

Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica

Original

Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica / Sparavigna, Amelia Carolina. - ELETTRONICO. - (2020).
[10.5281/zenodo.3611419]

Availability:

This version is available at: 11583/2786118 since: 2020-01-28T21:51:41Z

Publisher:

Published

DOI:10.5281/zenodo.3611419

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica

Amelia Carolina Sparavigna

Politecnico di Torino

Abstract: Si vuole discutere di alcuni calcoli di analisi vettoriale proposti nel testo Problems in Theoretical Physics, di L. G. Grechko e altri autori, edito da MIR. I calcoli sono strettamente legati all'elettromagnetismo.

Alcune formule dell'analisi vettoriale sono molto utili in fisica. Abbiamo ad esempio le ben note:

$$\text{rot grad } f = 0 \quad (1)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0 \quad (2)$$

La (1) è evidentemente importante per i campi conservativi (f è uno scalare), la (2) per i campi solenoidali, quali il campo magnetico. Altre relazioni le troviamo in [1].

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (3)$$

$$\text{div}(f \mathbf{A}) = f \text{ div } \mathbf{A} + \text{grad } f \cdot \mathbf{A} \quad (4)$$

$$\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\text{rot}(f \mathbf{A}) = [\text{grad } f \times \mathbf{A}] + f \text{ rot } \mathbf{A} \quad (6)$$

$$\Delta(\varphi \psi) = \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi + 2 \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi \quad (7)$$

φ, ψ sono scalari.

Ricordiamo anche che $\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi$.

La relazione (3) è quella che si incontra quando si studia come ricavare l'equazione delle onde elettromagnetiche dalle equazioni di Maxwell.

La (5) è alquanto interessante per l'utilizzo che ne possiamo fare col vettore di Poynting (si veda [2]). Tenendo presente anche queste utili relazioni (1-7), possiamo risolvere i problemi posti in [3]. Questi calcoli sono proposti nel capitolo sullo studio dell'elettromagnetismo.

Aggiungiamo ancora alcune relazioni dall'appendice del [3].

$$\text{grad}(\varphi \psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi \quad (8)$$

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A}] \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{A}] \quad (10)$$

$$\text{rot}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A} \quad (11)$$

Aggiungiamo una relazione del secondo ordine.

$$\Delta(f \mathbf{A}) = \Delta(f A_x \mathbf{i} + f A_y \mathbf{j} + f A_z \mathbf{k}) = \Delta(f A_x) \mathbf{i} + \Delta(f A_y) \mathbf{j} + \Delta(f A_z) \mathbf{k}$$

Utilizzo la (7), applicandola a $\Delta(f A_x), \Delta(f A_y), \Delta(f A_z)$:

$$\Delta(f \mathbf{A}) = f \Delta \mathbf{A} + \mathbf{A} \Delta f + 2(\text{grad} f \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

Altre relazioni del secondo ordine sono utili nella teoria elastica dei nematici [4].

Poi ci sono le relazioni integrali.

$$\oint \varphi \mathbf{n} dS = \iiint \text{grad} \varphi dV \quad (12)$$

\mathbf{n} è il vettore unitario normale alla superficie e diretto verso l'esterno.

$$\oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint \text{div} \mathbf{A} dV \quad (13)$$

$$\oint [\mathbf{n} \times \mathbf{A}] dS = \iiint \text{rot} \mathbf{A} dV \quad (14)$$

$$\oint A_n dl = \iint \text{rot}_n \mathbf{A} dS \quad (15)$$

$$\oint \varphi dl = \iint [\mathbf{n} \times \text{grad} \varphi] dS \quad (16)$$

Iniziamo con i problemi dal [3].

1) Calcolare il gradiente di una funzione $f(r)$, funzione che dipende solo dal valore assoluto del

modulo del vettore posizione r . Risultato: $\text{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Esprimiamo l'espressione del gradiente:

$$\text{grad} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{df}{dr} \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right\} = \frac{df}{dr} \left\{ \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right\}$$

$$\text{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (17)$$

Vediamo un esempio. $\text{grad} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{1}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} = -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}$

Aggiungiamo anche un calcolo simile per la divergenza di una funzione $\mathbf{A}(r)$, funzione che dipende solo dal valore assoluto del modulo del vettore posizione r .

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A}(r) &= \frac{\partial A_x(r)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(r)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(r)}{\partial z} = \\ &= \frac{dA_x}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dA_y}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dA_z}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dA_x}{dr} \frac{x}{r} + \frac{dA_y}{dr} \frac{y}{r} + \frac{dA_z}{dr} \frac{z}{r} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} \end{aligned} \quad (18)$$

2) Calcolare (a) $\text{div} \mathbf{r}$, (b) $\text{rot} \mathbf{r}$, (c) $\text{rot} f(r) \mathbf{r}$.

Ricordiamo che $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Quindi:

$$(a) \quad \text{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{k} = 3$$

$$(b) \quad \text{rot} \mathbf{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

(c) Per il calcolo di $\text{rot} f(r) \mathbf{r}$ uso la (6) e poi la (17):

$$\operatorname{rot} f \mathbf{r} = [\operatorname{grad} f \times \mathbf{r}] + f \operatorname{rot} \mathbf{r} = [\operatorname{grad} f \times \mathbf{r}] = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} = 0$$

3) Calcolare (a) $\operatorname{grad}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})$, (b) $\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3]$, (c) $(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{r}$, (d) $\operatorname{div}(\mathbf{P} \times \mathbf{r})$, ed infine (e) $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{P})$ dove \mathbf{P} è un vettore costante.

$$(a) \quad \operatorname{grad}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial P_x x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P_y y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P_z z}{\partial z} \mathbf{k} = P_x \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + P_y \frac{\partial y}{\partial y} \mathbf{j} + P_z \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{P}$$

(b) Uso questo risultato per calcolare $\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3]$, insieme alla (8) e alla (17).

$$\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3] = \frac{1}{r^3} \operatorname{grad}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{r^3}$$

$$\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3] = \mathbf{P}/r^3 - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})(3\mathbf{r}/r^5)$$

$$(c) \quad (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{r} = (P_x \frac{\partial}{\partial x} + P_y \frac{\partial}{\partial y} + P_z \frac{\partial}{\partial z}) \mathbf{r} = P_x \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + P_y \frac{\partial y}{\partial y} \mathbf{j} + P_z \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{P}$$

(d) Per il calcolo di $\operatorname{div}(\mathbf{P} \times \mathbf{r})$ uso la (5) e ricordo che il vettore \mathbf{P} è costante:

$$\operatorname{div}(\mathbf{P} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0$$

(e) Infine per $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{P})$ applico le definizioni di prodotto vettoriale e rotore. Si ottiene $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = -2\mathbf{P}$.

Prima di proseguire coi problemi in [3], accenniamo alla legge di Gauss in forma locale.

Prendiamo $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$ e calcoliamo $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})$, usando la (4).

$$\operatorname{div}(\mathbf{r}/r^3) = \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} = \frac{3}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^5} = 0$$

Infatti, come già visto: $\text{grad} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}$. Quindi, il campo Coulombiano ha divergenza nulla, tranne nel punto ove è presenta la carica.

4) Calcolare (a) $\text{grad}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r))$, (b) $\text{div}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$, (c) $\text{rot}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$. Le funzioni $\varphi(r), \mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r)$ dipendono solo dal valore del modulo del vettore posizione.

(a) Per calcolare $\text{grad}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r))$ possiamo fare riferimento al risultato del problema 1, ossia

che si ha $\text{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$. Si ha che:

$$\text{grad}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)) = \frac{d}{dr}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)) \frac{\mathbf{r}}{r} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dr} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dr} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(b) Per calcolare $\text{div}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$ uso la (4), la (17) e la (18).

$$\text{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{div} \mathbf{A} + \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{A} = \frac{\varphi}{r} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$$

(c) Per calcolare $\text{rot}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$, parto dalla (6) e uso le definizioni:

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \text{grad} \varphi \times \mathbf{A} + \varphi \text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \mathbf{r} \times \mathbf{A} + \frac{\varphi}{r} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{A}}{dr}$$

5) Usando il teorema di Ostrogradski, calcolare gli integrali $\mathbf{I} = \oint \mathbf{r}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS$ e $\mathbf{I} = \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS$, se il volume racchiuso dalla superficie è V e se il vettore \mathbf{A} è costante.

Si prenda un generico vettore \mathbf{p} costante:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{p} \cdot \oint \mathbf{r}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} A_n) dS = \iiint \text{div}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \mathbf{A}) dV$$

Usando la relazione $\text{div}(f \mathbf{A}) = f \text{div} \mathbf{A} + \text{grad} f \cdot \mathbf{A}$, che nel caso di vettore costante diventa: $\text{div}(f \mathbf{A}) = \text{grad} f \cdot \mathbf{A}$.

$$\iiint \operatorname{div}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \mathbf{A}) dV = \iiint \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dV$$

Siccome $\operatorname{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$:

$$\iiint \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dV = \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} dV = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) V$$

Dato che il vettore \mathbf{p} è generico: $\mathbf{I} = \mathbf{A} V$.

Passiamo ora al calcolo dell'integrale $\mathbf{I} = \oiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS$ nelle stesse condizioni del calcolo precedente.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{p} \cdot \oiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS = \oiint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) dS = \oiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} p_n) dS = \iiint \operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \mathbf{p}) dV$$

Uso la (4):

$$\iiint \operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \mathbf{p}) dV = \iiint \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) dV$$

E poi ricordo che: $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{A}$. Si ha per la (9) che:

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{r}] + [\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}] = \mathbf{A} .$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \iiint \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) dV = \iiint \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} dV$$

Si ricade nel caso precedente.

6) Si dimostri che $\iiint \mathbf{A} dV = 0$ se dentro il volume si ha che $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ e sulla superficie di contorno $A_n = 0$.

Come fatto nel calcolo precedente, prendiamo un generico vettore \mathbf{p} costante. Questa volta, vediamo il vettore costante come il gradiente: $\mathbf{p} = \operatorname{grad} \varphi$.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \iiint \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \, dV$$

Usiamo le relazioni vettoriali precedentemente viste: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{A} = \text{div } \varphi \mathbf{A}$.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \iiint \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \, dV = \iiint \text{div } \varphi \mathbf{A} \, dV = \oint \varphi A_n \, dS$$

Sulla superficie di contorno $A_n = 0$ ed essendo $\mathbf{p} = \text{grad } \varphi$ generico, segue $\iiint \mathbf{A} \, dV = 0$.

In fondo, se noi pensiamo che i campi a divergenza nulla, come nel caso discusso $\text{div } \mathbf{A} = 0$, possono essere campi elettrici e magnetici, e che noi li rappresentiamo con linee di campo chiuse, il risultato non ci sorprende. Pensiamo al campo magnetico indotto in un condensatore o al campo elettrico indotto da un campo magnetico variabile come nei due esempi dati in [2]; il volume da considerare è un cilindro con le linee di campo parallele alla sua superficie, da cui la condizione sulla superficie di contorno $A_n = 0$.

7) Mostrare che la divergenza del vettore seguente è nulla:

$$\mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \text{grad} \iiint \frac{\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \quad (20)$$

Chiamiamo $\text{div } \mathbf{A} = \rho(\mathbf{r})$, si ha quindi che l'integrale sul volume assume una forma più familiare, quella del potenziale di una distribuzione continua di cariche (a parte l'assenza di costante dielettrica):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

Se usiamo il segno negativo:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

La funzione data sopra è la soluzione dell'equazione di Poisson: $\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = 0$. Abbiamo quindi immediatamente che la divergenza di (20) deve essere nulla.

References

- [1] Smirnov V. I., Corso di Matematica Superiore, Editori Riuniti, 1978, Volume 2, Pagina 391.
- [2] Sparavigna, Amelia Carolina. (2019, December 18). La divergenza del prodotto vettoriale ed il vettore di Poynting. Zenodo. <http://doi.org/10.5281/zenodo.3583296>
- [3] Grechko, L.G., Sugakov, V.I., Tomasevich, O.F., & Fedorchenko, A.M. (1977). Problems in Theoretical Physics. Mir Publishers, Moscow.
- [4] Barbero, G., Sparavigna, A., & Strigazzi, A. (1990). The structure of the distortion free-energy density in nematics: second-order elasticity and surface terms. *Il Nuovo Cimento D*, 12(9), 1259-1272.