

Controllo ottimale in alcuni problemi di teoria di campo

A.C. Sparavigna. Tesi di Laurea, 1982.

Torino, 1 Ottobre 2017

Nota all'edizione digitale

Testo, formule ed immagini che iniziano dalla pagina seguente costituiscono la mia tesi di Laurea.

Mi sono laureata in Fisica il 17 Novembre 1982, presso l'Università degli Studi di Torino. All'epoca, c'erano solo le macchine da scrivere per comporre il lavoro di tesi e le fotocopiatrici per le copie. Ovviamente, le formule venivano scritte a mano. Oggi abbiamo a disposizione personal computer per comporre l'elaborato e file pdf per copiare e distribuire l'opera.

Mi sono decisa a fare una versione digitale della tesi perché ritengo utile, non solo per me, ma anche per altre persone, rivedere il problema del controllo ottimale. Ho lasciato testo e formule come scritte nella tesi. In molti casi, come per le pagine con molte formule o figure, ho inserito direttamente la copia/immagine dell'originale.

L'indice che trovate contiene la numerazione delle pagine dell'originale. Questi numeri di pagina sono riportati nel file digitale per la ricerca automatica nel testo.

Amelia Carolina Sparavigna

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TORINO

FACOLTA' DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laura in Fisica

Controllo ottimale in alcuni problemi di teoria di campo.

Relatore

Luigi Sertorio

Laureanda

Amelia Sparavigna

Anno Accademico '81/82

Introduzione.

In questa tesi si è cercato di unificare il più possibile la teoria del controllo ottimale per i sistemi descritti da equazioni differenziali ordinarie con la teoria per i sistemi distribuiti, ossia per i sistemi descritti da campi.

Controllare un sistema vuol dire agire su di esso mediante degli impulsi esterni applicati in vari punti del sistema. Manovrando opportunamente questi impulsi, si ottiene dal sistema un dato comportamento. Se questo comportamento risponde a dei canoni di bontà, si parlerà allora di comportamento ottimale e di controllo ottimale per il controllo che provoca questo comportamento.

Inizieremo in questa tesi col parlare dei sistemi descritti da equazioni ordinarie.

E' fondamentale per questi sistemi, il principio di Pontryagin. Questo principio non è altro che una condizione necessaria a cui deve soddisfare il controllo ottimale. Il principio è del 1956.

Del decennio successivo sono le teorie di Butkovskij e di Wang sul controllo ottimale per i sistemi distribuiti. Butkovskij si dedica particolarmente allo studio delle

equazioni integrali , mentre Wang studia le equazioni alle derivate parziali ma si limita al solo caso i equazioni con condizioni al contorno omogenee, senza trattare quindi il problema del controllo sul contorno.

Del 1968 è un contributo di Brogan allo studio del controllo ottimale. Brogan introduce la definizione estesa di operatore mediante il quale si possono introdurre le condizioni al contorno nell'equazione alle derivate parziali.

Con Brogan quindi si può studiare anche il problema con condizioni al contorno non omogenee; ma la sua teoria vale solamente nel caso lineare.

In questa relazione si è giustificata la definizione estesa di operatore anche nel caso non lineare.

Inoltre si è ricavato il principio di Pontryagin per i sistemi distribuiti descritti dal sistema di equazioni:

$$(*) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = F(\bar{\varphi}(x, t), \bar{u}(x, y), x, t)$$

dove $\bar{\varphi}$ indica il campo vettoriale che descrive il sistema e $\bar{u}(x, t)$ il campo vettoriale di controllo.

Nella trattazione della teoria del controllo ottimale per i sistemi distribuiti, si è dato peso particolare ai sistemi distribuiti descritti da un sistema del tipo (*).

Con questi sistemi si può operare in maniera molto simile a quella con cui si opera nella teoria per i sistemi descritti da equazioni differenziali ordinarie.

In questa maniera sono più evidenti i punti in comune delle due teorie.

Infine si sono esemplificate alcune applicazioni che si possono avere della teoria del controllo ottimale. Si è studiata particolarmente l'equazione di Fourier di conduzione del calore e l'equazione ordinaria che si ricava se la conduzione termica del sistema tende all'infinito.

Per questi sistemi si sono studiati in particolare i controlli a zero energia in regime stazionario, dove con regime stazionario si intende la periodicità rispetto al tempo.

INDICE

PARTE PRIMA : I sistemi descritti da equazioni differenziali ordinarie.

- Introduzione	Pag.2
Cap. I Controllabilità	
- 1 - Definizioni	5
- 2 – Teoremi di Lee e Marcus	7
Cap. II Calcolo delle variazioni	
- I – Le equazioni di Eulero-Lagrange	11
- 2 – Calcolo delle variazioni e teoria del controllo ottimale.	15
- Metodo hamiltoniano	18
Cap. III Il principio di Pontryagin	
- I – Il principio di Pontryagin per i sistemi autonomi e sua dimostrazione	20
- 2 – Problema di tempo ottimale	30
- 3 – Il principio di Pontryagin per i sistemi non autonomi	34
- 4- Condizioni di trasversalità	37
- 5 – Dynamic programming	40
- 6 – Condizioni sufficienti per l’ottimalità	43

- 7 – Il metodo di Pontryagin applicato al moto del grave 47
- 8 – Il metodo di Pontryagin applicato ad un sistema biologico 50

PARTE SECONDA: I sistemi distribuiti

- Introduzione 55

-

- Cap. I Controllabilità 62

Cap. II Sistemi lineari

- 1 – Funzioni di Green 65
- 2 - Funzioni di Green per l'equazione di Fourier 68
- 3 – Funzioni di Green per l'equazione delle onde 70

-

Cap. III Le definizione estesa di operatore

- 1 – Caso lineare 73
- 2 – Caso generale 77

Cap. IV Controllo ottimale dei sistemi distribuiti

- 1 – Condizioni generali 81
- 2 – Dynamic programming 83

- 3 – Metodo di Pontryagin per I sistemi distribuiti	87
- 4 – Tecnica variazionale di Butkovskij	93
- 5 – Soluzioni analitiche di alcuni problemi di controllo ottimale	97
- 6 – Un esempio di controllo sul contorno	106
- 7 – Un caso particolare	109
PARTE TERZA: Applicazioni	112
REFERENZE	139
BIBLIOGRAFIA	141

PARTE PRIMA

I sistemi descritti da equazioni differenziali ordinarie.

Introduzione.

Consideriamo i sistemi dinamici descritti da equazioni ordinarie differenziali.

$$(1) \quad \frac{dx^i}{dt} = f^i(x^r, u^\alpha) \quad i, r = 1 \dots n ; \alpha = 1 \dots m$$

dove x^i sono le variabili che caratterizzano il processo e u^α sono i parametri di controllo che determinano il corso del processo. Quindi è necessario determinare i controlli come funzioni del tempo

$$u^\alpha = u^\alpha(t), \alpha = 1 \dots m$$

e dato il valore iniziale $x^i(t_0) = x_0^i, i = 1 \dots n$, la soluzione del sistema (1) è univocamente determinata. Consideriamo l'integrale:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^r, u^\alpha) dt$$

dove f^0 è una funzione data. Fissiamo oltre allo stato iniziale x_0^i , anche lo stato finale del sistema, $x^i(t_1) = x_1^i$. Ammesso che esistano dei controlli tali che il sistema soddisfi alle condizioni date, cerchiamo tra di essi quello per cui il valore di J è minimo.

In generale, t_0 e t_1 non sono fissi. Si può chiedere di minimizzare l'integrale

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0.$$

Quindi si vuole che il passaggio da x_0^i a x_1^i avvenga nel minor tempo possibile. Il problema è allora detto problema di tempo minimo o problema di tempo ottimale.

Spesso si ha che $|u^\alpha(t)| \leq \text{cost}$, $\alpha = 1 \dots m$. Più in generale \bar{u} è un vettore che appartiene ad un sottospazio U di E^m che riflette caratteristiche specifiche del sistema.

Il problema allora non è risolubile mediante il metodo variazionale classico, perché il metodo classico che sarà esaminato tra breve, richiede che non sia presente alcuna restrizione sulle $u^\alpha(t)$.

Il carattere non classico del problema è spesso messo in evidenza dal problema del tempo ottimale per il sistema lineare:

$$\frac{dx^i}{dt} = a_{ik} \cdot x^k + b_{ij} \cdot u^j, i = 1 \dots n$$

$$\text{con } |u^j| \leq 1, j = 1 \dots m$$

Quindi la U ha la forma di un poliedro.

In questo caso il controllo ottimale è realizzato dai punti $u^j(t)$ che sono i vertici del poliedro U . Le leggi del controllo ottimale forniscono la legge con cui il controllo salta da un vertice all'altro. I metodi classici sono completamente inapplicabili per risolvere il problema.

Dall'esempio segue che la classe dei controlli ammessi deve essere la classe delle funzioni continue a tratti. Quindi le x^i saranno funzioni continue e differenziabili a tratti. Sotto queste assunzioni le condizioni necessarie per l'ottimalità sono le condizioni formulate dal principio di massimo di Pontryagin.

Il problema a punto iniziale e finale fisso non è il problema più generale che posso avere, infatti punto iniziale e punto finale possono appartenere a due varietà M_0, M_1 che possono essere estese fino ad includere tutto lo spazio euclideo E^n . Inoltre dato il carattere tecnico del problema, non solo il controllo ma anche lo spazio delle fasi è spesso limitato.

Se lo stato del sistema è costretto a rimanere in una regione chiusa G , il suo moto ottimale avverrà nell'interno di G e sul suo contorno, e la forma del principio di massimo a cui soddisferà il moto sarà più complicata di quella per gli esempi visti prima.

Questi casi non esauriscono certamente tutti i problemi ottimali che si possono incontrare.

Cap . I Controllabilità

1- Definizioni.

Prima di risolvere un problema di controllo ottimale, è necessario assicurarsi che il problema dato sia risolubile. Ad esempio, se lo stato iniziale \bar{x}_{in} e lo stato finale \bar{x}_f del sistema sono fissati, bisogna vedere se è possibile far evolvere il sistema da \bar{x}_{in} a \bar{x}_f per mezzo dei controlli a nostra disposizione. Bisogna quindi studiare quella che viene chiamata la “controllabilità” del sistema. Una volta verificato che il sistema è controllabile tramite alcuni tra i controlli a nostra disposizione, allora si può passare al problema ottimale vero e proprio, ossia a scegliere ulteriormente tra questi controlli, quello che soddisfa alla richiesta di ottimalità.

Nella discussione che segue, come stato finale è sempre presa l’origine delle coordinate; infatti ci si può sempre ridurre in questo caso mediante una traslazione degli assi coordinati.

Consideriamo il sistema:

$$\dot{x}^i = f^i(x^1 \dots x^n; u^1 \dots u^m)$$

con $i = 1 \dots n; \bar{x} \in E^n, \bar{u} \in E^m$.

Si può scrivere in maniera più sintetica: $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u})$

Il problema è quello di trasportare lo stato del sistema da un punto iniziale fissato nell'origine di E^n . \bar{u} invece appartiene al sottospazio compatto di E^m , U , che contiene l'origine nel suo interno.

Sia $\xi(t, \bar{u}(t), \bar{x}(0))$ la traiettoria del sistema che parte da $\bar{x}(0)$, sotto l'azione del controllo $\bar{u}(t) \in U$. Uno stato $\bar{x}(T)$ è accessibile dallo stato iniziale $\bar{x}(0)$ tramite il controllo $\bar{u}(t)$ se esiste il controllo $\bar{u}_1(t) \in U$, tale che:

$$\xi(T; \bar{u}_1(t), \bar{x}(0)) = \bar{x}(T)$$

per $T \geq 0$ ma finito.

$$R(t, \bar{x}(0), U) = \{\bar{x}(t) : \exists \bar{u}_1 \in U, \xi(t; \bar{u}_1(t), \bar{x}(0)) = \bar{x}(t)\}$$

è l'insieme di accessibilità del sistema, ossia tutti i punti dove il sistema può andare a finire in un tempo finito sotto l'azione del controllo $\bar{u} \in U$.

Se lo stato $\bar{x}(T) = 0$ è accessibile da qualsiasi stato iniziale $\bar{x}(0)$, allora lo stato è detto controllabile. In altre parole lo stato $x(0)$ a $t_0=0$ è controllabile se esiste un controllo tale che:

$$\xi(T; \bar{u}^0(t), \bar{x}(0)) = 0$$

per $T \geq t_0$ ma finito.

Se tutti gli $\bar{x}(0)$ a t_0 sono controllabili, allora il sistema è detto completamente controllabile.

Il dominio di controllabilità C per il sistema differenziale

$$\dot{x}^i = f^i(x^1 \dots x^n; u^1 \dots u^m) \quad , i = 1 \dots n$$

per un insieme $U \subset E^m$, consiste di tutti i punti $\bar{x}_0 \in E^n$ per i quali esiste un controllo misurabile $\bar{u}(t) \subset U$, definito in un intervallo di tempo finito, che trasporta \bar{x}_0 nell'origine di E^n .

-2- Teoremi di Lee e Marcus

Riportiamo ora alcuni teoremi sulla controllabilità le cui dimostrazioni si possono trovare in un articolo di Lee e Marcus (1).

Consideriamo il sistema:

$$\dot{x}^i = f^i(x^1 \dots x^n; u^1 \dots u^m) \quad , i = 1 \dots n$$

dove $f^i(\bar{x}, \bar{u}) \in C^1$ in $E^n \otimes U$.

Assumiamo che il vettore $\bar{u} = \bar{0}$ sia un punto interno di $U \subset E^m$. Inoltre

chiediamo: $f^i(\bar{0}, \bar{0}) = 0$, $i = 1 \dots n$; se la matrice $\frac{\partial f^i}{\partial u^j}(\bar{0}, \bar{0})$ ha rango n , allora

il dominio di controllabilità C è un insieme aperto connesso di E^n contenente l'origine.

Consideriamo ora il sistema lineare:

$$\dot{x}^i = A_k^i \cdot x^k + B_j^i \cdot u^j \quad i, k = 1 \dots n; j = 1 \dots m$$

sempre con $U \subset E^m$ contenente l'origine nel suo interno. Se la matrice B ha rango n, allora il dominio di controllabilità C è un insieme aperto connesso di E^n contenente l'origine.

Un problema più difficile nasce quando i gradi di libertà m del vettore di controllo sono più piccoli dei gradi di libertà n del sistema.

In questo caso, dato il sistema:

$$\dot{x}^i = f^i(x^1 \dots x^n; u^1 \dots u^m) \quad , i = 1 \dots n$$

dove $f^i(\bar{x}, \bar{u}) \in C^1$ in $E^n \otimes U$.

Assumiamo che il vettore $\bar{u} = \bar{0}$ sia un punto interno di U. Inoltre:

I) $f^i(\bar{0}, \bar{0}) = 0, \quad i = 1 \dots n$

II) esiste un vettore $\bar{v} \in E^m$ tale che i vettori:

$$B\bar{v}, AB\bar{v}, \dots, A^{n-1}B\bar{v}$$

siano linearmente indipendenti, dove $B = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}(0,0)$ e $A = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(0,0)$ sono

matrici reali. Allora l'origine $\bar{0}$ è contenuta in C. Questo teorema vale solo se $m \leq n-1$. Se oltre alla I) e alla II), vale anche che la

$$\dot{x}^i = f^i(x^1 \dots x^n, 0 \dots 0) \quad , i = 1 \dots n$$

è asintoticamente stabile in maniera globale attorno alla origine di E^n , allora il dominio di controllabilità C è tutto E^n .

Ricordiamo brevemente che cosa si intende per stabilità nel senso di Lyapunov. Dato il sistema:

$$(1) \quad \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t) ;$$

sia $\bar{x}^*(t)$ una soluzione reale o complessa di (1). Allora diremo che $\bar{x}^*(t)$ è stabile secondo Lyapunov per $t > t_0$ se, per $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0)$ tale che, se

$$\|\bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)\| < \delta \rightarrow \|\bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0$$

dove $\bar{x}(t)$ è un'altra soluzione della (1). Se ciò non è verificato, allora la $\bar{x}^*(t)$ è instabile.

Sia ora $\bar{x}^*(t)$ stabile per $t \geq t_0$. Se δ è indipendente da t_0 , allora la soluzione è detta uniformemente stabile.

Se invece esiste un $\eta(t_0) > 0$, tale che se:

$$\|\bar{x}(t_0) - \bar{x}^*(t_0)\| < \eta \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)\| = 0$$

allora la soluzione si dice asintoticamente stabile.

Spesso come $\bar{x}^*(t)$ si prende un punto di equilibrio \bar{x}_e ; se questo punto è asintoticamente stabile, tutti i punti $\bar{x}(t_0)$ che per $t \rightarrow \infty$ si avvicinano a \bar{x}_e , formano il dominio di attrazione del punto di equilibrio. Se questo dominio ricopre tutto lo spazio allora il punto di equilibrio è asintoticamente stabile in maniera globale.

Per concludere questo capitolo, un esempio molto semplice; ci chiediamo quale è il dominio di controllabilità per il seguente sistema che descrive il moto piano di un grave:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -g + u \end{cases}$$

v_x è costante e maggiore di zero. La funzione di controllo è una accelerazione che agisce sul corpo contemporaneamente alla gravità.

Si può volere ad esempio che a T finito sia:

$$\begin{cases} x(T) = 0 \\ y(T) = 0 \\ \dot{y}(T) = 0 \end{cases}$$

Il dominio di controllabilità è formato da tutti i punti con $x < 0$. Ovviamente se il limite $u(t)$ limiterà ancora di più il dominio di controllabilità del sistema.

Invece se aggiungessi un controllo alla prima equazione: $\dot{x} = v_x + V$, allargherei il dominio C .

Cap. II Calcolo delle variazioni

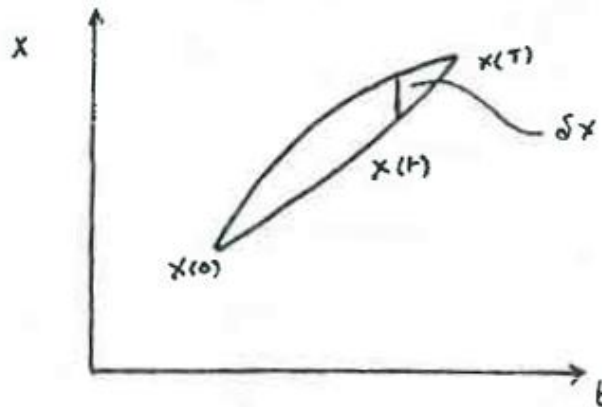
-I- Le equazioni di Eulero-Lagrange

Per risolvere problemi di controllo ottimale il calcolo delle variazioni può essere molto utile. Richiamiamo innanzi tutto alcuni risultati fondamentali del calcolo variazionale. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono uno di questi risultati.

Si richiede di minimizzare il funzionale:

$$I = \int_0^T F(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

dove $x(t)$ si intende una funzione differenziabile almeno due volte e soggetta alle condizioni $x(0)=x_0$ e $x(T) = x_T$.



La variazione di $x(t)$ è $\delta x(t) = \varepsilon \xi(t)$ dove $\xi(t)$ è una funzione arbitraria del tempo tale che $\xi(0) = \xi(T) = 0$. L'incremento del funzionale per la variazione di $x(t)$ è :

$$\Delta I(\varepsilon) = \int_0^T [F(x + \varepsilon \xi, \dot{x} + \varepsilon \dot{\xi}, t) - F(x, \dot{x}, t)] dt$$

Sviluppando ΔI in serie di Taylor:

$$\Delta I(\varepsilon) = \Delta I(0) + \varepsilon \left. \frac{d\Delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2\Delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots$$

Poiché $\Delta I(0) = 0$ e $\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d\Delta I(\varepsilon)}{d\varepsilon}$,

$$\Delta I(\varepsilon) = \varepsilon \left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left. \frac{d^2 I(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots$$

Indichiamo con $\delta I = \varepsilon \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}$, verrà chiamata variazione prima e così via per gli altri addendi di $\Delta I(\varepsilon)$. La variazione prima del funzionale è:

$$\delta I = \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt$$

Se I ha un minimo per $x=x(t)$, la derivata: $\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$ e quindi la sua variazione prima deve essere uguale a zero:

$$\delta I = \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) dt = 0$$

Ma la ξ è una funzione arbitraria del tempo, quindi:

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

che è l'equazione di Eulero-Lagrange. La (1) è una condizione necessaria a cui deve soddisfare la $x(t)$ affinché il funzionale sia minimo.

Si calcola adesso:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \frac{d\dot{x}}{dt}$$

che sostituita nella (1) fornisce l'equazione:

$$(2) \quad \ddot{x} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} + \dot{x} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Ricordiamo che: $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$ (3)

Bisogna quindi risolvere l'equazione (2) con condizioni al contorno (3). Questo è un problema con condizioni al contorno a due istanti diversi, $t=0$ e $t=T$.

Il problema è quindi differente dal problema classico del moto che richiede condizioni iniziali a $t=0$ per la $x(t)$ e per la $\dot{x}(t)$.

Se il punto finale non è fissato ma può appartenere ad una funzione $c(t)$, la traiettoria ottimale deve soddisfare oltre che alle equazioni di Eulero-Lagrange anche ad una condizione che viene chiamata condizione di trasversalità, condizione che sostituisce la condizione al contorno $x(T) = x_T$.

Calcolando nuovamente la ΔI e tenendo presente che il punto finale non è più fisso ma deve appartenere a $c(t)$ si può ottenere questa condizione di trasversalità a cui la traiettoria ottimale deve soddisfare nel punto finale:

$$F(T) - [\dot{x}(T) - \dot{c}(T)] \cdot \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_T = 0$$

Affinché il funzionale:

$$I = \int_0^T F(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

sia estrema oltre alla condizione di Eulero-Lagrange deve essere soddisfatta anche la condizione di Legendre. Quest'ultima condizione distingue anche tra massimo e minimo del funzionale.

Quando la variazione prima è uguale a zero, l'incremento del funzionale I ha segno concorde con la variazione seconda, $\delta^2 I$.

Si può dimostrare che il segno della variazione seconda è uguale al segno di

$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}$. Allora la condizione di Legendre diventa:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \leq 0$$

per avere un massimo, e invece per avere un minimo:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \geq 0.$$

-2- Calcolo delle variazioni e teoria del controllo ottimale

Fin qui si sono esposti alcuni risultati del metodo variazionale classico. Questo metodo si può usare in problemi di controllo ottimale. Bisogna però tener presente che la funzione da minimizzare contiene anche il controllo e che di norma la $\dot{x}(t)$ viene omessa.

Passiamo in rassegna alcuni di questi problemi, che hanno preso il nome da coloro che per primi li hanno studiati.

Iniziamo dal problema di Lagrange.

Sia $\bar{x}(t)$ il vettore che rappresenta lo stato del sistema, la sua equazione è:

$$(1) \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$$

\bar{x}, \bar{f} vettori a n - dimensioni

\bar{u} vettore a r - dimensioni

Lo stato iniziale è considerato fisso:

$$x(0) = x_0$$

Si vuole minimizzare l'integrale:

$$I = \int_0^T F(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt$$

Il problema è quello di trovare una $\bar{u}(t)$ e la corrispondente $\bar{x}(t)$ tramite la (1), che minimizzano la I e soddisfano la condizione iniziale.

Il secondo problema fondamentale è quello di Mayer.

Ho sempre che $\bar{x}(t)$ deve soddisfare l'equazione

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$$

con condizione iniziale $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ e finale $\bar{x}(T) = \bar{x}_T$ dove T è un qualsiasi istante non necessariamente fissato a priori. Bisogna minimizzare:

$$I = G(\bar{x}(T), \bar{u}(T), T) - G(\bar{x}(0), \bar{u}(0), 0)$$

Infine ho il problema di Bolza. Di nuovo abbiamo che la $\bar{x}(t)$ deve soddisfare una equazione differenziale con condizioni iniziali e finali date, come nel problema di Mayer; però la I da minimizzare è:

$$I = G(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \Big|_0^T + \int_0^T F(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt$$

Studiamo ora il problema isoperimetrico.

Il problema isoperimetrico classico deve il suo nome al problema di trovare la massima area per contorni di ugual lunghezza. Il problema consiste nel massimizzare o minimizzare un funzionale:

$$I = \int_0^T F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$$

mentre un altro funzionale è mantenuto costante:

$$I = \int_0^T K(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt = C.$$

Questo problema può essere ridotto al problema di Lagrange definendo:

$$x_o(t) = \int_0^t K(x(t'), \dot{x}(t'), t') dt' \quad \dot{x}_o(t) = K(x(t), \dot{x}(t), t)$$

Ora, invece di prendere F come funzione il cui integrale deve essere minimizzato, si prende: $\tilde{F} = F(x, \dot{x}, t) + \lambda(t) \cdot [K(x, \dot{x}, t) - \dot{x}_o]$ (cosa che si può fare dato che il termine tra parentesi è sempre nullo). Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_o} + \lambda \frac{\partial K}{\partial x_o} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_o} + \lambda \frac{\partial K}{\partial \dot{x}_o} \right] = \frac{d}{dt} \lambda(t) = 0 \\ \lambda(t) = \lambda_o = \text{cost.} \end{array} \right.$$

La controparte in teoria del controllo del problema isoperimetrico è:

$$J = \int_0^T \Phi(x(t), \dot{x}(t), u(t), t) dt = 0, \quad I + \lambda J = \int_0^T [F(x, u, t) + \lambda \Phi(x, \dot{x}, u, t)] dt$$

dove Φ è uguale a zero. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \right] = 0 \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda} = \Phi = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Se si ha che: } J = \int_0^T [f(x, u, t) - \dot{x}] dt = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0 \\ (2) \quad \frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \\ (3) \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda} = \Phi = f(x, u, t) - \dot{x} = 0 \end{array} \right.$$

Allora oltre all'equazione differenziale $\dot{x} = f(x, u, t)$ la traiettoria ottimale, il controllo e il moltiplicatore di Lagrange $\lambda(t)$ devono soddisfare le due equazioni (1) e (2). Inoltre devono essere soddisfatte anche le condizioni al contorno $x(0)$ e $x(T)$ oppure $x(0)$ e $\lambda(T)$. La condizione $\lambda(T)$ si ricava dalle condizioni di trasversalità alla fine della traiettoria.

-3- Metodo hamiltoniano

Abbiamo visto come si può usare il metodo variazionale classico nella teoria del controllo ottimale. Questo metodo è applicabile solo quando il controllo non è limitato da alcuna restrizione di modo che è possibile derivare rispetto ad u . Il metodo visto è il metodo lagrangiano; si può anche dare una formulazione hamiltoniana della teoria del controllo ottimale.

Si definisce l'hamiltoniana:

$$H = F(x, u, t) + \lambda \cdot f(x, u, t)$$

Questa è anche l'hamiltoniana del metodo di Pontryagin che sarà esaminato tra breve. Abbiamo che:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u, t) = \frac{dx}{dt} \\ \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{d\lambda}{dt} \end{cases}$$

sono le equazioni canoniche.

I moltiplicatori di Lagrange $\lambda(t)$ diventeranno nella teoria di Pontryagin le variabili $\psi(t)$, che potremmo chiamare i moltiplicatori di Pontryagin.

La condizione $\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \lambda = 0$ diventa la condizione : $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

La derivata totale rispetto al tempo dell'hamiltoniana sar :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}^T} \cdot \dot{\bar{x}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}^T} \cdot \dot{\bar{\lambda}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}^T} \cdot \dot{\bar{u}}$$

Dato che valgono le equazioni canoniche e per la condizione $\frac{\partial H}{\partial \bar{u}^T} = 0$, ho

che:
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Cos  l'hamiltoniana del sistema estemale   soggetta a cambiamenti se e solo se   una funzione esplicita del tempo. Se l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ e quindi l'hamiltoniana   costante.

Per concludere illustriamo con un esempio il problema isoperimetrico, consideriamo il sistema descritto dall'equazione $\dot{x} = u$ con condizione iniziale $x(0)$ e condizione finale $x(T)$. Il funzionale da minimizzare  :

$$\int_0^T (x^2 + u^2) dt = 0.$$

Quindi:
$$I + \lambda \cdot J = \int_0^T (x^2 + u^2 + \lambda(u - \dot{x})) dt = 0.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:
$$\begin{cases} 2x + \dot{\lambda} = 0 \\ 2u + \lambda = 0 \\ u - \dot{x} = 0 \end{cases}$$

da cui si ha che: $2x - 2\ddot{x} = 0$ che si pu  ottenere anche dall'hamiltoniana :

$$H = x^2 + u^2 + \lambda u.$$

Cap . III Il principio di Pontryagin

-1- Il principio di Pontryagin per i sistemi autonomi e sua dimostrazione

Nella teoria del controllo ottimale, il principio di Pontryagin è di considerevole importanza. Questo principio è stato pubblicato per la prima volta nel 1956. Pontryagin e i suoi collaboratori hanno definito l'ottimalità sotto forma di principio di massimo.

Prima della discussione del principio di Pontryagin, alcune parole sulla notazione usata. La funzione F usata nel calcolo delle variazioni è ora f_0 , il moltiplicatore di Lagrange $\bar{\lambda}(t) = -\bar{\psi}(t)$ e l'hamiltoniana $H = F + \bar{\lambda}^T \cdot \bar{f}$ è ora $H = -f_0 + \bar{\psi}^T \cdot \bar{f}$. Le equazioni canoniche sono però formalmente identiche.

Consideriamo innanzi tutto i sistemi autonomi:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

\bar{x}, \bar{f} vettori a n-dimensioni, \bar{u} vettore a r-dimensioni.

\bar{u} è un vettore le cui componenti sono continue a tratti e limitate:

$$\bar{u}(t) \in U, \forall t$$

dove U rappresenta un insieme chiuso e limitato di E^r , spazio euclideo a r-dimensioni.

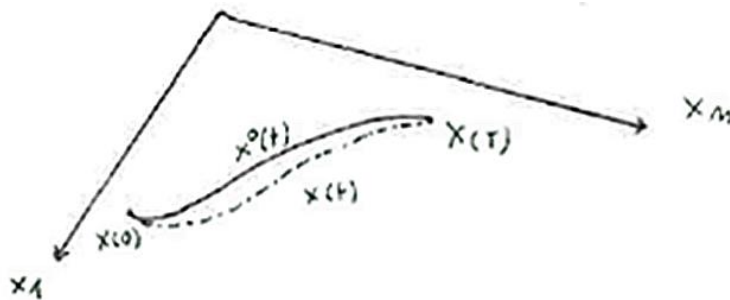
$\bar{f} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u})$ è una funzione continua dei suoi argomenti e le sue derivate parziali rispetto a x_i esistono e sono continue. Al tempo iniziale $t_1 = t_0 = 0$ lo stato del sistema sia definito dalla condizione iniziale $\bar{x}(0)$. Per mezzo del controllo $\bar{u}(t) \in U$ il sistema è trasferito nello stato finale $\bar{x}(T)$ dove T è l'istante finale. Il controllo $\bar{u}(t)$ è ottimale se:

$$I = \int_0^T f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt$$

è minimo.

La traiettoria $\bar{x}(t) = \bar{x}^o(t)$ generata dal controllo ottimale $\bar{u} = \bar{u}^o(t)$ è chiamata traiettoria ottimale. Il controllo $\bar{u}^e(t)$ (e la sua corrispondente traiettoria) che soddisfa la condizione necessaria per l'ottimalità è chiamato controllo estremale (traiettoria estremale). Qualsiasi controllo ottimale è estremale, il contrario non è vero. Per essere ottimale, un controllo deve soddisfare anche una condizione sufficiente.

Siano ora $\bar{x}(0)$ e $\bar{x}(T)$ fissi.



$$I = \int_0^T f_0(\bar{x}^0(t), \bar{u}^0(t)) dt = \text{minimo}$$

Introduciamo la variabile:

$$x_0(t) = \int_0^t f_0(\bar{x}(t'), \bar{u}(t')) dt'$$

dove $x_0(0) = 0$

$$x_0(T) = I$$

$$\dot{x}_0(t) = f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = f_0(\bar{x}, \bar{u})$$

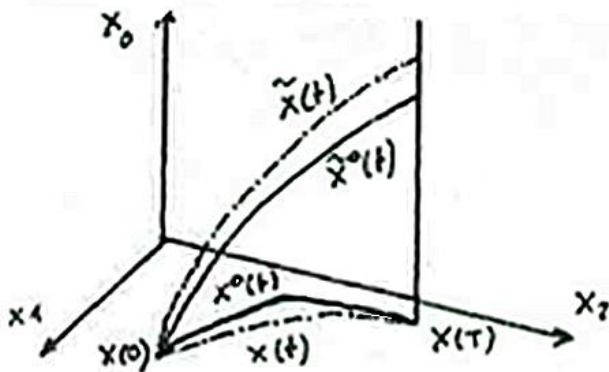
Introduciamo il vettore a n+1 dimensioni:

$$\tilde{x} = [x_0, \bar{x}]^T \in E^{n+1}$$

$$\tilde{f} = [f_0, \bar{f}]^T \in E^{n+1}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{u})$$

Il controllo è ottimale se x_0 è minimo a $t=T$.



Consideriamo inoltre il vettore $\bar{\psi}$ tale che:

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e la funzione hamiltoniana:

$$\tilde{H}_\psi = \tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = \tilde{\psi}^T \cdot \tilde{f}(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{i=0}^n \psi_i \cdot f_i(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{j=0}^n f_j(\bar{x}, \bar{u}) \cdot \psi_j$$

Quindi abbiamo il sistema canonico:

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{H}_\psi}{\partial \tilde{\psi}} ; \quad \dot{\tilde{\psi}} = - \frac{\partial \tilde{H}_\psi}{\partial \tilde{x}}$$

Indichiamo ora con $M_\psi(\tilde{\psi}, \bar{x})$ il massimo per $\bar{u} \in U$ dell'hamiltoniana:

$$M_\psi(\tilde{\psi}, \bar{x}) = \sup_{\bar{u} \in U} \tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}, \bar{x}, \bar{u})$$

Adesso possiamo enunciare il principio di massimo di Pontryagin.

In un sistema autonomo con condizioni al contorno fisse ($\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ e $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$ dove t_1 è un istante qualsiasi non fissato a priori), la condizione necessaria affinché $\bar{u}(t)$ ed $\bar{x}(t)$ siano ottimali, affinché quindi $x_0(t_1) = I$ sia minimo, è che esista un vettore $\tilde{\psi}^0(t)$ continuo diverso da zero, soluzione dell'equazione aggiunta:

$$\dot{\tilde{\psi}}^0 = - \frac{\partial \tilde{H}_\psi}{\partial \tilde{x}^0}$$

tale che:

$$\tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t), \bar{u}^0(t)) = \tilde{M}_\psi(\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t)) = 0$$

ossia che l'hamiltoniana raggiunga il suo valore massimo che è uguale a zero.

Inoltre $\psi_0^0(t) = \text{cost} \leq 0$ per qualsiasi t in $0 \leq t \leq t_1$.

Supponiamo che il controllo ottimale $\bar{u}^0(t)$ subisca una perturbazione anche non piccola in un certo intervallo di tempo:

$$\bar{u}^*(t) = \begin{cases} \bar{v} & , \tau - \varepsilon \Delta t < t < \tau \\ \bar{u}^0(t) & , t < \tau - \varepsilon \Delta t, \tau < t \end{cases}$$

dove ε è piccolo ma non la differenza $\bar{v} - \bar{u}^0(t)$.

Associata al controllo $\bar{u}^*(t)$ ottenuto perturbando il controllo ottimale $\bar{u}^0(t)$, ho la soluzione $\tilde{x}^*(t)$. Notiamo che:

$$\tilde{x}^0(\tau - \delta t) = \tilde{x}^*(\tau - \delta t)$$

$$\tilde{x}^0(\tau) = \tilde{x}^0(\tau - \delta t) + \int_{\tau - \delta t}^{\tau} \dot{\tilde{x}}^0(t) dt$$

$$\tilde{x}^*(\tau) = \tilde{x}^*(\tau - \delta t) + \int_{\tau - \delta t}^{\tau} \dot{\tilde{x}}^*(t) dt$$

Definiamo poi:

$$\delta \tilde{x}(\tau) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{x}^*(\tau) - \tilde{x}^0(\tau) = \int_{\tau - \delta t}^{\tau} (\dot{\tilde{x}}^*(t) - \dot{\tilde{x}}^0(t)) dt = \int_{\tau - \delta t}^{\tau} (\tilde{f}(\bar{x}^*(t), \bar{v}) - \tilde{f}(\bar{x}^0(t), \bar{u}^0(t))) dt$$

Nel limite per ε che tende a zero, si hanno i seguenti limiti:

$$\tilde{x}^0(t) \rightarrow \tilde{x}^0(\tau)$$

$$\tilde{x}^*(t) \rightarrow \tilde{x}^0(t)$$

e quindi:

$$\tilde{x}^*(t) \rightarrow \tilde{x}^0(\tau)$$

$$(*) \quad \tilde{u}^0(t) \rightarrow \tilde{u}^0(\tau)$$

La (*) vale perché abbiamo assunto che la perturbazione avvenga in un tratto di continuità di $\bar{u}^0(t)$. Inoltre abbiamo che:

$$\tilde{f}(\bar{x}^*(t), \bar{v}) = \tilde{f}(\bar{x}^0(\tau), \bar{v}) + O(\varepsilon)$$

$$\tilde{f}(\bar{x}^0(t), \bar{u}^0(t)) = \tilde{f}(\bar{x}^0(\tau), \bar{u}^0(\tau)) + O(\varepsilon)$$

dove $O(\varepsilon) \approx \varepsilon$, da cui:

$$\delta \tilde{x}(\tau) = \int_{\tau - \delta t}^{\tau} (\tilde{f}(\bar{x}^0(\tau), \bar{v}) - \tilde{f}(\bar{x}^0(\tau), \bar{u}^0(\tau))) dt + \dots$$

(i puntini indicano termini che vanno a zero più rapidamente di ε).

Posso scrivere sempre nel limite per $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau) = \varepsilon \Delta t [\tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}^0(\tau), \bar{\mathbf{v}}) - \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}^0(\tau), \bar{\mathbf{u}}^0(\tau))] + \dots = \varepsilon \Delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau) + \dots$$

Consideriamo la $\delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau)$ all'istante finale T: $\delta \tilde{\mathbf{x}}(T) = \varepsilon \Delta \tilde{\mathbf{x}}(T)$

Per determinare $\Delta \tilde{\mathbf{x}}(T)$ dalla $\Delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau)$ si usa l'equazione differenziale:

$$(1) \quad \frac{d\Delta \tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}^T} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{x}}_0} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

In notazione estesa;

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}_i(t)}{dt} = \sum_{j=0}^n \left. \frac{\partial f_i(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}{\partial x_j(t)} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{x}}_0} \cdot \Delta x_j(t)$$

ottenuta sviluppando in serie di Taylor l'equazione:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t))$$

Allora si ha che:

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\Phi}(t, \tau) \Delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau)$$

dove Φ è la matrice di transizione per la (1).

Il sistema aggiunto a (1) definisce il vettore:

$$\tilde{\psi}^o(t) = [\tilde{\Phi}(t, \tau)^{-1}] \tilde{\psi}^o(\tau)$$

Quindi per l'istante finale T, la variazione è:

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}}(T) = \tilde{\Phi}(T, \tau) \Delta \tilde{\mathbf{x}}(\tau)$$

Fin qui si è considerata soltanto una perturbazione al tempo τ sul controllo ottimale.

Se ci sono più perturbazioni presenti:

$$\Delta\tilde{x}(T) = \sum_{k=1}^r \tilde{\Phi}(T, \tau_k) \Delta\tilde{x}(\tau_k)$$

ed inoltre si può avere una perturbazione $\delta T = \varepsilon \Delta T$:

$$\delta\tilde{x}(T) = \int_T^{T+\delta T} \tilde{f}(\bar{x}^*(t), \bar{u}^0(t)) dt$$

ma per $\varepsilon \rightarrow 0$ che tende a zero: $\bar{x}^*(t) \rightarrow \bar{x}^0(t)$

$$\delta\tilde{x}(T) = \varepsilon \cdot \tilde{f}(\bar{x}^0(T), \bar{u}^0(T)) \cdot \Delta T + \dots = \varepsilon \Delta\tilde{x}(T) + \dots$$

Quindi si ottiene la seguente espressione per la $\Delta\tilde{x}(T)$:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{x}(T) &= \tilde{f}(\bar{x}^0(T), \bar{u}^0(T)) \cdot \Delta T \\ &+ \sum_{k=1}^r \tilde{\Phi}(T, \tau_k) \cdot \left(\tilde{f}(\bar{x}^0(\tau_k), \bar{v}_k) - \tilde{f}(\bar{x}^0(\tau_k), \bar{u}^0(\tau_k)) \right) \cdot \Delta t_k \end{aligned}$$

$\Delta\tilde{x}(T)$ dipende da $\tau_k, \bar{v}_k, \Delta t_k$ e ΔT . Indichiamo con γ l'insieme di queste variabili:

$$\gamma = \{\tau_k, \bar{v}_k, \Delta t_k, \Delta T\}$$

Date le

$$\gamma' = \{\tau_k, \bar{v}_k, \Delta t_k', \Delta T'\}$$

$$\gamma'' = \{\tau_k, \bar{v}_k, \Delta t_k'', \Delta T''\}$$

facciamone una combinazione lineare:

$$\gamma = \lambda' \gamma' + \lambda'' \gamma'' + \dots = \{\tau_k, \bar{v}_k, \lambda' \Delta t_k' + \lambda'' \Delta t_k'' + \dots, \lambda' \Delta T' + \lambda'' \Delta T'' + \dots\}$$

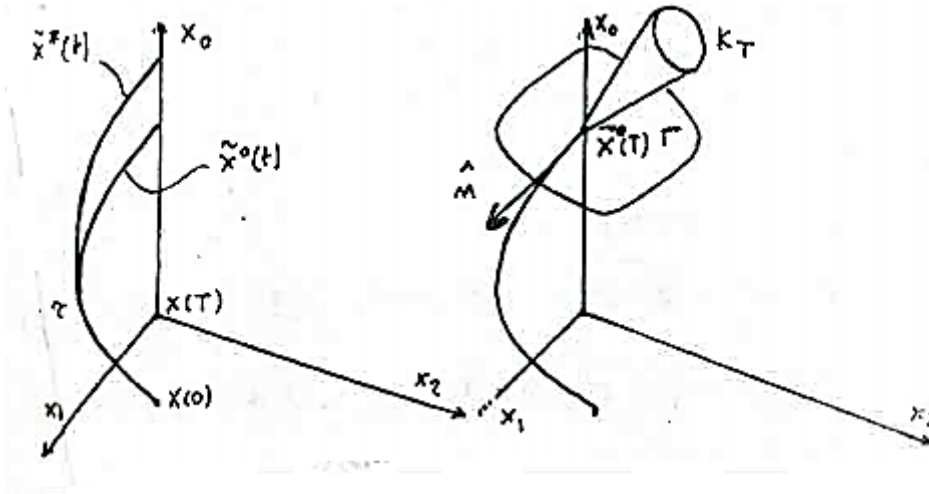
con $\lambda' \geq 0, \lambda'' \geq 0, \dots$

Dato che $\Delta\tilde{x}(T)$ è una funzione lineare delle quantità dell'insieme γ , abbiamo che:

$$\Delta\tilde{x}_\gamma = \lambda' \Delta\tilde{x}_{\gamma'} + \lambda'' \Delta\tilde{x}_{\gamma''} + \dots$$

Se prendiamo tutti i valori di γ possibili, otteniamo un cono K_T formato dall'insieme di tutti i vettori $\Delta\tilde{x}_\gamma$.

Il cono è un cono convesso. Infatti K_T non può coprire l'intero spazio dato che i punti al di sotto della traiettoria ottimale sono irraggiungibili.



Così esiste un iperpiano Γ che passa per il vertice del cono e tale che l'intero cono giace in un semispazio definito da questo iperpiano Γ .

Costruita la normale \tilde{n}_T al piano Γ si ha che: $\tilde{n}_T^T \cdot \Delta\tilde{x}(T) \leq 0$

Prendiamo in primo luogo il controllo perturbato in un punto $\tau_k = \tau$ di continuità; c'è solo il secondo termine nell'espressione per la $\Delta\tilde{x}(T)$ vista prima:

$$\Delta\tilde{x}(T) = \Phi(T, \tau) \cdot \left[\tilde{f}(\bar{x}^o(\tau), \bar{v}) - \tilde{f}(\bar{x}^o(\tau), \bar{u}^o(\tau)) \right] \cdot \Delta t = \Phi(T, \tau) \cdot \Delta\tilde{f}(\tau) \Delta t$$

quindi: $\tilde{n}_T^T \cdot \Phi(T, \tau) \Delta\tilde{f}(\tau) \Delta t \leq 0$

Prendiamo come valore iniziale per $\tilde{\psi}^o(t)$ il valore del vettore perpendicolare al piano Γ , \tilde{n}_T :

$$\tilde{n}_T^T = \tilde{\psi}^o(T)^T$$

Si può allora scrivere:

$$\tilde{\psi}^{oT}(T) \tilde{\Phi}(T, \tau) \Delta \tilde{f}(\tau) = \tilde{\psi}^{oT}(\tau) \cdot \Delta \tilde{f}(\tau)$$

$$\Delta t \tilde{\psi}^{oT}(\tau) \cdot \Delta \tilde{f}(\tau) \leq 0 \quad \text{ma} \quad \Delta t > 0$$

$$\tilde{\psi}^{oT}(\tau) \cdot \Delta \tilde{f}(\tau) \leq 0$$

$$\tilde{\psi}^{oT}(\tau) \cdot \left[\tilde{f}(\bar{x}^o(\tau), \bar{v}) - \tilde{f}(\bar{x}^o(\tau), \bar{u}^o(\tau)) \right] \leq 0$$

che per la definizione di hamiltoniana diventa:

$$\tilde{H}_\psi \left[\tilde{\psi}^o(\tau), \bar{x}^o(\tau), \bar{v} \right] \leq \tilde{H}_\psi \left[\tilde{\psi}^o(\tau), \bar{x}^o(\tau), \bar{u}^o(\tau) \right]$$

Quindi se il controllo è ottimale, l'hamiltoniana deve essere massima, che è quanto afferma il principio di Pontryagin.

Analizziamo ora la perturbazione al tempo finale:

$$\gamma = \{0, \bar{u}^o, 0, \Delta T\}$$

Si ha solo il primo termine nell'espressione di $\Delta \tilde{x}$:

$$\tilde{n}_T^T \cdot \tilde{f}(\bar{x}^o(T), \bar{u}^o(T)) \Delta T \leq 0$$

$$\tilde{\psi}^{oT}(\tau) \cdot \tilde{f}(\bar{x}^o(T), \bar{u}^o(T)) \Delta T \leq 0$$

cioè (*) $\tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}^o(T), \bar{x}^o(T), \bar{u}^o(T)) \cdot \Delta T \leq 0$

Dato che ΔT può essere sia positivo che negativo, la (*) vale solo se:

$$\tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}^0(T), \bar{x}^0(T), \bar{u}^0(T)) = 0$$

l'hamiltoniana deve essere uguale a zero nel punto finale della traiettoria. Per via delle equazioni canoniche:

$$\frac{d\tilde{H}_\psi}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}_\psi}{\partial \tilde{\psi}^T} \cdot \frac{d\tilde{\psi}}{dt} + \frac{\partial \tilde{H}_\psi}{\partial \bar{x}^T} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial \tilde{H}_\psi}{\partial \bar{u}^T} \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}_\psi}{\partial \bar{u}^T} \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} = 0$$

In conclusione l'hamiltoniana deve essere sempre uguale a zero:

$$\max_{\bar{u} \in U} \tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t), \bar{u}^0(t)) = \tilde{M}_\psi(\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t)) = 0$$

$$0 \leq t \leq T$$

-2- Problema del tempo ottimale

Dal principio di Pontryagin deriviamo una analoga condizione necessaria per il problema del tempo ottimale.

Abbiamo che:

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(\bar{x}, \bar{u}) dt = t_1 - t_0 \quad ; \quad f^0(\bar{x}, \bar{u}) = 1$$

$$\text{quindi: } \mathcal{H}(\tilde{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = \psi_0 + \sum_{v=1}^n \bar{\psi}_v \cdot \bar{f}^v(\bar{x}, \bar{u})$$

Introduciamo l'hamiltoniana:

$$H(\tilde{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = \sum_{v=1}^n \bar{\psi}_v \cdot \bar{f}^v(\bar{x}, \bar{u})$$

e le equazioni canoniche:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad ; \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad , i = 1 \dots n$$

$$\text{e si indichi con} \quad M(\tilde{\psi}, \bar{x}) = \sup_{u \in U} H(\tilde{\psi}, \bar{x}, \bar{u})$$

Affinché il controllo \bar{u} trasferisca nel minor tempo possibile lo stato del sistema da \bar{x}_0 a \bar{x}_1 , ossia la traiettoria sia tale che $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ e $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$, deve essere:

- 1) $H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = M(\bar{\psi}, \bar{x})$, $\forall t, t_0 \leq t \leq t_1$
- 2) $M(\bar{\psi}, \bar{x}) \geq 0$, $\forall t, t_0 \leq t \leq t_1$

Considerando per esempio l'equazione $\frac{d^2x}{dt^2} = u$ dove u è il controllo reale e

limitato: $|u| \leq 1$. Nello spazio delle fasi il sistema è:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Il sistema è quindi:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = u \end{cases}$$

Il problema è quello di arrivare nell'origine (0,0) da uno stato iniziale \bar{x}_0 nel tempo più breve possibile.

L'hamiltoniana è: $H = \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot u$

$$\text{Il sistema delle (1) è: } \begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $\psi_1 = c_1 \quad \psi_2 = c_2 - c_1 t$

Quindi l'hamiltoniana è massima per:

$$u(t) = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign } (c_2 - c_1 t) \quad (*)$$

che è il controllo ottimale.

Dalla (*) segue che il controllo ottimale è una funzione a tratti costante e che assume il valore ± 1 , e ha al più due intervalli in cui è costante dato che la funzione $c_2 - c_1 t$ è lineare e può cambiare segno una sola volta nell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$.

Se $u=1$, la soluzione del sistema (1) è:

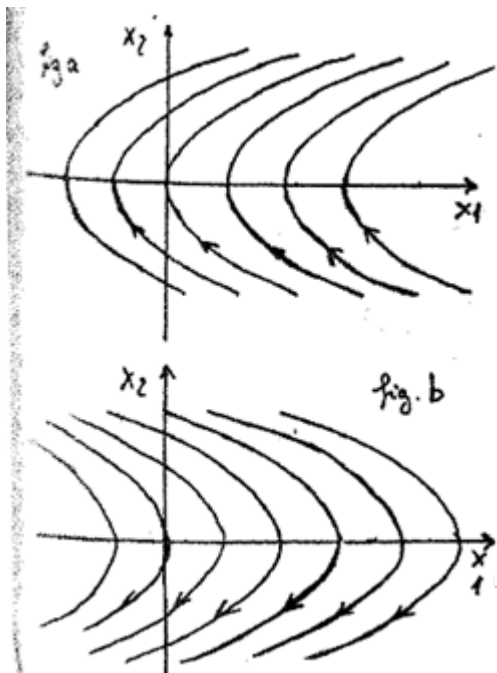
$$x_1 = \frac{t^2}{2} + s_2 t + s_1 \quad ; \quad x_2 = t + s_2$$

che nello spazio delle fasi descrive una curva:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2 + s \quad ; \quad s = s_1 - \frac{1}{2}(s_2)^2$$

Se invece $u=-1$: la curva è: $x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2 + s'$

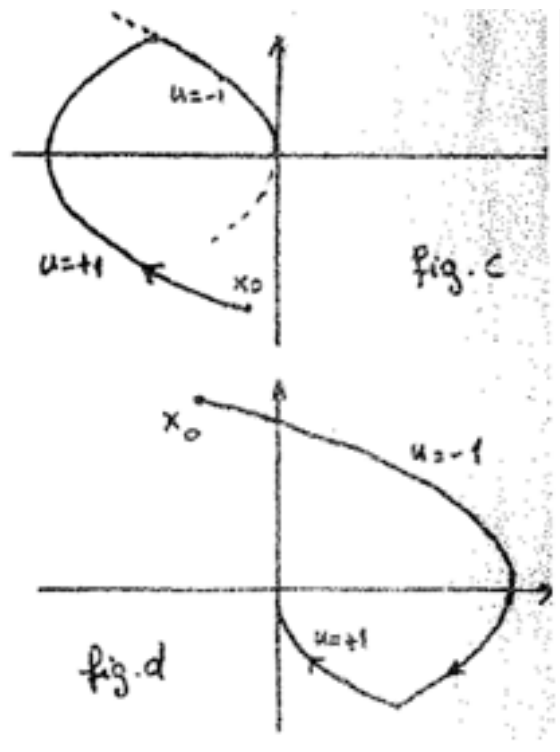
Le due famiglie di parabole sono mostrate nelle figure seguenti. La figura a



mostra le parabole $x_1' = \frac{1}{2}(x_2)^2 + s$ e la fig. b mostra le altre parabole : $x_1' = -\frac{1}{2}(x_2)^2 + s'$. Sono anche indicati i versi di percorrenza. Come già visto prima, la $u(t)$ è a tratti costante e ha al più un punto di discontinuità. Se la u è inizialmente uguale a +1 e poi a -1 la traiettoria consiste di due archi di parabola, vedi fig. c ; se invece prima è $u=-1$ e poi $u=+1$, fig. d.

La fig. e descrive tutte le traiettorie ottimali che si possono avere. BO è un arco della parabola $-\frac{1}{2}(x_2)^2$ a AO un arco della parabola $\frac{1}{2}(x_2)^2$.

Se il punto iniziale x_0 è sopra AOB, il punto muove prima sotto l'influenza di $u=-1$ finché non raggiunge AO. In quell'istante u assume il valore +1 che conserva fino all'arrivo nell'origine. Se il punto x_0 è sotto AOB, il controllo u deve essere inizialmente uguale a +1 finché il punto non arriva su BO.



B0 . Allora u cambia valore e diventa uguale a -1 .

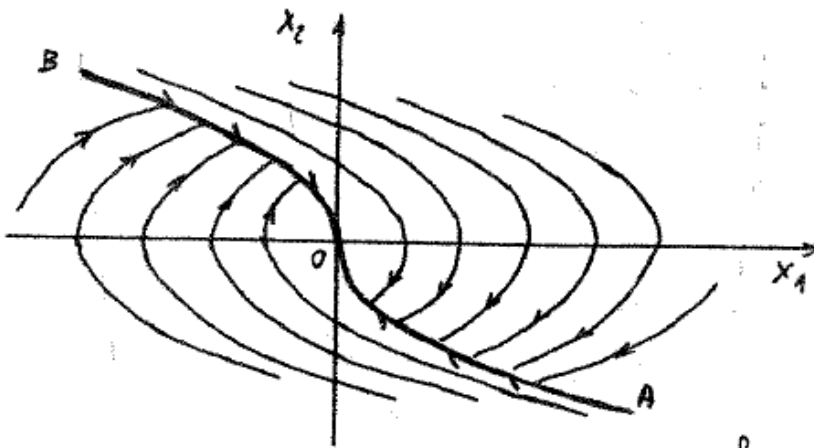


fig. e

-3- Il principio di Pontryagin per i sistemi non autonomi.

Consideriamo adesso il sistema non autonomo:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

Bisogna minimizzare:

$$I = \int_0^T f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) \cdot dt$$

Quindi: $\dot{x}_0(t) = f_0(\bar{x}, \bar{u}, t)$

Il sistema è $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}_0(\bar{x}, \bar{u}, t)$

Assumiamo inoltre che le derivate parziali di f rispetto al tempo esistano e

siano continue. Il sistema aggiunto è: $\dot{\tilde{\psi}} = -\frac{\partial \tilde{f}^T}{\partial \bar{x}} \cdot \tilde{\psi}$

$$\tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}, \bar{x}, \bar{u}, t) = \tilde{\psi}^T \cdot \tilde{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

e l'hamiltoniana: $\tilde{M}_\psi(\tilde{\psi}, \bar{x}, t) = \sup_{\bar{u} \in U} \tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}, \bar{x}, \bar{u}, t)$

Condizione necessaria affinché \bar{u} e $\bar{x}(t)$ siano ottimali è che esista in vettore

$\tilde{\psi}^0(t)$ continuo e diverso da

zero, ottenuto dall'equazione aggiunta tale che:

$$\tilde{u}_\psi(\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t), \bar{u}^0(t), t) = \tilde{M}_\psi(\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t), t)$$

inoltre: $\dot{\psi}_0^0(t) = \text{cost.} \leq 0$,

$$\tilde{M}_\psi(\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t), t) = - \int_t^T \frac{\partial \tilde{f}^T}{\partial \tau} \cdot \tilde{\psi}^0(\tau) dt$$

per qualsiasi t nell'intervallo $0 \leq t \leq T$.

Riduzione di un sistema non autonomo ad uno autonomo.

Definisco: $\dot{x}_{n+1}(t) = 1, x_{n+1}(0) = 0$

quindi : $x_{n+1}(t) = t$

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}, \bar{u}, x_{n+1})$$

$$\dot{x}_{n+1} = 1$$

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \psi_j$$

$$\dot{\psi}_{n+1} = -\sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{n+1}} \psi_j \quad i = 0, 1 \dots n \quad j = 0, 1 \dots n$$

l'hamiltoniana di questo sistema è:

$$H^*_{\psi}(\tilde{\psi}, \psi_{n+1}, \bar{x}, x_{n+1}, \bar{u}) = \sum_{j=0}^n \psi_j \cdot f_j(\bar{x}, x_{n+1}, \bar{u}) + \psi_{n+1}$$

dal principio di Pontryagin ho che per il sistema ottimale:

$$H^*_{\psi}(\tilde{\psi}^0, \psi_{n+1}^0, \bar{x}^0, t, \bar{u}^0) = M^*_{\psi}(\tilde{\psi}^0, \psi_{n+1}^0, \bar{x}^0, t) = 0$$

quindi:

$$\tilde{H}_{\psi}(\tilde{\psi}^0, \bar{x}^0, t, \bar{u}^0) = -\psi_{n+1}^0(t) = \tilde{M}_{\psi}(\tilde{\psi}^0, \bar{x}^0, t)$$

ma
$$\psi_{n+1}^0(T) - \psi_{n+1}^0(t) = -\int_t^T \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial \tau} \cdot \psi_j^0(\tau) d\tau$$

ma per le condizioni di trasversalità che saranno esaminate successivamente,

si ha che : $\psi_{n+1}^0(T) = 0,$

$$\tilde{H}_{\psi}(\tilde{\psi}^0, \bar{x}^0, t) = -\psi_{n+1}^0(t) = -\int_t^T \frac{\partial \tilde{f}^T}{\partial \tau} \cdot \tilde{\psi}^0(\tau) d\tau$$

Nella formulazione del principio di massimo di Pontryagin il tempo finale T è stato assunto libero, cioè non fissato a priori. Se il tempo T è fisso, il numero delle variabili del problema è ridotto di uno e per i problemi non autonomi, il principio di Pontryagin è enunciato nella seguente maniera.

Nel problema a tempo finale fisso, per sistemi non autonomi, condizione necessaria affinché $\bar{x}(t)$ e $\bar{u}(t)$ siano ottimali è che deve esistere una funzione $\tilde{\psi}^o(t)$ diversa da zero e soluzione dell'equazione aggiunta, tale che:

$$(*) \quad \tilde{H}_\psi(\tilde{\psi}^o(t), \bar{x}^o(t), \bar{u}^o(t), t) = \tilde{M}_\psi(\tilde{\psi}^o(t), \bar{x}^o(t), t)$$

è soddisfatta e

$$\psi_o^o(t) = \text{cost} \leq 0$$

per $\forall t$ in $0 \leq t \leq T$.

Notiamo che, dato che il tempo T è fissato, il numero di condizioni è minore di uno. Per i sistemi autonomi, la condizione di ottimalità può essere definita in maniera simile, eccetto che nella condizione non compare esplicitamente la variabile t .

-4- Condizioni di trasversalità

I teoremi presentati fino ad ora si applicano a problemi dove lo stato iniziale e lo stato finale sono dati a priori. E' spesso desiderabile avere variabili libere nello stato iniziale e nello stato finale. Allora il tempo finale è necessariamente libero.

Per semplicità consideriamo lo stato iniziale fisso.

Supponiamo che $k = (n - m)$ o tutte le variabili finali siano libere. Ho m espressioni:

$$h_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1 \cdots m$$

che mi definiscono una ipersuperficie su cui deve giacere lo stato finale.

Se $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}, i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n$ sono continue e diverse da zero, allora la

superficie è liscia. Sia $x(T) \in C$ dove C è la superficie liscia $(n - m)$ dimensionale dove m è un numero fissato. Il sistema deve essere trasferito da $x(0)$ a $x(T) \in C$, in maniera da minimizzare un certo funzionale. Sia x_c un certo punto di C , T_c è l'iperpiano tangente a C nel punto x_c .

Siano ora $\tilde{\psi}^0(t), \bar{x}^0(t), \bar{u}^0(t)$ le soluzioni del problema ottimale.

Il vettore $\bar{\psi}^0(t)$ deve soddisfare le condizioni di trasversalità in $x_c = x(T)$, ossia deve essere normale

al piano tangente T_c . Questa ortogonalità definisce $(n-m)$ componenti di $\bar{\psi}^o(T)$. La condizione di trasversalità sarà similmente soddisfatta se $\bar{\psi}^o(T)$ è normale a ciascun vettore $\bar{v} \in T_c$.

$$\bar{\psi}^{oT} \cdot \bar{v} = 0$$

che fornisce $(n-m)$ relazioni.

Insieme alle m componenti di $\bar{x}(T)$ abbiamo in totale n condizioni all'istante T . Notare come la componente zero del vettore $\tilde{\psi}$ non sia implicata nel problema

Consideriamo un punto che si muove secondo la legge:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u \quad ; \quad |u| \leq 1$$

ossia:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad ; \quad \frac{dx_2}{dt} = u$$

Il problema è quello di raggiungere il più velocemente possibile l'asse x_2 , da uno stato iniziale dato \bar{x}_o .

In questo caso abbiamo un problema con estremo destro variabile. Il vettore tangente all'asse x_2 che è la nostra varietà su cui giace il punto finale, è:

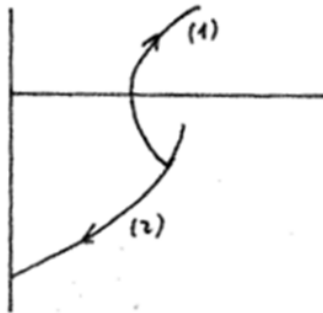
$$\theta = (0, \theta^2), \theta^2 \neq 0$$

Quindi le condizioni di trasversalità sono:

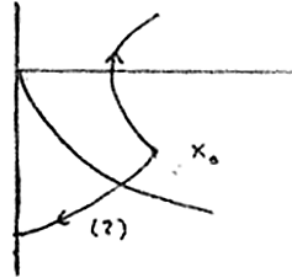
$$0 \cdot \psi_1(t_1) + \theta^2 \cdot \psi_2(t_1) = 0 \rightarrow \psi_2(t_1) = 0$$

Dato che ψ_2 è lineare ne segue che è o maggiore di zero o minore di zero per $t_o \leq t \leq t_1$. Quindi $u(t)$ è o uguale -1 , o uguale a $+1$ in tutto l'intervallo di tempo.

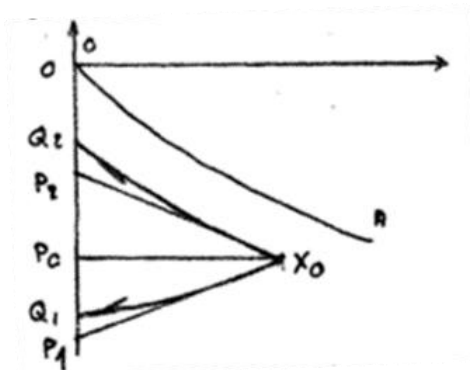
Quindi il moto sarà lungo la parabola (1) o lungo la parabola (2) :



Se \bar{x}_0 giace sopra la curva AO :



La curva ottimale è la parabola (2). Se \bar{x}_0 è sotto AO sia la (1) che la (2) portano all'asse x_2 . Disegniamo le tangenti in x_0 alle due parabole:



Si trova facilmente che :

$$P_0 Q_2 > P_0 P_2 = P_0 P_1 > P_0 Q_1$$

Dato che $x_2 - x_2^0 = t - t_0$, il tempo lungo l'arco di parabola $\bar{x}_0 Q_1$ è più breve rispetto a $\bar{x}_0 Q_2$.

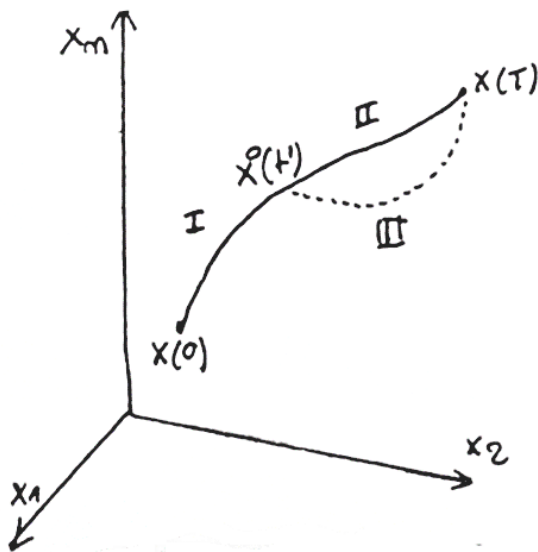
-5- Dynamic programming.

Il dynamic programming è stato sviluppato da R. Bellman. Si parte dall'equazione $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$ dove il controllo \bar{u} appartiene ad un dato insieme U di valori ammessi.

La condizione di ottimalità è il minimizzare

$$J = \int_0^T f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) \cdot dt$$

Il dynamic programming è basato sul seguente principio formulato per la prima volta da Bellman. Analizziamo la traiettoria ottimale, cioè quella per cui J è minimo, in uno spazio a n -dimensioni.



Prendiamo il tempo $t=t'$ a cui corrisponde sulla traiettoria il punto $x^o(t')$. questo punto divide in due parti I e II la traiettoria.

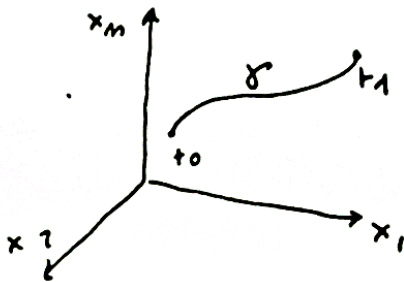
La parte II è anch'essa tale che per il tratto relativo l'integrale J è minimo. Supponiamo che questo non sia vero e cioè che esista una traiettoria III per cui J è più piccolo. Allora I+III è

migliore della traiettoria I+II, ma I+II è già per ipotesi la traiettoria ottimale. Quindi si cade in un assurdo, se si nega che un tratto della traiettoria ottimale non sia a sua volta ottimale.

Questo dice che la strategia migliore non dipende dalla storia precedente del sistema, ma solo dalle condizioni iniziali e finali e dall'obiettivo ultimo.

I metodi basati sul principio di Bellman partono infatti dallo stato finale $x(T)$ e determinano la traiettoria a ritroso.

Supponiamo di avere la traiettoria γ per cui :



$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) \cdot dt + G(\bar{x}(t_1)) \text{ è minimo.}$$

Anche la traiettoria tra:

$$(t_0 + \varepsilon, x(t_0 + \varepsilon)) \text{ e } (t_1, x(t_1))$$

è tale che I è minimo. Allora indico con:

$$\Pi(x(t_0), t_1 - t_0) = \min_{u \in U} \int_{t_0}^{t_1} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) \cdot dt$$

Ho che:

$$\Pi(x(t_0), t_1 - t_0) = \min_{u \in U} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) \cdot dt + \Pi(x(t_0 + \varepsilon), t_1 - t_0 - \varepsilon)$$

Sia ε piccolo e $\bar{t} \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$

$$\Pi(x(t_0), t_1 - t_0) = \min_{u \in U} \varepsilon \{ f_0(\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}) \} + \Pi(x(t_0 + \varepsilon), t_1 - t_0 - \varepsilon)$$

ora: $x(t_0 + \varepsilon) = x(t_0) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \cdot \varepsilon + O(\varepsilon)$. Sviluppriamo Π in serie di Taylor:

$$\Pi(x(t_0 + \varepsilon), t_1 - t_0 - \varepsilon) = \Pi(x(t_0), t_1 - t_0) + \varepsilon \left. \frac{\delta \Pi}{\delta x} \right|_{t_0} \cdot \frac{dx}{dt} - \varepsilon \left. \frac{\delta \Pi}{\delta (t_1 - t_0)} \right|_{t_0} \cdot \frac{dx}{dt} + O(\varepsilon)$$

Chiamo $t_1 - t_0 = T$

$$\Pi(x(t_0), T) = \min_{u \in U} \varepsilon \cdot f_0(x(\bar{t}), u(\bar{t}), \bar{t}) + \Pi(x(t_0), T) + \min_{u \in U} \varepsilon \left. \frac{\delta \Pi}{\delta x} \right|_{t_0} \cdot \frac{dx}{dt} - \varepsilon \left. \frac{\delta \Pi}{\delta T} \right|_{t_0} (x(t_0), T)$$

Se ε tende a zero, $\bar{t} \rightarrow t_0$, si ottiene:

$$\frac{\partial \Pi(x(t_0), T)}{\partial T} = \min_{u \in U} f_0(x(t_0), u(t_0), t_0) + \left. \frac{\delta \Pi}{\delta x} \right|_{t_0} \cdot \frac{dx}{dt}$$

equazione di Hamilton-Jacobi.

Dall'equazione di Hamilton-Jacobi si può passare al sistema canonico

definendo $\frac{\delta \Pi}{\delta x} = p(t)$,

$$H = f_0(x, u, t) + p(t) \cdot f(x, u, t) = \quad ; \quad \frac{\delta \Pi}{\delta T} = \min_{u \in U} H = H^0$$

in questo modo si ottengono le equazioni:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \Pi}{\delta x} \right) = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta \Pi}{\delta t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\delta \Pi}{\delta T} \right) = - \frac{\partial H^0}{\partial x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H^0}{\partial p}$$

con condizioni iniziali : $x(t_0) = x_0$
 $x(t_1) = x_d$

Se lo stato finale non è fissato: $p(t_1) = \frac{\delta \Pi(x(t_1), T=0)}{\delta x} = \frac{\partial G(\bar{x}(t_1))}{\partial x}$

e quindi se $G=0$, $p(t_1) = 0$.

-6- Condizioni sufficienti per l'ottimalità

Finora abbiamo visto le condizioni che il controllo deve soddisfare se è un controllo ottimale. Queste condizioni necessarie le abbiamo viste nel principio di massimo e nel dynamic programming. Le condizioni necessarie ci permettono di restringere l'insieme dei controlli che possono essere ottimali. Usate in modo costruttivo, le condizioni necessarie forniscono dei candidati all'ottimizzazione, Questi controlli vengono chiamati estremali. Il controllo ottimale è estremale, il viceversa non è vero.

Definiamo ora delle condizioni che se sono soddisfatte dal controllo, assicurano che esso è ottimale: sono cioè condizioni sufficienti.

Il controllo $\bar{u}^*(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1^*$ che genera la soluzione $\bar{x}^*(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1^*$, tale che $\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}^0$ è ottimale se esiste una funzione scalare V di \bar{x} di classe C^1 , tale che

i) se $\bar{u}(t)$ genera una soluzione $\bar{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ con

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, \bar{x}(t_1) \in M^1, \text{ ed è :}$$

$$V(\bar{x}(t)) \leq V(\bar{x}^*(t)) = 0$$

ii) $0 = f_0(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)) + \text{grad}^T V(\bar{x}^*(t)) \cdot \bar{f}(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t))$
per $\forall t \in [t_0, t_1^*]$

iii) $f_0(\bar{x}, \bar{u}) + \text{grad}^T V(\bar{x}) \cdot \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}) \geq 0$

Sia $u(t)$ il controllo che genera la soluzione $\bar{x}(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1$ e $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, $\bar{x}(t_1) \in \mathbb{R}^4$.

Si definisca: $I \triangleq \int_{t_0}^{t_1} q_{\text{quad}}^T \mathcal{V}(\bar{x}(t)) \cdot f(\bar{x}, \bar{u}) dt$

Quindi:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} q_{\text{quad}}^T \mathcal{V}(\bar{x}(t)) \cdot \frac{d\bar{x}}{dt} dt = \mathcal{V}(\bar{x}(t_1)) - \mathcal{V}(\bar{x}_0)$$

per la i), $\mathcal{V}(\bar{x}(t_1)) \leq 0$ e quindi (1) $I \leq -\mathcal{V}(\bar{x}_0)$

per la i) e ii) otteniamo:

$$(2) \quad \int_{t_0}^{t_1^*} f_0(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)) dt = \mathcal{V}(\bar{x}_0)$$

Ora consideriamo

$$\Delta \triangleq \int_{t_0}^{t_1} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt - \int_{t_0}^{t_1^*} f_0(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)) dt$$

per la (2) ho che:

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt - \mathcal{V}(\bar{x}_0)$$

per la (1):

$$\Delta \geq \int_{t_0}^{t_1} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + q_{\text{quad}}^T \mathcal{V}(\bar{x}(t)) \cdot f(\bar{x}, \bar{u}) dt \geq 0$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Un esempio:
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1 + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

con la condizione: $u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1$

Voglio trasferire il sistema da x^0 a $x^1=0$ in $t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt =$
= minimo.

$$H = \psi_1 (1 + u_1(t)) + \psi_2 u_2$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \psi_1 = C_1 \\ \psi_2 = C_2 \end{cases}$$

$$H = \psi_1 (1 + u_1) + \psi_2 u_2 = \psi_1 (1 + \sqrt{1 - u_2^2}) + \psi_2 u_2$$

$$\frac{\delta H}{\delta u_2} = 0 \longrightarrow \begin{aligned} -\psi_1 \frac{2 u_2(t)}{2 \sqrt{1 - u_2^2(t)}} + \psi_2 u_2 &= 0 \\ -C_1 \frac{2 u_2(t)}{2 \sqrt{1 - u_2^2(t)}} + C_2 u_2 &= 0 \end{aligned}$$

da cui ho che $u_1(t) = \text{cost.} = A$, $u_2(t) = \text{cost.} = B$.

$$\text{Quindi : } \begin{cases} x_1 = t + At + a \\ x_2 = Bt + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^0 = t_0 + At_0 + a \\ x_1^1 = t_1 + At_1 + a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = Bt_1 + b \\ x_2^0 = Bt_0 + b \end{cases}$$

$$\text{ricavo } A = u_1 = -\frac{x_1^0}{\tau} - 1$$

$$B = u_2 = -\frac{x_2^0}{\tau}$$

$$\text{dove } \tau = t_1 - t_0$$

$$\tau = t_1 - t_0 = -\frac{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}{2x_1^0}$$

$$\text{Prendiamo } \mathcal{V} = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_1}$$

La funzione è di classe C^1 e soddisfa la condizione

i). La condizione ii) è verificata sostituendo diret-

$$\text{tamente : } u_1(t) = -1 - \frac{x_1^0}{\tau} = 1 - \frac{x_1(t)}{t_1 - t}$$

$$u_2(t) = -\frac{x_2^0}{\tau} = -\frac{x_2(t)}{t_1 - t}$$

Infine si mostra che :

$$\min_{u \in U} \left[1 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} (1 + u_1) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2} u_2 \right] = 0$$

Definisco $\mathcal{H}(\bar{p}, \bar{x}, t, \bar{u}) \triangleq -f_0(\bar{x}, t, \bar{u}) + \bar{p}^T \cdot \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$

Il controllo $\bar{u}^*(t)$, con $t_0 \leq t \leq t_1$ genera la soluzione $\bar{x}^*(t)$, con $t_0 \leq t \leq t_1$, è ottimale se esiste una funzione $\bar{p}(t)$ a tratti continua tale che :

$$i) \mathcal{H}(\bar{p}(t), \bar{x}^*(t), t, \bar{u}^*(t)) - \mathcal{H}(\bar{p}(t), \bar{x}, t, \bar{u}) + \bar{p}^T(t) \cdot (\bar{x}^*(t) - \bar{x}) \geq 0$$

per $\forall \bar{x} \in X$, $\forall \bar{u} \in U$, $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$ii) \bar{p}^T(t_0) \cdot (\bar{x}^*(t_0) - \bar{y}) - \bar{p}^T(t_1) \cdot (\bar{x}^*(t_1) - \bar{z}) \geq 0$$

dove $\bar{y} \in \theta^0 \cap X$, $\bar{z} \in \theta^1 \cap \bar{X}$ con θ^0, θ^1 che indicano delle ipersuperfici date $(X \in E^2, \bar{X} \in E^m, U \in E^r)$.

$$\text{Esempio : } \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

$$\theta^0 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 / x_2^2 + x_1 = 0 \}$$

$$\theta^1 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 / x_2^2 - x_1 + 1 = 0 \}$$

Voglio che $\int_0^2 (u_1^2(t) + u_2^2(t))^{1/2} dt$ sia minimo.

$$\text{L'estremale è : } \begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{2}, & u_2(t) = 0 \\ x_1(t) = \frac{1}{2}t, & x_2(t) = 0 \end{cases}$$

con i moltiplicatori di Pontryagin : $\lambda_0(t) = -1, \lambda_1(t) = 1, \lambda_2(t) = 0$

$$\text{Ponendo : } p_1(t) = \lambda_1(t) = 1, p_2(t) = \lambda_2(t) = 0$$

$$i) (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} - u_1 \geq 0, \forall u; \text{ ed inoltre poichè}$$

$$y_1 \leq 0, z_1 \geq 0 \quad \text{abbiamo che :}$$

$$ii) (0 - y_1) - (1 - z_1) \geq 0.$$

- 7 - Il metodo di Pontryagin applicato al moto di un grave

Consideriamo il moto piano di un grave :

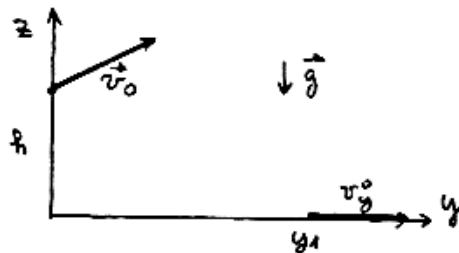
$$\begin{cases} \ddot{z} = -g + u(t) \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

dove $u(t)$ è la funzione di controllo .

Il moto ha condizioni iniziali :

$$\begin{cases} z(0) = h & \dot{z}(0) = v_z^0 \\ y(0) = 0 & \dot{y}(0) = v_y^0 \end{cases}$$

dove h è la quota iniziale .



Vogliamo che a t_1 , lo stato finale sia il seguente :

$$\begin{cases} z(t_1) = 0 & \dot{z}(t_1) = 0 \\ y(t_1) = y_1 & \dot{y}(t_1) = v_y^0 \end{cases}$$

Ossia che il punto materiale arrivi nel punto di coordinate $(0, y_1)$ con velocità lungo la verticale nulla .

Per l'equazione $\ddot{y} = 0$, la soluzione è :

$$y = v_y^0 t$$

Bisogna però che a t_1 sia :

$$y(t_1) = y_1 = v_y^0 t_1$$

da cui si ricava t_1 .

Si vuole minimizzare il costo :

$$W = \int_0^{t_1} u^2 dt$$

Bisogna quindi risolvere il problema :

$$(*) \quad \ddot{z} = -g + u(t)$$

con stato iniziale : $z(0) = h$, $\dot{z}(0) = v_z^0$

con stato finale : $z(t_1) = 0$, $\dot{z}(t_1) = 0$

con la condizione $\int_0^{t_1} u^2(t) dt = \text{minimo}$

Si riscrive la (*) :

$$\begin{cases} \dot{z} = x \\ \dot{x} = -g + u \end{cases} \quad \text{con } \dot{x}_0 = u^2$$

L'hamiltoniana è : $H = \psi_0 u^2 + \psi_1 x + \psi_2 (-g + u)$

ed il sistema coniugato :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0 & \psi_0 = \beta_0 \\ \dot{\psi}_1 = 0 & \psi_1 = \beta_1 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 & \psi_2 = -\beta_1 t + \beta_2 \end{cases}$$

Il controllo ottimale è quello che rende massima l'hamiltoniana :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2\beta_0 u + \beta_2 - \beta_1 t = 0$$

Quindi il controllo ottimale è dato da :

$$u(t) = \frac{\beta_1 t - \beta_2}{2\beta_0}$$

ed il sistema del moto si riscrive come :

$$\begin{cases} \dot{z} = x \\ \dot{x} = -g + \frac{\beta_1 t}{2\beta_0} - \frac{\beta_2}{2\beta_0} \end{cases}$$

che si integra :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \frac{\beta_1}{\beta_0} t^2 - \left(g + \frac{\beta_2}{2\beta_0}\right) t + v_z^0 \\ z = \frac{1}{12} \frac{\beta_1}{\beta_0} t^3 - \left(g + \frac{\beta_2}{2\beta_0}\right) \frac{t^2}{2} + v_z^0 t + z^0 \end{cases}$$

Le v_z^0, z^0 sono le costanti di integrazione . Le costanti $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ si ottengono tramite le condizioni :

$$z(t_1) = 0 \quad , \quad \dot{z}(t_1) = 0$$

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$z(t) = \frac{1}{t_1^3} [v_2^0 t_1 + 2h] t^3 - \frac{1}{t_1^2} [2v_2^0 t_1 + 3h] t^2 + v_2^0 t + h$$

$$u(t) = \frac{6}{t_1^3} [v_2^0 t_1 + 2h] t - \left[4 \frac{1}{t_1} v_2^0 + \frac{6h}{t_1^2} - g \right]$$

-8- I metodo di Pontryagin applicato ad un sistema biologico

Illustriamo l'uso che si può fare della teoria del controllo ottimale in un modello di sistema biologico. Questo esempio viene illustrato nel suo libro sulla teoria del controllo ottimale da Leitmann (2).

Un modo molto comune di giustificare l'emergenza di certe specie di organismi viventi è quella di affermare che sopravvivono le specie più numerose. Quindi la strategia ottimale è quella di massimizzare il numero di individui della specie. Non è che gli animali o le piante seguono in maniera conscia questa via, ma la natura attraverso prove ed errori giunge ad una politica che se ha successo è da considerarsi ottimale.

Studiamo per esempio le piante annuali.

La sopravvivenza della specie è assicurata dall'abbondanza dei semi.

Il problema è quello di dividere il prodotto della fotosintesi tra parte riproduttiva e parte vegetativa in modo da massimizzare la produzione di semi senza però andare a scapito della sopravvivenza dell'individua.

Si può riprodurre ciò che la natura fa con delle funzioni di controllo.

Indichiamo con :

$x_1(t)$ = biomassa delle foglie

$x_2(t)$ = biomassa riproduttiva (fiori, semi)

$x_3(t)$ = rimanente biomassa

r = produzione di biomassa dovuta alla fotosintesi per unità di massa.

Questa produzione è considerata costante.

$g_i(t)$ frazione della produzione di biomassa che va alle componenti i

al tempo t .

$$\dot{x}_1 = r g_1(t) x_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = r g_2(t) x_1(t)$$

$$\dot{x}_3 = r g_3(t) x_1(t)$$

sono gli incrementi delle biomasse.

$$g_i(t) \geq 0, i = 1,2,3; g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = 1$$

In questo modello assumiamo che esista la relazione:

$$\frac{x_i(t)}{x_1(t) + x_3(t)} = \text{cost.} = l > 0$$

allora:

$$\dot{x}_1(t) + \dot{x}_3(t) = r(g_1 + g_3) x_1(t) = r(1 - g_2) x_1(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = l (\dot{x}_1(t) + \dot{x}_3(t))$$

$$\dot{x}_1(t) = r l (1 - g_2) x_1(t)$$

Vogliamo che alla fine della stagione di crescita di durata fissa $t_1 - t_0$, la quantità da massimizzare sia $x_2(t_1)$, ossia la quantità di semi prodotta dalla pianta.

$$x_2(t_1) - x_2(t_0) = r \int_{t_0}^{t_1} g_2(t) x_1(t) dt$$

Per una data massa riproduttiva iniziale $x_2(t_0)$, la quantità da massimizzare:

$$\int_{t_0}^{t_1} r g_2(t) x_1(t) dt \quad \text{e quindi devo minimizzare :} \quad - \int_{t_0}^{t_1} r g_2(t) x_1(t) dt$$

Le quantità specificate sono le quantità iniziali: $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$

Inoltre il costo come pure l'equazione di crescita per $x_1(t)$, implica solo $x_1(t)$ e $g_2(t)$. Poniamo $g_2(t) = u(t)$, nostra variabile di controllo.

$$\dot{x}_1 = r l (1 - u(t)) x_1(t) \quad x_1(t_0) = x_1^0 > 0$$

$$C = - \int_{t_0}^{t_1} r u(t) x_1(t) dt \quad ; \quad \dot{x}_0(t) = -r u(t) x_1(t)$$

Per via di $g_1 + g_2 + g_3 = 1$, $g_2 \in [0, 1]$

$$H = -\lambda_0 r u x_1 + \lambda_1 \cdot l r (1 - u) x_1$$

$$\dot{\lambda}_0(t) = 0 \quad \dot{\lambda}_1(t) = \lambda_0(t) r u(t) + \lambda_1(t) l r [1 - u(t)]$$

Scegliamo $\lambda_0(t) = -1$. Inoltre il fatto che lo stato finale non sia specificato implica che: $\lambda_1(t_1) = 0$.

$$H = \pi x_1(t) \cdot [1 - \ell \lambda_1(t)] u + \ell \pi x_1(t) \cdot \lambda_1(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ell \lambda_1(t) < 1 \\ 0 & \text{se } \ell \lambda_1(t) > 1 \end{cases}$$

$\ell \lambda_1(t) = 1$ vale in un intervallo di misura nullo .

Infatti $\ell \lambda_1(t) = 1$ implica $\dot{\lambda}_1(t) = 0$ che è in contraddizione con la (2) che dice che : $\dot{\lambda}_1(t) = -r$

t_S è il punto di salto di $u(t)$, dove :

$$\ell \lambda_1(t_S) = 1$$

Per via del fatto che $\lambda_1(t_1) = 0$, ho che $u(t_1) = 1$.

$$\begin{cases} u(t) = 1 & t_S < t \leq t_1 \\ u(t) = 0 & t_0 \leq t < t_S \end{cases}$$

Per $t_S < t \leq t_1$; $-r = \dot{\lambda}_1(t)$ che integrata :

$$\lambda_1(t) = r (t_1 - t)$$

Per $t_0 \leq t < t_S$; $\dot{\lambda}_1(t) = -\ell r \lambda_1$ che integrata :

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(t_S) \cdot e^{\ell r (t_S - t)}$$

Voglio trovare ora t_S .

Ma $\ell \lambda_1(t_S) = \ell r (t_1 - t_S)$ da cui ho che :

$$t_1 - t_S = \frac{1}{\ell r}$$

In altre parole diciamo che una pianta non si sforza nella produzione dei semi fino a $\frac{1}{\ell r}$ unità di tempo prima della fine della stagione di crescita .

PARTE SECONDA

I sistemi distribuiti

Introduzione .

Si intende per sistema distribuito , un sistema che è descritto da un campo . Ω è il dominio spaziale di questo campo , dominio che supponiamo aperto connesso e appartenente a E^n . $\partial\Omega$ è il contorno del dominio .

L'unione di Ω con il suo contorno è chiamata la chiusura di Ω ed è indicata con : $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

Lo stato di un sistema distribuito a qualsiasi tempo t e in qualsiasi punto di Ω è descritto dalle funzioni :

$$u_i(t, \bar{x}) \quad , \quad i=1 \dots n$$

L'insieme di tutti i valori $f_i(\bar{x})$ che il sistema distribuito può assumere a qualsiasi tempo t è chiamato spazio delle funzioni di stato ed è indicato con :

$$\Gamma(\Omega) = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i(\Omega)$$

In teoria dei campi assumono particolare importanza i sistemi hamiltoniani , i sistemi cioè che ammettono una funzione hamiltoniana tale che se q_i sono i campi che descrivono il sistema e p_i i campi ad essi coniugati :

$$\frac{\partial q_i(t, \bar{x})}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p_i(t, \bar{x})}$$

$$\frac{\partial p_i(t, \bar{x})}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta q_i(t, \bar{x})} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x} q_i} \right)$$

e se sono presenti derivate di ordine superiore :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta q_i} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_{\bar{x}} q_i} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_{\bar{x}\bar{x}} q_i} + \dots \right)$$

dove \mathcal{H} è la densità di hamiltoniana .

Non ci interesseremo particolarmente dei campi hamiltoniani ma in generale di quei campi il cui comportamento può essere descritto dal sistema :

$$(1) \quad \frac{\partial u_i(t, \bar{x})}{\partial t} = R_i(u_1(t, \bar{x}), \dots, u_m(t, \bar{x}))$$

$i=1 \dots m$

dove u_i sono funzioni definite per $t > 0$, nel dominio Ω , e dove R_i sono degli operatori spaziali specificati .

Con notazione vettoriale : $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \bar{\mathcal{H}}(\bar{U})$

Inoltre le (1) saranno sempre considerate reali , questo è necessario per poter definire il principio di massimo di Pontryagin per i campi .

L'equazione descrive il comportamento locale del sistema ; per determinare univocamente le soluzioni sono allora necessarie le condizioni al contorno :

$$(2) \quad g_i(u_1(t, \bar{x}') \dots u_m(t, \bar{x}')) = 0 \quad \bar{x}' \in \partial\Omega, i=1 \dots m$$

dove g_i è un operatore spaziale . Vettorialmente : $\bar{g}(\bar{U}) = 0$

Infine sono necessarie le condizioni iniziali :

$$(3) \quad U_i(t_0, \bar{x}) = U_i^0(\bar{x}) \quad , \quad \bar{x} \in \bar{\Omega} \quad , \quad i=1 \dots m$$

La soluzione delle (1) e (2) corrispondente alla condizione iniziale (3) , è indicata con :

$$\bar{U} = \bar{U}(t, \bar{x}; \bar{U}_0(\bar{x}), t_0)$$

Ricordiamo che la soluzione di un'equazione o di un sistema di equazioni dove sono presenti derivate rispetto al tempo di ordine superiore al primo, può essere ridotto alla soluzione di un problema equivalente dove sono presenti solo le derivate del primo ordine.

Se vogliamo che l'equazione (1) descriva un sistema fisico devono essere soddisfatte le seguenti tre richieste:

- 1) La soluzione esiste
- 2) La soluzione è unica
- 3) La soluzione dipende in maniera continua dai dati iniziali, dove con “dati iniziali” intendo le condizioni iniziali e le condizioni al contorno.

Chiariamo un attimo che cosa significano queste tre richieste.

La 1) richiede che non vi siano troppe condizioni, quindi che la soluzione non debba soddisfare a proprietà che si contraddicono tra di loro.

La 2) invece richiede che non vi siano ambiguità nella soluzione del problema.

La terza richiesta è necessaria se la formulazione matematica deve descrivere fenomeni osservabili in natura.

In natura i dati non possono essere pensati come fissati in maniera perfetta: lo stesso processo di misura implica dei piccoli errori. Perciò, un problema matematico non può essere considerato come corrispondente realisticamente ad un fenomeno fisico a meno che una variazione dei dati all'interno di un piccolo intervallo non porti ad un cambiamento arbitrariamente piccolo nella soluzione.

Questa richiesta di stabilità non è solo necessaria per ragioni fisiche; essa è estremamente utile per l'uso dei metodi approssimati nella soluzione del problema.

Come si è già detto la 3) non è che una richiesta di stabilità delle soluzioni delle equazioni.

Discutiamo ora brevemente la stabilità nel senso di Lyapunov.

Consideriamo un sistema il cui dominio sia Ω .

Inoltre specifichiamo una metrica :

$$\rho = \rho(\bar{u}, \bar{u}') \quad \text{in } \Gamma(\Omega)$$

Con $\phi(t, \bar{x}; \bar{u}_0(\bar{x}), t_0)$ intendiamo lo stato che corrisponde a $\bar{u}_0(\bar{x})$ al tempo t_0 . L'insieme $\{\phi(t, \bar{x}; \bar{u}_0(\bar{x}), t_0); t \geq 0\}$ è la traiettoria del sistema.

Un insieme $\Gamma_m(\Omega)$ è detto invariante se per qualsiasi stato iniziale $\bar{u}_0(\bar{x})$, la sua traiettoria corrispondente giace sempre in $\Gamma_m(\Omega)$.

Ciascuna traiettoria è un insieme di invarianza $\Gamma_{in}(\Omega)$.

Ricordo che :

$$\rho(\bar{U}, \Gamma_{in}(\Omega)) = \inf_{\bar{U}' \in \Gamma_{in}(\Omega)} \rho(\bar{U}, \bar{U}')$$

L'insieme invariante è detto stabile se per $\varepsilon > 0$,
esiste un numero $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, tale che :

$$\rho(\phi(t, \bar{x}, \bar{U}_0(\bar{x}), t_0), \Gamma_{in}(\Omega)) < \varepsilon, \forall t > t_0$$

se

$$\rho(\bar{U}_0(\bar{x}), \Gamma_{in}(\Omega)) < \delta(\varepsilon, t_0)$$

Un insieme invariante è detto asintoticamente stabile se esso è stabile e

$$\rho(\phi(t; \bar{U}_0(\bar{x}), t_0), \Gamma_{in}(\Omega)) \rightarrow 0$$

per $t \rightarrow \infty$.

Inoltre se $\delta(\varepsilon, t_0)$ è indipendente da t_0 , allora l'insieme è asintoticamente stabile in maniera uniforme.

Supponiamo ora che il sistema sia controllabile. Il controllo può agire su tutto $\bar{\Omega}$ oppure solo su certe sue regioni. Si può così classificare:

1) controllo distribuito se agisce solo su certi insiemi di Ω , indichiamolo

$$\text{con } f_{\Omega(i)}(t, x), i = 1 \dots k$$

2) controllo al contorno, se agisce solo su certi insiemi di $\partial\Omega$,

$$\text{indichiamolo con } f_{\partial\Omega(i)}(t, x), i = 1 \dots k$$

Se entrambi i controlli sono presenti, esisteranno delle condizioni di controllabilità da osservare.

Il controllo sul contorno è il controllo più facile da realizzare in pratica, dato che è il controllo del sistema ad essere a contatto diretto con l'ambiente.

Bisogna quindi notare subito che in teoria del controllo le condizioni al contorno assumono un ruolo fondamentale. Le equazioni diventano:

$$\frac{\partial u_i(t, \bar{x})}{\partial t} = h_i(u_1(t, \bar{x}) \dots u_n(t, \bar{x}), f_{\Omega(1)}(t, \bar{x}) \dots f_{\Omega(k)}(t, \bar{x}))$$

per $t > 0$, nel dominio Ω con operatori spaziali dati.

In notazione vettoriale:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \mathcal{H}(\bar{u}(t, \bar{x}), \bar{F}_{\Omega}(t, \bar{x}))$$

Le condizioni al contorno sono:

$$g_i(u_1(t, \bar{x}') \dots u_n(t, \bar{x}'), f_{\partial\Omega(1)}(t, \bar{x}') \dots f_{\partial\Omega(k)}(t, \bar{x}')) = 0, \quad \bar{x}' \in \partial\Omega$$

Vettorialmente:

$$G(\bar{U}, \bar{F}_{\partial\Omega}(t, \bar{x}')) = 0$$

Se $\bar{F}_{\bar{\Omega}} = 0$, per $\forall \bar{x} \in \bar{\Omega}$, il sistema è detto non forzato.

La controllabilità di un sistema è definita rispetto ad una classe di controlli ammessi. In genere si intende per controllo ammesso, quel controllo tale che:

- i) la soluzione dell'equazione forzata esiste ancora,
- ii) il controllo soddisfa ad un insieme di condizioni limitative.

Per sistemi alle derivate ordinarie, la condizione corrispondente alla i) è la condizione che ogni componente del vettore di controllo, definita in un certo intervallo di tempo, sia misurabile secondo Lebesgue (3).

Le soluzioni del problema corrispondente sono allora continue e a tratti differenziabili

Per quanto riguarda le equazioni alle derivate parziali non esiste nulla di simile.

Cap . I

Controllabilità

Uno stato $\bar{U}_0(x) \in \Gamma(\Omega)$ è detto controllabile al tempo t_0 se esiste un controllo che trasferisce $\bar{U}_0(x)$ nello zero in un tempo finito T , ossia :

$$(1) \quad \bar{U}_{F_{\bar{\Omega}}} (t_0+T, \bar{x}; \bar{U}_0(\bar{x}), t_0) = 0$$

La (1) indica la soluzione del problema forzato da $F_{\bar{\Omega}}$.

Se la condizione (1) viene rimpiazzata da :

$$\rho (\bar{U}_{F_{\bar{\Omega}}} (t_0+T, \bar{x}; \bar{U}_0(\bar{x}), t_0), 0) \leq \delta, \quad \delta > 0$$

allora lo stato è detto δ -controllabile attorno allo zero al tempo t_0 .

L'insieme di tutti gli stati che sono controllabili a zero a t_0 sarà chiamato dominio di zero-controllabilità a t_0 e indicato con $C_{t_0}^0(\Omega)$.

Se gli stati zero-controllabili ci interessano indipendentemente da t_0 , uso la notazione $C^0(\Omega)$.

Se $C^0(\Omega)$ (oppure $C_{t_0}^0(\Omega)$) coincide con l'intero spazio $\Gamma(\Omega)$ allora il sistema è detto completamente controllabile .

La controllabilità a zero può essere messa in relazione con la stabilità asintotica secondo Lyapunov come viene fatto da Butkovskij (4) .

Per concludere, esaminiamo la controllabilità per i sistemi lineari. Il sistema sia descritto per ragioni di semplicità da un solo campo:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \mathcal{L}_0 u(t, x) + D(t, x) \cdot F_{\Omega}(t, x)$$

dove \mathcal{L}_0 è un operatore spaziale lineare; la condizione iniziale è:

$$u(t_0, x) = u_0(x)$$

la condizione al contorno: $\mathcal{L}_1 u(t, x) = 0$, $x' \in \partial\Omega$

dove \mathcal{L}_1 è un operatore spaziale lineare.

La soluzione può essere scritta come:

$$u_{F_{\Omega}}(t, x; u_0, t_0) = \phi(t, t_0) u_0(x) + \int_{t_0}^t \phi(t, t') D(t', x) \cdot F_{\Omega}(t', x) dt'$$

dove l'operatore $\phi(t, t_0)$ è costruito con le funzioni di Green. Se vogliamo la controllabilità a zero, deve essere:

$$0 = u_{F_{\Omega}}(t_1, x; u_0, t_0)$$

$$-\phi(t_1, t_0) u_0(x) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, t') D(t', x) F(t', x) dt'$$

che scriviamo come:

$$-\phi(t_1, t_0) u_0(x) = \mathcal{L}(t_1, t_0) F_{\Omega}(t, x)$$

$$\text{dove: } \mathcal{L}(t_1, t_0)(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, t') D(t', x)(\cdot) dt'$$

Cerchiamo ora l'aggiunto di questo operatore:

$$\langle G(x), \mathcal{L}(t_1, t_0) F(t, x) \rangle_1 = \langle \mathcal{L}^+(t_1, t_0) G(x), F(t, x) \rangle_2$$

dove l'indice 1 indica il prodotto in $L_2(\Omega)$, e l'indice 2 il prodotto in $L_2(\Omega \otimes (t_0, t_1))$.

Consideriamo di nuovo la:

$$-\Phi(t_1, t_0)u_0(x) = \mathcal{L}(t_1, t_0)F_\Omega(t, x)$$

che viene moltiplicata per \mathcal{L}^+ :

$$-\mathcal{L}^+(t_1, t_0)\Phi(t_1, t_0)u_0(x) = \mathcal{L}^+(t_1, t_0)\mathcal{L}(t_1, t_0)F_\Omega(t, x)$$

L'operatore $A(t_1, t_0) = \mathcal{L}^+(t_1, t_0)\mathcal{L}(t_1, t_0)$ è un operatore lineare ed autoaggiunto, non negativo.

Questo operatore quindi ha spettro reale e non vuoto ossia A non mappa $F_\Omega \neq 0$ nello zero.

Sappiamo che un operatore ammette inverso quando il suo determinante è diverso da zero. Il determinante di A è diverso da zero perché è non negativo.

Allora A ha un inverso, quindi:

$$F(t, x) = A^{-1}\mathcal{L}^+(t_1, t_0)\Phi(t_1, t_0)u_0(x)$$

Cap . II Sistemi lineari

- I - Funzioni di Green

Consideriamo un sistema che soddisfa ad un'equazione del tipo :

$$\mathcal{P} \bar{u}(x,t) = \mathcal{Q} \bar{u}(x,t) + \bar{F}(x,t)$$

\mathcal{P} è un operatore temporale e \mathcal{Q} è un operatore spaziale , entrambi sono lineari . Oltre all'equazione ho bisogno di condizioni iniziali e di condizioni al contorno :

$$\bar{u}(x, t_0) = \bar{u}_0(x)$$

$$\mathcal{Q}_1 (\bar{u}(x_b, t)) = \bar{f}(x_b, t), \quad x_b \in \partial \Omega, t \geq t_0$$

$\bar{F}(x,t)$, $\bar{f}(x_b, t)$ funzioni di controllo .

Il problema sia ben posto .

Se l'operatore \mathcal{P} è di ordine superiore al primo , riduciamo il sistema al prim'ordine facendo attenzione che il problema che otteniamo continui ad essere ben posto . Infatti non basta che il problema iniziale sia ben posto ad assicurare che il problema equivalente lo sia ancora (5) .

Sia quindi il sistema :

$$\frac{\partial \bar{U}(\bar{x}, t)}{\partial t} = S_x \bar{U}(t, \bar{x}) + D(t, \bar{x}) \bar{F}(t, \bar{x}) \quad ; \quad \bar{x} \in \Omega, t > t_0$$

$$\bar{U}(t_0, \bar{x}) = \bar{U}_0(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \bar{\Omega}$$

$$S_b \bar{U}(t, \bar{x}_b) = \bar{f}(t, \bar{x}_b) \quad ; \quad \bar{x}_b \in \partial \Omega, t > t_0$$

S_x sia una matrice $n \times n$ formata da operatori lineari ed in varianti rispetto al tempo .

Anche S_b è formato da operatori lineari ed invarianti rispetto al tempo ma che operano solo sul contorno .

Iniziamo con l'occuparci del problema con condizioni al contorno omogenee .

$$\begin{cases} (1) \left\{ \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = S_x \bar{U} + D \cdot \bar{F} \right. \\ (2) \left\{ S_b \bar{U} = 0 \right. \\ \left. \bar{U}(t_0, \bar{x}) = \bar{U}_0 \right. \end{cases}$$

il problema agli autovalori associato è :

$$\begin{cases} S_x \bar{\Phi}_k(\bar{x}) = \lambda_k \bar{\Phi}_k(\bar{x}) & , \quad \bar{x} \in \Omega \\ S_b \bar{\Phi}_k(\bar{x}_b) = 0 & , \quad \bar{x}_b \in \partial\Omega \end{cases}$$

dove λ_k non deve essere necessariamente reale .

$$\begin{aligned} \bar{U}(t, \bar{x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \bar{\Phi}_k(\bar{x}) \\ \bar{F}(t, \bar{x}) &\triangleq D \cdot \bar{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k(t) \cdot \bar{\Phi}_k(\bar{x}) \end{aligned}$$

dove $\mathcal{F}_k = \langle \bar{\Psi}_k, \bar{F} \rangle_{\Omega} \triangleq \int_{\Omega} \bar{\Psi}_k^* \bar{F}(t, \bar{x}) d\Omega$; $\langle \bar{\Psi}_k, \bar{\Phi}_j \rangle = \delta_{jk}$

Sostituendo nella (1) si ottiene :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k(t) \cdot \bar{\Phi}_k(\bar{x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \lambda_k \bar{\Phi}_k(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k(t) \bar{\Phi}_k(\bar{x}) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\Phi}_k(\bar{x}) \cdot \{ \dot{T}_k - \lambda_k T_k - \mathcal{F}_k \} &= 0 \\ (3) \quad \dot{T}_k - \lambda_k T_k - \mathcal{F}_k &= 0 \end{aligned}$$

Per la condizione iniziale :

$$\bar{U}(t_0, \bar{x}) = \bar{U}_0(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{\Phi}_k(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \bar{\Psi}_k, \bar{U}_0 \rangle_{\Omega} \bar{\Phi}_k$$

Si possono allora ricavare le condizioni iniziali per la (3) : $T_k(t_0) = a_k = \langle \bar{\psi}_k, \bar{U}_0 \rangle_{\Omega}$

$$T_k(t) = \exp[\lambda_k(t-t_0)] a_k + \exp(\lambda_k t) \cdot \int_{t_0}^t \exp(-\lambda_k \tau) F_k(\tau) d\tau$$

$k=1, 2, \dots$

$$\bar{U}(t, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda_k(t-t_0)) \cdot \int_{\Omega} \bar{\psi}_k^*(\bar{z}) \bar{U}_0(\bar{z}) d\bar{z} \bar{\phi}_k(\bar{x}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \exp(\lambda_k t) \cdot \int_{t_0}^t \exp(-\lambda_k \tau) \int_{\Omega} \bar{\psi}_k^*(\bar{z}) D(\tau, \bar{z}) \bar{F}(\tau, \bar{z}) d\bar{z} d\tau \cdot \bar{\phi}_k(\bar{x})$$

Se vale l'uniforme convergenza :

$$\bar{U}(t, \bar{x}) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \exp[\lambda_k(t-t_0)] \bar{\phi}_k(\bar{x}) \bar{\psi}_k^*(\bar{z}) \bar{U}_0(\bar{z}) d\bar{z} +$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \exp[\lambda_k(t-\tau)] \bar{\phi}_k(\bar{x}) \bar{\psi}_k^*(\bar{z}) D(\tau, \bar{z}) \bar{F}(\tau, \bar{z}) d\Omega d\tau$$

La linearità garantisce che la soluzione $\bar{U}(\bar{x}, t)$ dovuta al termine forzante e alle condizioni iniziali può essere trovata come sovrapposizione lineare dei due effetti indipendentemente .

$$\bar{U}(t, \bar{x}) = \int_{\Omega} G_I(t, \bar{x}; t_0, \bar{z}) \bar{U}_0(\bar{z}) d\bar{z} + \int_{t_0}^t \int_{\Omega} G_F(t, \bar{x}; t_0, \bar{z}) \cdot D \cdot \bar{F} \cdot d\Omega d\tau$$

$$G_I \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} \exp[\lambda_k(t-t_0)] \cdot \bar{\phi}_k(\bar{x}) \bar{\psi}_k^*(\bar{z})$$

$$G_F \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} \exp[\lambda_k(t-\tau)] \cdot \bar{\phi}_k(\bar{x}) \bar{\psi}_k^*(\bar{z})$$

Notiamo che : $G_I(t, \bar{x}; t_0, \bar{z}) = G_F(t, \bar{x}; \tau = t_0, \bar{z})$

da cui si ha che :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = S_x \bar{U}(t, \bar{x}) \quad \left. \begin{array}{l} t > t_0 \\ \bar{x} \in \Omega \end{array} \right\} \text{equivale a} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = S_x \bar{U}(t, \bar{x}) + \bar{U}_0(\bar{x}) \delta(t-t_0) \\ \bar{U}(t_0, \bar{x}) = 0 \\ S_b \bar{U}(t, \bar{x}_b) = 0 \end{array} \right. \\ \bar{U}(t_0, \bar{x}) = \bar{U}_0(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \Omega \\ S_b(\bar{U}(t, \bar{x}_b)) = 0 \quad \bar{x}_b \in \Omega_b \end{array} \right\}$$

- 2 - Funzioni di Green per l'equazione di Fourier

Consideriamo per esempio l'equazione :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

che abbia condizioni al contorno omogenee del tipo :

$$u(t,0) = u(t,l) = 0$$

Il problema agli autovalori associato è :

$$(*) \quad \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2}(x) = \lambda_k \phi_k(x)$$

con condizioni al contorno :

$$\phi_k(0) = \phi_k(l) = 0$$

Se l'autovalore λ_k è maggiore di zero, la soluzione è :

$$\phi_k(x) = a_k \cosh\left(\frac{\lambda_k}{\alpha^2}\right)^{1/2} x + b_k \sinh\left(\frac{\lambda_k}{\alpha^2}\right)^{1/2} x$$

ma nessuna scelta di a_k e b_k può soddisfare le condizioni al contorno. Perciò l'autovalore λ_k è minore di zero e la

soluzione è : $\phi_k(x) = a_k \cos\left(-\frac{\lambda_k}{\alpha^2}\right)^{1/2} x + b_k \sin\left(-\frac{\lambda_k}{\alpha^2}\right)^{1/2} x$

Applicando le condizioni al contorno, si ha che :

$$a_k = 0, \quad b_k \text{ arbitrario}, \quad \lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2}$$

La soluzione è quindi : $\phi_k(x) = b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$.

Dato che l'operatore $S_x(\cdot) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot)$, è autoaggiunto,

l'equazione agli autovalori per l'equazione autoaggiunta

è uguale all'equazione (*). La soluzione è $\psi_k(x) = c_k \sin \frac{k\pi}{l} x$

Se si vuole che sia $\langle \phi_k, \psi_m \rangle = \delta_{km}$, le costanti b_k e c_k devono essere scelte uguali a $\sqrt{\frac{2}{l}}$.

La funzione di Green per il termine forzante è data da :

$$G_F(t, x; \tau, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t - \tau)\right] \cdot \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k \pi \xi}{l}$$

Per la condizione iniziale $u_0(x)$, la funzione di Green è uguale a :

$$G_I(t, x; t_0, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t - t_0)\right] \cdot \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k \pi \xi}{l}$$

Quindi la soluzione del problema con condizioni al contorno omogenee è :

$$u(t, x) = \int_{t_0}^t \int_0^l G_F(t, x; \tau, \xi) F(\tau, \xi) d\tau d\xi + \int_0^l G_I(t, x; t_0, \xi) U_0(\xi) d\xi$$

-3-

Funzioni di Green per 'equazione delle onde.

L'esempio più conosciuto di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico è l'equazione delle onde.

Quest'equazione può essere usata per descrivere il comportamento di moltissimi sistemi: vibrazioni di corde e membrane, propagazione delle onde acustiche nei gas, propagazione delle onde d'acqua, ect. .

L'equazione omogenea è:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Affinché il problema sia ben posto sono necessarie le condizioni iniziali:

$$u(t_o, x) = u_o(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_o, x) = v_o(x)$$

e le condizioni al contorno:

$$u(t, 0) = f_o(t); \quad u(t, l) = f_1(t)$$

Quest' ultime sostituibili con:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = f_o(t); \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = f_1(t)$$

oppure

$$u(t, 0) + k_o \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = f_o(t); \quad u(t, l) + k_1 \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = f_1(t)$$

Studiamo ora l'equazione non omogenea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x)$$

che può essere trasformata nel sistema con solo derivate rispetto al tempo solo del prim'ordine.

Introduco le variabili:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = \alpha \frac{\partial v}{\partial x}$$

ottengo il sistema;

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + F(t, x) \end{cases}$$

con condizioni iniziali:

$$w(t_0, x) = \alpha \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} = w_0(x) \quad v(t_0, x) = v_0(x)$$

Le condizioni al contorno diventano :

$$\begin{aligned} u(t, 0) = f_0(t) & \longrightarrow v(t, 0) = \frac{df_0}{dt} \triangleq g_0(t) \\ u(t, l) = f_1(t) & \longrightarrow v(t, l) = \frac{df_1}{dt} \triangleq g_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = f_0(t) & \longrightarrow \alpha w(t, 0) = f_0(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = f_1(t) & \longrightarrow \alpha w(t, l) = f_1(t) \end{aligned}$$

L'equazione agli autovalori è :

$$(*) \quad \alpha \begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_k^{(1)}(x) \\ \Phi_k^{(2)}(x) \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} \Phi_k^{(1)}(x) \\ \Phi_k^{(2)}(x) \end{pmatrix}$$

eliminando la $\Phi_k^{(1)}(x)$ ottengo :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_k^{(2)} = \frac{\lambda_k^2}{\alpha^2} \Phi_k^{(2)}$$

che per $\Phi_k^{(2)}(0) = \Phi_k^{(2)}(l) = 0$; $b_k = 0$, $\omega_k^2 = -\frac{\lambda_k^2}{\alpha^2} = \frac{k\pi}{l}$

$$\Phi_k^{(2)} = a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

che sostituita nella (*) $\Phi_k^{(1)} = -a_k \sqrt{-1} \cos \frac{k\pi x}{l}$

$$\Phi_k(x) = a_k \begin{pmatrix} -i \cos \frac{k\pi x}{l} \\ \sin \frac{k\pi x}{l} \end{pmatrix}$$

k è un numero intero..

q_k viene usata per normalizzare ad uno le funzioni ,
deve quindi essere uguale a $1/\sqrt{e}$.

Ora possiamo scrivere la funzione di Green per il sistema equivalente all'equazione delle onde . Avrà la seguente forma :

$$\begin{aligned}
 G_F(t, x; \tau, \xi) &= \\
 &= \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \exp(\lambda_k(t-\tau)) \begin{bmatrix} \cos \frac{k\pi x}{e} \cos \frac{k\pi \xi}{e} & -i \cos \frac{k\pi x}{e} \sin \frac{k\pi \xi}{e} \\ i \sin \frac{k\pi x}{e} \cos \frac{k\pi \xi}{e} & \sin \frac{k\pi x}{e} \sin \frac{k\pi \xi}{e} \end{bmatrix} + \right. \\
 &+ \left. \exp(-\lambda_k(t-\tau)) \begin{bmatrix} \cos \frac{k\pi x}{e} \cos \frac{k\pi \xi}{e} & i \cos \frac{k\pi x}{e} \sin \frac{k\pi \xi}{e} \\ -i \sin \frac{k\pi x}{e} \cos \frac{k\pi \xi}{e} & \sin \frac{k\pi x}{e} \sin \frac{k\pi \xi}{e} \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \frac{2}{e} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi \alpha}{e} (t-\tau) \cos \frac{k\pi x}{e} \cos \frac{k\pi \xi}{e} & \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi \alpha}{e} (t-\tau) \cos \frac{k\pi x}{e} \sin \frac{k\pi \xi}{e} \\ -\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi \alpha}{e} (t-\tau) \sin \frac{k\pi x}{e} \cos \frac{k\pi \xi}{e} & \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi \alpha}{e} (t-\tau) \sin \frac{k\pi x}{e} \sin \frac{k\pi \xi}{e} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

-1- Caso lineare.

Per poter utilizzare in maniera semplice il dynamic programming e il metodo di Pontryagin per i sistemi distribuiti è necessario inglobare nell'equazioni differenziale del sistema anche le condizioni al contorno.

Quindi cerchiamo una definizione di operatore che contenga in maniera implicita le condizioni al contorno. Innanzi tutto cerchiamo la definizione estesa di operatore, seguendo la via tracciata da Brogan (6).

Brogan esamina il caso lineare solamente .

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = S_x U(t, x) \\ U(t_0, x) = 0 & : x \in \Omega \\ S_b U(t, x_b) = f(t, x_b) & : x_b \in \partial \Omega \end{cases}$$

Si introduce l'operatore : $A(\cdot) \triangleq \left(\frac{\partial}{\partial t} - S_x \right) (\cdot)$

$D(A)$ è l'insieme di tutte le funzioni U che appartengono allo spazio di Hilbert H e tali che $S_b U = 0$, $U(t_0, x) = 0$

L'operatore aggiunto : $A^+(t) = \left(-\frac{\partial}{\partial t} - S_x^+ \right) (\cdot)$

$D(A^+)$ è l'insieme di tutte le funzioni V che appartengono allo spazio di Hilbert H e tali che $V(x, t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ed inoltre $S_b V = 0$, $x_b \in \partial \Omega$; $A^+ V \in H$.

Definiamo il prodotto scalare :

$$\langle x, y \rangle_H = \int_{t_0}^{\infty} \int_{\Omega} x^* y \, d\Omega \, dt$$

Prendiamo ora V che soddisfa all'equazione con condizioni al contorno omogenee e W che invece soddisfa alla equazione con condizioni al contorno non omogenee e richiediamo che sia :

$$\langle A^+ V, W \rangle_H = \langle V, A_e W \rangle_H$$

dove con A^+ si indica l'operatore aggiunto e con A_e l'operatore esteso . Facciamo un esempio particolare :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \text{per } t > t_0 \text{ e per } x \in [0, l] \\ V(t_0, x) = 0 & \text{con } x \in [0, l] \\ V(t, 0) = V(t, l) = 0, & t > t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \text{per } t > t_0, \text{ per } x \in [0, l] \\ W(t_0, x) = 0 & \text{con } x \in [0, l] \\ W(t, 0) = f_0(t), W(t, l) = f_1(t), & t > t_0 \end{cases}$$

Si calcola l'integrale : $\langle A^+ V, W \rangle_H = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A^+ V, W \rangle = \int_{t_0}^{\infty} \int_0^l \left[-\frac{\partial V}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] W dx dt = \\ &= \int_0^l \left[-V W \right]_{t=t_0}^{t=\infty} dx - \int_{t_0}^{\infty} \left[\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial x} W \right]_{x=0}^x dx dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\infty} \int_0^l \left[V \frac{\partial W}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} \right] dx dt = - \int_{t_0}^{\infty} \left[\alpha^2 \frac{\partial V}{\partial x} W \right]_{x=0}^{x=l} dx dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\infty} \left[\alpha^2 V \frac{\partial W}{\partial x} \right]_0^l dx dt + \int_{t_0}^{\infty} \int_0^l V \left[\frac{\partial W}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] dx dt \\ 0 &= \int_{t_0}^{\infty} \int_0^l V \cdot \left[\frac{\partial W}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha^2 \delta'(x-l) f_1(t) - \alpha^2 \delta'(x) f_0(t) \right] dx dt \end{aligned}$$

Da cui si ha che :

$$A_t(\cdot) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\cdot) + \alpha^2 \delta'(x-l) f_1(t) - \alpha^2 \delta'(x) f_0(t)$$

e l'equazione è :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \alpha^2 \delta'(x-l) f_1(t) - \alpha^2 \delta'(x) f_0(t)$$

Se le condizioni al contorno sono delle condizioni di Neumann, ossia il problema da risolvere è :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} && \text{per } t > t_0 \text{ e per } x \in [0, l] \\ v(t_0, x) &= 0 && \text{per } x \in [0, l] \end{aligned}$$

$$\alpha^2 \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = f_0(t); \quad \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial x}(t, l) = f_1(t), \quad t > t_0$$

Si calcola nuovamente : $\langle A^+ v, w \rangle$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A^+ v, w \rangle = \int_{t_0}^{\infty} \int_0^l \left[-\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] w \, dx \, dt = \\ &= - \int_{t_0}^{\infty} \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial x} w \Big|_0^l \, dt + \int_{t_0}^{\infty} \alpha^2 v \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_0^l \, dt + \\ &+ \int_{t_0}^{\infty} \int_0^l v \left[\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \, dx \, dt \\ 0 &= \int_{t_0}^{\infty} \int_0^l v \left[\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \delta(x-l) f_1(t) - \delta(x) f_0(t) \right] \, dx \, dt \end{aligned}$$

Quindi l'equazione con l'operatore esteso è :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta(x-l) f_1(t) - \delta(x) f_0(t)$$

Passiamo ad esaminare l'equazione delle onde :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \bar{v} \quad \text{dove } \bar{v} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$$

Per trovare l'operatore esteso , si calcola sempre :

$$\langle A^{\dagger} \bar{v}, \bar{u} \rangle_{\Omega} = \langle \bar{v}, A \bar{u} \rangle_{\Omega}$$

dove si intende :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

con condizioni al contorno : $u_2(0,t) = 0$; $u_2(l,t) = g_1(t)$

$$\text{e } v = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

con condizioni al contorno : $v(0,t) = 0$; $v(l,t) = 0$

più le condizioni iniziali che per semplicità possiamo considerare omogenee . Procedendo in maniera analoga al caso dell'equazione del calore , si ottiene :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \bar{v} + \alpha \begin{pmatrix} g_1 \delta(x-l) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo così viste che le condizioni al contorno vengono inserite nell'equazione differenziale tramite le δ di Dirac o le sue derivate a seconda del tipo di condizioni al contorno che sono presenti .

-2- Caso generale

Fin qui abbiamo esaminato la definizione estesa di operatore data da Brogan. Come già visto, Brogan ricava l'operatore esteso solo nel caso lineare. Ora per ricavare la definizione estesa di operatore, si seguirà una via nuova che non richiede che l'equazione sia lineare.

Esaminiamo nuovamente l'equazione del calore nel caso in cui le condizioni al contorno siano condizioni di flusso .

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = x \Delta T$$

$$x \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_b} = \alpha \left[f(\bar{x}, t) - T(\bar{x}, t) \right] \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_b} ; \bar{x}_b \in \partial \mathcal{R}$$

dove c è il calore specifico , ρ la densità , x la conducibilità termica , α il coefficiente di Newton .

Abbiamo visto che questa equazione si può scrivere come :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = x \Delta T + \alpha \left(f(\bar{x}, t) - T(\bar{x}, t) \right) \cdot \delta(|\bar{x} - \bar{x}_s|)$$

Il significato di questa equazione è immediato se si pensa al suo bilancio sul volume .

Se V è il volume occupato dal corpo , si prenda un volume V' che contenga al suo interno V ; S' è la superficie che racchiude V' .

Integriamo l'equazione di Fourier su V' .

$$c\rho \int_{V'} \frac{\partial T}{\partial t} d^3r = x \int_{S'} \text{grad } T \cdot \bar{n} dS' + \int_S \alpha \left[f(\bar{x}_s, t) - T(\bar{x}_s, t) \right] dS$$

$$c_p \int_V \frac{\partial T}{\partial t} d^3x = c_p \int_V \frac{\partial T}{\partial t} d^3x = \dot{Q} = \phi^{in} - \phi^{out}$$

ϕ^{in} e ϕ^{out} sono il flusso entrante ed il flusso uscente .

In conclusione se usiamo la definizione estesa di operatore , otteniamo un'equazione che rappresenta la propagazione del calore in un corpo sul cui contorno è presente una sorgente che fornisce al corpo la stessa quantità di calore che riceverebbe dal flusso . Il campo $T(x,t)$ in Ω e in $[t_0, t]$ è il medesimo nei due casi .

Da questo esempio fisico , si può ricavare la definizione estesa di operatore senza coinvolgere gli operatori aggiunti e quindi senza doversi limitare al caso lineare solamente come per Brogan .

Data per esempio l'equazione : $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$
moltiplichiamola per σ e integriamola su Ω

$$0 = \int_{\Omega} \sigma \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right) dx dt$$

dopo una integrazione per parti , si ottiene :

$$0 = \int_{\Omega} \left[\sigma \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \sigma \delta(x-x_b) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] dx; x_b \in \partial \Omega$$

Il campo ottenuto dall'equazione di partenza , cioè dall'equazione con condizioni al contorno non omogenee , deve essere uguale all'interno del dominio Ω e nell'intervallo di tempo $[t_0, \infty]$ al campo ottenuto dall'equazione equivalente in cui compare l'operatore esteso , con condizioni al contorno omogenee .

Se così non fosse, si avrebbero due situazioni fisiche non equivalenti e i bilanci sul volume delle due equazioni sarebbero diversi. Ritorniamo all'integrale:

$$(*) \quad 0 = \int \left[v \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + v \cdot \delta(x-x_b) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx$$

se si vuole che il campo v soddisfi a condizioni al contorno omogenee e che contemporaneamente soddisfi al bilancio

(*) , deve valere allora l'equazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \delta(x-x_b) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ + \text{condizioni al contorno omogenee} \end{array} \right.$$

In generale l'equazione da studiare sarà un'equazione

anche non lineare:
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = S_x v \\ + \text{cond. al contorno} \end{array} \right.$$

con $S_x = S_x^1 + S_x^2$, dove S_x^1 è un operatore lineare e S_x^2 è un operatore non lineare, in generale di ordine inferiore a S_x^1 . In maniera analoga al caso lineare:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = S_x v + f(\delta(x-x_b), v)$$

La forma che assume l'operatore esteso ossia il modo in cui compaiono nell'equazione le funzioni δ di Dirac è la stessa del caso lineare.

Come esempio, si può prendere l'equazione del calore

modificata dall'operatore di Carnot (7) .

L'operatore di Carnot descrive una distribuzione di motori di Carnot lungo la conduzione di Fourier . Qui non si discute la sua genesi che si trova nella (7) , in quanto ci interessa solo come esempio di equazione non lineare . L'equazione modificata è :

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2$$

Supponiamo che le condizioni al contorno siano condizioni di flusso . L'equazione con l'operatore esteso sarà :

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \delta(z-l) (\dot{q}_1(t) - T) + \delta(z) (\dot{q}_2(t) - T)$$

Consideriamo ora il caso in cui nell'equazione si abbia solo un operatore non lineare . Per trovare la forma dell'operatore esteso si può procedere nella seguente maniera . Moltiplicata l'equazione :

$$0 = \frac{\partial v}{\partial t} - S_x v$$

per v , integriamola sul volume :

$$\int_{\Omega} v \left(\frac{\partial v}{\partial t} - S_x v \right) dx$$

Con una integrazione per parti , si possono introdurre le δ di Dirac nell'equazione , come è già stato fatto per il caso lineare .

Cap. IV Controllo ottimale per i sistemi distribuiti

-1- Considerazioni generali

Come già detto per i sistemi descritti da equazioni differenziali ordinarie, il problema del controllo ottimale di un sistema dinamico è quello di manipolare i controlli in modo tale che il comportamento del sistema risponda ad una data richiesta di ottimalità.

Ricordiamo che lo stato del sistema distribuito è descritto da una funzione : $U(t, x)$

Il controllo lo indichiamo con :

$$F_{\bar{\Omega}}(t, x)$$

Il funzionale da minimizzare è :

$$C = \int_{\Omega} P_0(t_1, x, \phi_{F_{\bar{\Omega}}}(t_1; U_0(x), t_0)) d\Omega + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} P_1(t, x, \phi_{F_{\bar{\Omega}}}(t; U_0(x), t_0), F_{\bar{\Omega}}(t, x)) d\Omega dt$$

che viene scritto in maniera più sintetica come :

$$C = \int_{\Omega} P_0(t_1, x, U(t_1, x)) d\Omega + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} P_1(t, x, U(t, x), F_{\bar{\Omega}}(t, x)) d\Omega dt$$

P_0 e P_1 sono delle funzioni scalari date dei loro argomenti . Il parametro t_1 è l'istante finale .

Il primo integrale rappresenta un criterio di ottimalità applicato solo all'istante finale, il secondo è un criterio che vale su tutto l'intervallo.

Dato un sistema dinamico distribuito il cui moto è dato da :

$$\phi_{F_{\bar{\Omega}}}(t; U_0(x), t_0)$$

per un dato stato iniziale $U_0(x)$ al tempo t_0 , trovare il controllo corrispondente $F_{\bar{\Omega}}$ definito in $[t_0, t_1] \otimes \bar{\Omega}$ tale che C sia minimo o massimo, tra tutti i controlli ammessi.

Se il problema è quello di portare il sistema dallo stato iniziale $U_0(x)$ a t_0 allo stato finale desiderato $U_d(x)$ nel più piccolo intervallo di tempo possibile per mezzo del controllo $F_{\bar{\Omega}}$ (ovviamente $U_d(x)$ deve essere una possibile soluzione del problema.)

$$\text{avremo : } P_0 = 0 \quad ; \quad \int_{\bar{\Omega}} P_1(\cdot) d\Omega = 1 .$$

Il problema è chiamato problema di tempo ottimale.

Ma si potrebbe richiedere di portare il sistema dallo stato iniziale $U_0(x)$ a t_0 il più vicino possibile all'insieme di stati desiderati $\Gamma_d(\bar{\Omega})$ al tempo fissato T .

E così via. Notiamo che il numero e il tipo di problemi ottimali che ci si può porre per i sistemi distribuiti è molto maggiore del caso di sistemi descritti da equazioni ordinarie.

-2- Dynamic programming

Presenteremo ora alcuni metodi di analisi della teoria del controllo ottimale. Uno è il dynamic programming che lavora sulle equazioni alle derivate parziali. Si inizierà con l'espone questo metodo. Poi verrà esposto il metodo di Pontryagin per i sistemi estesi alle derivate parziali e si concluderà con il metodo dovuto a Butkovskij e che lavora sulle equazioni integrali. Nel caso lineare non vi è distinzione tra questi metodi dato che l'equazione alle derivate parziali può essere trasformata in un'equazione integrale tramite le funzioni di Green. Si tenga sempre presente che questi metodi non fanno alcuna distinzione tra caso lineare e caso non lineare.

Come già detto inizieremo dal dynamic programming .

Per non appesantire la notazione , si considera il caso in cui il vettore $\bar{U}(t, \bar{x})$ ha solo una componente .

Il funzionale da minimizzare è :

$$C = \int_{\Omega} P_0 (U(t, \bar{x}), t) d\Omega + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} P_1 (U(t, \bar{x}), F(t, \bar{x}), f(t, \bar{x}_b), t) d\Omega dt$$

e l'equazione con le sue condizioni al contorno è :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S_x U + D \cdot F(t, \bar{x})$$

$$U(t_0, \bar{x}) = U_0(\bar{x}) ; S_b U(t, \bar{x}_b) = f(t, \bar{x}_b)$$

Quest'equazione viene trasformata nell'equazione equivalente , mediante l'operatore esteso , con condizioni al contorno omogenee .

Il controllo ottimale $F_{\Omega}(t,x)$ che appartiene all'insieme A dei controlli ammessi, è quello che renderà il funzionale C minimo. Questo valore minimo dipenderà dallo stato iniziale $U(t_0, x) = U^0(x)$ e dai limiti di integrazione t_0 e t_1 .

Si userà la notazione seguente: $\Pi(U(t_0, x), t_1 - t_0) \triangleq \min_{F \in A} C$.

$$\begin{aligned} \Pi(U(t_0, x), t_1 - t_0) &= \min_{F \in A} \left\{ \int_{\Omega} P_0(U(t_1, x), F(t_1, x), t_1) d\Omega + \right. \\ &+ \left. \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} P_1(U(t, x), F(t, x), t) d\Omega dt \right\} = \min_{F \in A} \left\{ \int_{\Omega} P_0(U(t_1, x), F(t_1, x), t_1) d\Omega + \right. \\ &+ \left. \int_{t_0+\varepsilon}^{t_1} \int_{\Omega} P_1(U(t, x), F(t, x), t) d\Omega dt + \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \int_{\Omega} P_1(U(t, x), F(t, x), t) d\Omega dt \right\} \end{aligned}$$

Ricordiamo adesso il principio di Bellman: se il costo C è minimo durante il periodo totale (t_0, t_1) deve essere necessariamente minimo anche nell'intervallo più breve

$$\begin{aligned} (t_0 + \varepsilon, t_1) \\ \Pi(U(t_0, x), t_1 - t_0) &= \min_{F \in A} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \int_{\Omega} P_1(U(t, x), F(t, x), t) d\Omega dt + \right. \\ &+ \left. \Pi(U(t_0 + \varepsilon, x), t_1 - t_0 - \varepsilon) \right\} \end{aligned}$$

Sia ora $\bar{t} \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Pi(U(t_0, x), t_1 - t_0) &= \min_{F \in A} \left\{ \varepsilon \int_{\Omega} P_1(U(\bar{t}, x), F(\bar{t}, x), \bar{t}) d\Omega + \right. \\ &+ \left. \Pi(U(t_0 + \varepsilon, x), t_1 - t_0 - \varepsilon) \right\} \\ \Pi(U(t_0 + \varepsilon, x), t_1 - t_0 - \varepsilon) &= \Pi(U(t_0, x), t_1 - t_0) + \varepsilon \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial U} \right) \Big|_{t_0} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} d\Omega + \\ &+ \frac{\partial \Pi}{\partial (t_1 - t_0)} \Big|_{t_0} (-\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad \text{dove } O(\varepsilon) \sim \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Si pone : $t_1 - t_0 \triangleq T$

$$\Pi(U(t_0, x), T) = \min_{F \in A} \left\{ \varepsilon \int_{\Omega} P_1(U(\bar{F}, x), F(\bar{F}, x), \bar{F}) d\Omega + \right. \\ \left. + \Pi(U(t_0, x), T) + \varepsilon \int_{\Omega} \left(\frac{\delta \Pi}{\delta U} \right) \Big|_{t_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega - \varepsilon \frac{\partial \Pi}{\partial T} \right\}$$

Dato che i termini $\Pi(U(t_0, x), T)$ e $\frac{\partial \Pi}{\partial T}$ non dipendono da F possono essere portati fuori dal segno di minimo :

$$\varepsilon \frac{\partial \Pi}{\partial T} = \min_{F \in A} \varepsilon \int_{\Omega} \left\{ P_1(U(\bar{F}, x), F(\bar{F}, x), \bar{F}) + \left(\frac{\delta \Pi}{\delta U} \right) \Big|_{t_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\Omega$$

nel limite per ε che tende a zero, $\bar{t} \rightarrow t_0$,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} = \min_{F \in A} \int_{\Omega} \left\{ P_1(U(t_0, x), F(t_0, x), t_0) + \frac{\delta \Pi}{\delta U} \Big|_{t_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\Omega$$

ma questo risultato può essere ritrovato per qualsiasi altro tempo iniziale $t \in [t_0, t_1]$; al posto di $U(t_0, x)$ si usa $U(t, x)$:

$$(1) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial T} = \min_{F \in A} \int_{\Omega} \left\{ P_1(U(t, x), F(t, x), t) + \frac{\delta \Pi}{\delta U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right\} d\Omega$$

Per via della definizione di Π , si ha che :

$$\Pi(U(t_1, x), T=0) = \int_{\Omega} P_0(U(t_1, x), t_1) d\Omega$$

$$\text{Poniamo : } Y(t, x) = \frac{\delta \Pi}{\delta U} ; \quad Q(t, x) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial t} \\ P_1 \end{pmatrix}, \quad P(t, x) \triangleq \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial T} = \min_{F \in A} \int_{\Omega} P^T(t, x) \cdot Q(t, x) d\Omega = H^0(U, P, t)$$

$$\text{dove } H^0 = \min_{F \in A} H(U, P, F, t) = \min_{F \in A} \int_{\Omega} P^T(t, x) Q(t, x) d\Omega$$

Associamo all'equazione (4) che è l'equazione di Hamilton-Jacobi il sistema canonico :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\delta H^0}{\delta Y} \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = - \frac{\delta H^0}{\delta U}$$

con condizioni iniziali :

$$U(t_0, x) = U_0(x)$$

$$U(t_1, x) = U_d(x)$$

Oppure se lo stato finale non è fissato :

$$U(t_0, x) = U_0(x) \quad ; \quad Y(t_1, x) = \left. \frac{\delta \pi}{\delta U} \right|_{T=0} = \frac{\partial P_0}{\partial U}$$

Le condizioni al contorno sono omogenee , dato che è stata usata la definizione estesa di operatore .

Si noti come la definizione estesa di operatore sia necessaria per poter ricavare le condizioni al contorno per i campi coniugati $Y(t, x)$. Inoltre sempre con la definizione estesa di operatore è stato possibile introdurre anche il controllo sul contorno . Quindi il dynamic programming può essere usato sia per trattare i problemi in cui il controllo agisce su Ω , sia i problemi in cui il controllo agisce solo sul contorno .

- 3 - Metodo di Pontryagin per i sistemi distribuiti

Il sistema da studiare è :

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \bar{f} (\bar{\varphi}(x,t), \bar{u}(x,t), x, t)$$

dove con $\bar{\varphi}(x,t)$ si indica il campo vettoriale a n- dimensioni e con $\bar{u}(x,t)$ il campo vettoriale di controllo a r- dimensioni ; \bar{f} è un operatore che può essere sia lineare e non , che contiene però anche le condizioni al contorno . Quindi con $\bar{u}(x,t)$ si intende un controllo che può agire anche sul contorno .

Si è usata una notazione diversa da quella usata in precedenza per i sistemi distribuiti e più simile a quella per i sistemi ordinari per mettere in evidenza l'analogia con il teorema di Pontryagin per i sistemi ordinari .

Si vuole minimizzare l'integrale :

$$J = \int_{\Omega} \int_0^T f_0 (\bar{\varphi}(x,t), \bar{u}(x,t), x, t) dx dt$$

Indichiamo con $\bar{u}^0(x,t)$ e con $\bar{\varphi}^0(x,t)$ il controllo e il campo ottimale rispettivamente . Introduciamo il campo :

$$\varphi_0(x,t) = \int_0^t f_0 (\bar{\varphi}, \bar{u}, x, t) dt'$$

che quindi soddisfa l'equazione :

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = f_0 (\bar{\varphi}, \bar{u}, x, t)$$

Consideriamo quindi il campo vettoriale formato dal vettore :

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x,t) \\ \tilde{\varphi}^0(x,t) \end{pmatrix}$$

e tale che :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \tilde{f}(\tilde{\varphi}, \tilde{u}, x, t)$$

Supponiamo che il controllo ottimale $\tilde{u}^0(x,t)$ subisca una perturbazione nell'intorno del punto (\tilde{z}, τ) del dominio $\Omega \in [0, \tau]$:

$$\tilde{u}^*(x,t) \begin{cases} \tilde{v} & \text{in } \tau - \delta t < t < \tau, \tilde{z} - \delta x < x < \tilde{z} \\ \tilde{u}^0(x,t) & \text{altrove} \end{cases}$$

Notiamo che : $\tilde{\varphi}^0(\tau - \delta t, \tilde{z} - \delta x) = \tilde{\varphi}^*(\tau - \delta t, \tilde{z} - \delta x)$

dove con $\tilde{\varphi}^*$ indichiamo il campo che si ottiene dall'equazione :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}^*}{\partial t} = \tilde{f}(\tilde{\varphi}^*, \tilde{u}^*, x, t)$$

con il controllo uguale al controllo perturbato $\tilde{u}^*(x,t)$.

Si sviluppano ora in serie di Taylor il campo $\tilde{\varphi}^*$ e il campo $\tilde{\varphi}^0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^*(\tilde{z}, \tau) &= \tilde{\varphi}^*(\tilde{z} - \delta x, \tau - \delta t) + \varepsilon \Delta t \tilde{f}^*(\tilde{\varphi}^*, \tilde{v}, t, x) + \varepsilon \Delta x \frac{\partial \tilde{\varphi}^*}{\partial x} \\ \tilde{\varphi}^0(\tilde{z}, \tau) &= \tilde{\varphi}^0(\tilde{z} - \delta x, \tau - \delta t) + \varepsilon \Delta t \tilde{f}^0(\tilde{\varphi}^0, \tilde{u}^0, t, x) + \varepsilon \Delta x \frac{\partial \tilde{\varphi}^0}{\partial x} \end{aligned}$$

dove $\delta x = \varepsilon \Delta x, \delta t = \varepsilon \Delta t$ con ε piccolo.

Quando ε tende a zero :

$$\tilde{\varphi}^*(x,t) \rightarrow \tilde{\varphi}^0(\tilde{z}, \tau) \quad ; \quad \tilde{u}^0(x,t) \rightarrow \tilde{u}^0(\tilde{z}, \tau)$$

$$\tilde{f}(\tilde{\varphi}^*(t,x), \tilde{v}, x, t) = \tilde{f}(\tilde{\varphi}^0(\tau, \tilde{z}), \tilde{v}, \tilde{z}, \tau) + O(\varepsilon)$$

dove $O(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

Si calcoli ora la variazione $\delta\tilde{\varphi}$ che è dell'ordine di ε . Scriviamo: $\delta\tilde{\varphi} = \varepsilon \Delta\tilde{\varphi}$ dove $\Delta\tilde{\varphi}$ è finito.

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\varphi} &= \varepsilon \Delta\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}^0 = \\ &= \tilde{\varphi}^*(z - \delta x, \tau - \delta t) - \tilde{\varphi}^0(z - \delta x, \tau - \delta t) + \varepsilon \cdot \Delta t [\tilde{f}^* - \tilde{f}^0] + \\ &\varepsilon \cdot \Delta x \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon \Delta\tilde{\varphi}) = \varepsilon \Delta t [\tilde{f}(\tilde{\varphi}^*(\tau, z), \bar{u}, z, \tau) - \tilde{f}(\tilde{\varphi}^0(\tau, z), \bar{u}^0, z, \tau)] \\ &\approx \varepsilon \Delta t [\tilde{f}(\tilde{\varphi}^0(\tau, z), \bar{u}, z, \tau) - \tilde{f}(\tilde{\varphi}^0(\tau, z), \bar{u}^0, z, \tau)]\end{aligned}$$

Dopo aver trovato l'espressione per $\Delta\tilde{\varphi}$ al tempo τ , si cerca di trovare $\Delta\tilde{\varphi}$ al tempo T . Ricordiamo che $\Delta\tilde{\varphi}$ continua ad essere funzione dello spazio oltre che ad essere funzione del tempo.

Si ricerca l'equazione che descrive l'evoluzione di $\Delta\tilde{\varphi}$ nel tempo. Per trovarla sviluppo in serie di Taylor la:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \tilde{f}(\tilde{\varphi}, \bar{u}, x, t)$$

e ottengo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{\varphi} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\varphi}_T} \Delta\tilde{\varphi} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (\partial x \tilde{\varphi})_T} \Delta \partial_x \tilde{\varphi} \dots = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\varphi}_T} \Delta\tilde{\varphi} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial (\partial x \tilde{\varphi})_T} \cdot \partial_x \Delta\tilde{\varphi} + \dots$$

in notazione estesa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi_i(x, t) = \sum_{j=0}^m \frac{\partial \tilde{f}_i(\tilde{\varphi}, \bar{u}, x, t)}{\partial \varphi_j(x, t)} \Delta\varphi_j(x, t) + \sum_{j=0}^m \frac{\partial \tilde{f}_i(\tilde{\varphi}, \bar{u}, x, t)}{\partial [\partial_x \varphi_j(x, t)]} \partial_x (\Delta\varphi_j) + \dots$$

Quindi si ha un'equazione lineare per le $\Delta\tilde{\varphi}(t, x)$, si indichi $\Delta\tilde{\varphi}(t, x) = \tilde{z}(t, x)$ l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} = \tilde{z} \cdot F(\tilde{\varphi}, \partial_x \tilde{\varphi} \dots, t, x) + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} \cdot H(\tilde{\varphi}, \partial_x \tilde{\varphi} \dots, x, t) + \dots$$

che è un'equazione lineare nelle $\tilde{z}(x,t)$. Le condizioni al contorno sono condizioni omogenee. Mediante le funzioni di Green si può determinare un operatore che indico sinteticamente con $\phi(\tau, \tau)$ che trasporta $z(x,t)$ in $z(T,x)$:

$$\Delta \tilde{\varphi}(T,x) = \phi(T,\tau) \Delta \tilde{\varphi}(\tau,x) = \int_{\Omega} K(T,\tau; x,x') \Delta \tilde{\varphi}(\tau,x') d\Omega$$

$$\Delta \tilde{\varphi}(T,x) = \phi(T,\tau) \cdot \Delta t \cdot \Delta \tilde{f}$$

dove

$$\Delta \tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{\varphi}^0(\tau, \xi), \bar{v}, \xi, \tau) - \tilde{f}(\tilde{\varphi}^0(\tau, \xi), \bar{u}^0, \xi, \tau)$$

$\Delta \tilde{\varphi}(x,t)$ è una funzione di $\tau, \Delta t, \bar{v}$. Indichiamo $\Delta \tilde{\varphi}_{\Delta t}(x,t)$ per mettere in evidenza la dipendenza di $\Delta \tilde{\varphi}$ da Δt .

Si prende una combinazione lineare:

$$\lambda' \Delta t' + \lambda'' \Delta t'' + \dots = \Delta t \quad ;$$

si ha che: $\Delta \tilde{\varphi}_{\Delta t} = \lambda' \Delta \tilde{\varphi}_{\Delta t'} + \lambda'' \Delta \tilde{\varphi}_{\Delta t''} + \dots$

dato che la dipendenza di $\Delta \tilde{\varphi}$ da Δt è lineare.

Se prendo tutti i Δt possibili si ottiene in ogni punto dello spazio un cono $K(x,T)$ formato dai vettori $\Delta \tilde{\varphi}_{\Delta t}(x,T)$.

Se la componente zero $\varphi_0^o(T,x)$ del campo ottimale, in ciascun punto di x , ha un valore più piccolo di $\varphi_0^*(T,x)$ cioè della componente zero del campo perturbato, l'integrale su tutto x è minimo. Da questa osservazione, si può ricavare che il cono $K(x,T)$ è un cono convesso, infatti non può coprire tutti i punti dello spazio che stanno al di sotto di $\varphi_0^o(T,x)$. Trovo così in ogni punto x un

piano Γ , tale che il cono $K(T, x)$ giace in un semispazio individuato da Γ . $\tilde{n}(x, T)$ sia la normale esterna a Γ .

Quindi : $\tilde{n}^T(x, T) \cdot \Delta \tilde{\varphi}(T, x) \leq 0$

$$\tilde{n}^T(x, T) \cdot \phi(T, \tau) \Delta \tilde{\varphi}(T, x) \leq 0$$

$$\tilde{n}^T(x, T) \cdot \phi(T, \tau) \Delta t \Delta \tilde{f}(T, x) \leq 0$$

$$\Delta t > 0 \text{ quindi } \tilde{n}^T(x, T) \cdot \phi(T, \tau) \Delta \tilde{f}(T, x) \leq 0$$

ma ora si noti che :

$$\tilde{m}^T \cdot \phi(T, \tau) \cdot \Delta \tilde{f}(T, x) = \Delta \tilde{f}^T(T, x) \phi^T(T, \tau) \tilde{m}(x, T)$$

Ricordiamo che :

$$\phi(T, \tau) = \int_{\Omega} G_I(T, x; \tau, \xi) (\cdot) d\xi$$

$$\text{dove } G_I(T, x; \tau, \xi) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} \exp[\lambda_k(T-\tau)] \phi_k(x) \psi_k^*(\xi)$$

dove λ_k è l'autovalore e $\phi_k(x)$ è l'autofunzione del problema agli autovalori associato.

$$\text{Quindi } \phi^T(T, \tau) = \int_{\Omega} G_I^T(T, x; \tau, \xi) d\xi (\cdot)$$

$$\text{dove } G_I^T(T, x; \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[\lambda_k(T-\tau)] \psi_k(x) \phi_k^*(\xi)$$

Se ora si cambia τ con T , si ottiene :

$$\phi^T(\tau, T) = \int_{\Omega} G_I(\tau, x; T, \xi) d\xi (\cdot)$$

$$G_I(\tau, \xi, T, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\lambda_k(T-\tau)] \psi_k(x) \phi_k^*(\xi)$$

Ricordando che il campo è reale e che quindi $G_I^* = G_I$

$$G_I^* = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\lambda_k^*(T-\tau)] \psi_k^* \phi_k \text{ è la funzione di Green per}$$

il problema agli autovalori associato all'equazione :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = -F^T \tilde{f} - H^T \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \dots$$

Si definisce il campo coniugato $\tilde{Y}(x, t)$ che soddisfa la

$$\text{equazione : } \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{f}^T}{\partial \tilde{\varphi}} \tilde{Y} - \frac{\partial \tilde{f}^T}{\partial x \tilde{\varphi}} \partial_x \tilde{Y} - \dots$$

In notazione estesa :

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = - \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial \tilde{\varphi}_i} \cdot Y_j - \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial (\partial_x \tilde{\varphi}_i)} \cdot \partial_x Y_j - \dots$$

Quindi si ha che :

$$\tilde{M}(x, T) \cdot \Phi(T, \tau) \Delta f(\tau) \leq 0$$

diventa se prendiamo $\tilde{n}(x, T)$ come condizione iniziale per le $\tilde{Y}(x, t)$:

$$\tilde{Y}^T(x, \tau) \cdot \Delta \tilde{f}(\tau) \leq 0$$

Definiamo ora l'hamiltoniana : $H = \tilde{y}^T(x, \tau) \cdot \tilde{f}(x, \tau)$

$$\tilde{y}^T(x, \tau) \left[\tilde{f}(\tilde{\varphi}^0, \tilde{u}, x, \tau) - \tilde{f}(\tilde{\varphi}^0, \tilde{u}^0, x, \tau) \right] \leq 0$$

da cui segue immediatamente che l'hamiltoniana vista come funzione del controllo $\tilde{u}(x, t)$ ha un massimo per $\tilde{u} = \tilde{u}^0$ ottimale .

Se si vuole avere una analogia con il dynamic programming , basta che definisca come hamiltoniana :

$$H = \int_{\Omega} \tilde{y}(x, t)^T \cdot \tilde{f}(x, t) d\Omega$$

l'equazione per la $\tilde{y}(x, t)$ la si può allora scrivere come :

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \tilde{\varphi}}$$

- 4 - Tecnica variazionale di Butkovskij

Vediamo ora una tecnica variazionale dovuta a Butkovskij che si applica al sistema dinamico descritto in forma integrale ; studiamone la specializzazione nel caso lineare :

$$U(t, x) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} G(t, x; \tau, \xi) F(\tau, \xi) d\Omega d\tau$$

Indichiamo l'insieme (t, x) con S .

$$(1) \quad U(S) = \int_{\mathcal{E}} G(S, S') F(S') dS' \quad \mathcal{E} = \Omega \times [t_0, t_1]$$

Deve soddisfare la condizione isoperimetrica :

$$(2) \quad J_0 = \int_{\mathcal{E}} R(S, U(S), F(S)) dS$$

dove J_0 è un numero dato . Il funzionale da minimizzare è :

$$C = \int_{\mathcal{E}} P_1(S, U(S), F(S)) dS$$

Il controllo ottimale è quel controllo che minimizza C e soddisfa alla condizione isoperimetrica (2) e all'equazione integrale (1) . Il controllo $F(S)$ appartiene alla classe di controlli ammessi A . Sia $F(S) \in A$ per $S \in \mathcal{E}$ un controllo ammesso tale che la (2) sia soddisfatta quando $U(S)$ è soluzione della (1) . Affinchè $F^0(S)$ sia il controllo ottimale è necessario che esista un vettore diverso da zero (C_0, C_1) , che può essere normalizzato cosicchè $C_0 = -1$ tale che per $S \in \mathcal{E}$, la seguente funzione di F

raggiunga il suo massimo :

$$H(s, F(s)) \triangleq C_0 P_1(s, U(s), F(s)) + C_0 \int \frac{\partial P_1}{\partial U} \cdot G(s', s) F(s) ds' + \\ + C_1 \left\{ R(s, U, F) + \int_E \frac{\partial R}{\partial U} G(s', s) F(s) ds' \right\}$$

$$\text{cioè sia : } H(s, F^0(s)) = \sup_{F \in A} H(s, F(s))$$

Assumiamo che esista un controllo $F^0(s) \in A$ e una corrispondente soluzione ottimale $U^0(s)$ che soddisfa all'equazione :

$$J_0 = \int_E R(s, U, F) ds$$

mentre minimizza C . Costruiamo un nuovo funzionale C' formato da C con l'equazione di vincolo per mezzo dei moltiplicatori di Lagrange :

$$C' \triangleq \lambda_0 \int_E P_1 ds + \lambda_1 \left\{ \int_E R ds - J_0 \right\}$$

Sia \bar{s} un punto regolare della funzione di controllo allo interno di E . Sia Δ_ε una piccola regione attorno a \bar{s} , $\varepsilon > 0$.

Sia \hat{F} una funzione di controllo ottenuta perturbando il controllo nella seguente maniera :

$$\hat{F}(s) = \begin{cases} F^* & \text{in } \Delta_\varepsilon \\ F^0(s) & \text{altrove} \end{cases}$$

$\hat{U}(s)$ è la soluzione corrispondente al controllo $\hat{F}(s)$.

$$\hat{C}' = \lambda_0 \int_E P_1(s, \hat{U}(s), \hat{F}(s)) ds + \\ + \lambda_1 \left\{ \int_E R(s, \hat{U}(s), \hat{F}(s)) ds - J_0 \right\}$$

Ossia :

$$\hat{C}' = \lambda_0 \int_E (P_1(s, u^0, F^0) + \delta P_1) ds + \lambda_1 \left\{ \int_E (R(s, u^0, F^0) + \delta R) ds - J \right\}$$

e quindi calcolando la variazione δP_1 , e δR si ottiene :

$$\begin{aligned} \hat{C}' &= \lambda_0 \int_E \left[P_1(s, u^0, F^0) + \frac{\partial P_1(s, u^0, F^0)}{\partial u} \delta u \right] ds + \\ &+ \lambda_0 \varepsilon \left[P_1(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^*) - P_1(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^0(\bar{s})) \right] + \\ &+ \lambda_1 \left\{ \int_E R(s, u^0(s), F^0(s)) ds - J_0 + \int_E \frac{\partial R(s, u^0, F^0)}{\partial u} \delta u ds \right\} + \\ &+ \lambda_1 \varepsilon \left[R(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^*) - R(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^0(\bar{s})) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Ma : } \delta u \triangleq \hat{u} - u^0 \cong \varepsilon \cdot G(s, \bar{s}) [F^* - F^0(\bar{s})]$$

che sostituita nell'espressione per \hat{C}' fornisce :

$$\begin{aligned} \hat{C}' &= C' + \lambda_0 \varepsilon \int_E \frac{\partial P_1(s, u^0(s), F^0(s))}{\partial u} G(s, \bar{s}) [F^* - F^0(\bar{s})] ds + \\ &+ \lambda_0 \varepsilon \left[P_1(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^*) - P_1(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^0(\bar{s})) \right] + \\ &+ \lambda_1 \varepsilon \int_E \frac{\partial R(s, u^0(s), F^0(s))}{\partial u} G(s, \bar{s}) [F^* - F^0(\bar{s})] ds + \\ &+ \lambda_1 \varepsilon \left[R(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^*) - R(\bar{s}, u^0(\bar{s}), F^0(\bar{s})) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Definiamo : } \Delta C' \triangleq \hat{C}' - C', \quad \lambda_0 = c_0, \quad \lambda_1 = c_1$$

così abbiamo che :

$$\Delta C' = \varepsilon \left[H(\bar{s}, F^*) - H(\bar{s}, F^0(\bar{s})) \right]$$

Dato che per ipotesi F^0 minimizza C , è necessario che $C < \hat{C}$. Ma per via dell'ipotesi :

$$\begin{cases} J_0 = \int_E R(s, u(s), F(s)) ds = \text{cost.} \\ c_0 = -1 \end{cases}$$

Segue che : $\Delta C' = \hat{C}' - C' \leq 0$

$$H(\bar{s}, F^*) - H(\bar{s}, F^0(\bar{s})) \leq 0$$

$$H(\bar{s}, F^*) \leq H(\bar{s}, F^0(\bar{s}))$$

Dato che vale per qualsiasi punto regolare \bar{s} e per qualsiasi controllo $F^* \in A$, si ha che :

$$H(\bar{s}, F^0(\bar{s})) = \sup_{F \in A} H(\bar{s}, F(\bar{s}))$$

Il teorema presentato da Butkosvkiij ha una forma più generale . La dimostrazione qui presentata segue quella di Wang . Wang l'aveva indicata nel suo contributo (g) come un metodo per maneggiare i sistemi distribuiti per i quali la funzione di controllo entra attraverso le condizioni al contorno . Egli affermava che il dynamic programming non è direttamente applicabile al caso di controllo sul contorno . Però come si è visto , mediante la definizione estesa di operatore il controllo sul contorno non crea più alcun problema per il dynamic programming .

- 5 - Soluzione analitica di alcuni problemi di controllo ottimale

Molti problemi di controllo ottimale non possono essere risolti analiticamente. I problemi che possono essere risolti sono di natura molto semplice, dove poche o nessuna restrizione viene fatta sui controlli. Presentiamone alcuni esempi. S_x sarà lineare.

Un problema può essere quello di trasferire lo stato $\bar{U}(t, \bar{x})$ del sistema da uno stato iniziale $\bar{U}_0(t, \bar{x})$ al tempo t_0 nello stato finale $\bar{U}_d(\bar{x})$ al tempo t_1 fisso.

Si richiede di minimizzare:

$$C = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \bar{F}^T(t, \bar{x}) \cdot \bar{F}(t, \bar{x}) d\Omega dt + \\ + \lambda_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \bar{f}_b^T(t, \bar{x}_b) \bar{f}_b(t, \bar{x}_b) d\Omega dt$$

λ_0 o λ_1 possono essere zero in un problema particolare. Questo problema ha senso se $\bar{U}_d(\bar{x})$ è uno stato raggiungibile del sistema. Iniziamo col supporre $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_1 = 0$, e che sia presente solo il controllo $\bar{F}(t, \bar{x})$. Il controllo ottimale si ottiene minimizzando (usiamo il dynamic programming) l'hamiltoniana:

$$H = \int_{\Omega} \left\{ \bar{F}^T F + \bar{Y}^T (S_x \bar{U} + D \bar{F}) \right\} d\Omega$$

quindi: $\frac{\delta H}{\delta \bar{F}} \Big|_{\bar{F} = \bar{F}^0} = 0$ perciò deve essere:

$$2 \bar{F}^0(t, \bar{x}) + D^T(t, \bar{x}) \cdot \bar{Y} = 0$$

$$\bar{F}^0(t, \bar{x}) = -\frac{1}{2} D^T(t, \bar{x}) \bar{Y}(t, \bar{x})$$

Sostituendo nell'hamiltoniana il controllo ottimale ,
si ottiene :

$$H^0 = \int_{\Omega} \left\{ \bar{Y}^T(t, \bar{x}) \cdot S_x \bar{U} - \frac{1}{4} \bar{Y}^T(t, \bar{x}) D(t, \bar{x}) D^T(t, \bar{x}) \bar{Y}(t, \bar{x}) \right\} d\Omega$$

da cui si possono ricavare le equazioni canoniche :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = S_x \bar{U} - \frac{1}{2} D(t, \bar{x}) D^T(t, \bar{x}) \bar{Y}(t, \bar{x})$$

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = - S_x^+ \bar{Y}(t, \bar{x})$$

infatti
$$\int_{\Omega} \bar{Y}^T(t, \bar{x}) S_x \bar{U} = \int_{\Omega} (S_x^+ \bar{Y}(t, \bar{x}))^T \bar{U}(t, \bar{x}) d\Omega$$

Le condizioni al contorno sono condizioni omogenee in
quanto abbiamo supposto $\bar{\psi}_b(t, \bar{x}_b) = 0$.

Per l'equazione del calore : $S_x(\cdot) = \alpha^2 \nabla_x^2(\cdot)$

$$S_x^+(\cdot) = S_x(\cdot)$$

L'equazione per la \bar{Y} può essere resa stabile cambiando
la variabile : si usa $T = t_1 - t$. L'equazione aggiunta è ri-
solta a ritroso :

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial T} = S_x \bar{Y}(t_1 - T, \bar{x})$$

La condizione iniziale \bar{Y}_0 per \bar{Y} al tempo $T=0$, se è no-
ta fornisce la soluzione dell'equazione :

$$\bar{Y}(t, \bar{x}) = \bar{Y}(t_1 - T, \bar{x}) = \int_{\Omega} G_I(T, \bar{x}; 0, \bar{\xi}) \bar{Y}_0(\bar{\xi}) d\Omega$$

Similmente la soluzione $\bar{U}(\bar{x}, t)$ può essere scritta in termini della funzione di Green :

$$\bar{U}(t, \bar{x}) = \int_{\Omega} G_I(t, \bar{x}; t_0, \bar{\xi}) \bar{U}_0(\bar{\xi}) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} G_F(t, \bar{x}; t', \bar{x}') \cdot D(t', \bar{x}') \cdot D^T(t', \bar{x}') \cdot \int_{\Omega} G_I(t_1 - t', \bar{x}'; 0, \bar{\xi}) \cdot \bar{Y}_0(\bar{\xi}) d\Omega d\Omega' dt'$$

Al tempo $t=t_1$, $\bar{U}(t_1, \bar{x}) = U_d(\bar{x})$, quindi :

$$\begin{aligned} U_d(\bar{x}) &= \int_{\Omega} G_I(t_1, \bar{x}; t_0, \bar{\xi}) \bar{U}_0(\bar{\xi}) d\Omega = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} G_F(t_1, \bar{x}; t', \bar{x}') D(t', \bar{x}') D^T(t', \bar{x}') \cdot \\ &\quad \cdot \int_{\Omega} G_I(t_1 - t', \bar{x}'; 0, \bar{\xi}) \cdot \bar{Y}_0(\bar{\xi}) d\Omega d\Omega' dt' \end{aligned}$$

Per semplicità ammettiamo di essere nel caso unidimensionale con condizioni al contorno omogenee con $D(\bar{x}, t) = 1$ con le funzioni di Green già viste prima :

$$\begin{aligned} U_d(x) &= \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{e^2} (t_1 - t_0) \right] \sin \frac{k \pi x}{e} \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{e} u_0(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{2}{e^2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{e^2} (t_1 - t') \right] \sin \frac{k \pi x}{e} \cdot \sin \frac{k \pi x'}{e} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{m^2 \pi^2 \alpha^2}{e^2} (t_1 - t') \right] \sin \frac{m \pi x'}{e} \sin \frac{m \pi \xi}{e} \gamma_0(\xi) d\xi dx' dt' \end{aligned}$$

Facendo uso dell'ortogonalità della funzione seno, e integrando rispetto a t' si ottiene:

$$U_d(x) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t_0)\right] \sin \frac{k \pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{l} \cdot U_0(\xi) d\xi$$

$$\cdot U_0(\xi) d\xi = -\frac{l^2}{4 \pi^2 \alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ 1 - \exp\left[-2 \frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t_0)\right] \right\}$$

$$\cdot \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{l} U_0(\xi) d\xi$$

Sviluppando $Y_0(x)$ in serie:

$$Y_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \sin \frac{k \pi x}{l}$$

$$Y_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{l} Y_0(\xi) d\xi$$

$$U_d(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^d \sin \frac{k \pi x}{l}$$

$$U_k^d = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{l} U_d(\xi) d\xi$$

Quindi otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^d \sin \frac{k \pi x}{l} = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t_0)\right] \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{l} U_0(\xi) d\xi$$

$$\cdot \sin \frac{k \pi x}{l} = -\frac{l^2}{4 \pi^2 \alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ 1 - \exp\left[-2 \frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t_0)\right] \right\}$$

$$Y_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{l} Y_0(\xi) d\xi =$$

$$= -\frac{4 \pi^2 \alpha^2 k^2 C_k}{l^2 \left\{ 1 - \exp\left[-2 \frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t_0)\right] \right\}}$$

$$C_k = U_k^d - \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t_0)\right] \int_0^l \sin \frac{k \pi \xi}{l} U_0(\xi) d\xi$$

Abbiamo visto come il problema di trasferire lo stato $U(t, x)$ del sistema dallo stato iniziale $U_0(t, x)$ nello stato finale $U_d(x)$ al tempo t , fisso, minimizzando:

$$C = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\ell} F^2 dx dt$$

possa essere risolto tramite le funzioni di Green.

Ricordiamo però che le condizioni al contorno erano condizioni omogenee. Studiamo ora il caso in cui:

$$u(t, 0) = b_0(t) \quad u(t, \ell) = b_1(t)$$

dove $b_0(t)$ e $b_1(t)$ sono delle funzioni date.

Si può riscrivere l'equazione con l'operatore esteso:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \gamma(t, x) + \alpha^2 \delta'(x-\ell) b_1(t) - \alpha^2 \delta'(x) b_0(t)$$

Si ha quindi un termine forzante nell'equazione di Fourier oltre al termine forzante dovuto alla funzione di controllo.

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^{\ell} G_I(t, x; t_0, \xi) U_0(\xi) d\xi - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_0^{\ell} G_F(t, x; t', \xi) \gamma(t', \xi) dt' d\xi + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_0^{\ell} G_F(t, x; \tau, \xi) \left\{ \alpha^2 \delta'(x-\ell) b_1(\tau) - \alpha^2 \delta'(x) b_0(\tau) \right\} d\tau d\xi = \\ &= \int_0^{\ell} G_I(t, x; t_0, \xi) U_0(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_0^{\ell} G_F(t, x; t', \xi) \cdot \\ &\cdot \gamma(t', \xi) dt' d\xi + \int_{t_0}^t \int_0^{\ell} \left\{ -\alpha^2 \frac{\partial G_F}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\ell} b_1(\tau) + \alpha^2 \frac{\partial G_F}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} b_0(\tau) \right\} d\tau \end{aligned}$$

Quindi indicando con :

$$G_{b_1}(t, x; \tau) = -\alpha^2 \frac{\partial G_F}{\partial \xi} \Big|_{\xi=l}$$

$$G_{b_0}(t, x; \tau) = \alpha^2 \frac{\partial G_F}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}$$

La soluzione è :

$$u(t, x) = \int_0^l G_I(t, x; t_0, \xi) U_0(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_0^l G_F(t, x; \tau, \xi) \cdot Y(\tau, \xi) d\tau d\xi + \int_{t_0}^t G_{b_1}(t, x; \tau) b_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t G_{b_0}(t, x; \tau) b_0(\tau) d\tau$$

In questo caso :

$$G_{b_1} = \frac{2\alpha^2\pi}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2\pi^2\alpha^2}{l^2}(t-\tau)\right] k(-1)^{k+1} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$G_{b_0} = \frac{2\alpha^2\pi}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2\pi^2\alpha^2}{l^2}(t-\tau)\right] k \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Se le condizioni al contorno fossero state condizioni di Neumann, tutto ciò che sarebbe cambiato nella soluzione del problema ottimale sarebbe stata la forma della funzione di Green.

Ricaviamola.

Il problema è:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0 = b_0(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_l = b_1(t)$$

Il problema agli autovalori associato:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} = \lambda_k \phi_k \quad ; \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \Big|_0 = 0, \quad \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \Big|_l = 0$$

Come soluzione scegliamo:

$$\phi_k(x) = a_k \cos\left(-\frac{\lambda_k}{\alpha^2}\right)^{1/2} x + b_k \sin\left(-\frac{\lambda_k}{\alpha^2}\right)^{1/2} x$$

con $\lambda_k < 0$

Tenendo presenti le condizioni al contorno:

$$\phi_k(x) = a_k \cos\left(-\frac{\lambda_k}{\alpha^2}\right)^{1/2} x$$

$$\lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2}, \quad \phi_k(x) = a_k \cos \frac{k \pi \alpha}{l} x$$

a_k arbitraria, viene usata per la normalizzazione.

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

Le funzioni di Green sono:

$$G_F(t, x, \tau, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t-\tau)\right] \cdot$$

$$\cdot \cos \frac{k \pi \alpha}{l} x \cdot \cos \frac{k \pi \alpha}{l} \xi$$

$$G_I(t, x; t_0, \xi) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t-t_0)\right] \cdot \cos \frac{k \pi \alpha}{l} x \cdot \cos \frac{k \pi \alpha}{l} \xi$$

Per concludere con l'equazione di Fourier, consideriamo il caso di condizioni al contorno di tipo misto, le condizioni di flusso:

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = x \Delta T \quad -x \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = (-\alpha T + \alpha b_0(t)) \Big|_{z=0}$$

$$x \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = \alpha (b_1(t) - T) \Big|_{z=l}$$

Il problema agli autovalori associato è:

$$\frac{\partial^2 \phi_k(z)}{\partial z^2} = \lambda_k \phi_k(z)$$

con condizioni al contorno:

$$x \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha \phi_k(t, z) \Big|_{z=0}$$

$$x \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \Big|_{z=l} = -\alpha \phi_k \Big|_{z=l}$$

Scegliamo come soluzione:

$$\phi_k = a_k \cos \mu_k z + b_k \sin \mu_k z \quad \text{dove} \quad -\frac{c_p}{x} \mu_k^2 = \lambda_k$$

che sostituita nelle condizioni al contorno dice che

μ_k è soluzione dell'equazione:

$$\cotg \mu_k l = -\left(\frac{\alpha}{x \mu_k} + x \frac{\mu_k^2}{\alpha} \right)$$

e che:

$$\phi_k(z) = \left(\frac{x \mu_k}{\alpha^2} \cos \mu_k z + \sin \mu_k z \right) b_k$$

L'insieme delle $\phi_k(z)$ forma un insieme ortogonale discreto, b_k viene usato per normalizzare a 1 le funzioni:

$$b_k^2 \left\{ \frac{x^2 \mu_k}{\alpha^2} \frac{1}{2} \left(l + \frac{\sin 2l}{2} \right) + \frac{1}{2 \mu_k} \left(l - \frac{\sin 2l}{2} \right) + \frac{x}{2 \alpha} (1 - \cos 2l) \right\} = 1$$

Sinteticamente scriviamo :

$$\phi_k = C_k \left(\frac{x \mu_k}{\alpha} \cos \mu_k x + \sin \mu_k x \right)$$

Queste funzioni sono utilizzate per trovare le funzioni di Green , e quindi per risolvere il problema di controllo ottimale .

Se avessimo avuto invece dell'equazione del calore , la equazione delle onde , si sarebbe potuto procedere come prima nel maneggiare le funzioni di Green .

La differenza sostanziale con il caso dell'equazione del calore è che :

$$S_x^+ = - S_x$$

(ricordiamo che si usa il sistema :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \bar{v}$$

e non la vera equazione delle onde : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$)

L'equazione per il campo coniugato è :

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = S_x \bar{y}$$

- 6 - Un esempio di controllo sul contorno

Adesso mostriamo con un esempio come il dynamic programming può essere usato per trovare il controllo ottimale, controllo che questa volta agisce solo sul contorno e che trasferisce il sistema in uno stato desiderato, al tempo fissato t_1 , usando il minimo sforzo.

Questo esempio è tratto dal Brogan (6).

Prendiamo l'equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condizioni al contorno:

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = f(t)$$

con condizione iniziale: $u(t_0, x) = u_0(x)$

$f(t)$ è il controllo. Si vuole che:

$$C = \int_{t_0}^{t_1} f^2(t) dt = \text{minimo}$$

Si può riscrivere l'equazione come:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 \delta'(x-l) f(t)$$

e il funzionale da minimizzare:

$$C = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l f^2(t) \delta(x-l) dx dt$$

L'hamiltoniana del problema è:

$$H = \int_0^l \left\{ f^2(t) \delta(x-l) + Y(t, x) \left[\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 \delta'(x-l) f(t) \right] \right\} dx$$

Il controllo ottimale è quel controllo tale che:

$$\frac{\partial H}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \left\{ f^2 - \alpha^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} \cdot f(t) \right\} = 0$$

quindi:

$$f^0 = \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} Y \right) \Big|_{x=l}$$

Le equazioni canoniche sono allora :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\alpha^4}{2} \frac{\partial Y}{\partial z} \Big|_{z=l} \delta'(x-l) \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = -\alpha^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \end{cases} + \begin{matrix} u(t_0, x) = u_0(x) \\ u(t_1, x) = u_d(x) \end{matrix}$$

sistema che può essere riscritto come :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condizioni al contorno :

$$u(t, 0) = 0$$

$$u(t, l) = \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial Y}{\partial z} \Big|_{z=l}$$

Il campo coniugato ha come equazione :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -\alpha^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

e come condizioni al contorno :

$$Y(t, 0) = 0, \quad Y(t, l) = 0$$

Le condizioni iniziali sono :

$$u(t_0, x) = u_0(x)$$

$$u(t_1, x) = u_d(x)$$

Rendendo stabile l'equazione per le Y e indicando con $Y_0(x) = Y(t_1, x)$ si ottiene :

$$Y(t, x) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t)\right] \sin \frac{k \pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{k \pi z}{l} Y_0(z) dz$$

e quindi il controllo ottimale è :

$$f^0(t) = -\frac{\alpha^2}{e^2} \pi \sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^{k+1} \exp\left[-\frac{k^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} (t_1 - t)\right] \cdot \int_0^l \sin \frac{k \pi z}{l} Y_0(z) dz$$

Ma noi conosciamo lo stato finale per il campo $u_d(x) = u(x, t_1)$:

$$(*) \quad u_d(x) = \frac{2\alpha^2\pi}{\ell^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \int_{t_0}^{t_1} \exp\left[-\frac{k^2\alpha^2\pi^2}{\ell^2}(t_1-\tau)\right] f^0(\tau) d\tau$$

Infatti se riscriviamo l'equazione di Fourier con l'operatore esteso, otteniamo un termine forzante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 \delta'(x-\ell) f(t)$$

Si può allora scrivere la funzione di Green per il termine forzante come :

$$G_f = -\alpha^2 \left(\frac{\partial G}{\partial z} (t, x; \tau, z) \right)_{x=\ell}$$

Moltiplicando entrambi i lati dell'equazione (*) per $\frac{2}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell}$ e integrando rispetto a x da 0 a ℓ si ottiene (indicando con d_k i coefficienti di Fourier di $u_d(x)$):

$$d_k = \frac{2\alpha^2\pi}{\ell^2} k (-1)^{k+1} \int_{t_0}^{t_1} \exp\left[-\frac{k^2\alpha^2\pi^2}{\ell^2}(t_1-\tau)\right] f^0(\tau) d\tau$$

che è un insieme infinito di equazioni a cui deve soddisfare $f^0(\tau)$. Per risolvere qualsiasi problema particolare è quindi necessario ricorrere a metodi numerici.

Una via numerica è mostrata da Brogan stesso (6).

Il problema non si può risolvere troncando la serie di $u_d(x)$ perchè gli zeri al lato sinistro dell'equazione sono altrettanto restrittivi come i termini diversi da zero.

- 7 - Un caso particolare

Ci si può chiedere quali siano i metodi per trattare i problemi di controllo ottimale nel caso in cui il sistema non sia descritto da equazioni del tipo :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = S_x \bar{\Phi}$$

I primi a studiare sistemi distribuiti di questo tipo sono stati Yegorov e Sirazetdikov .

Essi hanno studiato un processo nella regione D ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) descritto dall'equazione :

$$(*) \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x \partial y} = f_i(x, y, \bar{Q}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}, \bar{u}) \quad i=1 \dots M$$

dove :

$$\bar{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \quad \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial Q_n}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial Q_n}{\partial y} \right)$$

\bar{u} è il vettore di controllo a r-dimensioni .

Le condizioni al contorno in questo tipo di problema sono del tipo :

$$Q_i(0, y) = \varphi_i(y)$$

$$Q_i(x, 0) = \psi_i(x) \quad i=1 \dots M$$

per cui deve essere : $Q_i(0, 0) = \varphi_i(0) = \psi_i(0)$

$$i=1 \dots M$$

Quando φ_i e ψ_i sono specificati la soluzione del (*) è determinata .

Bisogna trovare il controllo $\bar{u}(x, y)$ tale che sia massimo :

$$J = \sum_{i=1}^M c_i Q_i(a, b)$$

Se si vuole massimizzare :

$$J_1 = \iint_D f_0(x, y, \bar{Q}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}, \bar{u}) dx dy$$

dobbiamo introdurre il campo : $Q_0(x, y)$

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x \partial y} = f_0(x, y, \bar{Q}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}, \bar{u})$$

$$Q_0(0, y) = Q_0(x, 0) = 0$$

Allora il problema di massimizzare J_1 è ridotto a massimizzare $J_2 = Q_0(a, b)$ con $c = -1$, $c_2 = c_3 = \dots = 0$ e così via per qualsiasi tipo di funzionale J che si può avere .

Introduciamo la funzione :

$$H(N, \bar{Q}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}, \bar{u}) = \sum_{i=1}^m N_i \cdot f_i(x, y, \bar{Q}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y}, \bar{u})$$

dove :
$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} = \frac{\partial H}{\partial Q_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial Q_{ix}} - \frac{d}{dy} \frac{\partial H}{\partial Q_{iy}}$$

con condizioni al contorno :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{iy}} & a \quad y=b \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{ix}} & a \quad x=a \end{cases} \quad N_i(a, b) = -C_i$$

Se $\bar{u}(x, y)$ è un controllo ottimale e $\bar{Q}^0(x, y)$ e $\bar{N}^0(x, y)$ sono le funzioni corrispondenti a questo controllo ottimale , allora la funzione H come funzione dell'argomento \bar{u} raggiunge il suo massimo nella regione U a cui appartiene \bar{u} per $\bar{u} = \bar{u}^0$.

Per concludere abbiamo visto come si tratta una equazione parabolica (equazione del calore) , una iperbolica (equazione delle onde) e per finire una equazione ellittica .

PARTE TERZA

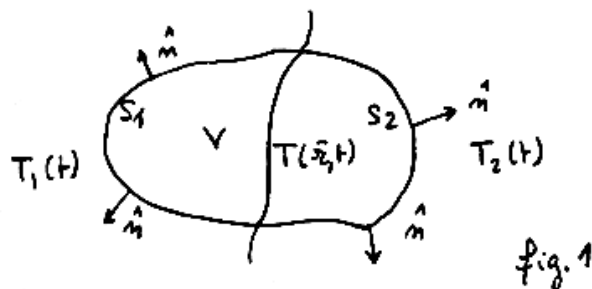
Applicazioni

Discutiamo innanzi tutto brevemente l'equazione del calore . Consideriamo un volume finito V chiuso da una superficie S divisa in due parti contigue S_1 e S_2 . Queste due superfici sono a contatto con due differenti sorgenti di calore a $T_1(t)$ e $T_2(t)$. Il campo delle temperature all'interno del volume V è descritto dall'equazione di

$$\text{Fourier : } \quad c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = x \Delta T$$

Con c si è indicato il calore specifico , con ρ la densità , con x la conducibilità termica .

Oltre all'equazione ho bisogno delle appropriate condizioni al contorno .



Le condizioni al contorno possono essere :

$$(1) \quad \begin{aligned} T(\bar{r}_{S_1}, t) &= T_1(t) \\ T(\bar{r}_{S_2}, t) &= T_2(t) \end{aligned}$$

oppure

$$(2) \quad \begin{aligned} -x \cdot \bar{\nabla} T(\bar{r}_{S_1}, t) \cdot \bar{n} &= -\alpha_1 (T_1(t) - T(\bar{r}_{S_1}, t)) \\ -x \cdot \bar{\nabla} T(\bar{r}_{S_2}, t) \cdot \bar{n} &= -\alpha_2 (T_2(t) - T(\bar{r}_{S_2}, t)) \end{aligned}$$

La condizione al contorno (1) è una condizione di Dirichlet, invece la (2) è una condizione al contorno mista.

Ricordiamo che la condizione al contorno di Neumann è :

$$\bar{\nabla} T(\bar{r}_{S_1}, t) \cdot \bar{n} = f_1(t)$$

$$\bar{\nabla} T(\bar{r}_{S_2}, t) \cdot \bar{n} = f_2(t)$$

dove $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono delle funzioni date.

La condizione al contorno (2) è una condizione fisica.

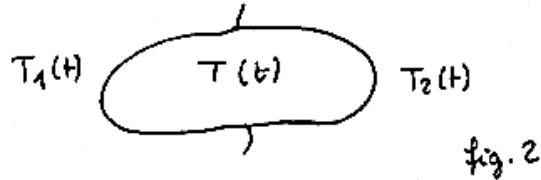
Essa rappresenta il passaggio di calore per convezione dal corpo all'ambiente. Il coefficiente α non è tanto una caratteristica del fluido che è a contatto con il corpo, ma dipende dalle condizioni di moto (se turbolento o no) dello strato limite.

Un'altra possibile condizione al contorno è quella radiativa; in questo caso :

$$(3) \quad \begin{aligned} -x \cdot \bar{\nabla} T(\bar{r}_{S_1}, t) \cdot \bar{n} &= \hat{T}_1^4 f_1(t) - \sigma T^4(\bar{r}_{S_1}, t) \\ -x \cdot \bar{\nabla} T(\bar{r}_{S_2}, t) \cdot \bar{n} &= \hat{T}_2^4 f_2(t) - \sigma T^4(\bar{r}_{S_2}, t) \end{aligned}$$

In genere, in condizioni realistiche, dovrà avere una combinazione delle condizioni al contorno (2) e (3).

Ora ci vogliamo chiedere il significato di una situazione del genere :



dove la temperatura del corpo è assunta essere uniforme e dipendente solo dal tempo .

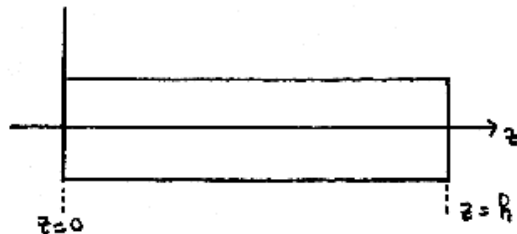
Discutiamo l'equazione di Fourier nel caso unidimensionale :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

con condizioni al contorno :

$$x \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\alpha_s (T_1(t) - T(0,t))$$

$$x \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = \alpha_d (T_2(t) - T(h,t))$$



Facciamone il bilancio sul volume :

$$c\rho \int_0^h \frac{\partial T}{\partial t} dz = x \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=h} - x \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0}$$

$$\dot{E}(t) = \phi^s(t) - \phi^d(t)$$

dove :

$$\dot{E}(t) = c\rho \int_0^h \frac{\partial T}{\partial t} dz = c\rho \frac{\partial}{\partial t} \langle T \rangle_z$$

$$\phi^s(t) = -x \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} ; \quad \phi^d(t) = -x \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h}$$

Consideriamo il caso in cui i bagni termici 1 e 2, abbiano un andamento periodico :

$$T_1(t + \tau_1) = T_1(t)$$

$$T_2(t + \tau_2) = T_2(t)$$

Chiamiamo τ il minimo comune multiplo e $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$

Allora :

$$T_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k e^{ik\omega t} \right\}$$

$$T_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k e^{ik\omega t} \right\}$$

Dato che T_1 e T_2 sono reali :

$$l_k^* = l_{-k} \quad ; \quad r_k^* = r_{-k}$$

Sviluppiamo $T(z, t)$ in serie di Fourier :

$$T(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \Lambda z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(z) e^{ik\omega t} \right\}$$

che inserita nella $c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$ fornisce :

$$v_k'' = i \frac{k\omega c_p}{\kappa} v_k(z)$$

$$v_k(z) = \Gamma_k e^{\mu_k z} + \Delta_k e^{-\mu_k z}$$

dove : $\mu_k = (1+i) \sqrt{\frac{k\omega c_p}{2\kappa}}$

La soluzione è :

$$T(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (\Gamma_0 + \Delta_0) + \Lambda z + \sum_{k \neq 0} \left[\Gamma_k e^{\mu_k z} + \Delta_k e^{-\mu_k z} \right] e^{ik\omega t} \right\}$$

i coefficienti $\Gamma_0, \Delta_0, \Gamma_k, \Delta_k$ e Λ si ricavano dalle condizioni al contorno .

si ottiene :

$$\Gamma_0 + \Delta_0 = T_e + \frac{x \alpha_2 (T_2 - T_e)}{x(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2 R}$$

$$\Lambda = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (T_2 - T_e)}{x(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2 R}$$

$$\Gamma_k = \frac{\alpha_2 (\alpha_1 + \eta_k) \pi_k - \alpha_1 \rho_k (\alpha_2 - \eta_k) e^{-\mu_k R}}{(\alpha_1 + \eta_k)(\alpha_2 + \eta_k) e^{\mu_k R} - (\alpha_1 - \eta_k)(\alpha_2 - \eta_k) e^{-\mu_k R}}$$

$$\Delta_k = - \frac{\alpha_1 \pi_k (\alpha_1 - \eta_k) - \alpha_1 (\alpha_2 + \eta_k) \rho_k e^{\mu_k R}}{(\alpha_1 + \eta_k)(\alpha_2 + \eta_k) e^{\mu_k R} - (\alpha_1 - \eta_k)(\alpha_2 - \eta_k) e^{-\mu_k R}}$$

dove : $\eta_k = x \mu_k = x(1+i) \sqrt{\frac{k \omega c \rho}{2x}}$

Supponiamo ora che $x \rightarrow \infty$, allora :

$$\Lambda \rightarrow 0$$

$$(\Gamma_k e^{\mu_k z} + \Delta_k e^{-\mu_k z}) \rightarrow \beta_k = \text{cost.}$$

$$T(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_e + \frac{\alpha_2 (T_2 - T_e)}{\alpha_1 + \alpha_2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{i k a t} \right\}$$

Il bilancio sul volume diventa :

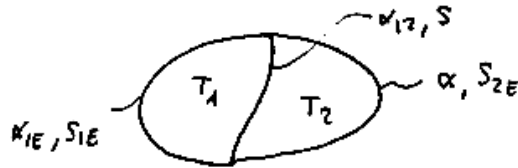
$$C \dot{T} = \alpha_1 (T_1(t) - T(t)) - \alpha_2 (T(t) - T_2(t))$$

dove $C = c \rho h$

$$T(z, t) = T(t)$$

Quindi abbiamo giustificato la fig.(2) come una approssimazione per $x \rightarrow \infty$ di $T(z, t)$.

Iniziamo col discutere un sistema molto semplice :



Considero trascurabile la distribuzione spaziale del sistema :

$$T(z,t) = T(t)$$

dove con z si è indicato l'insieme (x,y,z) .

α è la funzione di controllo del sistema che può variare tra un valore massimo α_{max} e un valore minimo α_{min} .

Supponiamo inoltre che T_E sia disaccoppiata da T_1 e T_2 ; in generale la T_E avrà un andamento periodico .

Le temperature T_1 e T_2 obbediscono al sistema :

$$\begin{aligned} C_1 \dot{T}_1 &= \alpha_{1E} S_{1E} (T_E - T_1) + \alpha_{12} S (T_2 - T_1) \\ C_2 \dot{T}_2 &= \alpha_{12} S (T_1 - T_2) + \alpha \cdot S_{2E} (T_E - T_2) \end{aligned}$$

Ora chiedo di trovare la $\alpha(t)$ che regola gli scambi di calore tra la parte 2 del sistema e l'esterno , tale che :

$$\int_0^T (T_2(t) - T_B)^2 dt$$

sia minimo . T_B è la temperatura desiderata .

Introduco la variabile T_o .

$$T_o = \int_0^t (T_2 - T_B)^2 dt$$

che ha come equazione : $\dot{T}_o = (T_2 - T_B)^2 = f^o$

L'hamiltoniana di Pontryagin è :

$$H = \psi_0 \cdot f^0 + \psi_1 \cdot f^1 + \psi_2 \cdot f^2 = \sum_{\alpha=0}^2 \psi_{\alpha} \cdot f^{\alpha}$$

dove f^1 e f^2 sono :

$$\dot{T}_1 = f_1 = \frac{\alpha_{1E} S_{1E}}{C_1} (T_E - T_1) + \frac{\alpha_{12} S}{C_1} (T_2 - T_1)$$

$$\dot{T}_2 = f_2 = \frac{\alpha_{12} S}{C_2} (T_1 - T_2) + \alpha \frac{S_{2E}}{C_2} (T_E - T_2)$$

Le ψ_0, ψ_1, ψ_2 sono le soluzioni del sistema :

$$\dot{\psi}_0 = 0$$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\alpha_{1E} S}{C_1} \psi_1 + \frac{\alpha_{12} S}{C_1} \psi_1 - \frac{\alpha_{12} S}{C_2} \psi_2$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\alpha S_{2E}}{C_2} \psi_2 + \frac{\alpha_{12} S}{C_2} \psi_2 - \frac{\alpha_{12} S}{C_1} \psi_1 - 2(T_2 - T_B) \psi_0$$

In genere si pone $\psi_0 = -1$, dato che il teorema di Pontryagin dice che ψ_0 deve essere una costante negativa. L'hamiltoniana la riscrivo come :

$$H = \bar{H} + \frac{\alpha S_{2E}}{C_2} (T_E - T_2) \psi_2$$

L'hamiltoniana è massima quando :

$$\alpha = \begin{array}{ll} \alpha \text{ min} & \text{se } \psi_2 (T_E - T_2) < 0 \\ \alpha \text{ max} & \text{se } \psi_2 (T_E - T_2) > 0 \end{array}$$

il problema è un problema di tipo bang-bang.

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \frac{\alpha_{1E} S_{1E}}{C_1} (T_E - T_1) \cdot \psi_1 + \frac{\alpha_{12} S}{C_1} (T_2 - T_1) \cdot \psi_1 + \\ & + \frac{\alpha_{12} S}{C_2} (T_1 - T_2) \cdot \psi_2 - (T_2 - T_B)^2 \end{aligned}$$

Invece di usare Pontryagin potrei usare il dynamic programming . Il sistema è come prima :

$$\begin{cases} \dot{T}_1 = \frac{\alpha_{1E} S}{c_1} (T_E - T_1) + \frac{\alpha_{12} S}{c_1} (T_2 - T_1) \\ \dot{T}_A = \frac{\alpha_{12} S}{c_2} (T_1 - T_2) + \frac{\alpha_{S2E}}{c_2} (T_E - T_2) \end{cases}$$

L'hamiltoniana è :

$$H = \sum_{m=1}^2 \psi_m \cdot \dot{f}^m + (T_2 - T_B)^2$$

$$H = \left[\frac{\alpha_{1E} S}{c_1} (T_E - T_1) + \frac{\alpha_{12} S}{c_1} (T_2 - T_1) \right] \psi_1 + \left[\frac{\alpha_{12} S}{c_2} (T_1 - T_2) + \frac{\alpha_{S2E}}{c_2} (T_E - T_2) \right] \psi_2 + (T_2 - T_B)^2$$

Il sistema delle ψ è :

$$\dot{\psi}_1 = \frac{\alpha_{1E} S}{c_1} \psi_1 + \frac{\alpha_{12} S}{c_1} \psi_1 - \frac{\alpha_{12} S}{c_2} \psi_2$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\alpha_{S2E}}{c_2} \psi_2 + \frac{\alpha_{12} S}{c_2} \psi_2 - \frac{\alpha_{12} S}{c_1} \psi_2 - 2 (T_2 - T_B)$$

L'hamiltoniana può essere riscritta come :

$$H = \bar{H} + \alpha \frac{S_{2E}}{c_2} (T_E - T_2) \cdot \psi_2$$

L'hamiltoniana deve essere minima per avere il controllo ottimale :

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{max} & \psi_2 (T_E - T_2) < 0 \\ \alpha_{min} & \psi_2 (T_E - T_2) > 0 \end{cases}$$

È interessante ricercare il regime stazionario per questo sistema controllato . Con regime stazionario si intende il regime periodico per la soluzioni :

$$T_1(t+\tau) = T_1(t)$$

$$T_2(t+\tau) = T_2(t)$$

dove τ è il periodo della T_E .

Scegliamo di studiare il problema con il dynamic programming . Il controllo è :

$$(3) \quad \alpha(t) = a - b \operatorname{segn} [(T_E(t) - T_2(t)) \cdot \psi_2(t)]$$

dove a e b sono tali che $a+b = \alpha_{\max}$ e $a-b = \alpha_{\min}$.

Il controllo deve essere periodico per avere soluzioni periodiche .

Vediamo come si può trovare l'andamento rispetto al tempo della funzione di controllo . Si incominci col supporre α costante , per esempio uguale ad α_{\min} . Con i sistemi per le T_i e per le ψ_i si ottengono $T_2^0(t)$ e $\psi_2^0(t)$.

Sostituiti questi valori nella (3) , si ottiene una soluzione approssimata per la $\alpha(t)$:

$$\alpha^{(1)}(t) = a - b \operatorname{segn} [(T_E(t) - T_2^0(t)) \cdot \psi_2^0(t)]$$

Ottenuta la $\alpha^{(1)}(t)$, questa viene usata per calcolare $\psi_2^{(1)}$ e $T_2^{(1)}$ che si sostituiscono nella (3) ottenendo $\alpha^{(2)}(t)$.

Si ottengono così valori sempre più vicini alla soluzione vera .

Un'altra via da seguire potrebbe essere questa : $\alpha(t)$ è una funzione a tratti costante , avrà quindi un certo numero di punti di discontinuità ai tempi $t = \theta_i$, $i=1 \dots n$.

Per esempio , supponiamo che abbia due punti di discontinuità ; si può scrivere un'espressione analitica per la $\alpha(t)$, funzione di θ_1 e θ_2 . Ma i valori di θ_1 e θ_2 sono le incognite del nostro problema .

L'argomento però della funzione segno è uguale a zero nei punti di discontinuità di α :

$$\begin{aligned} [T_E(\theta_1) - T_2(\theta_1)] \cdot \Psi_2(\theta_1) &= 0 \\ [T_E(\theta_2) - T_2(\theta_2)] \cdot \Psi_2(\theta_2) &= 0 \end{aligned}$$

che una volta risolte , forniscono i valori di θ_1 e θ_2 .

Questo metodo in genere sarà risolvibile graficamente .

Useremo il primo metodo per trovare il controllo ottimale .

Le soluzioni che si cercano sono quelle stazionarie :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{12\pi} \left\{ T_1^0 + T_1^k e^{ik\omega t} \right\} \\ T_2 &= \frac{1}{12\pi} \left\{ T_2^0 + T_2^k e^{ik\omega t} \right\} \end{aligned}$$

dove è sottintesa la sommatoria sulle k . K è un intero negativo e positivo . Inoltre : $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$

τ è il periodo della T_E .

$$T_E = \frac{1}{12\pi} \left\{ T_E^0 + T_E^k e^{ik\omega t} \right\}$$

T_E è una funzione reale e quindi deve essere :

$$T_{-k}^E = (T_k^E)^*$$

Anche T_1 e T_2 devono essere funzioni reali, e quindi deve essere :

$$T_{-k}^1 = (T_k^1)^*$$

$$T_{-k}^2 = (T_k^2)^*$$

Sostituite nel sistema (considero per ora α costante) :

$$\frac{C_1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_k^1 ik\omega e^{ik\omega t} \right\} = \frac{\alpha_1 \epsilon S}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^E - T_0^1 + (T_k^E - T_k^1) e^{ik\omega t} \right\} + \frac{\alpha_{12} S}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^2 - T_0^1 + (T_k^2 - T_k^1) e^{ik\omega t} \right\}$$

$$\frac{C_2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_k^2 ik\omega e^{ik\omega t} \right\} = \frac{\alpha_{12} S}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^1 - T_0^2 + (T_k^1 - T_k^2) e^{ik\omega t} \right\} + \frac{\alpha S_2 \epsilon}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^E - T_0^2 + (T_k^E - T_k^2) e^{ik\omega t} \right\}$$

Moltiplichiamo per $e^{-ik\omega t}$ e integriamo sul periodo τ .

Si ottiene per $k=0$:

$$0 = \alpha_1 \epsilon S (T_0^E - T_0^1) + \alpha_{12} S (T_0^2 - T_0^1)$$

$$0 = \alpha_{12} S (T_0^1 - T_0^2) + \alpha S_2 \epsilon (T_0^E - T_0^2)$$

Risolvendo questo sistema algebrico :

$$T_0^A = T_0^E$$

$$T_0^1 = T_0^A = T_0^E$$

Se invece $k \neq 0$:

$$c_1 T_k^1 i k \omega = \alpha_{1E} S (T_k^E - T_k^1) + \alpha_{12} S (T_k^2 - T_k^1)$$

$$c_2 T_k^2 i k \omega = \alpha_{12} S (T_k^1 - T_k^2) + \alpha_{2E} S (T_k^E - T_k^2)$$

Si ottiene :

$$T_k^2 = T_k^E \cdot \frac{a+ib}{c+id}$$

$$a = \alpha_{12} \cdot \alpha_{1E} \cdot S^2 + \alpha_{1E} \cdot \alpha_{2E} \cdot S + \alpha_{12} \cdot \alpha_{2E} \cdot S \cdot S_{2E}$$

$$b = c_1 k \omega \cdot \alpha_{2E} S$$

$$c = -c_2 \cdot c_1 k^2 \omega^2 - \alpha_{12}^2 \cdot S^2 + \alpha_{12} \alpha_{1E} S^2 + \alpha_{12}^2 S^2 + \alpha_{1E} \alpha_{2E} S + \alpha_{2E} \cdot \alpha_{12} S$$

$$d = c_2 k \omega \alpha_{1E} S + c_2 k \omega \alpha_{12} S + c_1 k \omega \alpha_{12} S + \alpha_{2E} c_1 k \omega$$

Si verifica immediatamente che :

$$T_{-k}^A = (T_k^A)^*$$

$$T_k^1 = \frac{\alpha_{12} S}{i c_1 k \omega + \alpha_{1E} S + \alpha_{12} S} \cdot T_k^E \frac{a+ib}{c+id} +$$

$$+ \frac{\alpha_{1E} S}{i c_1 k \omega + \alpha_{1E} S + \alpha_{12} S} \cdot T_k^E$$

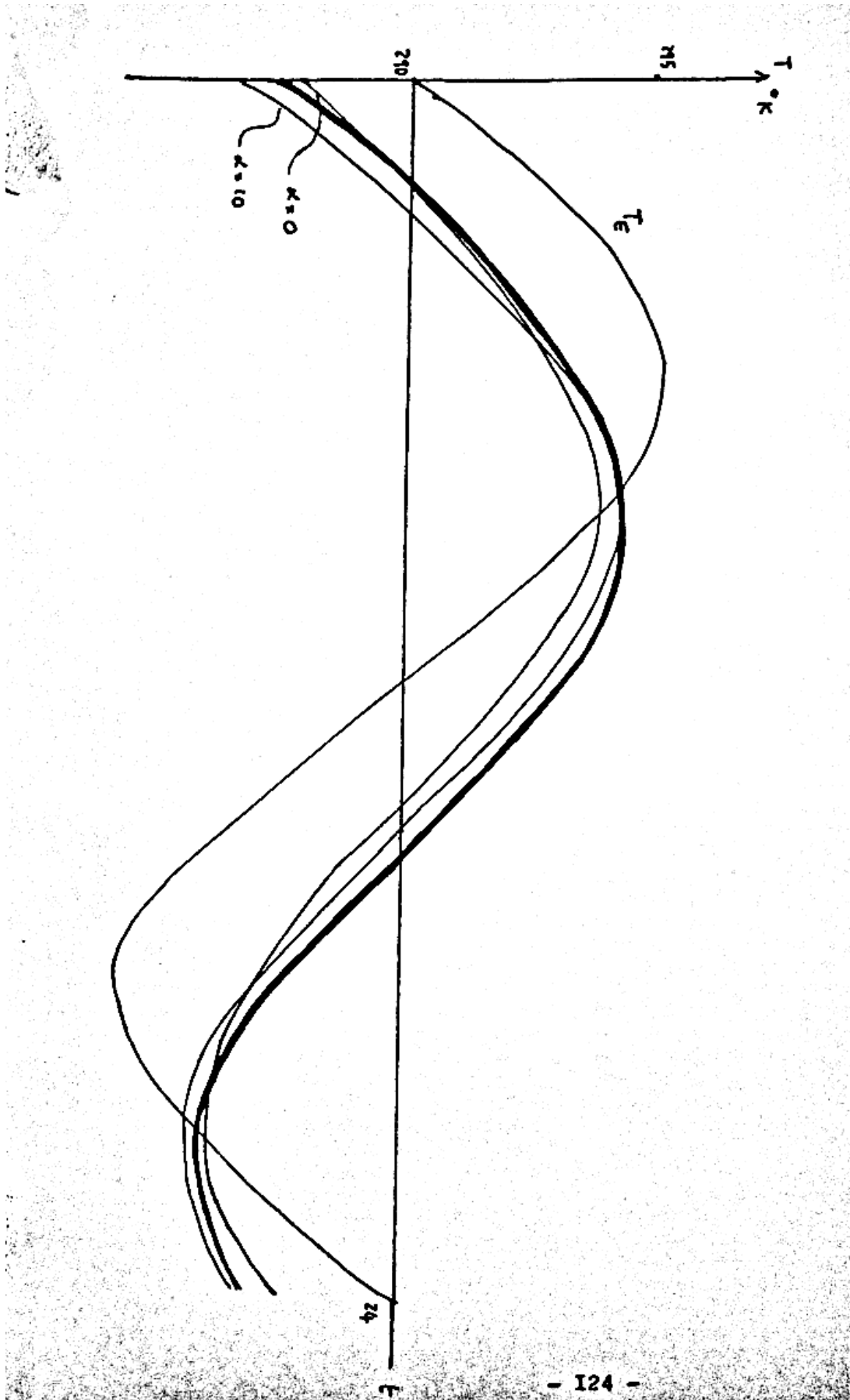
Dopo aver trovato T^2 per α costante, si trova l'andamento della curva controllata nella maniera che si è esposta in precedenza. La figura nella pagina seguente mostra la curva controllata (curva più spessa) e le curve per α costante. I dati sono :

$$\alpha_{1E} = \alpha_{12} = 10 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

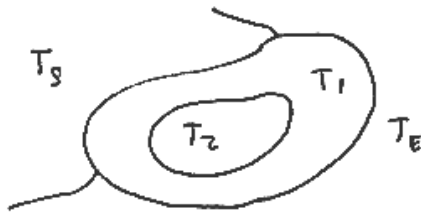
$$S = 200 m^2$$

$$c_1 = c_2 = 10^7 J / ^\circ K$$

$$S_{2E} = 30 m^2$$



Cambiamo topologia :



Il sistema è :

$$c_1 \dot{T}_1 = \alpha_{1S} S_{1S} (T_S - T_1) + \alpha_{1E} S_{1E} (T_E - T_1) + \alpha_{12}(t) S_{12} (T_2 - T_1)$$

$$c_2 \dot{T}_2 = \alpha_{12} S_{12} (T_1 - T_2)$$

dove α_{12} è la funzione di controllo, compresa tra un α_{12}^{\min} minimo α_{12}^{\max} e un massimo.

Vogliamo che $\int_0^T (T_2 - T_B)^2 dt = \text{minimo}$, dove T_B è una temperatura costante arbitraria. In genere T_E e T_S sono periodiche. Cerchiamo le soluzioni periodiche di T_1 e T_2 .

$$c_1 T_k^1 e^{ik\omega t} = \alpha_{1S} S_{1S} (T_0^S - T_0^1 + T_k^S e^{ik\omega t} - T_k^1 e^{ik\omega t}) +$$

$$+ \alpha_{1E} S_{1E} (T_0^E - T_0^1 + T_k^E e^{ik\omega t} - T_k^1 e^{ik\omega t}) +$$

$$+ \alpha_{12} S_{12} (T_0^2 - T_0^1 + T_k^2 e^{ik\omega t} - T_k^1 e^{ik\omega t})$$

$$c_2 T_k^2 e^{ik\omega t} = \alpha_{12} S_{12} (T_0^1 - T_0^2 + T_k^1 e^{ik\omega t} - T_k^2 e^{ik\omega t})$$

Per $k=0$

$$0 = \alpha_{1S} S_{1S} (T_0^S - T_0^1) + \alpha_{12} S_{12} (T_0^2 - T_0^1) + \alpha_{1E} S_{1E} (T_0^E - T_0^1)$$

$$0 = \alpha_{12} S_{12} (T_0^1 - T_0^2)$$

$$T_0^2 = T_0^1 = \frac{\alpha_{1S} S_{1S} T_0^S + \alpha_{1E} S_{1E} T_0^E}{\alpha_{1S} S_{1S} + \alpha_{1E} S_{1E}}$$

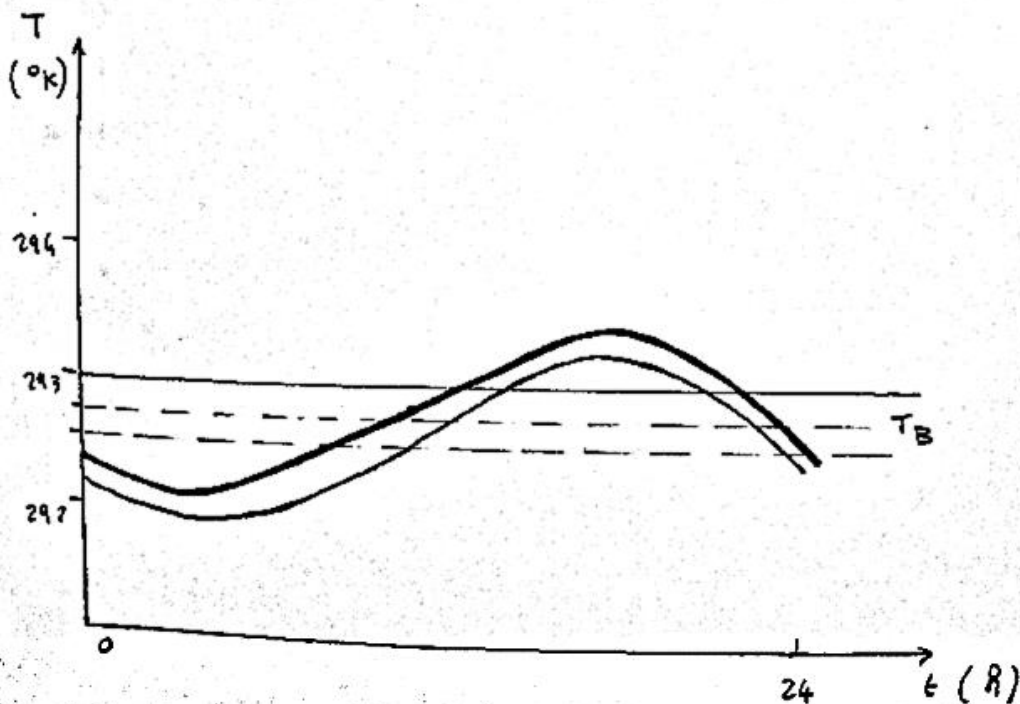
Per $k \neq 0$

$$c_1 T_K^1 \text{ iKW} = \alpha_{1E} S_{1E} (T_E^E - T_K^1) + \alpha_{1S} S_{1S} (T_E^S - T_K^1) + \alpha_{12} S_{12} (T_K^1 - T_K^2)$$

$$c_2 T_K^2 \text{ iKW} = \alpha_{12} S_{12} (T_K^1 - T_K^2)$$

$$T_K^1 = \frac{\alpha_{1E} S_{1E} T_E^E + \alpha_{1S} S_{1S} T_E^S}{c_1 \text{ iKW} + \alpha_{1E} S_{1E} + \alpha_{1S} S_{1S} + \alpha_{12} S_{12} - \frac{(\alpha_{12} S_{12})^2}{c_2 \text{ iKW} + \alpha_{12} S_{12}}}$$

$$T_K^2 = T_K^1 (\alpha_{12} S_{12}) \cdot \frac{1}{c_2 \text{ iKW} + \alpha_{12} S_{12}}$$



La figura nella pagina precedente, mostra l'andamento della T_2 sotto l'influenza del controllo ottimale (curva più spessa) e per $\alpha = \alpha_{min}$.

Le due curve si discostano di poco. Ma bisogna notare l'andamento leggermente più angoloso della curva controllata.

Questo è dovuto alle discontinuità del controllo.

I dati per ricavare questo grafico sono:

$$C_1 = 10^8 \text{ J/}^\circ\text{K}$$

$$C_2 = 10^7 \text{ J/}^\circ\text{K}$$

$$S_{1E} = 80 \text{ m}^2, \quad S_{12} = 200 \text{ m}^2, \quad S_{1E} = 200 \text{ m}^2$$

$$\alpha_{1E} = \alpha_{1S} = 10 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}, \quad \alpha_{min} = 1 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}, \quad \alpha_{max} = 10 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

$$T_E = (290 + 5 \sin \omega t) ^\circ\text{K}$$

$$T_S = (310 + 5 \sin \omega t) ^\circ\text{K} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{24} \text{ A}$$

Il valor medio di T_2 non controllato è uguale a $292.6 ^\circ\text{K}$ mentre quello controllato è $292.74 ^\circ\text{K}$

Per altri risultati e grafici per sistemi di questo tipo, si possono vedere gli articoli (9), (10).

Infine si può considerare il sistema non lineare :

$$C \dot{T} = S \alpha(t) (\hat{T}^4 - T^4)$$

che è l'equazione limite per l'equazione di Fourier con condizioni al contorno radiative . Sia $\alpha(t)$ il controllo . Si vuole che :

$$J = \int_0^T (T - T_B)^2 dt = \text{minimo}$$

L'hamiltoniana è : $H = \frac{S}{C} \alpha(t) (\hat{T}^4 - T^4) \cdot \gamma + (T - T_B)^2 \cdot \frac{1}{C}$

Il sistema coniugato :

$$\dot{\gamma} = 4 \frac{\alpha}{C} S \cdot T^3 \cdot \gamma - 2 (T - T_B) \frac{1}{C}$$

Il problema è di tipo bang-bang .

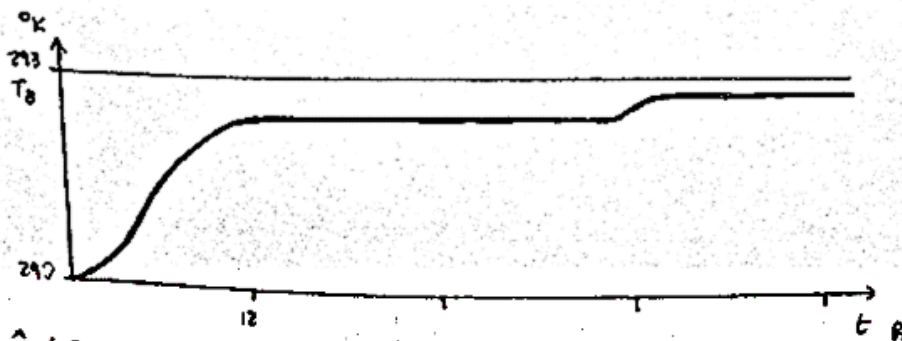
$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{min} & \text{se } (\hat{T}^4 - T^4) \cdot \gamma > 0 \\ \alpha_{max} & \text{se } (\hat{T}^4 - T^4) \cdot \gamma < 0 \end{cases}$$

ossia : $\alpha = a - b \operatorname{segn} [(\hat{T}^4 - T^4) \cdot \gamma] ; a > 0, b > 0$.

notiamo che : $\operatorname{segn} ((\hat{T}^4 - T^4) \cdot \gamma) = \operatorname{segn} ((\hat{T} - T) \cdot \gamma)$

$$\hat{T}^4 - T^4 = (\hat{T}^2 - T^2)(\hat{T}^2 + T^2) = (\hat{T} - T) \underbrace{(\hat{T} + T)(\hat{T}^2 + T^2)}_{> 0}$$

Risolvendo numericamente il sistema si ottiene l'andamento mostrato in figura :



$$\hat{T} = (292 + 5 \sin \omega t) \text{ K}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \text{ h}}$$

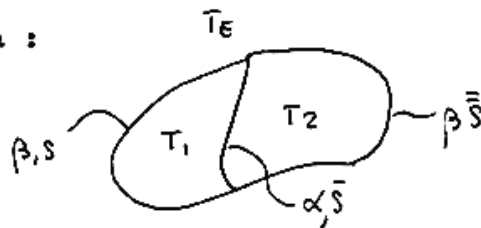
$$C = 10^7 \text{ J/K}$$

Finora abbiamo esaminato i controlli a zero energia che sono quei controlli che modulano il flusso di energia ma che non intervengono nel bilancio energetico .

Questi controlli si possono chiamare deterministici in quanto sono controlli strettamente legati alla struttura del sistema che controllano : quindi la fisica del sistema ne limita il comportamento .

Oltre a questi controlli si possono avere i controlli liberi dove con liberi si intende controlli che rappresentano sorgenti di calore che noi possiamo manovrare a piacere .

Prendiamo il sistema :



$$C_1 \dot{T}_1 = \beta S (T_E - T_1) + \alpha \bar{S} (T_2 - T_1)$$

$$C_2 \dot{T}_2 = \alpha \bar{S} (T_1 - T_2) + \beta \bar{S} (T_E - T_2) + C_2 Q$$

Q è il controllo e rappresenta una sorgente di calore .

Richiediamo ora che sia :

$$J = \lambda^2 \int_0^T Q^2 dt + \int_0^T (T_2 - T_B)^2 dt = \text{minimo}$$

$\lambda^2 =$ costante dimensionata .

L'hamiltoniana del dynamic programming :

$$H = \left\{ \frac{\beta \bar{S}}{C_1} (T_E - T_1) + \frac{\alpha \bar{S}}{C_1} (T_2 - T_1) \right\} Y_1 + \left\{ \frac{\alpha \bar{S}}{C_2} (T_1 - T_2) + \frac{\beta \bar{S}}{C_2} (T_E - T_2) \right\} Y_2 + \lambda^2 Q^2 + (T_2 - T_B)^2$$

Il controllo ottimale è fornito da :

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 = 2 Q \lambda^2 + Y_2$$

$$Q = - \frac{Y_2}{2\lambda^2}$$

Il sistema da risolvere è :

$$\begin{cases} C_1 \dot{T}_1 = \beta \cdot \bar{S} (T_E - T_1) + \alpha \cdot \bar{S} (T_2 - T_1) \\ C_2 \dot{T}_2 = \alpha \bar{S} (T_1 - T_2) + \beta \cdot \bar{S} (T_E - T_2) - \frac{1}{2} Y_2 C_2 \frac{1}{\lambda^2} \\ \dot{Y}_1 = \beta \frac{\bar{S}}{C_1} Y_1 + \alpha \frac{\bar{S}}{C_1} Y_1 - \alpha \frac{\bar{S}}{C_2} Y_2 \\ \dot{Y}_2 = -\alpha \frac{\bar{S}}{C_1} Y_1 + \alpha \frac{\bar{S}}{C_2} Y_2 + \beta \frac{\bar{S}}{C_2} Y_2 - 2(T_2 - T_B) \end{cases}$$

Si cerca la soluzione periodica :

(quindi le Y devono essere periodiche)

$$T^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^1 + T_K^1 e^{ik\omega t} \right\}$$

$$T^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^2 + T_K^2 e^{ik\omega t} \right\}$$

$$T^E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^E + T_{Kc}^E e^{ik\omega t} \right\}$$

$$Y^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ Y_0^1 + Y_K^1 e^{ik\omega t} \right\}$$

$$Y^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ Y_0^2 + Y_K^2 e^{ik\omega t} \right\}$$

Notiamo che :

$$[Y^2] = [T] = \text{ok} ; [Q] = \frac{\text{ok}}{\text{sec.}} \rightarrow [\lambda^2] = \text{sec.}$$

Sostituire le soluzioni periodiche nel sistema (*)

si ottengono due sistemi .

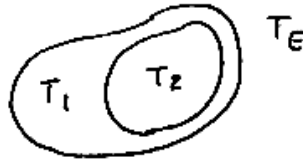
$$\begin{cases} 0 = \beta S (T_0^E - T_0) + \alpha \bar{S} (T_0^B - T_0) \\ 0 = \alpha \bar{S} (T_0 - T_0^B) + \beta \bar{S} (T_0^E - T_0) - \frac{1}{2} Y_0^2 \frac{C_2}{\lambda^2} \\ 0 = (\beta S + \alpha \bar{S}) C_2 Y_0^1 - \alpha \bar{S} C_1 Y_0^2 \\ 0 = (\alpha \bar{S} + \beta \bar{S}) C_1 Y_0^2 - \alpha \bar{S} C_2 Y_0^1 - 2 C_1 C_2 (T_0^B - T_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 i k \omega T_k^1 = \beta S (T_k^E - T_0) + \alpha \bar{S} (T_k^2 - T_k^1) \\ C_2 i k \omega T_k^2 = \alpha \bar{S} (T_k^1 - T_k^2) + \beta \bar{S} \cdot (T_k^E - T_k^2) - \frac{1}{2} Y_k^2 \frac{C_2}{\lambda^2} \\ Y_k^1 i k \omega C_1 C_2 = (\beta S + \alpha \bar{S}) C_2 Y_k^1 - \alpha \bar{S} C_1 Y_k^2 \\ Y_k^2 i k \omega C_1 C_2 = (\alpha \bar{S} + \beta \bar{S}) C_1 Y_k^2 - \alpha \bar{S} C_2 Y_k^1 - 2 T_k^2 \end{cases}$$

Risolvendo questi sistemi algebrici si ottengono i coefficienti degli sviluppi delle funzioni .

Inoltre si verifica che le funzioni sono reali .

Passiamo al sistema :



$$C_1 \dot{T}_1 = \bar{\alpha} \bar{S} (T_E - T_1) + \beta \bar{S} (T_2 - T_1)$$

$$C_2 \dot{T}_2 = \beta \bar{S} (T_1 - T_2) + Q C_2$$

Q è il controllo . Si richiede che sia :

$$J = \lambda^2 \int_0^T Q^2 + \int_0^T (T_2 - T_B)^2 c_2 dt = \text{minimo}$$

L'hamiltoniana del sistema è :

$$H = \left[\frac{\bar{\alpha} \bar{S}}{C_1} (T_E - T_1) + \frac{\beta \bar{S}}{C_1} (T_2 - T_1) \right] Y_1 + \\ + \left[\frac{\beta \bar{S}}{C_2} (T_1 - T_2) + Q \right] Y_2 + \lambda \left[Q^2 + (T_2 - T_B)^2 \right]$$

Il controllo ottimale è :

$$Q = - \frac{Y_2}{2\lambda^2}$$

Quindi il sistema da risolvere è :

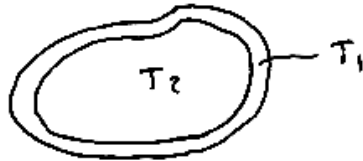
$$\dot{Y}_1 = \left(\frac{\bar{\alpha} \bar{S}}{C_1} + \frac{\beta \bar{S}}{C_1} \right) Y_1 - \frac{\beta \bar{S}}{C_2} Y_2$$

$$\dot{Y}_2 = - \frac{\beta \bar{S}}{C_1} Y_1 + \frac{\beta \bar{S}}{C_2} Y_2 - 2 (T_2 - T_B)$$

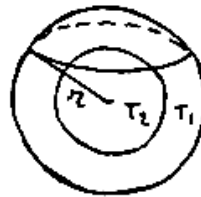
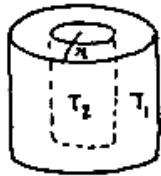
Se si cercano le soluzioni periodiche si può procedere come prima .

Vogliamo adesso esaminare un problema più complicato :
 il problema è quello di studiare il comportamento di un
 sistema distribuito accoppiato ad uno ordinario e con-
 trollato da un controllo libero .

Consideriamo una topologia del tipo :



dove adesso si vuole però considerare anche la distribu-
 zione spaziale dello strato esterno . Per semplicità però
 consideriamo solo una coordinata spaziale . Per esem-
 pio se abbiamo una simmetria cilindrica od una sferica :



l'unica coordinata che consideriamo è il raggio r .

In questi due casi potrei studiare il problema a tre
 dimensioni dato che il problema è separabile e sono no-
 te e ben studiate le autofunzioni .

La parte 1 del sistema è descritta dall'equazione di

Fourier :
$$c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}$$

con condizioni al contorno :
$$-\kappa \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta (T_E - T_1) \Big|_{z=0}$$

$$\kappa \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \alpha (T_2 - T_1) \Big|_{z=h}$$

In più ci saranno le condizioni iniziali .

La parte 2 del sistema invece supponiamo che sia descritta da un'equazione differenziale ordinaria :

$$C_2 \dot{T}_2 = \alpha S(T_1(R, t) - T_2(t))$$

Il controllo sia un controllo libero : una sorgente nella parte due del sistema .

$$\left\{ \begin{array}{l} c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \\ C_2 \dot{T}_2 = \alpha S(T_1(R, t) - T_2(t)) + F(t) \end{array} \right.$$

+ condizioni al contorno
+ condizioni iniziali

Si vuole che sia :

$$\int_0^T (T_2 - T_B)^2 dt + \lambda^2 \int_0^T F^2(t) dt = \text{minimo}$$

L'hamiltoniana del dynamic programming :

$$H = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{c_p} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \delta(z-R) \frac{\alpha}{c_p} (T_2 - T_1) + \frac{\alpha}{c_p} \delta(z) (T_E - T_1) \right\} \cdot Y_1 dz + \frac{\alpha}{c_2} S(T_1(R, t) - T_2) \cdot Y_2 + \frac{F}{c_2} Y_2 + (T_2 - T_B)^2 + \frac{F^2}{\lambda^2}$$

Il controllo ottimale è dato da :

$$\frac{\partial H}{\partial F} = 0 \quad \begin{array}{l} 2F = -\frac{Y_2}{c_2 \lambda^2} \\ F = -\frac{Y_2}{2c_2 \lambda^2} \end{array}$$

Il sistema coniugato è :

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta T}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi : } \frac{\partial Y_1}{\partial t} &= -\frac{\kappa}{c_p} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial z^2} + \delta(z-R) \frac{\alpha}{c_p} Y_1 + \frac{\alpha}{c_p} \delta(z) Y_1 + \\ &+ \delta(z-R) \frac{\alpha S}{c_2} Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= -\frac{\alpha}{c_p} Y_1 + \frac{\alpha S}{c_2} Y_2 - 2(T_2 - T_B) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_1}{\partial t} = -\frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial z^2} \\ \text{con le condizioni al contorno: } \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial Y_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\alpha \frac{Y_1}{c\rho} \\ \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial Y_1}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{\kappa}{c\rho} Y_1 - \frac{\kappa S}{c^2} Y_2 \\ \dot{Y}_2 = -\frac{\kappa}{c\rho} Y_1 + S \frac{\kappa}{c^2} Y_2 - 2(T_2 - T_B) \end{array} \right.$$

La T_E sia periodica .

Cerchiamo ora le soluzioni periodiche di questo sistema . Queste saranno della forma :

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \Lambda z + (\Gamma_0 + \Delta_0) + \sum_{k \neq 0} \left\{ \Gamma_k e^{\mu k^2} + \Delta_k e^{-\mu k^2} \right\} e^{ik\omega t} \right\}$$

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ T_0^2 + \sum_{k \neq 0} T_k^2 e^{ik\omega t} \right\}$$

Per avere soluzioni periodiche anche F deve essere periodica . Quindi anche la Y_1 . Ma visto che la Y_1 è legata tramite il sistema coniugato alla Y_2 , anche la Y_2 deve essere periodica .

Tenendo conto che l'equazione delle Y_i può essere riscritta come :

$$\frac{\partial Y_i}{\partial(T-t)} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial z^2}$$

prendiamo :

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \tilde{\Lambda} z + (F_0 + \tilde{\Delta}_0) + \sum_{k \neq 0} \left(\Gamma_k e^{\mu k^2} + \Delta_k e^{-\mu k^2} \right) e^{ik\omega(T-t)} \right\}$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ Y_0^2 + \sum_{k \neq 0} Y_k^2 e^{ik\omega(T-t)} \right\}$$

Sostituendo nei sistemi si ottiene un sistema algebrico per i coefficienti degli sviluppi delle funzioni .

Adesso si supponga che la funzione di controllo sia α che varia tra α_{min} e α_{max} .

Si vuole minimizzare :

$$\int_0^T (T_2 - T_B)^2 dt$$

L'hamiltoniana del dynamic programming è :

$$H = \int_0^R \left\{ \frac{1}{c_p} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} Y_1 + \delta(z-R) \frac{\alpha(t)}{c_p} (T_2 - T_1) Y_1 - \frac{\beta}{c_p} (T_E - T_1) \delta(z) \cdot Y_1 \right\} dz + \\ + \frac{\alpha(t)}{c_2} S (T_1 - T_2) Y_2 + (T_2 - T_B)^2$$

che possiamo scrivere come :

$$H = \bar{H} + \alpha(t) \left[\int_0^R \left\{ \delta(z-R) \frac{1}{c_p} (T_2 - T_1) Y_1 - \delta(z-R) S \frac{T_1 - T_2}{c_2} Y_2 \right\} dz \right]$$

L'hamiltoniana ha un minimo quando il controllo è ottimale . Quindi il controllo ottimale è :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{min} & \text{se } \left(\frac{Y_1(t,R)}{c_p} - S \frac{Y_2}{c_2} \right) (T_1(t,R) - T_2(t)) > 0 \\ \alpha_{max} & \text{se } \left(\frac{Y_1(t,R)}{c_p} - S \frac{Y_2}{c_2} \right) (T_1(t,R) - T_2(t)) < 0 \end{cases}$$

Il sistema coniugato è :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y_1}{\partial t} = - \frac{x}{c_p} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial z^2} \\ \dot{Y}_2 = - \frac{\alpha}{c_p} Y_1 + \frac{\alpha S}{c_2} Y_2 - 2(T_2 - T_B) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{c_p} \frac{\partial Y_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{\alpha}{c_p} Y_1 \Big|_{z=0} \\ \frac{x}{c_p} \frac{\partial Y_1}{\partial z} \Big|_{z=R} = \frac{x}{c_p} Y_1 - \frac{\alpha S}{c_2} Y_2 \Big|_{z=R} \end{array} \right.$$

La soluzione va ricavata numericamente . Si può procedere come per i casi già visti descritti da equazioni ordinarie .

Ricordiamo che oltre alle condizioni di flusso si possono avere condizioni di tipo radiativo :

$$c_p \frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \quad -\kappa \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\sigma T^4 - \sigma T^4) \Big|_{z=0} - \beta (T_E - T_1) \Big|_{z=0}$$

$$\kappa \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \alpha (T_2 - T_1) \Big|_{z=h}$$

$$c_2 \dot{T}_2 = \alpha(t) \cdot S (T_1(R,t) - T_2)$$

Se si vuole minimizzare :

$$\int_0^T (T_2 - T_B)^2 dt$$

l'hamiltoniana sarà :

$$H = \int_0^R \left\{ \frac{1}{c_p} \kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\delta(x)}{c_p} [\sigma T^4 - \sigma T^4 + \beta (T_E - T_1)] + \right.$$

$$\left. \frac{1}{c_p} \delta(x-h) \alpha(t) (T_2 - T_1) \right\} Y_1 dz + \delta \frac{\alpha(t)}{c_2} (T_1(R,t) - T_2) Y_2 + (T_2 - T_B)^2$$

Il controllo ottimale è sempre come prima :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_{min} & \text{se } \left(\frac{Y_1(t,R)}{c_p} - \delta \frac{Y_2(t)}{c_2} \right) \cdot (T_1(t,R) - T_2(t)) > 0 \\ \alpha_{max} & \text{se } \left(\frac{Y_1(t,R)}{c_p} - \delta \frac{Y_2(t)}{c_2} \right) \cdot (T_1(t,R) - T_2(t)) < 0 \end{cases}$$

Il sistema coniugato sarà :

$$\dot{Y}_1 = -\frac{1}{c_p} \kappa \frac{\partial^2 Y_1}{\partial z^2} + \frac{1}{c_p} \left[\beta Y_1 - 4T^3 \cdot \sigma Y_1 \right] \delta(x) + \delta(x-h) \left(\frac{Y_1}{c_p} - \frac{Y_2}{c_2} \delta \right)$$

$$\dot{Y}_2 = -\frac{\kappa}{c_p} Y_1(R,t) + \frac{\kappa}{c_2} S Y_2 - 2(T_2 - T_B)^2$$

Anche qui è necessaria una soluzione numerica .

Abbiamo visto come si controlla un sistema distribuito accoppiato con uno ordinario sia mediante un controllo libero (sorgente) sia mediante un controllo deterministico . Possiamo usare una serie di sistemi distribuiti accoppiati con sistemi ordinari per simulare il comportamento della temperatura di un edificio .

Il comportamento della temperatura nel muro può essere descritta dall'equazione di Fourier unidimensionale , dove la coordinata spaziale rappresenta lo spessore del muro . Il comportamento dell'ambiente viene simulato da una equazione differenziale ordinaria .

Bisogna quindi stimare la capacità termica dell'ambiente . Con dei controlli opportuni applicati alle pareti che possono essere realizzati tramite dei pannelli isolanti scorrevoli e con opportune sorgenti di calore , possiamo fare in modo di rendere la temperatura dell'ambiente il più possibile stabile intorno ad una temperatura ottimale .

Contemporaneamente possiamo minimizzare la quantità di combustibile impiegata dalle sorgenti .

Ma ciò che è interessante è che possiamo fare a meno di utilizzare sorgenti di calore per termostattizzare l'ambiente , perchè possiamo usare i controlli deterministici che non consumano energia .

REFERENZE

- (1) Lee-Marcus Optimal Control for nonlinear
Processes
Arch.Rational Mech.Anal. 8,36(1961)
- (2) Leitmann The Calculus of Variations and
Optimal Control
Plenum Press - 1981
- (3) Pontryagin-Boltyanskii-Gamkrelidze-Mishchenko
The mathematical Theory of Optimal
Processes
Wiley (Interscience) - 1962
- (4) Butkovskij Distributed Control Systems
American Elsevier Publishing
Company - 1969
- (5) Richtmyer-Morton Difference Methods for initial-va-
lue problems
Wiley - 1957
- (6) Brogan Optimal Control Theory applied to
Systems described by Partial Dif-
ferential Equations
Contributo alla serie : Advances in Control Systems,
edita da Leondes
Academic Press - 1969

- (7) D'Isep-Sertorio Maximum Mechanical Work from
the Steady Energy Circulation
on a Finite Body
Il Nuovo Cimento , 67B , 4I,1982
- (8) Wang
Control of distributed Parameter
Systems
Contributo alla serie : Advances in Control Systems,
edita da Leondes
Academic Press - 1964
- (9) Berry-D'Isep-Sertorio Behaviour of a Thermodynamic
Model System under Time dependent
periodic Boundary Conditions
Nuovo Cimento, B (in stampa)
- (10) Berry-D'Isep-Sertorio-Sparavigna
Entropy Production in Connection
to an Optimal Control Problem
Nuovo Cimento (in stampa)

BIBLIOGRAFIA

- Luenberger Optimization by vector Space
Methods , Wiley - 1969
- Ballman Adaptive Control Processes : a
guided Tour .
Princeton Univ.Press 1961
- Butkovskij-Lerner Optimum Control Systems with
dytributed Parameters
Soviet Phis.Doklady - 1961
- Pan The Continuous Maximum Principle
Wiley - 1966
- Canon-Cullum-Polak Theory of Optimal Control and
Mathematical Programming
McGraw-Hill - 1970
- Lions Contrôle optimal des systèmes
gouvernés par des équations aux
derivées partielles
Dunod, Gauthier-Villars - 1968
- Layton Multivariable Control Theory
IEE Control Engineering Series I
- 1976
- Courant-Hilbert Methods of Mathematical Physics
Wiley (Interscience) - 1962

Roitenberg

Théorie du Contrôle Automatique

Edizioni MIR - 1974

Sirazetdikov

**Ottimizzazione dei sistemi con para-
metri distribuiti (in russo)**

Edizioni NAUKA - 1977