la seguente equazione di Koszul, da cui si deduce immediatamente l' unicità di ∇:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).$$

Facendo uso della stessa formula si dimostra anche facilmente l'esistenza. □

Osservazione 3.2 *Esistono anche altre dimostrazioni di questo teorema fondamentale, per esempio tramite la teoria dei fibrati principali [KNI] oppure del concetto di spray geodetico [Bes].*

Ricordiamo che il tensore di curvatura $R_{X,Y}Z$ associato alla connessione di Levi-Civita soddisfa:

- $\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = -\langle R_{Y,X}Z, W\rangle$, ovvero $R_{X,X}Z = 0$,
- $\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = -\langle R_{X,Y}W, Z\rangle$,
- $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$.

La prima identità viene della definizione stessa di tensore di curvatura, la seconda dal fatto che la connessione preserva la metrica, mentre la terza (nota come Prima Identità di Bianchi) è conseguenza del fatto che la connessione di Levi-Civita soddisfa

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Come conseguenza delle precedenti identità è soddisfatta anche:

$$\langle R_{X,Y}Z, W\rangle = \langle R_{Z,W}X, Y\rangle$$

Una proprietà importante del tensore di curvatura è che esso è completamente determinato dalla forma biquadratica $\langle R_{X,Y}Y, X\rangle$, cf. [KNI]. Tale forma biquadratica, opportunamente rinormalizzata, definisce la *curvatura sezionale* di M : precisamente, se $\pi_p \subset T_pM$ è un 2-piano, la curvatura sezionale $K(\pi_p)$ è

$$K(\pi_p) := \frac{\langle R_{X,Y}Y, X\rangle}{\|X \wedge Y\|^2},$$

dove $\pi_p = span\{X, Y\}$. È immediato verificare che tale definizione non dipende dalla base X, Y scelta per π_p.

Ricordiamo infine che una curva $\gamma(t)$ è detta una *geodetica* se $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$. Questa equazione è l' equazione di Eulero-Lagrange del problema variazionale relativo alla minimizzazione della distanza tra due punti. L'*applicazione esponenziale* $exp_p : U \subset T_pM \to M$ è la mappa che manda v_p nel punto $exp_p(v_p) = \gamma(1)$, dove $\gamma(t)$ è la geodetica di origine p e velocità iniziale v_p. Si noti che, generalmente, exp_p non è definita su tutto T_pM.

Teorema 3.3 (Hopf-Rinow) *Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Le seguenti condizioni sono equivalenti: (i) esiste $p \in M$ tale che exp_p è definita su tutto T_pM; (ii) per ogni $p \in M$ l'applicazione exp_p è definita su tutto T_pM; (iii) M è completo come spazio metrico rispetto alla distanza d_g.*
Se si verifica una delle condizioni precedenti, allora comunque scelti due punti p, q in M esiste sempre una geodetica di lunghezza $d(p, q)$ che unisce p a q.

Per la dimostrazione si veda ad esempio [DoC]. Una varietà riemanniana si dice *completa* se essa verifica una delle tre condizioni equivalenti del Teorema di Hopf-Rinow.

3.2 Campi di Killing e di Jacobi.

Due tipi di campi sono particolarmente importanti in geometria riemanniana: i campi di Killing e i campi di Jacobi. Un campo $X \in \Gamma(TM)$ è un *campo di Killing* se il suo flusso F_t^X è un flusso di isometrie, cioè per ogni t fissato la trasformazione F_t^X è una isometria di M.

Proposizione 3.4 (Equazione di Killing.) *Un campo $X \in \Gamma(TM)$ è un campo di Killing se e solo se :*

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = -\langle \nabla_Z X, Y \rangle \,,$$

cioè $\nabla_{(\cdot)}X$ è antisimmetrico.

Idea della dimostrazione. Non è difficile mostrare che le trasformazioni F_t^X sono isometrie se e solo se la derivata di Lie della metrica rispetto ad X è nulla, cioè $L_X g = 0$. Dunque,

$$(L_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) =$$

$$= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, \nabla_Z X) =$$

$$= g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y).\square$$

I campi di Jacobi $J(t)$ sono invece campi lungo geodetiche $\gamma(t)$, generati tramite variazioni geodetiche. Precisamente, sia $\gamma_s(t)$ una famiglia a un parametro s di geodetiche. Il campo di Jacobi, lungo γ_0, associato a tale variazione si definisce come $J(t) = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}|_{s=0}$.
La motivazione dello studio dei campi di Jacobi può trovarsi nel problema di isometria locale tra due varietà Riemanniane [DoC, pag. 156]. Più precisamente, se $p \in M$ e $q \in N$ sono due punti appartenenti a due varietà riemanniane distinte, ci chiediamo se esiste e come determinare un' isometria locale f, intorno a $p \in M$, tale che $f(p) = q$. Assumiamo allora che f esista e vediamo da cosa è caratterizzata. Sia exp_p (risp. exp_q) la mappa esponenziale di M in p (risp. di N in q). Poiché f è un'isometria, si deduce che

$$f \circ exp_p = exp_q \circ df_p \ .$$

Dunque f è totalmente determinata dal suo differenziale $df_p : T_pM \to T_qN$ tramite la formula $f = exp_q \circ df_p \circ exp_p^{-1}$.

Sotto l'ipotesi che un'isometria locale f da un'intorno di p ad un intorno di q esista, abbiamo quindi determinato univocamente la sua espressione.
Ora ci chiediamo: quand'è che una mappa del tipo $f = exp_q \circ T \circ exp_p^{-1}$, per un'isometria euclidea $T : T_pM \to T_qN$, è effettivamene un'isometria locale ? Chiaramente, per rispondere a questa domanda abbiamo bisogno del calcolo del differenziale $dexp_p$. È questo che conduce a fare delle variazione geodetiche

$$\gamma_s(t) = exp_p(s(u + tv))$$

ed al campo di Jacobi associato

$$J(t) = \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}|_{s=0} = (dexp_p)_{tu}(tv).$$

Proposizione 3.5 (Equazione di Jacobi.) *Sia $J(t)$ un campo di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t)$. Allora $J(t)$ soddisfa:*

$$J''(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\nabla_{\gamma'(t)}J(t) = R_{\gamma'(t),J(t)}\gamma'(t).$$

Idea della dimostrazione. Supponiamo $J(t)$ associato alla variazione geodetica $\gamma_s(t)$ e calcoliamo

$$J''(t) = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s}|_{s=0} = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}|_{s=0} =$$

$$= R_{\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}|_{s=0} + \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}|_{s=0} =$$

$$= R_{\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial s}}\frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t}|_{s=0}.$$

Il termine $\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial t}|_{s=0}$ è nullo in quanto le curve $\gamma_s(t)$ sono geodetiche. Poiché $J(t)=\frac{\partial}{\partial s}$ e $\gamma'(t)=\frac{\partial}{\partial t}$, si trova precisamente l'equazione di Jacobi. $\Box$

Si noti che l'equazione di Jacobi è un'equazione lineare del secondo ordine. Pertanto, le soluzioni sono determinate dalle due condizioni iniziali $J(0)$ e $J'(0)$.

Osservazione 3.6 *Un campo di Killing X ristretto a una geodetica è chiaramente un campo di Jacobi. Infatti, X è il campo di Jacobi generato dalla variazione $\gamma_s(t)=F_s^X\circ\gamma(t)$. Se ne deduce che se un campo di Killing X, anche in un solo punto P, soddisfa $X(p)=0$ e $\nabla_{(\cdot)_p}X=0$, allora X è identicamente nullo.*

4 Seminario III e IV.

Lo scopo di questa parte del corso è sviluppare la teoria locale degli spazi simmetrici con particolare riferimento all'equazione di Jacobi. Si vedrà che questa classe di varietà riemanniane nasce allora come conseguenza di un'ipotesi naturale sull'equazione di Jacobi, cioè di essere a coefficienti costanti rispetto a una base di campi paralleli. È veramente sorprendente come questa teoria, sviluppata da E. Cartan, si colleghi alla teoria delle algebre di Lie semisemplici in modo naturale. In particolare, per studiare tale classe di varietà (una delle più interessanti, se non la più bella, in geometria riemanniana), è possibile utilizzare le tecniche e i potenti strumenti di calcolo fornitici della teoria di Lie.

4.1 Spazi simmetrici.

Una varietà riemanniana (M,g) si dice uno *spazio localmente simmetrico* se per ogni punto $p\in M$ l'applicazione $\sigma_p=exp_p\circ(-I)\circ exp_p^{-1}$ (detta *simmetria rispetto al punto* p) è un'isometria locale.

Osservazione 4.1 *La teoria globale degli spazi simmetrici può anche essere sviluppata in maniera simile partendo da una definizione globale della simmetria σ_p.*

Sia γ una geodetica che passa per $p=\gamma(0)\in M$. Sia $\tau_s=\sigma_{\gamma(s/2)}\circ\sigma_p$ la composizione di due simmetrie. È chiaro che, per ogni s fissato, τ_s è un'isometria. Inoltre, $\tau_s\circ\tau_t=\tau_{t+s}$. Se ne deduce che τ_s è un gruppo a un parametro di isometrie e che $\tau_s(p)=\gamma(s)$.

Sia ora $X(s)$ un campo parallelo lungo $\gamma(s)$. Chiaramente, $\sigma_p(X(t))=-X(-t)$ e se si fa ancora $\sigma_{\gamma(s/2)}(-X(-t))$ si trova:

$$\tau_s(X(t))=X(s+t)$$

Ciò significa che il gruppo a un parametro τ_s realizza il trasporto parallelo lungo la linea di flusso che passa per p.

Un campo di Killing X di una varietà riemanniana si dice una *trasvezione* se esiste un punto $p \in M$ tale che il flusso F_t^X realizza il trasporto parallelo lungo la linea di flusso $F_t^X(p)$.

Esercizio mentale: dimostrare che $F_t^X(p)$ è una geodetica.

Osservazione 4.2 *Osservare che il concetto di trasvezione è la generalizzazione naturale della traslazione usuale nello spazio euclideo definita come composizione di due reflessioni.*

Per ogni punto P e geodetica γ in uno spazio localmente simmetrico (M, g),la trasformazione τ_s sopra definita, che realizza il trasporto parallelo, determina quindi una trasvezione. Poiché il tensore di curvatura R di (M, g) è invariante per isometrie, si deduce che

$$\tau_s R_{X,Y} Z = R_{\tau_s X, \tau_s Y} \tau_s Z$$

e questo immediatamente implica che R è parallelo, cioè $\nabla R = 0$.

Teorema 4.3 *Sia (M, g) uno spazio localmente simmetrico e sia $Hol_p^{loc}(\nabla)$ il gruppo di olonomia locale della connessione di Levi-Civita. Allora, $Hol_p^{loc}(\nabla) \subset Iso_p^{loc}$, dove Iso_p^{loc} è l'insieme di isometrie, localmente definite, che fissano $p \in M$.*

Idea della dimostrazione. Ogni cappio in p può essere approssimato da una poligonale, cioè una curva costituita da segmenti geodetici. Poiché, per una poligonale, il trasporto parallelo è composizione di trasvezioni, allora il trasporto parallelo lungo una poligonale chiusa è un'isometria, localmente definita, che fissa p. Passando al limite si deduce il teorema. □

Teorema 4.4 (E. Cartan) *Una varietà riemanniana è uno spazio localmente simmetrico se e solo se il tensore di curvatura è parallelo.*

Idea della dimostrazione. Abbiamo già visto che se (M, g) è localmente simmetrico allora R è parallelo. Assumiamo ora che R sia parallelo e cerchiamo di provare che la simmetria locale σ_p è un'isometria. Poiché controllare il differenziale di σ_p equivale a controllare il differenziale di exp_p, chiaramente l'equazione di Jacobi giocherà un ruolo importante. Infatti, dimostrare che σ_p è un'isometria equivale a provare che la lunghezza $\|J(t)\|$ di un campo di Jacobi $J(t)$ lungo $\gamma(t)$ con condizione iniziale $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$ è eguale alla lunghezza del campo di Jacobi $\tilde{J}(t)$ lungo $\gamma(-t)$ avente condizione iniziale $\tilde{J}(0) = 0$ e $\tilde{J}'(0) = -w$. Sia allora $e_1(t) = \gamma'(t), e_2(t), \ldots, e_n(t)$ una base di campi paralleli lungo γ. Ogni campo $J(t)$ lungo $\gamma(t)$ si scrive come $J(t) = J_1(t)e_1(t)+\cdots+J_n(t)e_n(t)$ e l'equazione di Jacobi diventa

$$J_i''(t)e_i(t) = J_l(t)R_{e_1(t),e_l(t)}e_{1(t)} = J_l(t)R_{l,k}e_k(t).$$

Poiché il tensore di curvatura è parallelo, la matrice $R_{l,k}$ è costante, cioè non dipende da t. Pertanto, se chiamiamo J_i i coefficienti del campo di Jacobi $J(t)$ lungo γ con condizione iniziale $J(0) = 0$ e $J'(0) = w$, e se si pone $\tilde{J} = -J_i(t)e_i(t)$, si trova che anche $\tilde{J}(t)$ soddisfa l'equazione di Jacobi lungo $\gamma(-t)$, con condizioni iniziali $\tilde{J}(0) = 0$ e $\tilde{J}'(0) = -w$. Dunque, $\|J(t)\|^2 = \sum_i J_i(t)^2 = \sum_i(-J_i(t))^2 = \|\tilde{J}(t)\|^2$, e questo mostra che σ_p è un'isometria. $\square$

Osservazione 4.5 *Il Teorema 4.3 si può anche dimostrare facendo uso del teorema di esistenza locale di un'isometria (risultato dovuto a E. Cartan, che generalizza il ragionamento della dimostrazione precedente), si veda per es. [DoC, pag. 156].*

Sia $\mathcal{X} \subset \Gamma(TM)$ l'insieme dei campi di Killing in un intorno di $p \in M$. Dall'equazione di Killing si deduce che $\mathcal{X}$ è un sottospazio vettoriale di $\Gamma(TM)$. Poiché i campi di Killing, ristretti ad ogni geodetica, sono campi di Jacobi, si deduce che $\mathcal{X}$ ha dimensione finita. Inoltre, facendo uso dell'equazione di Killing e del tensore di curvatura, si deduce che $[\mathcal{X}, \mathcal{X}] \subset \mathcal{X}$. Dunque, $\mathcal{X}$ è un' algebra di Lie di dimensione finita.

Osservazione 4.6 *Notare che se M è uno spazio localmente simmetrico allora $dim(\mathcal{X}) \geq n$. Infatti, ogni trasvezione τ_s si trova in $\mathcal{X}$ e per ogni vettore in T_pM esiste una trasvezione.*

Possiamo scrivere $\mathcal{X} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}$, dove $\mathcal{K} := \{X \in \mathcal{X} : X(p) = 0\}$ e $\mathcal{P} := \{X \in \mathcal{X} : \nabla_{(\cdot)_p} X = 0\}$ è lo spazio delle trasvezioni. Chiaramente $\mathcal{K} \cap \mathcal{P} = \{0\}$ in conseguenza dell'equazione di Jacobi.

Teorema 4.7 (E. Cartan) *Con le notazioni precedenti, si verifica che:*

(1) $[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}$

(2) $[\mathcal{K}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$

(3) $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{K}$

Idea della dimostrazione. Un campo di Killing X si trova in $\mathcal{P}$ se e solo se $\nabla_{T_pM} X = 0$. Da questo si deduce che $\mathcal{P}$ è uno spazio vettoriale e calcolando le parentesi $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ si ottiene (3). Chiaramente, $\mathcal{K}$ è una sottoalgebra di Lie, da cui segue (1). Infine, se F_t^X è il flusso di $X \in \mathcal{K}$, si deduce che $F_t^X(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ e derivando si ottiene (2). $\square$

Il teorema precedente può essere utilizzato per costruire degli spazi simmetrici tramite la teoria di Lie:

Teorema 4.8 *Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ uno spezzamento di un' algebra di Lie $\mathfrak{g}$, dove $\mathfrak{k}$ è una sottoalgebra. Sia G il gruppo di Lie semplicemente connesso che corrisponde a $\mathfrak{g}$. Inoltre, supponiamo che il sottogruppo K che corrisponde a $\mathfrak{k}$ sia compatto e che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

(1) $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$

(2) $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{k}$

Allora, su G/K si può definire una metrica g in modo che $(G/K,g)$ sia uno spazio localmente simmetrico.

Idea della dimostrazione. Poiché K è compatto possiamo definire su $\mathfrak{p}$ una metrica $Ad(K)$-invariante g. Ciò è equivalente a dare sullo spazio tangente $T_{[K]}(G/K)$ una metrica g, che può essere estesa su $T(G/K)$ in modo che G agisca per isometrie. Facendo uso delle equazioni di Koszul e di Killing si trova che se $X,Y\in\mathfrak{p}$ allora $\nabla_X Y|_{[K]}=0$. Dunque, i campi di Killing generati da $\mathfrak{p}$ sono trasvezioni e questo mostra che G/K è localmente simmetrico. □

Il risultato precedente può essere migliorato: si può infatti vedere che G/K è uno spazio simmetrico globale. Per far ciò è però necessario conoscere la teoria globale dei gruppi di Lie e degli spazi omogenei, cf. [KNII] oppure [He].

Osservazione 4.9 *Una scomposizione $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ di un'algebra di Lie soddisfacente le condizioni del teorema precedente si dice* scomposizione di Cartan*. Inoltre, questa scomposizione è equivalente all'esistenza di un automorfismo involutivo θ di $\mathfrak{g}$, cioè tale che* $\ker(\theta-I)=\mathfrak{k}$ *e* $\ker(\theta+I)=\mathfrak{p}$.

Il seguente teorema esprime invece il tensore di curvatura di uno spazio localmente simmetrico in termini delle parentesi di Lie di trasvezioni:

Teorema 4.10 *Sia (M,g) uno spazio localmente simmetrico e sia $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la scomposizione di Cartan dei campi di Killing in un punto $p\in M$. Allora, se $X,Y,Z\in\mathfrak{p}$ il tensore di curvatura R di (M,g) si scrive:*

$$R_{X,Y}Z=[Z,[X,Y]].$$

Idea della dimostrazione. Sia $L(X,Y)=R_{X,Z}Y-\nabla_X\nabla_Y Z$. Polarizzando l'equazione di Jacobi $\nabla_X\nabla_X Y=R_{Y,X}X$ si deduce che $L(X,Y)+L(Y,X)=0$. Inoltre, della identità di Bianchi se segue che $L(X,Y)-L(Y,X)=0$. Quindi, $L(X,Y)=0$ e allora

$$[Z,[X,Y]]=\nabla_Z[X,Y]=\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_Z\nabla_Y X=R_{Z,Y}X-R_{Z,X}Y=R_{X,Y}Z.\square$$

4.2 Teorema di De Rham (versione locale).

Si dice che una varietà riemanniana (M,g) è *localmente riducibile in* $p\in M$, ovvero che si spezza localmente, se esiste un aperto U di p isometrico a un prodotto $(U_1,g_1)\times(U_2,g_2)$. In altre parole, (M,g) è localmente riducibile in p se esiste un sistema di coordinate $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n$ per cui la matrice $g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})$

soddisfa: $g_{ij}=0$ per $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq n$, e tale che i coefficienti g_{ij}, per $1 \leq i,j \leq k$, non dipendono dalle coordinate $x_{k+1},\cdots,x_n$, e i coefficienti g_{ij}, per $k+1 \leq i,j \leq n$ non dipendono da $x_1,\cdots,x_k$.

Teorema 4.11 (G. De Rham) *Sia (M,g) una varietà riemanniana e sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Allora (M,g) è localmente riducibile in $p \in M$ se e solo se il gruppo di olonomia locale $Hol_p^{loc}(\nabla)$ agisce riducibilmente su T_pM.*

Idea della dimostrazione. Se il gruppo di olonomia locale $Hol_p^{loc}(\nabla)$ agisce riducibilmente su T_pM, allora esiste un sottospazio W_p invariante per l'azione di $Hol_p^{loc}(\nabla)$. Dunque, $W_p^{\perp}$ è ancora invariante per $Hol_p^{loc}(\nabla)$. Per il principio di olonomia, possiamo estendere parallelamente W_p e $W_p^{\perp}$ a delle distribuzioni in un intorno di P. Poiché $\nabla_{TM}W \subset W$ e $\nabla_{TM}W^{\perp} \subset W^{\perp}$, si deduce che W e $W^{\perp}$ sono involutive. Siano allora $x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},\cdots,x_n$ (risp. $y_1,\cdots,y_r,y_{r+1},\cdots,y_n$) le coordinate date dal teorema di Frobenius, cioè tali che le foglie di W (risp. $W^{\perp}$) sono date da $x_{k+1}=c_1,\cdots,x_n=c_{n-k}$ (risp. $y_{r+1}=d_1,\cdots,y_n=d_{n-r}$). Si verifica facilmente che $x_{k+1},\cdots,x_n,y_r,y_{r+1},\cdots,y_n$ costituiscono un sistema di coordinate locali intorno a p. Poiché W e $W^{\perp}$ sono perpendicolari, si deduce che $g(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_j})=0$. Derivando $g(\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial y_j})$ rispetto a x_s troviamo:

$$\frac{\partial g(\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial y_j})}{\partial x_s}=g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}}\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial y_j})+g(\frac{\partial}{\partial y_i},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}}\frac{\partial}{\partial y_j})=0.$$

L'ultima uguaglianza vale in quanto $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}}\frac{\partial}{\partial y_j}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}}\frac{\partial}{\partial x_s}=[\frac{\partial}{\partial x_s},\frac{\partial}{\partial y_j}]=0$ e dunque $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_s}}\frac{\partial}{\partial y_j}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_j}}\frac{\partial}{\partial x_s}=0$ poiché W e $W^{\perp}$ sono paralleli e independenti.

Questo mostra che M è localmente riducibile in p.
Viceversa, se M è localmente riducibile intorno a $p \in M$, considerando le proiezioni delle curve sui fattori non è difficile mostrare che il gruppo di olonomia locale agisce riducibilmente, lasciando invariati precisamente gli spazi tangenti a ciascuno dei fattori. □

Una distribuzione $\mathcal{D}$ in una varietà riemanniana (M,g) si dice *autoparallela* se $\nabla_{\mathcal{D}}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.

Proposizione 4.12 *Una varietà riemanniana (M,g) è localmente riducibile in p se e solo se esiste una distribuzione $\mathcal{D}$, localmente definita intorno $p \in M$, tale che sia $\mathcal{D}$ sia $\mathcal{D}^{\perp}$ siano autoparallele.*

Idea della dimostrazione. Per il Teorema di De Rham basta mostrare che $\mathcal{D}$ è parallela, cioè $\nabla_{TM}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Dunque, basta mostrare che $\nabla_{\mathcal{D}^{\perp}}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Prendiamo $X,Y \in \mathcal{D}^{\perp}$ e $Z \in \mathcal{D}$. Allora,

$$0=Xg(Y,Z)=g(\nabla_XY,Z)+g(Y,\nabla_XZ)=g(Y,\nabla_XZ).$$

Questo implica che $\nabla_{\mathcal{D}^{\perp}}\mathcal{D} \perp \mathcal{D}^{\perp}$ e quindi $\nabla_{\mathcal{D}^{\perp}}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. □

Osservazione 4.13 *Il gruppo di olonomia di un prodotto è il prodotto dei gruppi di olonomia dei fattori.*

4.3 Collegamento tra spazi simmetrici e algebre di Lie semisemplici: forma di Cartan-Killing.

Ritorniamo allo studio (locale) di uno spazio simmetrico (M, g).
Per il Teorema di De Rham possiamo spezzare (M, g), in un intorno di $p \in M$, come $M = M_0 \times M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$ dove M_0 è il fattore euclideo, cioè localmente piatto, e gli M_i, per $i = 1, 2, \cdots, k$, sono varietà riemanniane irriducibili nei loro punti $p_i \in M_i$, con $p = (p_0, p_1, p_2, \cdots, p_k)$.
Non è difficile mostrare che, in conseguenza dello spezzamento locale della metrica g di M, anche la connessione e il tensore di curvatura si spezzano. Dunque, ogni fattore M_i con $i \geq 1$ è uno spazio localmente simmetrico.

Sia allora (M, g) uno spazio simmetrico localmente irriducibile, e sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la scomposizione di Cartan dei campi di Killing in $p \in M$. Sia G il gruppo semplicemente connesso che corrisponde a $\mathfrak{g}$ e $K \subset G$ il sottogruppo che corrisponde a $\mathfrak{k}$. Dal Teorema 4.3 si deduce che l' azione di K su $\mathfrak{p} = T_pM$ è irriducibile. Tale azione si identifica naturalmente con la rappresentazione aggiunta $Ad(K)$ di K su $\mathfrak{p}$.

Osservazione 4.14 *Il tensore di Ricci di M si definisce come*

$$Ric_M(X, Y) := \sum_i \langle R_{X,e_i} e_i, Y \rangle$$

Dalle proprietà del tensore di curvatura segue che Ric_M è simmetrico. Poiché il gruppo di isotropia di uno spazio localmente simmetrico localmente irriducibile M agisce irriducibilmente, dal Lemma di Schur si deduce che $Ric_M = \lambda g$; cioè, M è quella che si chiama una varietà di Einstein.

Ricordiamo che la *forma di Cartan-Killing* B di $\mathfrak{g}$ è una forma bilineare simmetrica definita su $\mathfrak{g}$ dalla seguente formula

$$B(X, Y) := traccia(ad(X) \circ ad(Y)),$$

dove $ad(Y) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ è definita come $ad(X)(Y) = [X, Y]$. Poiché la traccia è invariante per coniugazione, B soddisfa:

$$B(ad(X)Y, Z) = -B(Y, ad(X)(Z)).$$

Un'algebra di Lie si dice *semisemplice* se B è non degenere.
Consideriamo ora una scomposizione di Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Innanzitutto, se θ è

l' automorfismo associato a tale scomposizione, si deduce che B è θ-invariante: questo implica che $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$.
Inoltre, la restrizione di B su $\mathfrak{k}$ è non degenere come conseguenza della compattezza di K. Infatti, poiché K è compatto, esiste su $\mathfrak{g}$ un prodotto interno $Ad(K)$-invariante. Un tale prodotto rende antisimmetrico ogni operatore $ad(X)$, per $X \in \mathfrak{k}$, e quindi $ad^2(X) = -ad(X) \circ ad(X)^t$ è simmetrica e semidefinita negativa. Perciò, $B(X,X) = traccia(ad(X)^2) \leq 0$ e $B(X,X) = 0$ se e solo se X è nel centro di $\mathfrak{g}$.
Poiché il centro della algebra di Lie dei campi di Killing $\mathcal{X}$ di uno spazio localmente simmetrico ha intersezione banale con l'algebra di isotropia $\mathcal{K}$ di un punto p, segue che $B|_{\mathcal{K}}$ è definita negativa.
Infine, osserviamo che la forma B, ristretta a $\mathfrak{p}$, è $Ad(K)$-invariante. Questo implica, per la irriducibilità dell'azione di $Ad(K)$ su $\mathfrak{p}$, che B è un multiplo della metrica g su $\mathfrak{p}$ (sempre per il Lemma di Schur), cioè

$$B(X,Y) = \lambda g(X,Y).$$

Ne consegue una relazione forte tra B e il tensore di curvatura R:

$$\lambda g(R_{X,Y}Y, X) = B(R_{X,Y}Y, X) = B([Y,[X,Y]], X) = B([X,Y],[X,Y]).$$

Poiché $[X,Y] \in \mathcal{K}$ se $X, Y \in \mathcal{P}$, si deduce che $\lambda \neq 0$ e quindi che B è non degenere su $\mathcal{P}$. Ciò dimostra il seguente

Teorema 4.15 (E. Cartan) *L' algebra di Lie $\mathcal{X}$ dei campi di Killing di uno spazio localmente simmetrico localmente irriducibile è un' algebra di Lie semisemplice.* □

Osservazione 4.16 *In effetti, l'algebra di Lie $\mathcal{X}$ è* semplice *e $\mathcal{K}$ coincide con l'algebra di Lie del gruppo di olonomia locale Hol_p^{loc}. Questo è un fatto generale: per uno spazio simmetrico senza fattore piatto, l'"olonomia" è la stessa cosa che l'"isotropia".*

5 Seminario V e VI.

5.1 Sottovarietà riemanniane: seconda forma fondamentale e connessione normale.

Sia $M \subset \tilde{M}$ una sottovarietà di una varietà riemanniana $(\tilde{M}, g)$. È allora possibile spezzare il fibrato tangente $T\tilde{M}$ lungo M nel seguente modo:

$$T\tilde{M} = TM \oplus NM,$$

dove NM è il *fibrato normale di M in $\tilde{M}$*, cioè con fibra, sul punto $p \in M$ uguale a $N_pM := \{\xi_p \in T\tilde{M} : \xi_p \perp T_pM\}$.

Questa scomposizione permette di spezzare a sua volta la connessione di Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ di $\tilde{M}$ nel seguente modo: se $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\xi \in \Gamma(NM)$, allora

$$\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp =: \nabla_X Y + \alpha(X,Y),$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = (\tilde{\nabla}_X \xi)^\top + (\tilde{\nabla}_X \xi)^\perp =: -A^\xi(X) + \nabla^\perp_X \xi.$$

dove ∇ denota la connessione di Levi-Civita di (M, g).
La terminologia che si usa è la seguente:

- $\alpha(X,Y)$ è detta *seconda forma fondamentale* di M;
- $A^\xi(X)$ è detta *operatore forma* di M;
- $\nabla^\perp$ è detta *connessione normale* di M

Osservazione 5.1 *È immediato verificare che:*
a) $\alpha(X,Y)$ *e* $A^\xi(X)$ *sono tensori (cioè forme* C^∞*-lineari);*
b) $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$*, cioè* α *è simmetrica;*
c) $\nabla^\perp$ *è una connessione sul fibrato* NM*, compatibile con la metrica* g*.*

Uno scopo della teoria delle sottovarietà è quello di trovare una famiglia di sottovarietà abbastanza grande per essere utilizzata da termine di paragone con altre sottovarietà. Più avanti definirò la nozione di sottovarietà isoparametrica nello spazio euclideo. Questo tipo di sottovarietà gioca un ruolo simile a quello che hanno gli spazi simmetrici nella geometria riemanniana intrinseca.

5.2 Sottovarietà totalmente geodetiche.

Una sottovarietà $M \subset \tilde{M}$ si dice *totalmente geodetica* se ogni geodetica $\gamma(t)$ di M è anche una geodetica di $\tilde{M}$.

Teorema 5.2 *Sia* $M \subset \tilde{M}$ *una sottovarietà e sia* α *la sua seconda forma fondamentale. Allora* M *è totalmente geodetica se e solo se* $\alpha = 0$*.*

Idea della dimostrazione. Essendo α simmetrica, è sufficiente mostrare che $\alpha(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ per ogni geodetica $\gamma'(t)$ di M. Ma

$$\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) + \alpha(\gamma'(t), \gamma'(t))$$

quindi $\tilde{\nabla}_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ se e solo se $\alpha(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$. $\square$ Se $M \subset \tilde{M}$ è

totalmente geodetica e $p \in M$ chiaramente si ha che

$$M = exp_p^{\tilde{M}}(T_pM)$$

almeno localmente, intorno a $p \in M$. Dunque, M è completamente determinata dal suo spazio tangente $T_pM = V_p$ in un suo punto p. È naturale allora porsi la seguente domanda: se V_p è un sottospazio vettoriale di $T\tilde{M}$, in quali ipotesi $exp_p^{\tilde{M}}(V_p)$ è una sottovarietà totalmente geodetica?

Teorema 5.3 (E. Cartan) *La sottovarietà* $M = exp_p^{\tilde{M}}(V_p)$ *è totalmente geodetica se e solo se il tensore di curvatura* $\tilde{R}$ *di* $\tilde{M}$ *conserva il trasporto parallelo* V_t *di* V *lungo ogni geodetica con origine in* p *, cioè se* $\tilde{R}_{V_t,V_t}V_t \subset V_t$ *.*

Idea della dimostrazione. La seguente dimostrazione è tratta da [BCO]. *Passo 1.* Sia $\gamma(t)$ una geodetica con origine in $p \in M$, e sia V_t il trasporto parallelo di V_p lungo $\gamma(t)$. Vogliamo mostrare che $V_t = T_{\gamma(t)}M$. Osserviamo che $T_{\gamma(t)}M$ è generato dai campi di Jacobi $J(t)$ lungo $\gamma(t)$ con condizioni iniziali $J(0) = 0$ e $J'(0) \in V_p$. Sia $e_1(t), e_2(t), \cdots, e_k(t)$ una base di campi paralleli lungo $\gamma(t)$ tali che $V_p = \text{span}\{e_1(0), e_2(0), \cdots, e_k(0)\}$. L' ipotesi $\tilde{R}_{V_t,V_t}V_t \subset V_t$ implica che l'equazione di Jacobi si esprime in funzione dei campi $e_1(t), e_2(t), \cdots, e_k(t)$, quindi i campi di Jacobi con condizioni iniziali $J(0) = 0$ e $J'(0) \in V_p$ restano contenuti in V_t per ogni t . Quindi $T_{\gamma(t)}M \subset V_t$, ma poiché la dimensione di V_t è la stessa di $T_{\gamma(t)}M$, si deduce $V_t = T_{\gamma(t)}M$. *Passo 2.* Osserviamo che M è totalmente geodetica se e solo se per tutti i campi $X, Y \in \Gamma(TM)$ la derivata covariante $\tilde{\nabla}_X Y$ rimane in $\Gamma(TM)$. Ciò è equivalente alla proprietà che TM sia invariante per $\tilde{\nabla}$-trasporto parallelo lungo curve in M . Poiché TM è parallelo lungo i raggi che partono da p con velocità iniziale in V_p , per mostrare che M è totalmente geodetica basta mostrare che V_p è invariante per $\tilde{\nabla}$-trasporto parallelo lungo qualsiasi cappio $\gamma(t) \subset M$ di origine in p . Sia dunque γ un tale cappio, che si trovi sufficientemente vicino a p perché ogni suo punto sia collegabile a p con una geodetica: cioè $\gamma(t) = exp_p(c(t))$, per un qualche cappio $c(t)$ in T_pM di origine $0 \in T_pM$. Sia $f(s,t) := exp_p(s.v(t))$ la superficie parametrica che si ottiene parametrizzando tra $[0,1]$ i raggi che collegano p e $\gamma(t)$. Per t fissato, sia quindi τ_t il trasporto parallelo lungo la curva chiusa che si ottiene partendo da p , percorrendo γ fino a $\gamma(t)$ e poi ritornando a p lungo il raggio che collega $\gamma(t)$ a p . Per $v_p \in T_p\tilde{M}$ definiamo invece $v(s,t)$ come il $\tilde{\nabla}$-trasporto parallelo di v_p lungo la curva ottenuta partendo da p , percorrendo γ fino a $\gamma(t)$ e seguendo poi i raggi fino ad $exp_p((1-s)c(t))$. Osserviamo che $\tau_t(v_p) = v(1,t)$. Sia infine $A(t) := \tau(t)'.\tau(t)^{-1} \in hol_p(\tilde{\nabla})$. Poiché $\tau(0) = Id$, segue che V_p è $\tau(t)$-invariante se e solo se $A(t)(V_p) \subset V_p$. Per terminare, utilizzeremo una formula che collega $A(t)$ e il tensore di curvatura $\tilde{R}$:

Lemma 5.4 *Integrando tramite campi paralleli lungo i raggi* $exp_p(s.c(t))$ *, si ha:*

$$A(t)(v_p) = \int_0^1 \tilde{R}_{\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}} v(s,t)ds$$

Per dimostrare tale formula, è sufficiente verificarla in $t = 0$. Ma, se $t = 0$, si ha

$$0 = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial t}\frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}v(s,t) = -\tilde{R}_{\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}}v(s,t) + \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}\frac{\tilde{\nabla}}{\partial t}v(s,t),$$

da cui

$$\tilde{R}_{\frac{\partial f}{\partial s},\frac{\partial f}{\partial t}}v(s,t) = \frac{\tilde{\nabla}}{\partial s}\frac{\tilde{\nabla}}{\partial t}v(s,t)\,.$$

Integrando, si trova precisamente l'equazione per $A(0)$.
Ora, poiché V_t è parallelo lungo i raggi e $\tilde{R}$-invariante, dalla formula precedente si deduce che $A(t)(V_p) \subset V_p$ e questo termina la dimostrazione. $\square$
Come applicazione del teorema precedente abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5.5 *Sia* (M, g) *uno spazio localmente simmetrico e sia* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ *la scomposizione di Cartan dei campi di Killing in un punto* $p \in M$. *Inoltre, sia* $V_p \subset T_pM = \mathfrak{p}$. *Allora, esiste una sottovarietà totalmente geodetica* V *che passa per* p *tale che* $T_pV = V_p$ *se e solo se* V_p *è un sistema triplo di Lie, cioè* $[V_p, [V_p, V_p]] \subset V_p$.

Idea della dimostrazione. Conseguenza diretta del Teorema 4.10 e del teorema precedente. $\square$

5.3 Equazioni strutturali di una sottovarietà.

L' equazione di Gauss.

Una sottovarietà M se dice *minima* se la traccia di ogni operatore forma è nulla, cioè $traccia(A^\xi) = 0$ per ogni vettore normale ξ. Equivalentemente M è minima se e solo se il *vettore di curvatura media* $H := \sum_i \alpha(e_i, e_i)$ è identicamente zero, dove e_i è una base ortonormale di TM.

Problema: esiste un'immersione isometrica minimale di una porzione della sfera S^n in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^N$?.

La soluzione di questo problema passa attraverso considerazioni completamente generali sul tensore di Ricci di una sottovarietà di $\mathbb{R}^N$.
Sia infatti $M \subset \tilde{M}$ una sottovarietà. Dalla definizione di $\alpha(X, Y)$ si calcola la componente tangente del tensore di curvatura $\tilde{R}_{X,Y}Z$, dove $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$:

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z = \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) = \nabla_X \nabla_Y Z - A^{\alpha(Y,Z)}(X) + \text{ roba normale } \ldots,$$

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) = \nabla_Y \nabla_X Z - A^{\alpha(X,Z)}(Y) + \text{ roba normale } \ldots,$$

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \text{ roba normale } .$$

Allora,

$$\tilde{R}_{X,Y}Z = R_{X,Y}Z + A^{\alpha(X,Z)}(Y) - A^{\alpha(Y,Z)}(X) + \text{ roba normale}$$

Dunque, se $W \in \Gamma(TM)$ si trova la I equazione strutturale (o *equazione di Gauss*):

$$\langle \tilde{R}_{X,Y}Z, W\rangle = \langle R_{X,Y}Z, W\rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W)\rangle - \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, W)\rangle$$

Passando alla forma biquadratica associata, si ottiene:

$$\langle \tilde{R}_{X,Y}Y, X\rangle = \langle R_{X,Y}Y, X\rangle + \langle \alpha(X,Y), \alpha(Y,X)\rangle - \langle \alpha(Y,Y), \alpha(X,X)\rangle.$$

Nel caso particolare in cui $\tilde{M} = \mathbb{R}^N$ si trova:

$$\langle R_{X,Y}Y, X\rangle = \langle \alpha(Y,Y), \alpha(X,X)\rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2 .$$

Da questa equazione si deduce una formula per la forma quadratica associata al tensore di Ricci di M, e cioè

$$Ric_M(X) = \langle \alpha(X,X), H\rangle - \sum_i \|\alpha(X,e_i)\|^2 .$$

Abbiamo pertanto dimostrato:

Teorema 5.6 *Se M è una sottovarietà minimale dello spazio Euclideo, allora il suo tensore di Ricci è semidefinito negativo. Inoltre, se M è Ricci piatta allora essa è necessariamente totalmente geodetica.* $\square$

Segue immediatamente:

Corollario 5.7 *Non esiste alcuna immersione locale minimale di una sfera in uno spazio euclideo.* $\square$

L' equazione di Ricci.

Se si calcola il tensore di curvatura $\tilde{R}_{X,Y}$ dello spazio ambiente $\tilde{M}$ come nella sezione precedente, ma valutato su campi normali ξ, ν ad M, si trova l' *equazione di Ricci*:

$$\langle \tilde{R}_{X,Y}\xi, \eta\rangle = \langle {R^{\perp}}_{X,Y}\xi, \eta\rangle - \langle [A^{\xi}, A^{\eta}]X, Y\rangle$$

Un'applicazione di questa equazione è data dal seguente teorema.

Teorema 5.8 *Sia M una sottovarietà di uno spazio a curvatura sezionale costante. Allora, il fibrato normale $(NM, \nabla^{\perp})$ è piatto (cioè ${R^{\perp}}_{X,Y} = 0$) se e solo se gli operatori forma commutano tra loro.*

L'importanza della commutazione simultanea degli operatori forma viene del fatto che questa proprietà permette la loro diagonalizzazione simultanea, e ciò consente di trovare una scomposizione dello spazio tangente alla sottovarietà utile al suo studio.

L' equazione di Codazzi-Mainardi.

Scomponendo ancora il tensore di curvatura nelle sue componenti miste si giunge all'*equazione di Codazzi-Mainardi*:

$$\langle \tilde{R}_{X,Y}\xi, Z\rangle = \langle (\nabla_X A^\xi)(Y) - (\nabla_Y A^\xi)(X), Z\rangle$$

ovvero

$$\langle \tilde{R}_{X,Y}Z, \xi\rangle = \langle (\nabla_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y \alpha)(X,Z), \xi\rangle .$$

Come applicazione di questa equazione discutiamo la classificazione delle *sottovarietà totalmente ombelicali* dello spazio euclideo: le sottovarietà, cioè, il cui operatore forma soddisfa $A^\xi = f(\xi)Id$, per qualche funzione $f : NM \to \mathbb{R}$.

Teorema 5.9 *Le uniche sottovarietà totalmente ombelicali (di dimensione $n > 1$) dello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ sono delle porzioni di sfere.*

Idea della dimostrazione. Sia infatti $M \subset \mathbb{R}^N$ totalmente ombelicale. Per linearità si deduce che esiste un campo normale η tale che $f(\xi) = \langle \xi, \eta\rangle$. Dall'equazione di Codazzi-Mainardi segue che η è parallelo rispetto alla connessione normale, cioè $\nabla^\perp \eta = 0$. Si osservi che il complemento ortogonale $B = span\{\eta\}^\perp$ dello spazio 1-dimensionale generato da η è pure parallelo. Si può dimostrare (Teorema di Erbacher) che B è costante lungo M, cioè $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$. Ci si può allora ricondurre al caso in cui la sottovarietà M sia un'ipersuperficie. Infine, analizzando la mappa $p \to p + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$, per un punto $p \in M$, si trova che $p + \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$ è una costante C. M è quindi un insieme aperto di una sfera centrata in C. $\square$

L'equazione di Codazzi-Mainardi si applica anche al problema dell'integrabilità di un'autodistribuzione di una sottovarietà con fibrato normale piatto.

Teorema 5.10 *Sia M una sottovarietà di uno spazio a curvatura costante. Supponiamo che il fibrato normale $(NM, \nabla^\perp)$ sia piatto, e sia $TM = V_{\eta_1} \oplus \cdots \oplus V_{\eta_n}$ la scomposizione in autospazi. Allora, ciascuna V_η è integrabile. Inoltre, se $dim(V_\eta) > 1$ allora ogni foglia è una sottovarietà totalmente ombelicale.*

Si consiglia di vedere il libro [BCO] per approfondire la teoria delle sottovarietà negli spazi a curvatura costante.

Osservazione 5.11 *Di maniera unificata l'equazioni strutturali provengono della scomposizione del tensore di curvatura dello spazio ambiente ristretto alla sottovarieta, cioè*

$$\widetilde{R}_{XY} = \widetilde{R}^{\top\top}_{XY} + \widetilde{R}^{\perp\top}_{XY} + \widetilde{R}^{\top\perp}_{XY} + \widetilde{R}^{\perp\perp}_{XY}$$

6 Appendice.

In questa appendice riportiamo alcuni risultati utili.

Teorema 6.1 (E. Cartan) *Sia G un gruppo di Lie. Se $H \subset G$ è un sottogruppo chiuso (come sottospazio topologico di G) allora H è un sottogruppo di Lie di G.*

Teorema 6.2 (Kuranishi-Yamabe) *Sia G un gruppo di Lie. Se $H \subset G$ è un sottogruppo connesso per archi, allora H è un sottogruppo di Lie di G.*

Proposizione 6.3 (Lemma di Schur.) *Sia V uno spazio euclideo (cioè uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto scalare definito positivo $\langle , \rangle$) di dimensione finita. Sia $G \subset O(V)$ un sottogruppo che agisce irriducibilmente mediante isometrie.*
Se G preserva una forma bilineare simmetrica b, allora $b = \lambda\langle , \rangle$, per qualche numero reale λ.

Proposizione 6.4 (?) *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $G \subset GL(V)$ un sottogruppo di Lie connesso. Se G agisce irriducibilmente su V allora G è chiuso in $GL(V)$. Inoltre, sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ la scomposizione di Levi-Maltsev, dove $\mathfrak{r}$ è il radicale e $\mathfrak{s}$ è semisemplice: allora $\mathfrak{r}$ è abeliana, $dim(\mathfrak{r}) \leq 2$ e $[\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] = 0$.*

Teorema 6.5 (S. Bochner) *Su una varietà riemanniana compatta con tensore di Ricci definito negativo non esistono campi di Killing globalmente definiti. Inoltre, se il tensore di Ricci è non positivo allora ogni campo di Killing è parallelo.*

Teorema 6.6 (?) *Sia M una varietà riemanniana e sia $G \subset Iso(M)$ un sottogruppo che agisce transitivamente. Se G è abeliano allora M è piatta, cioè il tensore di curvatura è identicamente nullo.*

6.1 Superfici non isometriche senza parlare di curvatura.

Sia $r(x,\theta) = (x, F(x)cos(\theta), F(x)sin(\theta))$ una superficie di rotazione in $\mathbb{R}^3$. La sua metrica riemanniana è data da

$$ds^2 = (1 + F'(x)^2)dx^2 + F(x)^2 d\theta^2.$$

Problema 6.7 *Dimostrare che ds^2 è piatta se e solo se $F(x) = Ax + B$, senza usare la nozione di curvatura di Gauss.*

La seguente è una soluzione che sfrutta solo proprietà elementari delle funzioni olomorfe. Sia $x(t)$ una soluzione dell'equazione ordinaria:

$$x'(t) = \frac{F(x(t))}{(1 + F'(x(t))^2)^{1/2}}$$

Facendo il cambiamento di coordinate $x = x(t)$, la metrica ds^2 si esprime in (t, θ) nel seguente modo:

$$ds^2 = F(x(t))^2(dt^2 + d\theta^2) = \lambda^2(t)(dt^2 + d\theta^2),$$

con $\lambda^2 = F(x(t))^2$. Ora, ds^2 è piatta se e solo se esiste un cambiamento di coordinate $(\widetilde{t}, \widetilde{\theta}) = C(t, \theta)$ tale che:

$$ds^2 = d\widetilde{t}^2 + d\widetilde{\theta}^2.$$

Ma se un tale cambiamento di coordinate C esiste, esso è una mappa conforme, cioè che conserva gli angoli. Dunque, C è una funzione olomorfa o antiolomorfa. Senza perdita di generalità possiamo supporre che C sia olomorfa. Allora,

$$\left|\frac{dC(z)}{dz}\right|^2 = \frac{dC(z)}{dz} \cdot \overline{\left(\frac{dC(z)}{dz}\right)} = \lambda^2(t),$$

dove $z = \theta + it$.

Lemma 6.8 *Il modulo $|f(z)|$ di una funzione olomorfa di $z = \theta + it$ dipende solo dalla coordinata t se e solo se $f(z) = be^{iaz}$, per qualche $b \in \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{R}$. In tal caso, $|f(z)| = |b|e^{-at}$.*

Idea della dimostrazione. Sia $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}})$ l'operatore di derivazione nella direzione θ. Allora,

$$2\frac{\partial}{\partial\theta}|f(z)| = 0 = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)(f \cdot \overline{f}).$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} f = 0.$$

Se $f \neq 0$ possiamo scrivere

$$f^{-1}\frac{\partial f}{\partial z} = -\overline{f}^{-1}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$$

Ora si osserva che il membro di sinistra è olomorfo e quello di destra antiolomorfo. Dunque, esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $iaf = f'$, cioè $f(z) = be^{iaz}$. □
Dal lemma precedente si deduce che $F(x(t)) = \lambda(t) = se^{rt}$, dove
$r, s \in \mathbb{R}$. Allora,

$$F'(x(t))\frac{F(x(t))}{(1+F'(x(t))^2)^{1/2}} = F'(x(t))x'(t) = \lambda'(t) = rF(x(t))$$

da cui

$$F'(x(t))^2 = r^2/(1-r^2),$$

e questo mostra che $F'(x)$ è costante. □

Osservazione 6.9 *Chiaramente, usando la curvatura di Gauss si trova facilmente che condizione necessaria e sufficiente affinché ds^2 sia piatta è che $f''(x) = 0$.*

Ciò può vedersi senza troppi calcoli nel seguente modo. La metrica ds^2 è piatta se e solo se una curvatura principale è zero. D'altra parte, si osservi che meridiani e paralleli sono linee di curvatura. Poiché la curvatura principale che corrisponde ai paralleli non è mai zero, deve necessariamente annullarsi la curvatura principale lungo i meridiani. Dato che il piano che contiene un meridiano contiene anche il vettore normale unitario, si deduce che il vettore normale unitario è costante lungo i meridiani, e cioè che i meridiani sono rette di $\mathbb{R}^3$.

References

[BCO] Berndt, J.; S. Console and C. Olmos.: *Submanifolds and holonomy* , Chapman & Hall/CRC , Research Notes in Mathematics 434 (2003).

[Bes] Besse, A.: *Manifolds all of whose geodesics are closed,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 93. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[DoC] Do Carmo, M.P.: *Riemannian Geometry,* Birkhäuser Boston, 1993.

[Es] Eschenburg, J.-H.: *Lecture notes on symmetric spaces,* .

[He] Helgason, S.: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces,* Academic Press 1978.

[KNI] Kobayashi, S. and Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry,* Vol. I, Interscience Publishers, (1963).

[KNII] Kobayashi, S. and Nomizu, K.: *Foundations of differential geometry,* Vol. II, Interscience Publishers, (1969).

Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Torino,
Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino, Italy
antonio.discala@polito.it
http://calvino.polito.it/~adiscala/