POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Contributi di Eulero sulla propagazione del suono e sulla vibrazione delle corde, con equazioni relative, pubblicati nelle Mélanges de philosophie et de mathématique de la

Original
Contributi di Eulero sulla propagazione del suono e sulla vibrazione delle corde, con equazioni relative, pubblicati nelle Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin / Sparavigna, A. C.. - ELETTRONICO. - (2021). [10.5281/zenodo.4585748]

Availability:
This version is available at: 11583/2873292 since: 2021-03-05T18:22:14Z

Publisher:

Published
DOI:10.5281/zenodo.4585748

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

21 April 2025

Zenodo - 10.5281/zenodo.4585748

Contributi di Eulero sulla propagazione del suono e sulla vibrazione delle corde, con equazioni relative, pubblicati nelle Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin

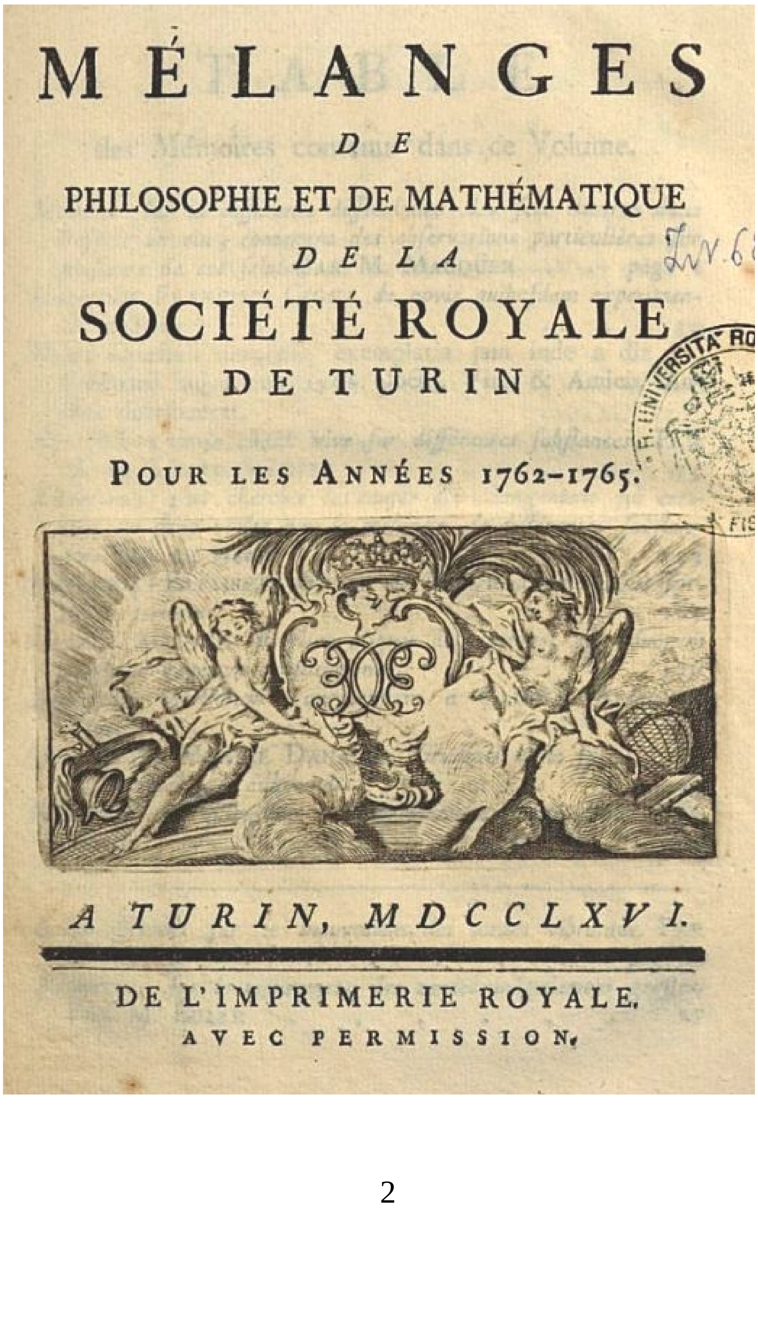
Amelia Carolina Sparavigna
Politecnico di Torino

Eulero, socio straniero dal 1760 della Società Reale di Torino, oggi Accademia delle Scienze, discute la propagazione del suono e la vibrazione delle corde in una serie di contributi pubblicati nelle Mélanges della Società del 1760/61 e 1762/65. Si mostrano equazioni e soluzioni. In un contributo nel primo volume, troviamo l'equazione delle onde in tre dimensioni e relativa soluzione. Nel secondo volume, Eulero continua la discussione e propone la soluzione generale con componenti progressiva e regressiva. Vediamo poi anche come, in un altro contributo, discuta un integrale di cui presenta il calcolo come prodotto di infiniti termini, quindi con il modo di studiare le funzioni da lui preferito. Si parlerà anche della Società Reale e di altri contributi nelle prime Mélanges.

Torino, 5 Marzo 2021

Il grande Eulero, colui che, come disse Arago, "calcolava senza sforzo apparente, così come gli uomini respirano o le aquile si librano nel vento" [1], era socio straniero già dal 1760 dell'Accademia delle Scienze di Torino.
L'Accademia era stata fondata privatamente nel 1757, ma venne riconosciuta ufficialmente solo nel 1783. Nel 1757 il conte Angelo Saluzzo di Monesiglio, il medico Gianfrancesco Cigna ed il matematico Luigi Lagrange fondarono una Società scientifica privata per favorire la ricerca in diverse aree del sapere. Fin da subito, dice il Rif. [2], si aggregarono giovani studiosi piemontesi, e la casa del conte di Saluzzo in Piazza Castello e sede della Società, "divenne il luogo in cui fiorirono studi di matematica, meccanica e fisica raccolti e pubblicati, a partire dal 1759," nelle raccolte intitolate Miscellanea Philosophico Mathematica Societatis Privatae Taurinensis, che poi divennero le attuali Memorie della Accademia delle Scienze.
Nel 1760 si ebbe un tentativo di trasformare tale Società in Accademia, sul modello della Académie des Sciences francese, tentativo bloccato da Carlo Emanuele III e dai suoi ministri [2]. Ma i Soci della Società, sempre più numerosi, proseguirono a

lavorare, coinvolgendo personalità come Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert, Jean Antoine Nicolas Caritat, il marchese di Condorcet, ed anche Benjamin Franklin, Lazzaro Spallanzani, Carl von Linné e il nostro Eulero, Leonhard Euler. Nel 1783, Vittorio Amedeo III conferì alla Società privata il titolo di Reale Accademia delle Scienze [2].
Google Books ci propone due volumi delle Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, titolo in Francese delle Miscellanea. Un volume è relativo agli anni 1760-61 ed uno relativo agli anni 1762-1765. il frontespizio del quale è mostrato nella pagina seguente.


MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN
POUR LES ANNÉES 1762-1765.

A TURIN, MDCCLXVI.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
AVEC PERMISSION.

Primo volume
Il primo volume (lavori del 1760-61) si apre con una lettera di Eulero a Lagrange, o meglio al Signor De la Grange, e l'argomento è la propagazione nei mezzi elastici.
Il titolo è

0) Recherches sur la propagation des ébranlemens dans une milieu élastique.

Segue la ricerca di Lagrange sulla natura e propagazione del suono. Poi vi è un saggio, sempre di Lagrange su un metodo per determinare massimi e minimi di integrali indefiniti, seguito da applicazioni a problemi dinamici. I principi fondamentali della meccanica sono poi affrontati dal Cavalier François Daviet de Foncenex [3].
Poi la raccolta continua con un Addendum di Lagrange, sulla propagazione del suono e chiarimenti di Daviet de Foncenex al suo lavoro. Si continua con il problema dell'infinito trattato da Padre Gerdil, Barnabita [4]. Ci sono poi le Algebre Filosofiche di Luigi Richeri [5]. Angelo Carena ci propone osservazioni sul corso del Po [6]. Seguono Commentari vari di Giovanni Francesco Cigna [7], e dissertazioni ed opuscoli vari. Il cont di Saluzzo [8], uno dei fondatori della Società, parla de "la nature du fluide elastique qui se dévelope de la poudre à canon". Nel seguito del volume, Giovanni Francesco Cigna, che preferisce il Latino al Francese, parla De Analogia Magnetismi et Electricitatis. Poi troviamo contributi di Giovanni Battista Gaber [9], Michele Antonio Plazza [10], Ambrogio Bertrandi [11].

Onde in 3 dimensioni
In 0), che Eulero intitola Recherches sur la propagation des ébranlemens dans une milieu élastique, ci troviamo di fronte all'equazione delle onde in tre dimensioni. La traduzione di ébranlemens è vibrazioni.
Il problema è la propagazione del suono in un fluido. "Je commence par conſidérer un élément quelconque du fluide qui dans l'état d'équilibre se trouve au point ...".
Introdotto il sistema di coordinate cartesiane X,Y e Z, e "les lettres p , q , r , qui marquent le déplacement de chaque point . Car substituant ces valeurs , que nous venons de trouver , le mouvement causé par une agitation quelconque mais fort petite , sera déterminé par les trois équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2gh}\left(\frac{d\,d\,p}{d\,t^2}\right) &= \left(\frac{d\,d\,p}{d\,X^2}\right)+\left(\frac{d\,d\,q}{dXdY}\right)+\left(\frac{d\,d\,r}{dXdZ}\right)\\
\frac{1}{2gh}\left(\frac{d\,d\,q}{d\,t^2}\right) &= \left(\frac{d\,d\,p}{dXdY}\right)+\left(\frac{d\,d\,q}{d\,Y^2}\right)+\left(\frac{d\,d\,r}{dYdZ}\right)\\
\frac{1}{2gh}\left(\frac{d\,d\,r}{d\,t^2}\right) &= \left(\frac{d\,d\,p}{dXdZ}\right)+\left(\frac{d\,d\,q}{dYdZ}\right)+\left(\frac{d\,d\,r}{d\,Z^2}\right)
\end{aligned}$$

p, *q* ed *r* indicano lo spostamento. *g* è l'accelerazione di gravità e *h* una quota.
Guardiamo dimensionalmente le equazioni:

Ad esempio: $\frac{1}{2gh}(\frac{ddp}{dt^2}) = (\frac{ddp}{dX^2})+(\frac{ddq}{dXdY})+(\frac{ddr}{dXdZ})$, che in notazione odierna è $\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial X \partial Y}+\frac{\partial^2 r}{\partial X \partial Z}$, porta a

$$accelerazione^{-1}\ lunghezza^{-1}\ lunghezza\ \ tempo^{-2} = lunghezza^{-2}\ lunghezza$$

$$accelerazione^{-1}\ tempo^{-2} = lunghezza^{-1}$$

Eulero è un grande fisico, e lo si è voluto evidenziare già in un precedente articolo [12].
Per risolvere il problema, Eulero introduce $(\frac{dp}{dX})+(\frac{dq}{dY})+(\frac{dr}{dZ})=u$, che è una grandezza adimensionale (è una divergenza). Ricava quindi:

$$(\frac{ddp}{dt^2}) = 2gh(\frac{du}{dX}) \quad , \quad (\frac{ddq}{dt^2}) = 2gh(\frac{du}{dY}) \quad , \quad (\frac{ddr}{dt^2}) = 2gh(\frac{du}{dZ}) \quad .$$

Da cui:

$$\frac{1}{2gh}(\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dX^2})+(\frac{ddu}{dY^2})+(\frac{ddu}{dZ^2})$$

e questa è l'equazione delle onde in tre dimensioni. Dimensionalmente è corretta.
Se la scriviamo come:

$$\frac{1}{c^2}(\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dX^2})+(\frac{ddu}{dY^2})+(\frac{ddu}{dZ^2})$$

intendiamo che Eulero pensava alla velocità di propagazione.

La soluzione del problema data da Eulero è:

$$p=\beta\varphi(\alpha t+\beta X+\gamma Y+\delta Z) \quad , \quad q=\gamma\varphi(\alpha t+\beta X+\gamma Y+\delta Z) \quad ,$$
$$r=\delta\varphi(\alpha t+\beta X+\gamma Y+\delta Z)$$

dove: $\alpha=\sqrt{2gh}\,(\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)$, β,γ,δ sono quantità qualsiasi (dice Eulero, ma in verità ci sono condizioni dimensionali) ed infine φ è una funzione qualsiasi.
Poi Eulero si pone il problema, ovvero come si propaga la vibrazione, quando il corpo elastico è percosso in un certo punto *A*. Introduce *V* come la distanza da *A*:

$$\sqrt{(XX+YY+ZZ)}=V$$

Con una serie di passaggi, arriva alla seguente equazione:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \frac{-2u}{V^2}+\frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)+\left(\frac{ddu}{dV^2}\right) \quad (*).$$

Siamo nel caso di un problema tridimensionale, dove *V* è una raggio vettore *r*. Dice Eulero che "Après plusieurs recherches j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas, où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension." Ed eccola la soluzione generale:

$$u = \frac{A}{V^2}\varphi[V \pm t\sqrt{2gh}] - \frac{A}{V}\varphi'[V \pm t\sqrt{2gh}]$$

In essa, φ' ha le dimensioni di $\varphi\ lunghezza^{-1}$.
L'equazione (*) ricompare nel secondo volume delle Mélanges. Il contributo di Eulero si conclude con luogo e data: Berlino, il Primo di Gennaio del 1760.
Le equazioni proposte da Eulero nella sua Lettera a Lagrange sono riprese proprio da Lagrange nel successivo trattato, Nouvelles Recherches sur la nature et la propagation du son, che riprende le equazioni nel caso di propagazione unidimensionale e propagazione in onde sferica. Ed a pag.55, Lagrange usa proprio il termine "onda sferica". E poi a pagina 52 parla di onda sonora. Ed introduce per esse il movimento progressivo.

Secondo volume
Il secondo volume, quello in cui troviamo altri diversi contribuiti di Eulero si apre con contributi di Pierre Macquer [13], di Cigna, del Conte di Saluzzo, di Gaber, Giovanni Pietro Maria Dana [14], e Carlo Allioni [15].
Poi arrivano i contributi di Eulero:

1) Éclaircissemens sur le mouvement des cordes vibrantes.

2) Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses.

3) Recherches sur l' intégration de l' équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{c}{x^2}z$.

In notazione odierna l'equazione è: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{b}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{c}{x^2}z$. Se avessimo

$x^2 a^2 \frac{d^2 z}{d x^2} + b x \frac{d z}{d x} + c z = 0$, avremmo una delle cosiddette equazioni di Eulero, quella che viene detta essere la più comune[1], usata in vari contesti, come quello delle equazioni di Laplace.

4) Recherches ſur la construction des nouvelles Lunettes à 5 & 6 verres , & leur perfection ultérieure . (A questo contributo di Eulero segue immediatamente le Formules de Dioptrique néceſſaires pour l'intelligence du Me moire précédent, scritto da Lagrange)

5) Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post interationem $x = 1$.

Il volume continua con un contributo di Lagrange ed estratti dall'epistolario D'Alembert e Lagrange.

La corda vibrante

Consideriamo 1). Lo possiamo trovare al link https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1316&context=euler-works
In questo contributo di Eulero troviamo la derivazione di quella che ora è la classica equazione della corda:

$$\frac{2 T g a}{P} \left(\frac{d d y}{d x^2}\right) = \left(\frac{d d y}{d t^2}\right)$$

dove a è la lunghezza della corda, P il suo peso, T la forza con cui è tesa e g l'accelerazione di gravità.
Dimensionalmente:

$$forza \;\; lunghezza \;\; massa^{-1} \;\; lunghezza^{-1} = lunghezza \;\; tempo^{-2}$$

$$forza \;\; massa^{-1} = lunghezza \;\; tempo^{-2}$$

Osserva Eulero che $\frac{2 T g a}{P}$ è una costante, e quindi pone: $\frac{2 T g a}{P} = c c$. E quindi:

$$c c \left(\frac{d d y}{d x^2}\right) = \left(\frac{d d y}{d t^2}\right)$$

1 https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_di_Eulero

Ed è di questa equazione che Eulero propone la soluzione generale.
Ma perché ci fermiamo a una particolare soluzione e ci mettiamo a determinare un numero infinito di coefficienti, - dice Eulero - mentre siamo in grado di trovare l'integrale completo di questa equazione, che deve necessariamente includere tutti i casi possibili, e che possiamo anche facilmente applicare a tutte le figure e a tutti i movimenti che possiamo imprimere inizialmente alla corda? Eulero si attiene al seguente integrale:

ma lui cerca una soluzione generale. E questa soluzione è:

$$y=\Gamma:(x+at)+\Delta:(x-at) \quad ,$$

dove $\Gamma:(x+at)$ è una funzione qualsiasi di $x+at$, e $\Delta:(x-at)$ una funzione qualsiasi di $x-at$.
In 2), che è disponibile al link https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1317&context=euler-works ed in esso si trova trattata "l'équation générale pour le mouvement des cordes, dont la grosseur est variable selon une loi quelconque, où il faut toujours sous - entendre que les agitations de la corde sont quasi infiniment petites" . Piccolo spostamenti quindi.

L'equazione
Nel primo volume, Eulero scrive un'equazione:

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \frac{-2u}{V^2}+\frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right)+\left(\frac{ddu}{dV^2}\right)$$

Riscriviamola in forma attuale, chiamando la distanza r invece che V.

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{2u}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Prendiamo il Laplaciano in coordinate sferiche:

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}(\Lambda^2) = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}(\Lambda^2)$$

In questa espressione, la parte angolare è espressa dall'ultimo termine, il Legendriano.
L'equazione di Eulero presenta quindi una forma del Laplaciano, con la parte angolare considerata nella costante del Legendriano. Il contributo di Eulero dove compare

l'equazione è datato al Primo di Gennaio del 1760. Pierre-Simon Laplace, marchese di Laplace, nato il 23 Marzo 1749, non aveva ancora undici anni.

Nel lavoro 3) del volume secondo, Eulero riprende l'equazione , che ora scriviamo come:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{c}{x^2} z \quad .$$

Per comodità possiamo usare il documento al link: https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1318&context=euler-works

E siamo nell'ambito, ci dice Eulero, delle vibrazioni. Se i coefficienti b e c sono nulli:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ,$$

si ricade nella ben nota equazione delle onde.
Ogni testo di fisica, quando parla delle onde, ci dice che questa equazione può essere riscritta come:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{, con} \quad \xi = x + at \quad \text{e} \quad \eta = x - at$$

Ma cosa ci dice il nostro Eulero, nelle Mélanges? Esattamente la stessa cosa. "Changeons les variables t & x, dont z doit être une function, & posons $x+at=p$ & $x-at=q$, de forte qu'il faille à présent trouver, quelle function de p & q doit être z." E poi segue il calcolo relativo, arrivando a (*ddz* / *dpdq*) = 0, che è molto più semplice da risolvere.
Vediamo ora la soluzione. Eulero dice che abbiamo le soluzioni particolari

$$z = A(x \pm at)^n \quad , \quad z = A e^{n(x \pm at)} \quad , \quad z = A \sin n(x \pm at) \quad ,$$

ma lui cerca una soluzione generale. E questa soluzione è (e l'abbiamo già vista prima):

$$z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at) \quad ,$$

dove $\Gamma : (x + at)$ è una funzione qualsiasi di $x + at$, e $\Delta : (x - at)$ una funzione qualsiasi di $x - at$. Segue la sua dimostrazione.

Poi Eulero passa all'equazione generale:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\beta}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\alpha}{x^2} z$$

Propone di porre: $z = x^\lambda u$. Se $\lambda = -\alpha/2$, si ha:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4\beta - \alpha^2 + 2\alpha}{x^2} u$$

Ma Eulero propone anche $\lambda = 1 \pm \sqrt{[(1-\alpha)^2 - 4\beta]}$, e quindi:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 \pm \sqrt{[(1-\alpha)^2 - 4\beta]}}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Di queste equazioni discute la soluzione generale.

L'integrale

Lasciamo da parte il lavoro 4) che tratta di lenti, e passiamo al 5).
Il motivo di interessarci al lavoro numero 5, quello sull'integrale, è che troviamo in esso come Eulero abbia l'attitudine a risolvere il problema matematico di integrazione numerica tramite prodotti con un numero infinito di fattori. Li abbiamo visti in [16], dove si sono mostrati alcuni dei prodotti infiniti che troviamo nel libro di Eulero intitolato Introductio in analysin infinitorum, del 1797. Questo libro si può leggere oggi con facilità, come del resto abbiamo visto per i contributi nelle Mélanges. Solo piccoli cambiamenti di notazione sono necessari. In [17] si è poi mostrato come due di questi prodotti infiniti compaiano nell'espressione dell'entropia di Kaniadakis [18-20].

Per Eulero è cosa naturale esprimere i risultati con un prodotto di fattori infinito. Ed infatti la sua espressione delle funzione Gamma [21] è costruita proprio con un prodotto infinito. Come Eulero originariamente introduce la funzione Gamma è spiegato in [22]. Ricardo Pérez-Marco ci dice che Eulero definì la Gamma con un prodotto in una lettera a Christian Goldbach, datata 13 Ottobre del 1729, come:

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n)} n^s$$

Questa espressione venne poi ripresa da Gauss, per sviluppare la sua teoria.
Passiamo allora quanto dice Eulero dell'integrale (il contributo n.5 alle Mélanges), che si trova anche al link https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?

article=1320&context=euler-works :

$$\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

Il testo è in Latino. Intanto, l'integrale possiamo riscriverlo come:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

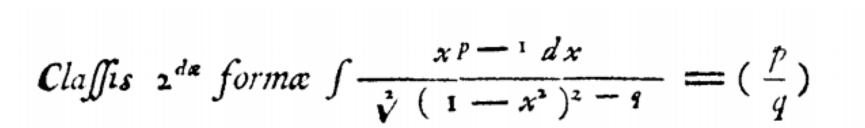
dove n, p e q sono interi positivi.
Ponendo dopo l'integrazione x=1, si ha, espresso il risultato tramite un productum infinitorum factorum:

$$\frac{p+q}{pq}\cdot\frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)}\cdot\frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)}\cdot\frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)}\cdots$$

Il prodotto di infiniti termini ha un'intrinseca eleganza. Da esso vediamo che gli esponenti q e p sono commutabili:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

Ma Eulero non si limita a questo. Introduce classi di integrali che hanno lo stesso valore, inventando una notazione compatta per indicare gli integrali. Le classi sono basate sul valore di n. Ad esempio:


Classis 2^{dae} formae $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[2]{(1-x^2)^{2-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Supponiamo di voler trovare l'integrale $\left(\frac{1}{1}\right)$. Esso è: $\int \frac{dx}{\sqrt[2]{(1-x^2)}}$. Ma questo integrale è noto e ci porta all'arcoseno. Quindi: $\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Conclusione

Abbiamo proposto una discussione dei contributi proposti da Eulero alla Società Reale di Torino, oggi Accademia delle Scienze, tra il 1760 ed il 1766. In essi, Eulero discute la propagazione del suono e la vibrazione delle corde. Si sono viste, nel primo volume delle Mélanges, equazioni di propagazione delle perturbazioni in mezzi elastici, tra cui fondamentale l'equazione delle onde in tre dimensioni. Abbiamo visto come Eulero la formuli con una espressione tipo operatore Laplaciano Nel secondo volume, Eulero continua la discussione e ripropone la soluzione generale, con componenti progressiva e regressiva. I contributi che sottopose alla Società Reale di Torino sono stati contributi fondamentali per la scienza, che Lagrange apprezzò immediatamente, come si evince dai sui commenti.

References

[1] https://www.accademiadellescienze.it/accademia/soci/leonhard-euler
[2] https://www.accademiadellescienze.it/accademia/storia
[3] https://it.wikipedia.org/wiki/François_Daviet_de_Foncenex
[4] https://fr.wikipedia.org/wiki/Hyacinthe-Sigismond_Gerdil
[5] https://it.wikisource.org/wiki/Autore:Luigi_Richeri
[6] https://www.treccani.it/enciclopedia/angelo-paolo-francesco-carena_(Dizionario-Biografico)/
[7] https://www.treccani.it/enciclopedia/giovanni-francesco-cigna_(Dizionario-Biografico)/
[8] https://www.accademiadellescienze.it/accademia/soci/giuseppe-angelo-saluzzo-di-monesiglio
[9] https://www.wikidata.org/wiki/Q61476075
[10] https://www.accademiadellescienze.it/accademia/soci/michele-antonio-plazza
[11] https://www.accademiadellescienze.it/accademia/soci/giovanni-ambrogio-maria-bertrandi
[12] Sparavigna, A. C. (2015). A Historical Discussion of Angular Momentum and its Euler Equation, International Journal of Sciences 4(07):34-38 DOI: 10.18483/ijSci.786
[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Macquer
[14] https://www.accademiadellescienze.it/accademia/soci/giovanni-pietro-maria-dana
[15] https://it.wikipedia.org/wiki/Carlo_Allioni
[16] Sparavigna, Amelia Carolina. (2020, October 27). Infinite product expansions from Euler's Introductio in Analysin Infinitorum. Zenodo. http://doi.org/10.5281/zenodo.4139216
[17] Sparavigna, Amelia Carolina. (2020, October 14). Entropy and logarithm of Kaniadakis calculus expressed by means of an Euler infinite product expansion. Zenodo. http://doi.org/10.5281/zenodo.4088214

[18] Kaniadakis, G. (2001). Non-linear kinetics underlying generalized statistics. Physica A: Statistical mechanics and its applications, 296(3-4), 405-425.
[19] Kaniadakis, G. (2002). Statistical mechanics in the context of special relativity. Physical review E, 66(5), 056125.
[20] Kaniadakis, G. (2013). Theoretical foundations and mathematical formalism of the power-law tailed statistical distributions. Entropy, 15(10), 3983-4010.
[21] Weisstein, Eric W. "Gamma Function." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html
[22] Ricardo Pérez-Marco. On the definition of Euler Gamma function. 2021. hal-02437549v2.