

POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Derivate e q-derivate

Original

Derivate e q-derivate / Sparavigna, A. C.. - ELETTRONICO. - (2022). [10.5281/zenodo.5851112]

Availability:

This version is available at: 11583/2950172 since: 2022-01-15T14:11:55Z

Publisher:

Published

DOI:10.5281/zenodo.5851112

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

Derivate e q-derivate

Amelia Carolina Sparavigna

Department of Applied Science and Technology, Politecnico di Torino, Torino, Italy

Email: amelia.sparavigna@polito.it

Torino 14/01/2022

Abstract

Il testo propone alcuni esercizi su derivate e q-derivate. La q-derivazione, che appartiene al q-calcolo, diventa quella ordinaria al limite per il parametro q tendente a 1. Le appendici sono dedicate alle derivate ordinarie.

Keywords: q-calculus.

Subject Areas: Calculus for Physics.

Introduzione

In questo testo verranno forniti esempi di derivazione ordinaria e di q-derivata. Tale derivata si riduce a quella ordinaria quando il parametro q tende a 1.

Ricordiamo che il differenziale e la derivata sono definiti come segue:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) ; \quad Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Il *q-differenziale* è definito come: $\Delta_q f(x) = f(qx) - f(x)$

La *q-derivata* è: $D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{dx} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$

Nel limite: $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx} = Df(x)$.

Richiamiamo anche alcuni concetti utili del q-calcolo.

Il *numero intero* di tipo q , quindi il *q-numero* è per definizione:

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} ; \quad [n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1)}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1$$

Per q che tende a 1, $[n]$ tende a n intero.

Possiamo generalizzare per $\alpha \in \mathbb{C}$: $[\alpha] = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$. Inoltre: $[\infty] = \frac{1}{1-q}$

Ed infine, il *q-fattoriale* è definito come $[k]! = [1][2]\dots[k]$.

Per il q-calcolo si vedano i riferimenti [1-6]. Gli esercizi sulle derivate sono ispirati da quelli proposti in [7].

Esercizio 1. Calcolare la derivata di $f(x) = x^2$ e la q-derivata.

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x$$

$$\Delta_q f(x) = (qx)^2 - x^2 = (q^2 - 1)x^2$$

$$D_q f(x) = \frac{(qx)^2 - x^2}{(q-1)x} = \frac{q^2 - 1}{q-1}x = \frac{(q-1)(q+1)}{q-1}x = (q+1)x$$

Al limite per q che tende a 1, si ha il risultato della derivazione ordinaria.

Esercizio 2. Calcolare la derivata di $f(x) = 3x^2 - 2x$ e la q-derivata.

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 3x^2 - 2(x+\Delta x) + 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 6x - 2$$

$$D_q f(x) = \frac{3(qx)^2 - 3x^2 - 2qx + 2x}{(q-1)x} = \frac{3(q^2-1)x^2 - 2(q-1)x}{(q-1)x}$$

$$= \frac{3(q-1)(q+1)x^2 - 2(q-1)x}{(q-1)x} = \frac{3(q+1)x^2 - 2x}{x} = 3(q+1)x - 2$$

Al limite per q che tende a 1, si ha il risultato della derivazione ordinaria.

“Il binomio di Newton è bello come la Venere di Milo, peccato che pochi se ne accorgano.”

Fernando Pessoa

Binomio di Newton

Il binomio di Newton è utile per calcoli di alcune derivate. Tale binomio esprime lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi mediante la formula:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k ; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ è noto come coefficiente binomiale.

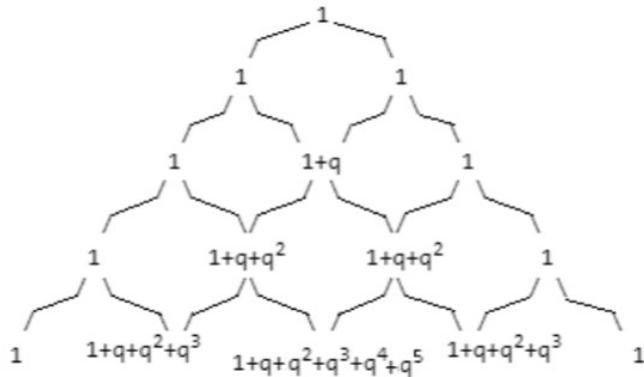
Esempi:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

I coefficienti binomiali sono gli interi che si trovano nel triangolo di Tartaglia.

		1	$n=0$
		1 1	$n=1$
		1 2 1	$n=2$
		1 3 3 1	$n=3$
		1 4 6 4 1	$n=4$
		1 5 10 10 5 1	$n=5$
		1 6 15 20 15 6 1	$n=6$
		1 7 21 35 35 21 7 1	$n=7$
		1 8 28 56 70 56 28 8 1	$n=8$
		1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	$n=9$
		1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	$n=10$
		1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1	$n=11$
		1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1	$n=12$
		1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1	$n=13$
1	1	14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1	$n=14$
k=0	k=1	k=2 k=3 k=4 k=5 k=6 k=7 k=8 k=9 k=10 k=11 k=12 k=13 k=14	

Triangolo di Tartaglia o Triangolo ordinario Pascal



Nel q-calcolo compare il triangolo q-Pascal

Esercizio 3. Calcolare la derivata e la q-derivata di $f(x) = x^n$ dove n è un intero positivo.

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots + (\Delta x)^2 - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n] x^{n-1}$$

$$D_q x^n = [n] x^{n-1} \text{ per } q \text{ che tende a } 1, n x^{n-1}$$

Esercizio 4. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = \frac{1}{x^2}$.

La derivata ordinaria è pari a:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2)}{(x+\Delta x)^2 x^2 \Delta x} = -\frac{2}{x^3}$$

Quindi:

$$D y = -\frac{2}{x^3} .$$

Passiamo alla q-derivata.

$$D_q y = \frac{\frac{1}{(q^2 x^2)} - \frac{1}{x^2}}{(q-1)x} = \frac{x^2 - q^2 x^2}{q^2 x^4 (q-1)x} = -\frac{(q-1)(q+1)}{x^3 q^2 (q-1)} = -\frac{(q+1)}{q^2 x^3}$$

Al limite, le due derivate coincidono.

Esercizio 5. Calcolare la q-derivata di $f(u)$ rispetto ad x , dove $u(x) = \alpha x^\beta$, con α, β costanti.

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta} \cdot \frac{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(q^\beta u) - f(u)}{q^\beta u - u} \cdot \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} = D_{q^\beta} f(u) \cdot D_q u(x)$$

Esercizio 6. Verificare le seguenti proprietà:

$$D(f(x)g(x)) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{(g(x))^2}$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x)$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x)$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

Esercizio 7. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = x + x^2$.

$$D_q u(x) = D_q x + D_q x^2 = \frac{qx - x}{(q-1)x} + \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x}$$

$$D_q u(x) = 1 + x \frac{q^2 - 1}{q-1} = 1 + x(q+1)$$

Esercizio 8. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = 1 + 2x + x^2$. Si ha: $D_q u(x) = 2 + x(q+1)$

Esercizio 9. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$. Verificare che al limite si ottiene la derivata ordinaria che è $\frac{dy}{dx} = \frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$.

$$D_q u(x) = \left[\frac{a+bqx}{c+dqx} - \frac{a+bx}{c+dx} \right] \cdot \frac{1}{(q-1)x}$$

Dopo qualche passaggio:

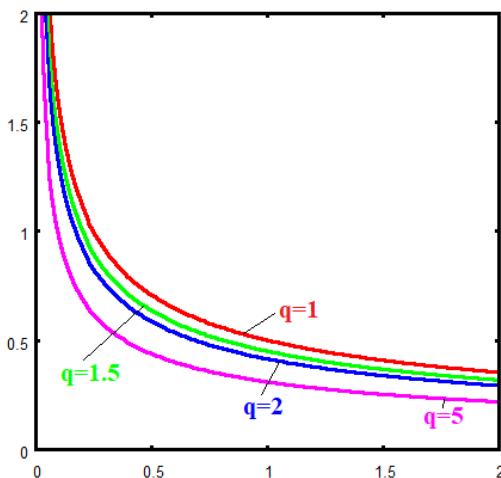
$$D_q u(x) = \left[\frac{bcx(q-1) - adx(q-1)}{(c+dqx)(c+dx)} \right] \cdot \frac{1}{(q-1)x} = \frac{bc-ad}{(c+dqx)(c+dx)}$$

A limite per q che tende ad 1, ritroviamo la derivata ordinaria.

Esercizio 10. Calcolare $D_q \sqrt{x}$.

$$D_q \sqrt{x} = \frac{\sqrt{qx} - \sqrt{x}}{(q-1)x} = \frac{\sqrt{qx} - \sqrt{x}}{(q-1)x} \cdot \frac{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}$$

Al limite per q che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $1/(2\sqrt{x})$.



Variazione di $D_q \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}$ in funzione del parametro q .

Esercizio 11. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = 8x + \sqrt{x}$.

$$Dy = 8 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} D_q y &= \frac{8qx + \sqrt{qx} - 8x - \sqrt{x}}{(q-1)x} = \frac{8(q-1)x}{(q-1)x} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{q}-1)}{(q-1)x} \\ &= 8 + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{q}-1}{(\sqrt{q}-1)(\sqrt{q}+1)} = 8 + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{q}+1)} \end{aligned}$$

Esercizio 12. Calcolare Dy e $D_q y$ di $y = \sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned} Dy &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ D_q y &= \frac{\sqrt{1-q^2x^2} - \sqrt{1-x^2}}{(q-1)x} = \frac{(\sqrt{1-q^2x^2} - \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-q^2x^2} + \sqrt{1-x^2})}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2x^2} + \sqrt{1-x^2})} \\ &= \frac{1-q^2x^2-1+x^2}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2x^2} + \sqrt{1-x^2})} = \frac{(1-q)(1+q)x^2}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2x^2} + \sqrt{1-x^2})} \\ &= -\frac{(1+q)x}{(\sqrt{1-q^2x^2} + \sqrt{1-x^2})} \end{aligned}$$

Al limite, diventa la derivata ordinaria.

Esercizio 13. Calcolare la derivata di $y = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{1/4}$.

<https://www.youmath.it/ym-tools-calcolatore-automatico/analisi-1/derivare-una-funzione.html>

Ecco uno screenshot dal sito:

Calcola:

Calcola

Si scrive come in Latex o simili open software.

Derivative:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \right) = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{3/4} (x+2)^2}$$

[Need a step by step solution for this problem? >>](#)

WolframAlpha [Get this widget](#)

$$D y = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{3/4} (x+2)^2} = \frac{1}{((x-1)^3(x+2)^5)^{1/4}}$$

Passiamo alla q-derivata di $y = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{1/4}$.

$$D_q y = \frac{\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{qx-1}{qx+2} \right)^{1/4} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{1/4}}{(q-1)x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} - (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} - (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2} - (x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{1}{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)(x+2) - (x-1)(qx+2)}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \\
&\quad \frac{1}{[(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}][(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2} + (x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}]} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{3(q-1)x}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \\
&\quad \frac{1}{[(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}][(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2} + (x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}]}
\end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{(x+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{1}{2[(x-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}] \cdot 2[(x-1)^{1/2}(x+2)^{1/2}]} \\
&= \frac{1}{((x-1)^3(x+2)^5)^{1/4}}
\end{aligned}$$

Esercizio 14. Calcolare $D_q e^x$.

$$D_q e^x = \frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x}$$

Vediamo che al limite $q \rightarrow 1$ si ottiene il risultato ordinario.

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = e^x \frac{e^{x(q-1)} - 1}{(q-1)x} = e^x \frac{x(q-1) + \frac{1}{2}x^2(q-1)^2 + \dots}{(q-1)x} = e^x \left(1 + \frac{1}{2}x(q-1) + \dots \right)$$

Al limite, abbiamo che il risultato della q-derivata diventa quello della derivata ordinaria.

Infatti:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{qx} = 1 + \frac{qx}{1!} + \frac{q^2 x^2}{2!} + \frac{q^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{q^n x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{qx} - e^x = (q-1)x + \frac{q^2 - 1}{2!} x^2 + \frac{q^3 - 1}{3!} x^3 + \dots + \frac{q^n - 1}{n!} x^n + \dots$$

Per definizione: $[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1)}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1$

$$e^{qx} - e^x = (q-1)x + \frac{q^2 - 1}{2!} x^2 + \frac{q^3 - 1}{3!} x^3 + \dots + \frac{q^n - 1}{n!} x^n + \dots$$

$$e^{qx} - e^x = (q-1) \left([1]x + \frac{[2]}{2!} x^2 + \frac{[3]}{3!} x^3 + \dots + \frac{[n]}{n!} x^n + \dots \right)$$

Quindi, precisamente:

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = [1] + \frac{[2]}{2!} x + \frac{[3]}{3!} x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!} x^{n-1} + \dots$$

Al limite per q che tende a 1, $[n] \rightarrow n$, si ottiene e^x .

$$e^x = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = \lim_{q \rightarrow 1} \left([1] + \frac{[2]}{2!} x + \frac{[3]}{3!} x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!} x^{n-1} + \dots \right)$$

Come si vede, la derivata q dell'esponenziale non porta all'esponenziale.

I due q-esponenziali

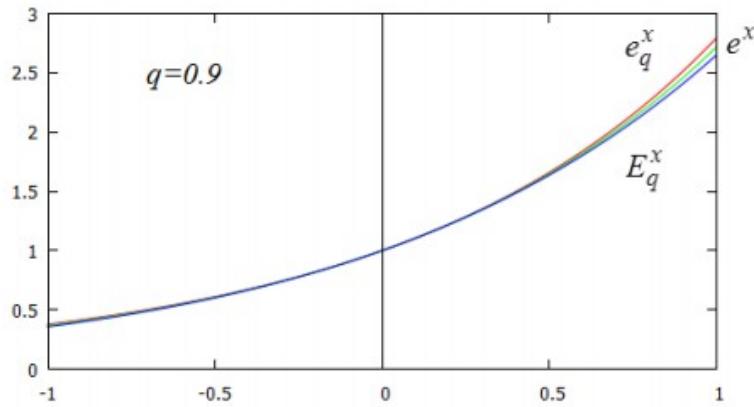
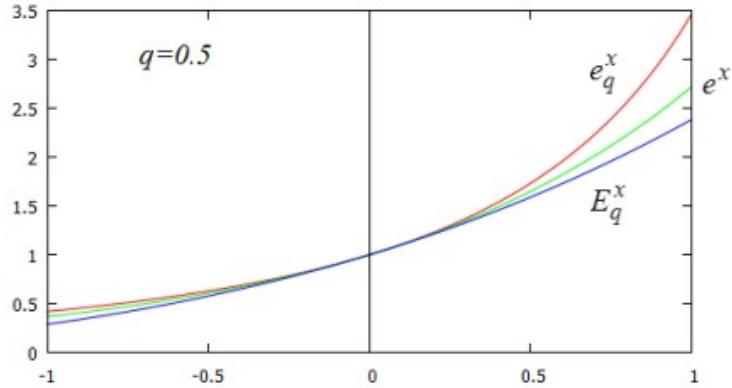
Riassumendo, la funzione esponenziale classica è data da: $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

L'analogo q dell'esponenziale è dato da:

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}$$

Possiamo usare anche un altro analogo, definito nel modo seguente.

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!}$$



Andamento di e_q^x , e^x , E_q^x per diversi valori di q .

La funzione esponenziale ordinaria rimane invariata sotto differenziazione ordinaria. Lo stesso vale per e_q^x con la q-derivata. Infatti:

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j] x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e_q^x$$

Passiamo ad E_q^x .

$$\begin{aligned}
 D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!} = \\
 &\sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-2)/2} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{q^j x^j}{[j]!} = E_q^{qx}
 \end{aligned}$$

Quindi: $D_q e_q^x = e_q^x$, $D_q E_q^x = E_q^{qx}$.

Quanto vale $e_q^x e_q^y$? In generale $e_q^x e_q^y \neq e_q^{x+y}$. Altre proprietà sono:

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \quad ; \quad e_{1/q}^x = E_q^x .$$

Torniamo alle nostre calcoli, dove applichiamo la definizione di q-derivata e valutiamo il limite per q che tende a 1.

Esercizio 15. Calcolare $D_q a^x$.

$$D_q a^x = \frac{a^{qx} - a^x}{(q-1)x}$$

Al limite per q che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $a^x \ln a$.

Consideriamo la definizione della derivata ordinaria:

$$\frac{d a^x}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a .$$

Ricordiamo infatti: $a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$. Per $x=h$ si trova il limite dato sopra.

Oppure scriviamo:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} ; \quad D e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

Torniamo alla q-derivata.

$$D_q a^x = \frac{a^{qx} - a^x}{(q-1)x} = a^x \frac{a^{qx-x} - 1}{(q-1)x} = a^x \frac{a^{x(q-1)} - 1}{(q-1)x}$$

Ricordiamo ancora una volta:

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

da cui

$$a^{x(q-1)} - 1 = x(q-1) \ln a + \frac{x^2 (q-1)^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3 (q-1)^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

Se prendiamo il limite di $x(q-1)$ che tende a zero, troviamo $a^x \ln a$.

Esercizio 16. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

La derivata ordinaria è pari a $\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

$$D_q f(x) = \left[\frac{1+\sqrt{xq}}{1-\sqrt{xq}} - \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] \frac{1}{x(q-1)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{q}-1)}{(1-\sqrt{xq})(1-\sqrt{x})x(q-1)}$$

$$D_q f(x) = \frac{2}{(1-\sqrt{xq})(1-\sqrt{x})\sqrt{x}(\sqrt{q}+1)}$$

Nel limite per q che tende a 1, si trova il risultato con la derivata ordinaria.

Esercizio 17. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = \frac{5}{x+1}$.

$$Dy = -\frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} D_q y &= \left(\frac{5}{qx+1} - \frac{5}{x+1} \right) \frac{1}{(q-1)x} = \frac{5x+5-5qx-5}{(qx+1)(x+1)(q-1)x} \\ &= -\frac{5}{(qx+1)(x+1)} \end{aligned}$$

Esercizio 18. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

La derivata ordinaria è pari a $Df(x) = \frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

Calcoliamo la q-derivata.

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= \left(\frac{2}{2qx-1} - \frac{2}{2x-1} \right) \frac{1}{(q-1)x} - \left(\frac{1}{qx} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= \frac{2(2x-1)-2(2qx-1)}{(2qx-1)(2x-1)(q-1)x} - \frac{x-qx}{qx^2(q-1)x} = \frac{4x(1-q)}{(2qx-1)(2x-1)(q-1)x} + \frac{1}{qx^2} \\ &= \frac{(2qx-1)(2x-1)-4qx^2}{qx^2(2qx-1)(2x-1)} = \frac{1-2x-2qx}{qx^2(2qx-1)(2x-1)} \end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1 si ha la derivata ordinaria.

Esercizio 19. Calcolare derivata e q-derivata di $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

$$Dy = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

$$\begin{aligned}
D_q y &= \frac{(qx)^5 - 4(qx)^3 + 2(qx) - 3 - x^5 + 4x^3 - 2x + 3}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^5 - 1)x^5 - 4(q^3 - 1)x^3 + 2(q-1)x}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q-1)(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)x^5 - 4(q-1)(q^2 + q + 1)x^3 + 2(q-1)x}{(q-1)x}
\end{aligned}$$

Si ricordi: $[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1)}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1$, da cui:

$$D_q y = [5]x^4 - 4 \cdot [3]x^3 + 2$$

Al limite per q che tende a 1: $5x^4 - 12x^2 + 2$.

Esercizio 20. Calcolare derivata e q-derivata di $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$.

La derivata ordinaria produce: $D y = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$.

$$\begin{aligned}
D_q y &= \frac{3(qx)^{2/3} - 2(qx)^{5/2} + (qx)^{-3} - 3x^{2/3} + 2x^{5/2} - x^{-3}}{(q-1)x} \\
&= \frac{3(q^{2/3} - 1)x^{2/3} - 2(q^{5/2} - 1)x^{5/2} + (q^{-3} - 1)x^{-3}}{(q-1)x} \\
&= \frac{3(q^{1/3} - 1)(q^{1/3} + 1)x^{2/3}}{(q-1)x} - \frac{2(q^{1/2} - 1)(q^{4/2} + q^{3/2} + q^{2/2} + q^{1/2} + 1)x^{5/2}}{(q-1)x} + \frac{(q^{-3} - 1)x^{-3}}{(q-1)x} \\
&= \frac{3(q^{1/3} - 1)(q^{1/3} + 1)x^{2/3}}{(q^{1/3} - 1)(q^{2/3} + q^{1/3} + 1)x} - \frac{2(q^{1/2} - 1)(q^{4/2} + q^{3/2} + q^{2/2} + q^{1/2} + 1)x^{5/2}}{(q^{1/2} - 1)(q^{1/2} + 1)x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{\left(\left(\frac{1}{q}\right)^3 - 1\right)x^{-3}}{q\left(1 - \frac{1}{q}\right)x} &= \frac{3(q^{1/3}+1)x^{2/3}}{(q^{2/3}+q^{1/3}+1)x} - \frac{2(q^{4/2}+q^{3/2}+q^{2/2}+q^{1/2}+1)x^{5/2}}{(q^{1/2}+1)x} \\
 &- \frac{\left(\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \frac{1}{q} + 1\right)x^{-3}}{qx}
 \end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1: $2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$

Esercizio 21. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = (8x-1)^4 = (g(x))^4$

$$Dy = 4(g(x))^3 Dg(x) = 32(8x-1)^3 = 32(8^3x^3 - 3 \cdot 8^2x^2 + 3 \cdot 8x - 1)$$

$$\begin{aligned}
 D_q y &= \frac{(8qx-1)^4 - (8x-1)^4}{(q-1)x} \\
 &= \frac{8^4q^4x^4 - 4 \cdot 8^3q^3x^3 + 6 \cdot 8^2q^2x^2 - 32qx + 1 - 8^4x^4 + 4 \cdot 8^3x^3 - 6 \cdot 8^2x^2 + 32x - 1}{(q-1)x} \\
 &= \frac{8^4(q^4-1)x^4 - 4 \cdot 8^3(q^3-1)x^3 + 6 \cdot 8^2(q^2-1)x^2 - 32(q-1)x}{(q-1)x} \\
 &= 8^4(q^3+q^2+q+1)x^3 - 4 \cdot 8^3(q^2+q+1)x^2 + 6 \cdot 8^2(q+1)x - 32
 \end{aligned}$$

Per q che tende a 1 :

$$4 \cdot 8 \cdot 8^3x^3 - 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8^2x^2 + 3 \cdot 4 \cdot 8^2 - 32 = 32(8^3x^3 - 3 \cdot 8^2x^2 + 3 \cdot 8x - 1)$$

Esercizio 22. Calcolare derivata e q-derivata di $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x-1}$.

www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp

Calcola la derivata della funzione

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x - 1} \right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$$

Need a step by step solution for this problem?

$$D_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$$

$$D_q y = \frac{\sqrt{q^2 x^2 + 1} - \sqrt{qx - 1} - \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x - 1}}{(q-1)x}$$

$$= \frac{\sqrt{q^2 x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{(q-1)x} - \frac{\sqrt{qx - 1} - \sqrt{x - 1}}{(q-1)x}$$

$$= \frac{q^2 x^2 + 1 - x^2 - 1}{(q-1)x(\sqrt{q^2 x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})} - \frac{qx - 1 - x + 1}{(q-1)x(\sqrt{qx - 1} + \sqrt{x - 1})}$$

$$= \frac{(q+1)(q-1)x^2}{(q-1)x(\sqrt{q^2 x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})} - \frac{(q-1)x}{(q-1)x(\sqrt{qx - 1} + \sqrt{x - 1})}$$

Al limite per q che tende a 1 si trova la derivata ordinaria.

Esercizio 23. Calcolare derivata e q-derivata di $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Si può usare: <https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/> o semplicemente applicare la regola della derivata delle funzioni composte:

$$Dy = -\frac{D(\sqrt{x^2+1})}{x^2+1} = -\frac{2x}{2(x^2+1)^{3/2}}$$

$$Dy = -x(x^2+1)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned} D_q y &= \left(\frac{1}{\sqrt{q^2 x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{q^2 x^2+1}}{(\sqrt{q^2 x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= \left(\frac{x^2+1 - q^2 x^2 - 1}{(\sqrt{q^2 x^2+1})(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{q^2 x^2+1})} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= -\left(\frac{x(1+q)}{(\sqrt{q^2 x^2+1})(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{q^2 x^2+1})} \right) \end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1 diventa $-x(x^2+1)^{-3/2}$.

Alcune derivate dal libro di Boris Demidovic sono proposte in Appendice A, B e C.

La q-derivata simmetrica

Tale derivata è definita come:

$$D_q^{\sim} f(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{(q - q^{-1})x}$$

Esercizio 24. Calcolare la q-derivata simmetrica di x^2 .

$$D_q^{\sim} x^2 = \frac{q^2 x^2 - q^{-2} x^2}{(q - q^{-1})x} = x \frac{q^4 - 1}{q^2 q^{-1} (q^2 - 1)} = x \frac{q^2 + 1}{q}$$

Al limite per $q \rightarrow 1$ si ha la derivata ordinaria $2x$.

Si può introdurre l'intero q-simmetrico:

$$[n]^\sim = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

Per esempio: $[2]^\sim = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}}$. Quindi $D_q^\sim x^2 = \frac{q^2 x^2 - q^{-2} x^2}{(q - q^{-1})x} = [2]^\sim x$.

La q-derivata dei binomi

I polinomi binomiali ci servono per arrivare alla q-formula di Taylor.

La formula ordinaria è:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Cerchiamo dei polinomi $P_n(x)$ da usare invece dei polinomi $P_n = (x-a)^n$.

La proprietà richiesta è che si abbia $D_q P_n(x) = P_{n-1}(x)$, come nel caso ordinario si ha $D P_n(x) = P_{n-1}(x)$.

Iniziamo con $a=0$. Sia $P_n(x) = x^n / [n]!$.

$$D_q P_n(x) = \frac{D_q x^n}{[n]!} = \frac{[n] x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x)$$

Supponiamo ora di considerare i polinomi nel caso $a \neq 0$. Partiamo da $P_0(1) = 1$. Sia $P_1(x)$ tale che $D_q P_1(x) = 1$ e $P_1(a) = 0$. Allora $P_1(x) = x - a$.

Cerchiamo $P_2(x)$, con $D_q P_2(x) = P_1(x)$, $P_2(a) = 0$. Poniamo:

$$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2$$

$$D_q P_2(x) = \left\{ \frac{q^2 x^2}{[2]} - aqx - \frac{a^2}{[2]} + a^2 - \frac{x^2}{[2]} + ax + \frac{a^2}{[2]} - a^2 \right\} \frac{1}{x(q-1)} =$$

$$\left\{ \frac{x^2(q^2-1)}{[2]} - ax(q-1) \right\} \frac{1}{x(q-1)} = \frac{x(q+1)}{[2]} - a = \frac{x(q+1)(q-1)}{(q^2-1)} - a = x - a$$

Abbiamo quindi i seguenti polinomi:

$$P_2(x) = \frac{(x-a)(x-q a)}{[2]!} , \quad P_2(x) = \frac{(x-a)(x-q a)(x-q^2 a)}{[3]!} , \dots ,$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-q a)(x-q^2 a) \dots (x-q^{n-1} a)}{[n]!} = (x-a)_q^n$$

Questi sono i polinomi che diventano $P_n(x) = x^n / [n]!$ quando $a=0$.

L'analogo di $(x-a)^n$ sono quindi i polinomi $(x-a)_q^n$.

Questi polinomi generalizzano il binomio e sono noti come q-binomio.

$$(x-a)_q^n = (x-a)(x-qa) \dots (x-q^{n-1} a)$$

Esempio: $(x-a)_q^3 = (x-a)(x-qa)(x-q^2 a)$

Si ha inoltre che: $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$ (*), e questo si può dimostrare per induzione e con la regola della derivazione del prodotto di funzioni.

Dalla definizione: $(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k(x-q^k a)$. Derivo con una regola vista all'inizio:

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x)$$

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q^k D_q(x-q^k a) + (qx-q^k a) D_q(x-a)_q^k = \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1} a) D_q(x-a)_q^k \end{aligned}$$

Usando la regola (*):

$$\begin{aligned} (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1} a)[k](x-a)_q^{k-1} &= \\ (1+q[k])(x-a)_q^k &= [k+1](x-a)_q^k \end{aligned}$$

$$\text{Si noti che: } 1+q[k] = 1+q \frac{q^k - 1}{q-1} = \frac{q^{k+1} - 1}{q-1} = [k+1].$$

Proprietà dei polinomi

Abbiamo quindi che $D_q P_n = P_{n-1}$. Vediamo ora alcune altre proprietà.

Consideriamo $(x-a)_q^{m+n}$ e vediamo quanto vale. In generale abbiamo che $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$. Vale invece:

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)(x-q a) \dots (x-q^{m-1} a)(x-q^m a)(x-q^{m+1} a) \dots (x-q^{m+n-1} a)$$

$$= (x-a)_q^m (x-q^m a)(x-q^{m+1} a) \dots (x-q^{m+n-1} a) = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$$

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$$

$$\text{Esempio: } (x-a)_q^5 = (x-a)_q^4 (x-q^4 a)_q^1 = (x-a)_q^3 (x-q^3 a)_q^2$$

Poniamo m come $-n$, abbiamo:

$$(x-a)_q^{-n+n} = 1 = (x-a)_q^{-n} (x-q^{-n}a)_q^n$$

Quindi:

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \quad (*)$$

Vediamo se questa espressione è appropriata per il calcolo. Partiamo nuovamente da $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$ e cambiamo m in $-m'$. Si trova:

$$(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n = (x-a)_q^{-m'} (x-q^{-m'} a)_q^n = \frac{(x-q^{-m'} a)_q^n}{(x-q^{-m'} a)_q^{m'}}$$

Ad esempio, se $m'=3$ ed $n=3$, il risultato è 1.

Sia $m=-m'<0$ e $n=-n'<0$. Calcoliamo $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$:

$$(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n = (x-a)_q^{-m'} (x-q^{-m'} a)_q^{-n'} =$$

$$\frac{1}{(x-q^{-m'} a)_q^{m'} (x-q^{-n'-m'} a)_q^{n'}} = \frac{1}{(x-a^{-n'-m'} a)_q^{n'} (x-q^{n'}(q^{-n'-m'} a))_q^{m'}} =$$

$$\frac{1}{(x-q^{-n'-m'} a)_q^{n'+m'}} = (x-a)_q^{-m'-n'} = (x-a)_q^{m+n}$$

La (*) è adeguata al calcolo.

Le q-derivate da ricordare

Si possono verificare le seguenti derivate importanti per i calcoli successivi.

Siano $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, t \in \mathbb{C}$.

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1} ; \quad D_q(a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}$$

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n](x-q^n a)_q^{-n-1} ; \quad D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}$$

$$D_q(ax+b)_q^n = a[n](ax+b)_q^{n-1} ; \quad D_q(a+b x)_q^n = b[n](a+bqx)_q^{n-1}$$

$$D_q(1+b x)_q^t = b[t](1+bqx)_q^{t-1}$$

L'analogo per il logaritmo

Per l'analogo del logaritmo nel q-calcolo, si veda “Leonhard Euler and a q-analogue of the logarithm”, di Erik Koelink, Walter Van Assche. Abstract: We study a q-logarithm which was introduced by Euler and give some of its properties. This q-logarithm did not get much attention in the recent literature. We derive basic properties, some of which were already given by Euler in a 1751-paper and 1734-letter to Daniel Bernoulli. The corresponding q-analogue of the dilogarithm is introduced. The relation to the values at 1 and 2 of a q-analogue of the zeta function is given. We briefly describe some other q-logarithms that have appeared in the recent literature. - Subjects: Classical Analysis and ODEs (math.CA); History and Overview (math.HO), Journal reference: Proc AMS 137 (2009), no. 5, 1663-1676, DOI: 10.1090/S0002-9939-08-09374-X – Available arXiv:0709.1788 [math.CA]

Appendici

L'uso di software per il calcolo

In rete si trovano diversi software on-line che offrono il calcolo della derivata. Se lo scopo dell'esercizio è quello di apprendere il calcolo e la teoria relativa, è bene prima risolvere l'esercizio, seguendo le indicazioni ad esempio di [7], e poi, proprio in caso estremo, ricorrere alla soluzione on-line. Si è usato in precedenza, in alcuni problemi, il software WolframAlpha, al link www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp. Se si usano altri software, si raccomanda ulteriore verifica con WolframAlpha, per vedere se si è scritto bene l'input della funzione con la notazione corretta.

Torniamo ora all'esercizio 23, per mostrare altri software. L'esercizio chiedeva di calcolare derivata di $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Usiamo

<https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/>

Ecco lo screenshot del risultato.

$1 \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ $2 \quad f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}^2}$ $3 \quad f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(x^2+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$	$4 \quad f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(x^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$ $5 \quad f'(x) = \frac{-x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$ $6 \quad f'(x) = -x \cdot (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$
---	--

La grafica è molto bella, come una bella scrittura a mano. Attenzione però, che questo software può avere problemi di formattazione con gli esponenti. Ne parliamo di seguito, nella discussione delle derivate logaritmiche.

Altro software on-line si trova al link <https://www.derivative-calculator.net>, che propone tutti i passaggi del calcolo, con le regole applicate. “Derivative Calculator - Calculate derivatives online — with steps and graphing!”.

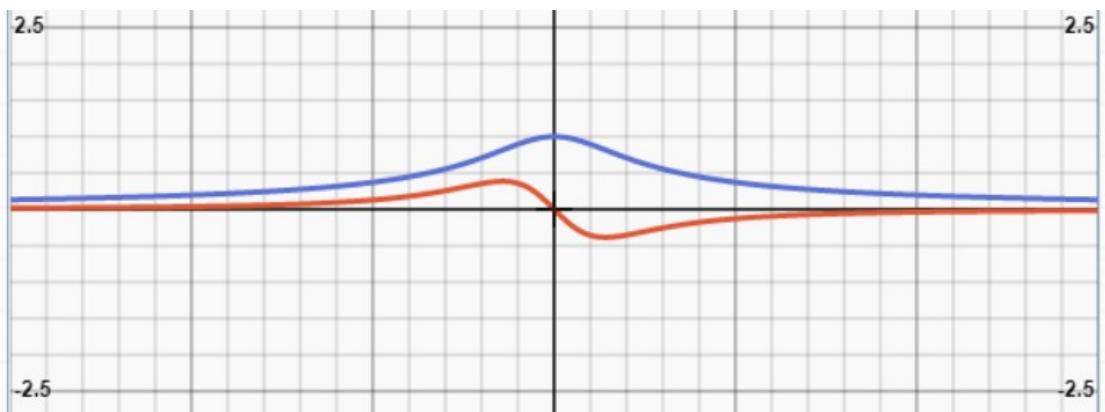
Ecco lo screenshot.

Click at any derivative in order to show the rule that was applied.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx} [x^2 + 1] \\
 &= -\frac{\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[1]}{2(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{2x + 0}{2(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

Simplify **Roots/zeros**

Grafico di funzione e derivata.



Rapporti incrementali

Usando la definizione, si calcolano i rapporti incrementali.

1. Si calcoli il rapporto incrementale di $y = \frac{x^2+2}{x-3}$ per $x_o=2$.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{(x_o+h)^2+2}{x_o+h-3} - \frac{x_o^2+2}{x_o-3}}{h} = \frac{\frac{(2+h)^2+2}{2+h-3} - \frac{2^2+2}{2-3}}{h} \\ &= \frac{\frac{4+4h+h^2+2}{h-1} + 6}{h} = \frac{6+4h+h^2+6(h-1)}{(h-1)h} = \frac{h^2+10h}{(h-1)h} = \frac{h+10}{h-1}\end{aligned}$$

2. Si calcoli il rapporto incrementale di $y = \frac{2}{3x+2}$ per $x_o=-1$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{2}{3(x_o+h)+2} - \frac{2}{3x_o+2}}{h} = \frac{\frac{2}{-3+3h+2} - \frac{2}{-3+2}}{h} = \frac{\frac{2}{3h-1} + 2}{h} \\ &= \frac{2+2(3h-1)}{h(3h-1)} = \frac{6}{(3h-1)}\end{aligned}$$

3. Si calcoli il rapporto incrementale di $y = \frac{2}{\ln(1+x)}$ per $x_o=1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{\ln(1+x_o+h)} - \frac{2}{\ln(1+x_o)}}{h} = \frac{\frac{2}{\ln(2+h)} - \frac{2}{\ln(2)}}{h} = \frac{2 \cdot \ln 2 - \ln(2+h)}{h \cdot \ln 2 \cdot \ln(2+h)}$$

4. Con rapporto incrementale e limite si calcoli la derivata di $\ln(1+x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x+h+1) - \ln(x+1)}{h} = \frac{\ln \frac{x+h+1}{x+1}}{h} = \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x+1}\right)}{h}$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \frac{h}{1+x}$. Per t che tende a zero, anche h tende a zero.

$$\frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x+1}\right)}{h} = \frac{\ln(1+t)}{t(1+x)} = \lim_{ht \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t(1+x)} = \frac{1}{1+x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{1+x}$$

Derivate funzioni composte

In generale, $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ quindi: $y=f[\varphi(x)]$, $Dy=D_u y \cdot D_x u$

1 - Calcolare Dy di $y=(x^2+2x+3)^5$.

$$y=u^5, \quad u=x^2+2x+3$$

$$Dy=D_u u^5 \cdot D_x (x^2+2x+3)=5u^4 \cdot (2x+2)=10 \cdot (x^2+2x+3)^4 \cdot (x+1)$$

2 - Calcolare Dy di $y=\sin^3 4x$.

$$y=u^3, \quad u=\sin v, \quad v=4x. \quad \text{Si calcola: } Dy=D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v$$

$$Dy=3u^2 \cdot \cos v \cdot 4=3\sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4=12 \cdot \sin^2 4x \cdot \cos 4x$$

3 - Calcolare Dy di $y=(3-2\sin x)^5$.

$$y=u^5, \quad u=(3-2\sin x). \quad \text{Si calcola: } Dy=D_u y \cdot D_x u$$

$$Dy=5u^4 \cdot (-2\cos x)=5 \cdot (3-2\sin x)^4 \cdot (-2\cos x)$$

4 - Calcolare Dy di $y=(1+3x-5x^2)^{30}$

$$y=u^{30}, \quad u=1+3x-5x^2$$

$$Dy = D_u u^{30} \cdot D_x (1+3x-5x^2) = 30u^{29} \cdot (3-10x) = 30 \cdot (1+3x-5x^2)^{29} \cdot (3-10x)$$

5 - Calcolare Dy di $y = \sqrt{1-x^2}$.

$$u = (1-x^2), \quad y = \sqrt{u}$$

$$Dy = Du \sqrt{u} \cdot D_x (1-x^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} \right)^{1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

6 - Calcolare Dy di $y = \frac{3}{56 \cdot (2x-1)^7} - \frac{1}{24 \cdot (2x-1)^6} - \frac{1}{40 \cdot (2x-1)^5}$.

$$u = (2x-1)$$

$$Dy = \frac{3 \cdot (-7) \cdot 2}{56 \cdot (2x-1)^8} + \frac{6 \cdot 2}{24 \cdot (2x-1)^7} + \frac{5 \cdot 2}{40 \cdot (2x-1)^5}$$

$$= -\frac{42}{56 \cdot (2x-1)^8} + \frac{1}{2 \cdot (2x-1)^7} + \frac{1}{4 \cdot (2x-1)^6}$$

$$= \frac{-42/56 + (2x-1)/2 + (2x-1)^2/4}{(2x-1)^8} = \frac{-3/4 + x - 1/2 + x^2 - x + 1/4}{(2x-1)^8}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{(2x-1)^8}$$

Verifica con <https://www.derivative-calculator.net>

FIRST DERIVATIVE:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x) =$$

$$\frac{1}{4(2x-1)^6} + \frac{1}{2(2x-1)^7} - \frac{3}{4(2x-1)^8}$$

Simplify/rewrite:

$$\frac{x^2 - 1}{(2x-1)^8}$$

[Simplify](#) [Show steps](#) [Roots/zeros](#)

7 - Calcolare Dy di $y = \log_{10} \sin x$.

$$y = \log_{10} u, \quad u = \sin x. \text{ Quindi: } D y = \frac{\log_{10} e}{u} \cdot Du = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \log_{10} e = \cot(x) \cdot \log_{10} e$$

Ricordiamo che $D \log_e x = D \ln x = 1/x$ e che $D \log_a x = 1/(x \ln a) = (\log_a e)/x$.

Infatti:

$$\begin{aligned} D(\log_a(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+z)}{zx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

dove è usato uno dei limiti notevoli del logaritmo, che sono i seguenti.

1. Limite notevole del logaritmo naturale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

2. Limite notevole della funzione logaritmica con base arbitraria

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)} \quad ; \quad \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

con $a > 0, a \neq 1$

Ricordiamo che se il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ esiste ed è positivo, allora si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln f(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow 0} f(x)]$$

Dimostriamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1$$

Ricordiamo infine anche la definizione del numero di Nepero: $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Derivate logaritmiche

Definizione: $y = f(x)$, $D(\ln y) = \frac{Dy}{y} = \frac{Df(x)}{f(x)}$ $\Rightarrow Df(x) = f(x) \frac{Dy}{y} = f(x) D \ln y$

Esempio: $y = (\sin x)^x$, $Dy = (\sin x)^x D \ln y$. Quindi:

$$Dy = (\sin x)^x D(x \ln \sin x) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cot g(x))$$

Esempio: $y = u^v$ dove $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Quindi:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln(u^v) = v \ln u, \quad D(\ln y) = Dv \cdot \ln u + v \cdot D(\ln u) \\ \frac{Dy}{y} &= Dv \cdot \ln u + v \cdot \frac{Du}{u} \quad \text{da cui} \quad Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + v \cdot \frac{Du}{u} \right]. \end{aligned}$$

1 - Calcolare Dy se $y = (\cos x)^x$.

$$\ln y = \ln[(\cos x)^x] = x \ln \cos x, \quad v = x, \quad u = \cos x.$$

$$Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + v \cdot \frac{Du}{u} \right] = (x \cos x)^x [\ln \cos x - x \operatorname{tg} x]$$

Oppure direttamente: $Dy = (\cos x)^x D \ln y$. Da cui si ha:

$$Dy = (\cos x)^x D(x \ln \cos x) = (\cos x)^x (\ln \cos x - x \operatorname{tg} x)$$

2 - Calcolare Dy se $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

$$Dy = y D \ln y = y \cdot D \left[\frac{1}{2} (\ln x + \ln(x-1) - \ln(x-2)) \right] = \frac{y}{2} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right]$$

$$Dy = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$$

3 - Calcolare Dy se $y = x^{\sqrt{x}}$.

$$\ln y = \ln[x^{\sqrt{x}}] = \sqrt{x} \cdot \ln x, \quad v = \sqrt{x}, \quad u = x, \quad Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right]$$

$$Dy = x^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln u + \frac{\sqrt{x}}{x} \right] = x^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{x} \left[1 + \frac{1}{2} \ln x \right] = x^{\sqrt{x}-1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \ln x \right]$$

4 - Calcolare Dy se $y = x^x$.

$$\ln y = \ln[x^x] = x \cdot \ln x, \quad v = x, \quad u = x.$$

$$Dy = x^x \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^x [\ln x + 1]$$

5 - Calcolare Dy se $y = x^{x^2}$. Si ha $v = x^2$, $u = x$.

$$Dy = x^{x^2} \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{x^2} \left[2x \ln x + \frac{x^2}{x} \right] = x^{x^2} [2x \ln x + x] = x^{x^2+1} [2 \ln x + 1]$$

6 - Calcolare Dy se $y = x^{x^x}$. Si ha $v = x^x$, $u = x$.

$$Dy = x^{x^x} \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{x^x} \left[x^x [\ln x + 1] \cdot \ln x + \frac{x^x}{x} \right] = x^{x^x} x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$

Da <https://www.wolframalpha.com/input/>

The screenshot shows the WolframAlpha input field containing "derivative x^(x^x)". Below the input field are two buttons: "NATURAL LANGUAGE" and "MATH INPUT". To the right of the input field is a "Derivative" button. The output area displays the derivative formula: $\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x+x-1} (x \log^2(x) + x \log(x) + 1)$.

Attenzione ad interpretare bene la scrittura. x^x è ad esponente di x .

Quindi x^{x^x} non è uguale a $(x^x)^x$. Facciamo un esempio numerico:

$$3^{(3^3)} = 3^{27}, \text{ invece } (3^3)^3 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = 3^9 = 3^{(3^2)}.$$

$$\text{In generale: } 2^{(3^4)} = 2^{81}, \text{ invece } (2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{12}.$$

La potenza è un'operazione che associa a una coppia di numeri a e n , detti rispettivamente base ed esponente, il numero dato dal prodotto di n fattori uguali ad a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

Proprietà:

1) Prodotto di potenze con la stessa base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2) Quoziente di potenze con la stessa base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3) Potenza di potenza

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

4) Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

5) Quoziente di potenze con lo stesso esponente

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

7 - Calcolare Dy se $y = (x^x)^x$. Si ha $v = x$, $u = x^x$.

$$Dy = (x^x)^x \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = (x^x)^x \left[\ln x^x + \frac{x}{x^x} x^x [\ln x + 1] \right] = (x^x)^x [\ln x^x + x [\ln x + 1]]$$

Da <https://www.wolframalpha.com/input/>

The screenshot shows the WolframAlpha interface. On the left, there is a text input field containing the text "derivative (x^x)^x". Below this, there are two buttons: "NATURAL LANGUAGE" and "MATH INPUT". On the right, the results are displayed under the heading "Derivative". The result is shown as a mathematical expression: $\frac{d}{dx}((x^x)^x) = (x^x)^x (\log(x^x) + x + x \log(x))$.

8 - Calcolare Dy se $y = x^{\sin x}$. Si ha $v = \sin x$, $u = x$.

$$Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

9 – Al punto **4** si è calcolato Dy di $y = x^x$, nel seguente modo. Si è introdotto il logaritmo $\ln y = \ln[x^x] = x \cdot \ln x$, e le funzioni $v = x$, $u = \ln x$, di modo che:

$$Dy = x^x \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^x [\ln x + 1]$$

Il calcolo della derivata risulta praticamente immediato.

In rete si trovano metodi differenti. Si veda ad esempio

<https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/5926-derivata-di-x-all-a-x.html>

La spiegazione fornita si basa sulla definizione: $x = e^{\ln x}$, quindi $x^x = e^{x \ln x}$.

I passaggi sono come quelli che si hanno con il calcolatore on-line:

<https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/>

- 1 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x)$
- 2 $f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(x)})$
- 3 $f'(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) \cdot e^{x \cdot \ln(x)}$
- 4 $f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx}(x) \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) \right)$
- 5 $f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot e^{x \cdot \ln(x)}$
- 6 $f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$

10 – Calcolate in altro modo la derivata al punto **6**.

Si usi <https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/> con la funzione

$x^x(x^x)$. Il software non scrive bene i passi 1, 7 ed 8. Ad esempio:

$$\begin{array}{ll} 1 & f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x \cdot x) \\ 2 & f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x) \cdot x^x}\right) \end{array} \quad (*)$$

Quindi ora si riscrivono:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{x^x}) \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x) \cdot x^x}\right) \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(\ln(x) \cdot x^x) \cdot e^{\ln(x) \cdot x^x} \\ f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{d}{dx}(\ln(x)) \cdot x^x + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(x^x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(x)}) \right) \\ f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} \right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx}(x) \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot (\ln(x) + 1) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} \right) \\ f'(x) &= x^{x^x} \cdot (x^{-1} \cdot x^x + \ln(x) \cdot (\ln(x) + 1) \cdot x^x) \\ f'(x) &= x^{x^x} \cdot (x^{x-1} + \ln(x) \cdot (\ln(x) + 1) \cdot x^x) \end{aligned}$$

In alternativa, <https://www.wolframalpha.com/input/>

The screenshot shows the WolframAlpha input field with the query "derivative x^(x^x)". Below the input field are two buttons: "NATURAL LANGUAGE" and "MATH INPUT". To the right, the output is displayed under the heading "Derivative". The result is shown in a single-line equation: $\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x+x-1} (x \log^2(x) + x \log(x) + 1)$.

È palese che al punto 6 vi è l'approccio ottimale al calcolo, da cui:

$$Dx^{xx} = x^{xx} \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{xx} \left[x^x [\ln x + 1] \cdot \ln x + \frac{x^x}{x} \right] = x^{xx} x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$

Se si usa [https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calculo-derivate-online/](https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/) o altro calcolatore on-line, si verifichi sempre il risultato, ad esempio con <https://www.wolframalpha.com/input/> che chiede sempre di risolvere le ambiguità di scrittura. Le ambiguità possono portare a risultati errati. Altro software on-line si trova al link <https://www.derivative-calculator.net>, che propone tutti i passaggi del calcolo, con le regole applicate. “Derivative Calculator - Calculate derivatives online — with steps and graphing!”.

Un esempio, calcolare $Dy = D((x^x)^x)$. Il risultato è il seguente:

The screenshot shows a derivative calculator interface. At the top, there is a message: "Click at any derivative in order to show the rule that was applied." Below this, the input expression $(x^x)^x$ is shown. The calculator then performs the following steps:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}[(x^x)^x] \\ &= (x^x)^x \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x^x)x] \\ &= (x^x)^x \left(\frac{d}{dx}[x^2] \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)] \right) \\ &= (x^x)^x \left(2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= (x^x)^x (2x \ln(x) + x) \end{aligned}$$

Below the main derivation, there is an "Alternative result:" section showing the simplified form $x(x^x)^x (2 \ln(x) + 1)$. At the bottom, there are two buttons: "Simplify" and "Roots/zeros". To the right of the derivation, there are three icons: a checkmark, a document, and a magnifying glass.

Nella pagina seguente, lo screenshot del grafico della funzione e della sua derivata.

Interactive function graphing:

Navigate using mouse or touch screen. Drag to pan, use the mouse wheel or two fingers to zoom.



Altro esempio, il calcolo di $x^{x^x} = x^{(x^x)}$.

Click at any derivative in order to show the rule that was applied.
Click at any derivative in order to show the rule that was applied.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} [x^{x^x}] \\
 &= x^{x^x} \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)x^x] \\
 &= x^{x^x} \left(\frac{d}{dx} [x^x] \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)] \right) \\
 &= x^{x^x} \left(x^x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)x] \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{1}{x} \right) \\
 &= x^{x^x} \left(x^x \left(\frac{d}{dx} [x] \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)] \right) \ln(x) + x^{x-1} \right) \\
 &= x^{x^x} \left(x^x \left(1 \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \ln(x) + x^{x-1} \right) \\
 &= x^{x^x} (x^x \ln(x) (\ln(x) + 1) + x^{x-1})
 \end{aligned}$$

Nella pagina seguente lo screenshot del grafico di funzione e derivata.

Interactive function graphing:

Navigate using mouse or touch screen. Drag to pan, use the mouse wheel or two fingers to zoom.



Formattazione

Si è accennato a possibili problemi di formattazione. Si usi

<https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/>

per calcolare $D y = D((x^x)^x)$. Il risultato si vede nello screenshot seguente, da cui appare la formula (1) scritta come in (*) a pag. 35.

$$\begin{aligned}
 1 \quad & f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x \cdot x) \\
 2 \quad & f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x) \cdot x^2}\right) \\
 3 \quad & f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x) \cdot x^2) \cdot e^{\ln(x) \cdot x^2} \\
 4 \quad & f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x^2} \cdot \left(\frac{d}{dx}(\ln(x)) \cdot x^2 + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}\right. \\
 5 \quad & f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot \ln(x)\right) \\
 6 \quad & f'(x) = x^x \cdot 2 \cdot (x^2 \cdot x^{-1} + 2 \cdot x \cdot \ln(x)) \\
 7 \quad & f'(x) = x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1) \cdot x^x \cdot 2
 \end{aligned}$$

Si deve leggere come $z = x \cdot (2 \ln x + 1) x^{x^2} = x \cdot (2 \ln x + 1) (x^x)^x$. Inoltre si noti: $(x^x)^x = x^{x^2}$.

Altre derivare logaritmiche

1 - Calcolare Dy se $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

Ecco i primi passaggi:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \right] \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \cdot \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) x \right] \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \left(\frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right] \cdot x + \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \cdot \frac{d}{dx} [x] \right) \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} + 1 \right] \cdot x + \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

Risultato è: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right]$.

2 - Calcolare Dy se $y = (\cos x)^{\sin x}$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

Ecco i primi passaggi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [\cos^{\sin(x)}(x)] \\ &= \cos^{\sin(x)}(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\cos(x)) \sin(x)] \\ &= \cos^{\sin(x)}(x) \left(\frac{d}{dx} [\sin(x)] \cdot \ln(\cos(x)) + \sin(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\cos(x))] \right) \end{aligned}$$

Risultato: $(\cos x)^{\sin x} (\cos x \ln \cos x - \sin x \tan x)$

3 - Calcolare Dy se $y = (\arctan x)^x$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

Ecco i primi passaggi

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} [\arctan^x(x)] \\
&= \arctan^x(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\arctan(x))x] \\
&= \arctan^x(x) \left(\frac{d}{dx} [x] \cdot \ln(\arctan(x)) + x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\arctan(x))] \right)
\end{aligned}$$

Risultato: $(\arctan x)^x \cdot \left(\ln \arctan x + \frac{x}{(1+x^2)\arctan x} \right)$.

4 - Calcolare Dy se $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

$$\frac{x^{5/3}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Note: Your input has been rewritten/simplified.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{5/3}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \right] \\
&= \frac{\frac{d}{dx} \left[x^{5/3} \right] \cdot \sqrt[3]{x^2+1} - x^{5/3} \cdot \frac{d}{dx} \left[\sqrt[3]{x^2+1} \right]}{\left(\sqrt[3]{x^2+1} \right)^2}
\end{aligned}$$

E poi, dopo diversi passaggi, si arriva al risultato:

$$\frac{x^{2/3} (3x^2 + 5)}{3(x^2 + 1)^{4/3}}$$

Calcoliamo adesso Dy di $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$, in modo molto più veloce e sintetico. Si noti che: $D \ln y = \frac{Dy}{y}$ da cui: $Dy = y \cdot D \ln y$.

$$\ln y = \ln \left[x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3} \right] = \ln x + \frac{1}{3} (\ln x^2 - \ln(x^2+1))$$

$$D \ln y = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{(x^2+1)} \right) = \frac{5(x^2+1) - 2x^2}{3x(x^2+1)} = \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} .$$

$$Dy = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3} \cdot \left[\frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} \right] = \frac{3x^2+5}{3(x^2+1)} \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$$

Quindi:

$$\frac{x^{2/3} (3x^2 + 5)}{3(x^2 + 1)^{4/3}}$$

Derivare esponenziali

1 - Calcolare Dy se $y = x^7 \cdot e^x$. $Dy = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x = (7+x)x^6 \cdot e^x$

2 - Calcolare Dy se $y = (x-1) \cdot e^x$. $Dy = e^x + (x-1) \cdot e^x = xe^x$

3 - Calcolare Dy se $y = \frac{e^x}{x^2}$. $Dy = -\frac{2}{x^3} e^x + \frac{1}{x} e^x = \frac{x-2}{x^3} e^x$

4 - Calcolare Dy se $y = \frac{x^5}{e^x}$. $Dy = -\frac{5x^4}{e^x} - \frac{x^5 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{5x^4 - x^5}{e^x}$

5 - Calcolare Dy se $y = e^x \cdot \cos x$. $Dy = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$

Calcoliamo la q-derivata di **1**.

$$D_q y = \frac{(qx)^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x}$$

$$\frac{(qx)^7 e^{qx} - x^7 e^{qx} + x^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x} = [7]x^6 e^{qx} + \frac{x^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x}$$

Ricordiamo che:

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = [1] + \frac{[2]}{2!}x + \frac{[3]}{3!}x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!}x^{n-1} + \dots$$

$$\text{Quindi: } D_q y = [7]x^6 e^{qx} + x^7 \left([1] + \frac{[2]}{2!}x + \frac{[3]}{3!}x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!}x^{n-1} + \dots \right) .$$

Derivate varie dal Rif.[7]

1 - Calcolare Dy se $y = \ln \ln(3 - 2x^3)$.

$$Dy = \frac{1}{\ln(3 - 2x^3)} \cdot D\ln(3 - 2x^3) = \frac{6x^2}{(3 - 2x^3)} \cdot \frac{1}{\ln(3 - 2x^3)}$$

2 - Calcolare Dy se $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x})$.

$$Dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x}) - (1 + \sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x} \cdot (1 + \sqrt{x}) - (1 + \sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

3 - Calcolare Dy se $y = (x + \sqrt{x})^{1/3}$. Uso $D\ln y = \frac{Dy}{y}$ da cui: $Dy = y \cdot D\ln y$.

$$Dy = y \cdot D\ln y = y \cdot D\frac{1}{3}\ln(x + \sqrt{x}) = \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$Dy = \frac{(x + \sqrt{x})^{1/3}}{3} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x + \sqrt{x})^{2/3}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$Dy = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^{2/3}}$$

4 - Calcolare Dy se $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$. $Dy = 5x^4 - 12x^2 + 2$

5 - Calcolare Dy se $y = x^2 \cdot (x^2)^{1/3}$. Semplifichiamo $y = x^{8/3}$. $Dy = \frac{8}{3}x^{5/3}$

6 - Calcolare Dy se $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

Si usi <https://www.derivative-calculator.net>.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} \right] \\ &= \frac{\frac{d}{dx}[\sin(x) + \cos(x)] \cdot (\sin(x) - \cos(x)) - (\sin(x) + \cos(x)) \cdot \frac{d}{dx}[\sin(x) - \cos(x)]}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \end{aligned}$$

Dopo vari passaggi, si ha: $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

7 - Calcolare Dy se $y = x \cdot \sinh x$.

Nuovamente, si usi <https://www.derivative-calculator.net>

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}[x \sinh(x)] \\ &= \frac{d}{dx}[x] \cdot \sinh(x) + x \cdot \frac{d}{dx}[\sinh(x)] \\ &= 1 \sinh(x) + x \cosh(x) \\ &= \sinh(x) + x \cosh(x) \end{aligned}$$

Nella pagina seguente, i grafici.

Interactive function graphing:

Navigate using mouse or touch screen. Drag to pan, use the mouse wheel or two fingers to zoom.



8 - Calcolare Dy se $y = \frac{1}{15} \cos^3 x \cdot (3 \cos^2 - 5)$.

Si calcoli la derivata della funzione semplificata:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} \right]$$

$$Dy = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = \cos^2(1 - \sin^2 x) \sin x - \cos^2 x \sin x = \sin^3 x \cos^2 x$$

9 - Calcolare Dy se $y = \sin^2(x^3)$.

$$Dy = 2 \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 6x^2 \sin(x^3) \cos(x^3) = 3x^2 \sin(2x^3)$$

References

- [1] Jackson, F. H. (1908). On q-functions and a certain difference operator. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*. 46 (2): 253–281. doi:10.1017/S0080456800002751.
- [2] Jackson, F. H. (1910). q-Definite Integrals. *Quart. J. Math.* 41, 163, 1910.
- [3] Jackson, F. H. (1917). The q-Integral Analogous to Borel's Integral. *Mess. Math.* 47, 57-64, 1917.
- [4] Kac, Victor; Cheung, Pokman (2002). Quantum calculus. Universitext. Springer-Verlag. ISBN 0-387-95341-8.
- [5] Sparavigna, Amelia Carolina (2016). Graphs of q-exponentials and q-trigonometric functions. 2016. ⟨hal-01377262⟩
- [6] Sparavigna, Amelia Carolina. (2021). Nozioni di q-calcolo nell'ambito del quantum calculus. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4982846>
- [7] Boris P. Demidovic (1975). Esercizi e problemi di analisi matematica. Editori Riuniti – Edizioni Mir, Mosca.