

Giuseppe Ferro

Effetti di scala sulla resistenza a trazione dei materiali

Tesi per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca
VI Ciclo (A.A. 1990/91; 1991/92; 1992/93)



Dottorato di Ricerca in Ingegneria Strutturale
Politecnico di Torino

Febbraio 1994

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Strutturale
Politecnico di Torino
10129 Torino, Italy
Tutore: Prof. Alberto Carpinteri
Coordinatore: Prof. Alberto Carpinteri

Ai miei genitori

Ringraziamenti

La stesura della tesi di dottorato segna la conclusione di un ciclo di ricerca che nel mio caso ha comportato un radicale cambiamento di vita.

In questo momento, così intenso e nello stesso tempo esaltante, il mio più profondo ringraziamento va alla mia famiglia, papà, mamma, Andrea e nonna, che hanno appoggiato la mia scelta e, nonostante la lontananza, mi sono sempre stati vicini sostenendomi nei momenti di sconforto.

Ritengo doveroso, in questa circostanza, ricordare la persona che mi ha fatto appassionare a questo settore disciplinare, Manfredi Romano, e sulle cui orme ho iniziato la carriera accademica.

Ringrazio il Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino, docenti, non docenti e dottorandi, per la collaborazione e lo stimolo che non mi hanno fatto mai mancare.

In particolare ringrazio Francesco Maradei e Vincenzo Angilletta per la competenza e la perizia prestata nello svolgimento delle prove sperimentali.

Infine, come dicono gli anglosassoni, "the last but not the least", desidero ringraziare profondamente e sentitamente il mio tutore Alberto Carpinteri che in questi tre anni mi ha guidato, addottrinato, consigliato in ogni circostanza e che mi ha sempre stimolato nella ricerca.

Mi auguro di far tesoro dei suoi suggerimenti per il futuro e mettere a frutto i suoi insegnamenti.

Sommario

In questa tesi vengono analizzati gli effetti di scala sulla resistenza a trazione dei materiali. Con il termine *effetto di scala* si definisce la variazione di una proprietà meccanica in funzione della dimensione strutturale. In particolare è stato osservato sperimentalmente da numerosi ricercatori come la resistenza nominale a trazione di molti materiali decresca al crescere della dimensione del provino impiegato per misurarla. Questo fenomeno risulta più accentuato per i materiali disordinati, cioè macroscopicamente eterogenei e danneggiati. Basandosi sulla teoria statistica di Weibull e sulla Meccanica della Frattura Elastica Lineare, viene presentata (Capitolo 4) una distribuzione di autosomiglianza per la dimensione dei difetti. Tale distribuzione ipotizza una lunghezza del difetto più pericoloso o critico proporzionale alla dimensione lineare del provino. Si mostra come l'ipotesi di autosomiglianza rappresenti il caso di massimo disordine riscontrabile nei materiali reali e fornisca, in un piano bilogarithmico resistenza-dimensione, una legge di scala lineare con pendenza $-1/2$, pari alla potenza della singolarità tensionale prevista dalla LEFM. La suddetta formulazione contiene il concetto frattale di autosomiglianza, anche se ristretto esclusivamente alla massima dimensione del difetto.

Al fine di considerare la reale natura della microstruttura dei materiali, viene presentato (Capitolo 6) un modello frattale più complesso, nel quale la proprietà di autosomiglianza viene estesa all'intera popolazione dei difetti. Questa ipotesi topologica, basata sulla teoria dei frattali e sulla procedura cosiddetta di *rinormalizzazione*, afferma come per ottenere una resistenza nominale costante per il materiale sia necessario riferirsi a superfici con dimensioni fisiche non intere. Per i materiali disordinati, quali ad esempio il calcestruzzo e le rocce, la resistenza a trazione rinormalizzata è data da una forza agente su una superficie avente una dimensione frattale minore di 2. Il decremento dimensionale, sempre compreso nell'intervallo $[0, 1/2]$, rappresenta vacanze autosomiglianti della sezione reagente dovute alla presenza di pori, vuoti, difetti, fessure, aggregati e inclusioni, e tende al limite $1/2$ solo per materiali estremamente fragili e disordinati, come previsto peraltro dall'approccio statistico.

Le indagini sperimentali usualmente non superano un ordine di grandezza come intervallo di scala. In questi casi è possibile determinare un'unica pendenza tangenziale nel diagramma bilogarithmico. Soltanto considerando variazioni di scala maggiori di un ordine di grandezza, può essere evidenziata la transizione da un regime disordinato ad uno ordinato, e può apparire una variazione continua dalla pendenza $-1/2$ alla pendenza zero. Nella realtà fisica, la sezione resistente al carico di picco può essere considerata come un multifrattale, di dimensione 1.5 alle scale piccole e di dimensione 2 alle scale grandi. Appare allora evidente una transizione dall'estremo disordine alle piccole scale, dove è predominante una distribuzione autosomigliante

di fessure alla Griffith, all'estremo ordine per le grandi scale, dove il disordine della microstruttura non è più visibile, essendo limitata la dimensione dei difetti e delle eterogeneità. L'assunzione di multifrattalità per la microstruttura del materiale danneggiato (Capitolo 7) rappresenta la base per la cosiddetta legge di scala multifrattale (MFSL). Questa legge consiste in un metodo di approssimazione che impone la concavità della curva bilogarithmica verso l'alto, in contrasto con la legge di scala di Bažant (SEL). Per verificare questa legge di scala e determinare sperimentalmente la variazione della resistenza nominale a trazione e dell'energia di frattura, è stato realizzato uno schema di prova completamente innovativo, che prevede l'impiego di tre martinetti servocontrollati (Capitolo 5). L'interazione dei tre martinetti, disposti ad L, permette di centrare istante per istante la risultante del carico rispetto alla sezione reagente anche in presenza di fessurazioni che rendano quest'ultima asimmetrica. Lo scopo principale di questa strumentazione è quello di determinare le proprietà meccaniche del calcestruzzo soggetto a trazione uniforme, eliminando qualsiasi effetto flessionale secondario che possa influenzare i risultati e condurre a spiegazioni errate dell'effetto di scala.

La legge di scala multifrattale è stata infine impiegata per analizzare risultati sperimentali di prove condotte su differenti geometrie di provini in calcestruzzo reperite in letteratura. Dalle applicazioni si evince come la MFSL interpreti soddisfacentemente i risultati sperimentali.

Summary

The dissertation analyses the scale effects on the tensile strength of materials. By the term *scale effects* it is meant the variation in a mechanical property as a function of structural size. In particular, it has been observed by numerous investigators that the nominal tensile strength of many materials decreases with increasing size of the specimen tested.

This phenomenon is more evident in disordered materials, that is, materials that are macroscopically heterogeneous and damaged. On the basis of Weibull's statistical theory and the principles of Linear Elastic Fracture Mechanics, a self-similarity distribution for defect size is presented (Chapter 4). With this distribution the length of the most critical defect is taken to be proportional to the linear size of the specimen. It is shown that the assumption of *self-similarity* represents the instance of maximum disorder that can be encountered in real materials, and it supplies, in a strength-size bilogarithmic plane, a linear scaling law with an inclination of $-1/2$, corresponding to the power of the stress singularity envisaged by LEFM. This formulation contains the fractal concept of self-similarity, even though it is limited to maximum defect dimension.

In order to consider the real nature of the micro-structure of the materials, a more complex fractal model is presented (Chapter 5) in which the property of self-similarity is extended to the entire population of defects. This topological law, based on fractal theory and on the so-called *renormalisation procedure*, states that in order to obtain a nominal constant strength for the material it is necessary to refer to surface areas with non integer physical dimensions. For disordered materials, such as for instance concrete and rocks, renormalised tensile strength is given by a force acting on a surface having a fractal dimension lower than 2. The dimensional decrease, always comprised in the $[0, 1/2]$ range, represents self-similar vacancies in the undamaged section associated with the presence of pores, voids, defects, cracks, aggregate and inclusions, and it approaches the $1/2$ limit only for extremely brittle and disordered materials, as is assumed, incidentally, in statistical approaches.

As a rule, the scale variation taken into consideration in experimental investigations does not exceed one order of magnitude. In such circumstances, it is only possible to determine a single tangential inclination in the bilogarithmic diagram. Only by taking into account scale variations higher than one order of magnitude it proves possible to detect the transition from disordered to ordered conditions, and a continuous transition from $-1/2$ to zero inclination may be seen to appear. In physical reality, the peak load resistant section can be viewed as multifractal, of dimension 1.5 on small scales and dimension 2 at large scales. This clearly shows a transition from the extreme disorder that is associated with small scales, where a

self-similar distribution of Griffith cracks predominates, to the extreme order of large scales, where the disorder of the microstructure is no longer visible, on account of the limited dimensions of the defects and heterogeneities. The assumption of multifractality for the microstructure of the damaged material (Chapter 7) is the basis of the so-called Multifractal Scaling Law (MFSL). Such law consists of an approximation method which imposes the concavity of the bilogarithmic curve facing upward, which contradicts Bažant's size effect law (SEL). To verify this scaling law and to determine experimentally the variation in nominal tensile strength and fracture energy, a totally innovative testing set-up has been created, involving the use of three servo-controlled jacks (Chapter 5). The interaction of the three jacks, arranged in L formation, makes it possible to centre instant by instant the resultant of the load with the respect to the undamaged section even in the presence of cracks which make the latter asymmetrical. The main goal of this instrumentation is to determine the parameters of the concrete subjected to uniform tension, eliminating any secondary bending effect which may affect the results and lead to erroneous explanations of the scale effect.

Indice

• Sommario	III
• Summary	V
1. Introduzione	1
• 1.1 Effetti di scala	1
• 1.2 La resistenza a trazione	2
• 1.3 I frattali	4
• 1.4 Contenuti e sommario	5
2. Elementi di Meccanica della Frattura	7
• 2.1 Introduzione	7
• 2.2 Concentrazione degli sforzi	7
• 2.3 Meccanica della Frattura Elastica Lineare	14
• 2.4 Modelli non lineari	20
3. Comportamento a trazione del calcestruzzo	27
• 3.1 Introduzione	27
• 3.2 Struttura eterogenea del calcestruzzo	27
• 3.3 Leggi costitutive del calcestruzzo	29
• 3.4 Determinazione sperimentale delle caratteristiche meccaniche a trazione	31
– 3.4.1 Prove indirette	31
– 3.4.2 Prove dirette	35
4. Variazione statistica della resistenza a trazione	51
• 4.1 Introduzione	51
• 4.2 Strutture con un difetto dominante	52
• 4.3 Strutture con più imperfezioni	58
• 4.4 Determinazione delle densità di probabilità della dimensione dei difetti	68
• 4.5 Simulazioni statistiche	70
• 4.6 Effetti di scala sulla resistenza a trazione dovuti alla dispersione statistica dei difetti	74
• 4.7 Conclusioni	77

5. Prove di trazione diretta con tre martinetti	79
• 5.1 Introduzione	79
• 5.2 Scelta della geometria e della dimensione dei provini	80
• 5.3 Macchina di prova	82
• 5.4 Procedura di prova	89
• 5.5 Analisi elastica del campo tensionale	92
• 5.6 Risultati sperimentali	93
6. Natura frattale della microstruttura dei materiali disordinati	101
• 6.1 Introduzione	101
• 6.2 Insiemi frattali e dimensioni frattali	103
• 6.3 Natura frattale della sezione reagente del materiale ed effetto di scala sulla resistenza nominale a trazione	117
• 6.4 Natura frattale della superficie di frattura ed effetto di scala sulla energia di frattura	123
• 6.5 Curve sperimentali rinormalizzate	127
• 6.6 Determinazione sperimentale della dimensione frattale della superficie di frattura	131
• 6.7 Conclusioni	133
7. Legge di scala multifrattale	135
• 7.1 Introduzione	135
• 7.2 Legge dell'effetto dimensionale	136
• 7.3 Legge di scala multifrattale	139
• 7.4 Linearizzazione della legge multifrattale	145
• 7.5 Applicazione della legge multifrattale a provini di differenti geometrie	146
• Bibliografia	157
• Appendice A	167
• Appendice B	169

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Effetti di scala

Per valutare la resistenza dei materiali bisogna specificare la scala a cui avvenga tale operazione. Vi sono due ragioni pratiche che inducono a misurare la resistenza di un materiale. La prima, e la più ovvia, consiste nel disporre di valori numerici da utilizzare per il calcolo strutturale. L'altra, ben più antica e comune, è quella di verificare la qualità del materiale, ovvero se sia possibile utilizzare un materiale in sostituzione di un altro.

Esiste un fenomeno notevole che è stato spesso trascurato nell'ambito della scienza dei materiali e che è stato approfondito solo in epoca recente. Tale fenomeno è quello degli effetti di scala, ovvero la variabilità di alcune proprietà dei materiali al variare della dimensione strutturale. Per esempio la resistenza nominale a trazione di un provino di un assegnato materiale decresce quando la dimensione del provino aumenta. È ovvio come questo fenomeno abbia una importanza strategica. Infatti la resistenza dei materiali da costruzione, ad esempio, viene normalmente determinata in laboratori ufficiali su provini di dimensioni standardizzate. Il fatto che poi si costruiscano, con gli stessi materiali, strutture di dimensioni ben maggiori dei provini di laboratorio e che per i calcoli vengano utilizzati invece i valori di resistenza determinati su questi ultimi, fa capire come il fenomeno dell'effetto di scala possa portare a rotture inaspettate.

Scopo della presente tesi è quello di analizzare gli effetti di scala sulla resistenza a trazione dei materiali, considerando aspetti statistici e sperimentali nonché proponendo una nuova interpretazione teorica. Particolare enfasi è data al concetto di disordine della microstruttura del materiale. Infatti, l'effetto di scala sulla resistenza nominale a trazione dipende sostanzialmente da tale disordine e quindi si analizzerà l'influenza del disordine microstrutturale al variare della dimensione della macrostruttura. In conclusione si presenta una legge secondo la quale risulti possi-

bile determinare, in funzione della dimensione della struttura, il valore della resistenza a trazione per un dato materiale. In particolare si affronta il fenomeno relativo ad un materiale specifico, il calcestruzzo, anche se i concetti e le problematiche riguardanti questo materiale risultino di carattere molto più generale.

1.2 La resistenza a trazione

La resistenza a trazione costituisce un parametro difficilmente determinabile in laboratorio. Mettere alla prova funi e cavi è abbastanza semplice perchè è facile afferrarne saldamente le estremità arrotolandole sul cilindro di un verricello o di un argano. È molto più difficile afferrare solidi meno deformabili per poterli sottoporre a trazione, e quindi per molto tempo le prove sono state limitate a compressione e flessione. Inizialmente sono state progettate apparecchiature per prove meccaniche dotate di ganasce simili a morsetti, dette "ganasce ad attrito", in modo da poter prendere una comune sbarra di metallo, tagliarne un segmento e romperlo a trazione. In pratica questa soluzione di solito non è risultata soddisfacente, poichè le ganasce danneggiano il materiale e provocano cedimenti prematuri alle estremità, fornendo un risultato inattendibile. Per questa ragione sono stati introdotti campioni a forma di clessidra per localizzare il punto di rottura nel mezzo, dove il provino è più sottile. Tuttavia la progettazione, così come la realizzazione, di campioni soddisfacenti richiede un certo grado di abilità e di esperienza, poichè la geometria ottimale dipende dal tipo di materiale da analizzare.

Se poi, oltre a volere determinare il valore della resistenza nominale a trazione, si vuole pure determinare la curva completa carico-spostamento, il problema diventa ancora più complicato. Innanzitutto è necessario che la prova sia controllata in maniera stabile, per poter cogliere e rilevare la parte post-lineare del diagramma, che, per materiali piuttosto fragili a trazione quale il calcestruzzo, è costituita da una curva a pendenza negativa, detta di *softening*. Diviene ancora più essenziale poter stabilire la zona di rottura ove posizionare gli strumenti di misura delle deformazioni, mediante i quali è necessario controllare la prova. Inoltre, ed è questo il punto più delicato, è necessario che la risultante del carico applicato sul campione risulti in ogni momento perfettamente centrata in modo da evitare la presenza di momenti flettenti, i quali potrebbero influenzare il valore delle tensioni. Anche supponendo di riuscire a centrare perfettamente il carico all'inizio della prova rispetto alla sezione reagente del campione, lo sviluppo di fessure durante la fase di carico conduce a nuove dissimmetrie della sezione trasversale e di conseguenza alla presenza di momenti flettenti.

Si è così pensato all'impiego di macchine servo-controllate per tenere sotto controllo anche gli sforzi flessionali secondo due piani ortogonali fra loro. Per fare ciò è stato progettato [1-3] uno schema di prova completamente innovativo costituito da

tre martinetti, i cui dettagli sono riportati nel Capitolo 5. Adoperando tale schema sono state effettuate delle prove su campioni di calcestruzzo, i cui risultati sono stati utilizzati per determinare le caratteristiche meccaniche del materiale soggetto a pura trazione. Inoltre i risultati sperimentali sono stati utilizzati per validare le aspettative teoriche ottenute mediante la legge di scala multifrattale [4-6], presentata al Capitolo 7.

Come si è detto, ancora oggi non è stata giustificata l'esistenza dei fenomeni di effetto scala, in particolar modo sulla resistenza nominale a trazione. Il fenomeno è stato evidenziato negli anni trenta da Weibull [7] che, utilizzando il concetto dell'anello più debole, ha dimostrato come la resistenza a rottura, dipendendo dal difetto di dimensione massima, diminuisca con l'aumentare del volume di un provino, in quanto cresce la probabilità di incontrare un difetto di dimensione ancora maggiore. Da quella data, numerosi ricercatori hanno formulato ipotesi, nessuna delle quali però basata su concetti veramente generali ed a carattere unitario. Oltretutto le teorie dell'Elasticità e della Plasticità non prevedono una variazione della resistenza con la dimensione strutturale. Solo con la Meccanica della Frattura Elastica Lineare (LEFM) si riesce a cogliere questa variazione, in quanto in quest'ultima teoria entrano in gioco parametri aventi dimensioni fisiche differenti tra loro. Proprio la disparità dimensionale tra tensione ($[F][L]^{-2}$) e fattore di intensificazione degli sforzi ($[F][L]^{-3/2}$), richiamata al Capitolo 2, è alla base della variazione della resistenza nominale (Capitolo 4). Nel piano bilogaritmico la variazione della resistenza in funzione della dimensione strutturale in questo caso è rappresentata da una retta con pendenza -0.5 [8].

La legge di scala che scaturisce dalla Meccanica della Frattura Elastica Lineare risulta però eccessivamente severa, e per questo recentemente si è cercata una legge non-lineare che meglio interpretasse i risultati sperimentali. Una delle più note leggi non-lineari di effetto scala sulla resistenza nominale dei materiali è quella proposta da Bazant [9] nel 1984, denominata Size Effect Law (SEL). Tale legge è stata ricavata per provini intagliati, con un intaglio di lunghezza proporzionale alla dimensione del provino stesso. Essa si basa sull'assunzione che l'energia potenziale totale rilasciata dalla frattura sia proporzionale al quadrato della lunghezza della fessura stessa. La dissipazione di energia risulta invece proporzionale alla lunghezza. Per anni quasi tutti gli autori che si sono occupati dell'effetto scala sulla resistenza di materiali quali il calcestruzzo e le rocce, si sono riferiti a questa legge. Ultimamente però vari ricercatori hanno constatato come non sempre la SEL riesca a descrivere in modo coerente i risultati sperimentali. In particolare, per provini in cui non vi sia un intaglio iniziale, si è osservato come la tendenza delle prove sperimentali non segua quello previsto dalla SEL. Infatti secondo la SEL, la resistenza a trazione per provini di dimensioni relativamente piccole dovrebbe seguire i criteri dell'Analisi Limite, mentre per dimensioni relativamente grandi dovrebbe seguire la legge della LEFM. Al limite, la resistenza di strutture con dimensioni che tendano ad infinito dovrebbe essere nulla.

Una tale ipotesi sembra invero poco realistica.

Al Capitolo 7 viene presentata una nuova legge di effetto scala, che inverte praticamente l'andamento previsto dalla SEL. Alla base di questa legge di scala multifrattale, denominata Multifractal Scaling Law (MFSL) [4-6], sta la consapevolezza del ruolo decisivo giocato dal disordine della microstruttura nella definizione delle proprietà meccaniche del materiale. L'ipotesi di base è che la microstruttura del materiale danneggiato sia geometricamente multifrattale. Infatti, dato che la morfologia microstrutturale di un materiale è ovviamente la stessa, indipendentemente dalla dimensione macroscopica del provino, l'influenza del disordine sulle proprietà del materiale dipende strettamente dal rapporto tra dimensione delle eterogeneità (granelli, aggregati, fibre, ecc.) e la dimensione macroscopica del provino. L'analogia topologica che sostiene questo concetto è la cosiddetta multifrattalità geometrica. Da un punto di vista fisico, può essere enfatizzata una stretta corrispondenza con essa: *l'effetto del disordine della microstruttura sul comportamento meccanico diventa progressivamente meno importante alle scale più grandi, mentre esso rappresenta la caratteristica fondamentale alle scale più piccole*. Questa considerazione conduce ad una legge che inverte gli asintoti della SEL. Si ottiene un asintoto orizzontale destro, nel piano bilogarithmico, che rappresenta la resistenza di strutture infinitamente grandi, ed un asintoto sinistro con pendenza $-1/2$, che rappresenta l'incremento di resistenza delle strutture al tendere della dimensione a zero. Dal punto di vista meccanico si deduce che le strutture relativamente grandi sono caratterizzate da una resistenza nominale a trazione costante, mentre le strutture relativamente piccole presentano resistenze sorprendentemente alte [10].

1.3 I frattali

Le forme naturali, quali ad esempio le montagne, i litorali o la superficie di frattura di un calcestruzzo non sono sempre ben descrivibili mediante le semplici figure della geometria euclidea. La loro rappresentazione mediante curve o superfici regolari comporta infatti approssimazioni che sono spesso eccessive. Le forme naturali sono così irregolari e frammentate, comparate con quelle euclidee, da far pensare che i fenomeni naturali mostrino un più alto grado di complessità. Per questa ragione in molti settori della ricerca scientifica viene utilizzata la teoria dei frattali, introdotta da Benoit B. Mandelbrot [11]. La parola *frattale* deriva dall'aggettivo latino *fractus* e dal corrispondente verbo *frangere* che significa rompere, ovvero creare frammenti irregolari, ed indica l'attitudine di questa teoria a descrivere i profili frastagliati presenti in natura. Alla base di tutto sta la rivoluzionaria nozione di dimensione frattale, che in generale assume valori non interi.

1.4 Contenuti e sommario

Nel **Capitolo 2** si introducono i concetti fondamentali della meccanica della frattura utilizzati in questa tesi. Si presenta la nozione di concentrazione degli sforzi, il criterio energetico di Griffith, la tenacità alla frattura, la meccanica della frattura elastica lineare ed i suoi limiti di applicabilità al calcestruzzo. Si descrivono infine brevemente i più noti modelli di frattura non lineari, dovuti ad Irwin, Dugdale, Barenblatt. Si presenta il modello della fessura fittizia e quindi il numero di fragilità. Tale numero può essere utilizzato come un indice del comportamento strutturale in funzione della dimensione.

Nel **Capitolo 3** vengono descritti brevemente la struttura eterogenea del calcestruzzo ed il modo in cui tale materiale risponda alla sollecitazione di trazione. Viene analizzata con particolare attenzione la fase post-lineare e post-picco del diagramma carico-spostamento e la dipendenza di tale diagramma dalla lunghezza della base di misura degli allungamenti. Nella seconda parte del capitolo viene presentata una panoramica sulle più significative prove sperimentali a trazione, dirette ed indirette reperite in letteratura e condotte su campioni di calcestruzzo privi di intaglio iniziale.

Nel **Capitolo 4** si presenta un modello statistico basato sull'*autosomiglianza* della distribuzione dimensionale dei difetti, mediante il quale si riesce a determinare la pendenza della legge di scala in funzione di un parametro che rappresenta la dispersione statistica della distribuzione. Si dimostra come la legge di autosomiglianza, quella per cui cioè il difetto di dimensione massima risulta proporzionale alla dimensione lineare della struttura, rappresenti il massimo grado di dispersione statistica e quindi il massimo disordine presente nei materiali reali.

Nel **Capitolo 5** si descrive uno schema per prove sperimentali a trazione completamente innovativo costituito da tre martinetti disposti ad L. Mediante tale strumentazione si riescono ad eseguire esperimenti di trazione pura su provini di calcestruzzo, controllando istante per istante l'eccentricità della risultante del carico di trazione applicato. Lo scopo principale è quello di annullare qualsiasi effetto secondario che possa condurre ad interpretazioni errate degli effetti scala sulla resistenza a trazione e sull'energia di frattura. Vengono presentati i risultati di due serie di prove su campioni di calcestruzzo non intagliati, con un intervallo dimensionale maggiore di un ordine di grandezza.

Nel **Capitolo 6**, dopo una premessa sugli insiemi frattali più noti e sul concetto di dimensione frattale, si introduce l'ipotesi di frattalità sia della sezione reagente che della superficie di frattura [12]. Viene quindi proposta una nuova interpretazione teorica degli effetti di scala basata sulla natura frattale degli spazi di riferimento usati nella meccanica dei solidi classica. Vengono riproposti infine i diagrammi sperimentali, ottenuti con lo schema di prova descritto al Capitolo 5, rinormalizzati in piani di riferimento con assi di dimensioni non intere.

Nel **Capitolo 7** viene infine presentata una nuova legge di scala multifrattale per la resistenza a trazione dei materiali basata sull'ipotesi di multifrattalità della microstruttura del materiale danneggiato. Alla base di questa legge, denominata Multifractal Scaling Law (MFSL), sta l'influenza del disordine sulle proprietà del materiale.

Capitolo 2

Elementi di meccanica della frattura

2.1 Introduzione

La meccanica della frattura, nei suoi aspetti generali, rappresenta il campo della meccanica applicata che descrive il comportamento di elementi fessurati sottoposti a carichi. Un capitolo importante della meccanica della frattura è costituito dalla determinazione dei campi tensionali singolari che si sviluppano in corrispondenza del vertice della fessura.

La nozione di fattore di intensificazione degli sforzi, di energia di frattura, di tenacità alla frattura, che stanno alla base di questa teoria, consentono di descrivere lo stato deformativo e tensionale dei corpi fessurati. Utilizzando questi concetti è possibile inoltre dimostrare come le proprietà di duttilità o di fragilità [13-15] non siano una caratteristica costante del materiale ma dipendano dalla dimensione strutturale.

Nel presente capitolo vengono definiti i parametri fondamentali della meccanica della frattura introducendo brevemente la teoria elastica lineare e quelle non lineari più note.

2.2 Concentrazione degli sforzi

Con il termine *concentrazione degli sforzi* si intende, in generale, un incremento locale delle tensioni. Si consideri infatti una lastra omogenea soggetta ad uno sforzo costante di trazione. La presenza di un foro causa un'amplificazione delle tensioni sui bordi di quest'ultimo. Tale amplificazione non dipende dalla dimensione del foro ma dalla sua forma. La presenza di un'apertura o di un angolo rientrante e, in generale, di qualsiasi ostacolo ad un flusso *laminare* delle tensioni, costituisce, in ogni caso, una

sorgente di concentrazione degli sforzi. Ad esempio, per suddividere una lastra di vetro è sufficiente praticare un leggero intaglio sulla superficie, quindi esercitare una debole pressione. L'effetto di indebolimento dell'intaglio non dipende dalla quantità di materiale rimosso; un leggero intaglio ha gli stessi effetti di uno profondo. È la forma acuminata della rientranza che fa aumentare le sollecitazioni.

Il primo ad analizzare la concentrazione degli sforzi in corrispondenza di un difetto è stato Kirsch [16], il quale ha ottenuto una tensione, in corrispondenza di un foro circolare in una lastra infinita sottoposta a trazione, tre volte maggiore rispetto a quella applicata (Figura 2.1.a). Pertanto la presenza di un foro circolare, di qualsiasi diametro, riduce ad un terzo la resistenza della lastra.

Inglis [17] ha esteso la soluzione di Kirsch al caso di un foro ellittico. Supponendo che il foro ellittico abbia l'asse maggiore disposto ortogonalmente alla direzione dello sforzo di trazione, in corrispondenza del bordo del foro si ottiene una tensione pari a $(1 + 2\frac{a}{b})$ volte quella applicata dall'esterno (Figura 2.1.b), dove a e b sono rispettivamente il semiasse maggiore e minore dell'ellisse considerata. Pertanto, la resistenza della lastra dipende dal rapporto dei due semiassi dell'ellisse; per $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$ si ottengono fattori di concentrazione che tendono all'infinito. Poiché una fessura può essere ipotizzata, in prima analisi, a contorno fortemente ellittico, facendo tendere b a zero, si otterrebbe, in corrispondenza dell'estremità della fessura, un valore tensionale, anche per basse tensioni esterne, facilmente superiore alla resistenza a trazione σ_u (Figura 2.1.c). Se ne dovrebbe concludere che le lastre fessurate non abbiano alcuna resistenza a trazione. Tale modello non risulta pertanto adatto a descrivere la condizione di criticità di una fessura.

La condizione di criticità può essere viceversa determinata mediante un approccio di tipo energetico. Griffith [10], per studiare la propagazione di fessure fragili nel vetro, ha usato i teoremi energetici fondamentali della meccanica classica e della termodinamica, proponendo un semplice bilancio energetico. Tale bilancio consiste nell'uguagliare il decremento di energia potenziale elastica, W_e , all'interno di un corpo sollecitato e dovuto all'estensione della fessura, all'incremento di energia di superficie causato invece dalla crescita della fessura, W_s . Da questo bilancio si ottiene una relazione tra resistenza alla frattura e dimensione dei difetti.

Si consideri una lastra infinita di spessore unitario contenente una fessura centrale passante di lunghezza $2a$. La lastra sia soggetta ad una tensione sul contorno pari a σ (Figura 2.1.c). È possibile separare l'energia totale del sistema in quattro componenti: W_i , W_e , W_f e W_s . La prima, W_i , è l'energia di deformazione elastica della lastra, caricata ma non fessurata, per unità di spessore, e risulta costante:

$$W_i = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA. \quad (2.1)$$

La seconda, W_e , è il rilascio di energia di deformazione elastica causata dall'introdu-

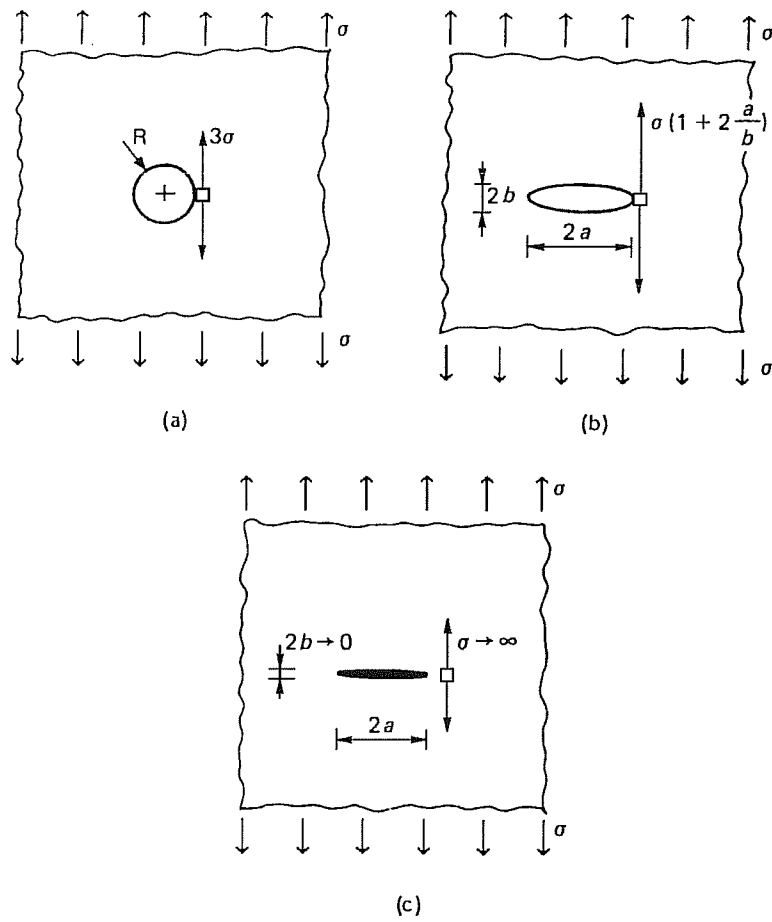


Figura 2.1: Concentrazione degli sforzi sul bordo di fori e difetti.

zione di una fessura di lunghezza $2a$ e rappresenta lo scaricamento del materiale al di sopra ed al di sotto della fessura. Griffith ha dimostrato come W_e , per unità di spessore della lastra, possa essere espressa nel seguente modo:

$$W_e = \pm \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E}, \quad (2.2)$$

ovvero risulta proporzionale all'energia elastica contenuta nel cerchio di raggio a . Il terzo termine energetico, W_f , considera il lavoro effettuato dalle forze esterne ed è

definito come segue:

$$W_f = \int_0^{\delta} F(\delta) d\delta, \quad (2.3)$$

dove δ è lo spostamento relativo totale del contorno caricato ed F la forza esterna applicata per unità di spessore.

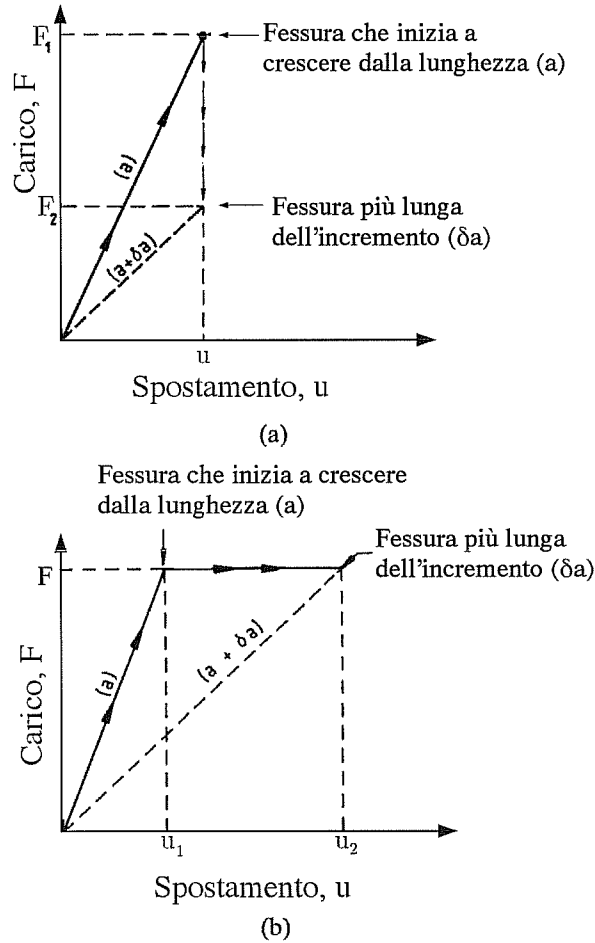


Figura 2.2: Diagrammi carico-spostamento per l'estensione della fessura: (a) spostamento costante; (b) carico costante.

Si possono, in generale, verificare due condizioni di carico: (1) spostamento costan-

te e (2) carico costante, come mostrato in Figura 2.2. Nella condizione con spostamento costante (Figura 2.2.a), il lavoro effettuato dalle forze esterne è nullo, essendo $d\delta = 0$. Ora, poichè l'estensione della fessura è associata ad un decremento in termini di rigidità ovvero ad un incremento in termini di cedevolezza, i carichi applicati decrescono e si ha quindi una diminuzione nel rilascio di energia di deformazione elastica, W_e , pari a:

$$W_e = -\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E}. \quad (2.4)$$

Nel caso con carico costante (Figura 2.2.b), invece, il lavoro compiuto dai carichi incrementa il rilascio di energia di deformazione elastica W_e :

$$W_e = +\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E}. \quad (2.5)$$

Pertanto l'energia potenziale totale della lastra può esprimersi come segue:

$$W_t = W_i - W_e = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA - \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} \quad (2.6)$$

per la condizione con spostamento costante, e:

$$W_t = W_i + W_e - W_f = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA + \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} - \int_0^\delta F(\delta) d\delta \quad (2.7)$$

per la condizione con carico costante.

Infine la quarta componente dell'energia totale, W_s , corrisponde all'incremento di energia superficiale dovuta alla formazione della fessura, ed è data da:

$$W_s = 4a\gamma \quad (2.8)$$

dove γ è riferita all'unità di superficie. L'equazione (2.8) implica che W_s vari linearmente con la lunghezza a , essendo γ una proprietà meccanica caratteristica del materiale.

L'espressione per l'energia totale di una lastra fessurata è pertanto:

$$W_t = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA \pm \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} - \int_\delta F dy + 4a\gamma. \quad (2.9)$$

Si consideri ora una fessura in equilibrio per la condizione con spostamenti costanti. In questo caso si ha:

$$\frac{\partial W_t}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[-\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} + 4a\gamma \right], \quad (2.10)$$

essendo:

$$\frac{\partial W_i}{\partial a} = 0, \quad (2.11)$$

non dipendendo W_i da a . La condizione di instabilità è perciò la seguente:

$$2\pi a \frac{\sigma^2}{E} \geq 4\gamma. \quad (2.12)$$

La disequazione (2.12) è valida sia per la tensione applicata σ che per la semilunghezza della fessura a . Le coppie di valori σ ed a che si trovano al di sotto della curva di Figura 2.3, si riferiscono a fessure stabili, mentre le coppie al di sopra della curva riguardano casi instabili. Denominando energia di frattura, \mathcal{G}_{IC} , il doppio del valore dell'energia superficiale unitaria, si può utilizzare la disequazione (2.12) per calcolare σ_{crit} :

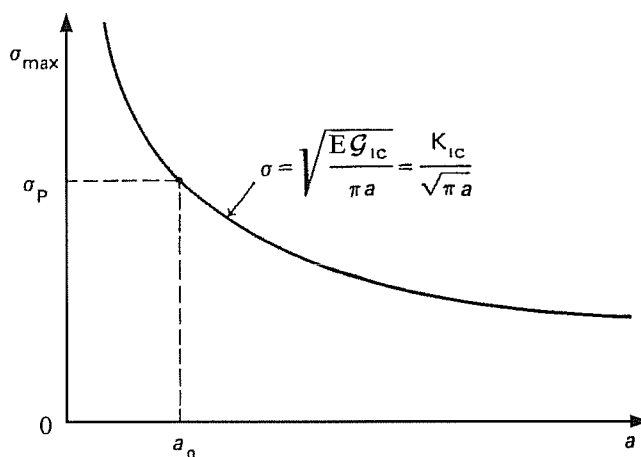


Figura 2.3: Tensione di instabilità in funzione della semilunghezza della fessura.

$$\sigma_{crit} \geq \sqrt{\frac{\mathcal{G}_{IC} E}{\pi a}}. \quad (2.13)$$

La (2.13) esprime la tensione di instabilità in funzione della semilunghezza della fessura. L'asintoto orizzontale rappresenta il decremento di resistenza della lastra all'aumentare della dimensione della fessura. Per fessure di lunghezza tendente ad infinito, la resistenza della lastra tende ovviamente a zero. Viceversa l'asintoto verticale rappresenta l'incremento di resistenza della lastra al diminuire della lunghezza

della fessura. Per dimensioni delle fessure che tendono a zero, la resistenza tende ad infinito.

Questo risultato è in contrasto con l'ipotesi che prevede una resistenza intrinseca σ_P del materiale costituente la lastra. È possibile definire una lunghezza $2a_0$ della fessura, al di sotto della quale lo snervamento a trazione dell'intera lastra precede la propagazione instabile della fessura [18]:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \frac{G_{IC} E}{\sigma_P^2}. \quad (2.14)$$

$2a_0$ rappresenta la lunghezza equivalente delle microfessure e dei difetti, preesistenti nel materiale della lastra.

L'equazione (2.14) offre una spiegazione del perchè i filamenti vetrosi mostrino una resistenza superiore di ben due ordini di grandezza, rispetto a quella riscontrata con provini macroscopici. La sezione della fibra ha infatti un diametro notevolmente inferiore alla dimensione dei difetti che si trovano all'interno dei provini macroscopici. Un aumento di due ordini di grandezza della resistenza apparente σ_P , deriva infatti dalla riduzione della lunghezza caratteristica $2a_0$ di un fattore 10^4 . Alla luce di quanto detto, la resistenza a trazione cessa di rappresentare una caratteristica del materiale e diventa una funzione della lunghezza $2a_0$ delle microfessure preesistenti nel materiale.

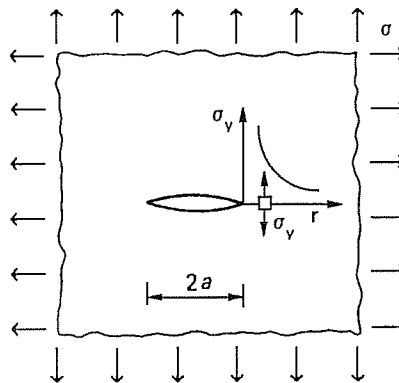


Figura 2.4: Singolarità tensionale all'estremità della fessura.

2.3 Meccanica della frattura elastica lineare

Le condizioni di criticità per la propagazione delle fessure possono essere formulate in alternativa alla teoria energetica di Griffith, attraverso l'analisi del campo elastico in prossimità dell'estremità della fessura.

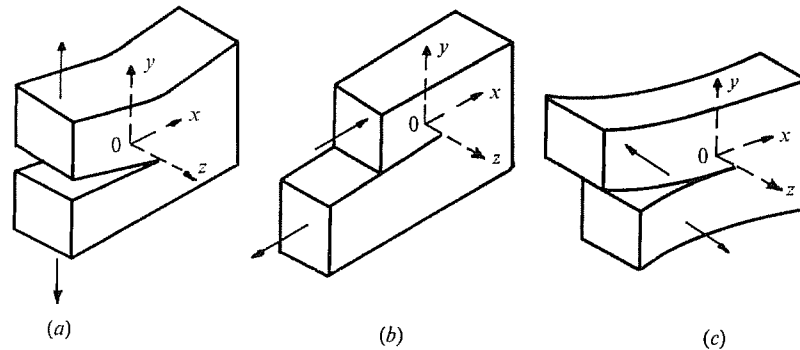


Figura 2.5: I tre modi indipendenti della frattura: (a) apertura a trazione (modo I); (b) scorrimento nel piano (modo II); (c) taglio fuori piano (modo III).

La sollecitazione di una fessura può essere ricondotta ai tre modi elementari, modo I, modo II e modo III, riportati in Figura 2.5. Il modo I è di apertura; le facce della fessura si separano in direzione normale al piano della fessura stessa ed i corrispondenti spostamenti risultano simmetrici rispetto al piano $x-z$ (Figura 2.5.a). Il modo II è di scorrimento nel piano; le facce della fessura scorrono mutuamente in una direzione normale al fronte della fessura stessa. In questo caso gli spostamenti risultano antisimmetrici rispetto al piano $y-z$ (Figura 2.5.b). Il modo III è di taglio fuori piano o di strappo. Le facce della fessura scorrono parallelamente al fronte della fessura stessa, mentre gli spostamenti sono antisimmetrici rispetto al piano $x-y$.

Irwin [19], usando il metodo analitico di Westergaard [20], ha quantificato i campi vicini all'apice per la fessura elastica lineare in termini del fattore di intensificazione degli sforzi. Considerando un sistema di riferimento polare locale (Figura 2.6), per il problema piano, in modo I, il campo tensionale vale:

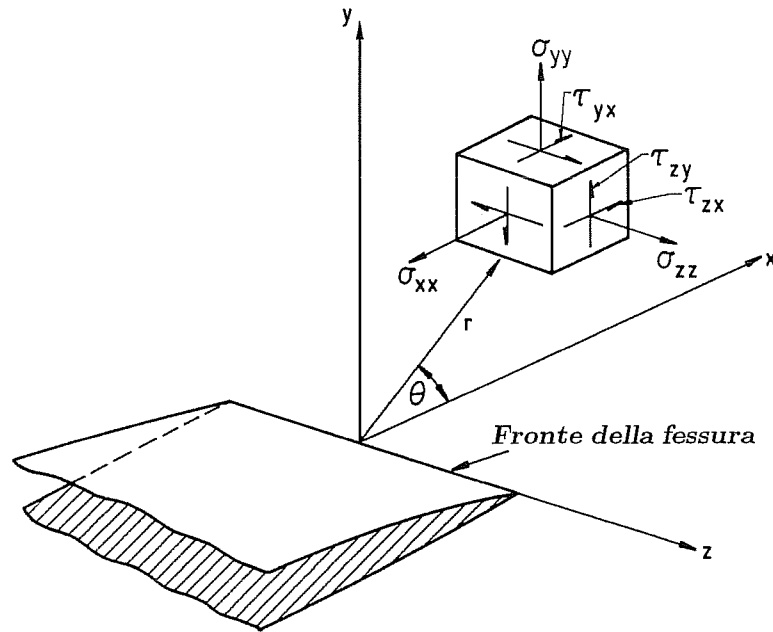


Figura 2.6: Sistema di riferimento locale e stato tensionale.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

Per il modo II, il campo tensionale risulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

K_I e K_{II} sono i fattori di intensificazione degli sforzi. Il modo III riguarda il taglio fuori piano ed è associato soltanto alle tensioni locali di taglio:

$$\begin{cases} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{cases} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.17)$$

dove K_{III} è il fattore di intensificazione degli sforzi in modo III.

In relazione alle componenti di tensione, si possono fare le seguenti osservazioni.

- Tutte le componenti di tensione presentano una singolarità $r^{-1/2}$ all'estremità della fessura. La potenza $-1/2$ di tale singolarità dipende soltanto dalle condizioni al contorno sulle facce della fessura, e non dalle condizioni all'infinito.
- Il profilo angolare del campo delle tensioni dipende anch'esso dalle condizioni al contorno sulle facce della fessura, e non dalle condizioni all'infinito.
- Il campo di tensione, nell'intorno dell'estremità della fessura, è univocamente determinato dal fattore K_I , per il modo I (K_{II} e K_{III} rispettivamente per i modi II e III), ed è funzione delle condizioni al contorno del corpo fessurato, e quindi del carico, della lunghezza della fessura e della geometria.
- Le dimensioni fisiche di K_I sono alquanto inconsuete: $[F][L]^{-3/2}$. È da ricercarsi proprio in tali anomale dimensioni la causa sostanziale degli effetti dimensionali, sia nella meccanica della frattura che, indirettamente, nella resistenza dei materiali.

I fattori di intensificazione degli sforzi per ciascun modo sono definiti come segue:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2\pi r} \sigma_y \Big|_{\theta=0} \right\}; \quad (2.18)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2\pi r} \tau_{xy} \Big|_{\theta=0} \right\}; \quad (2.19)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2\pi r} \tau_{yz} \Big|_{\theta=0} \right\}. \quad (2.20)$$

Le espressioni di tali fattori per una vasta casistica di geometrie strutturali, di fessure e di condizioni di carico sono riportati nei manuali di Sih [21], Tada, Paris e Irwin [22], Rooke e Cartwright [23] e Murakami [24]. In alternativa, per la determinazione dei fattori di intensificazione degli sforzi, vengono utilizzati appositi codici di calcolo.

Qualsiasi stato di sollecitazione di una fessura è riconducibile ad una combinazione lineare dei tre modi suddetti. Infatti, nell'intorno di un punto appartenente al fronte

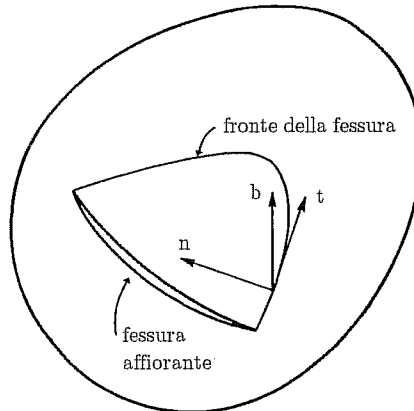


Figura 2.7: Fessura sghemba contenuta in un solido tridimensionale.

di una fessura sghemba, contenuta a sua volta in un solido tridimensionale (Figura 2.7), il campo tensionale è costituito dalle cinque componenti di sforzo σ_n , σ_b , τ_{nb} , τ_{nt} , τ_{bt} , e si esprime come segue [25]:

$$\underset{(5 \times 1)}{\{\sigma\}} = (2\pi r)^{-1/2} \underset{(5 \times 3)}{[F(\theta, \phi)]} \underset{(3 \times 1)}{\{K\}}, \quad (2.21)$$

ove r è la distanza radiale dal punto del fronte e

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix}, \quad (2.22)$$

è il vettore dei fattori di intensificazione degli sforzi relativi allo stesso punto. $[F(\theta, \phi)]$ è una matrice (5×3) che rappresenta il profilo angolare del campo asintotico, in funzione della latitudine θ e della longitudine ϕ , nel sistema di riferimento locale, tnb , costituito dalla tangente, dalla normale e dalla binormale al fronte della fessura.

Tenacità alla frattura

Per la meccanica della frattura elastica lineare, l'inizio della propagazione della fessura, sotto condizioni di carico monotono quasi-statico, è caratterizzato da un valore critico del fattore di intensificazione degli sforzi, K_C , che è funzione del carico, della microstruttura del materiale, della temperatura di prova e della velocità di carico. Il

valore critico del fattore di intensificazione degli sforzi, in condizioni di deformazione piana, è generalmente definito come tenacità alla frattura K_{IC} del materiale. Le tenacità alla frattura corrispondenti ai modi di scorrimento e di strappo sono rispettivamente indicate come K_{IIC} e K_{IIIC} .

Fessure circolari

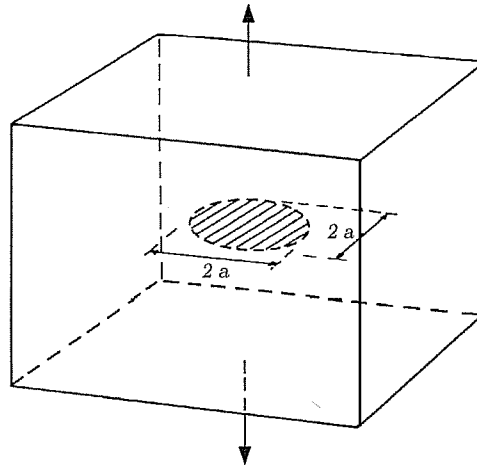


Figura 2.8: Fessura circolare immersa in un corpo tridimensionale.

Sneddan [26] ha estrapolato il caso bidimensionale di Griffith, al problema di una fessura circolare di raggio a (penny-shaped crack) in un solido tridimensionale infinito soggetto a trazione uniforme (Figura 2.8). Il fattore di intensificazione degli sforzi in questo caso vale:

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (2.23)$$

Relazione tra G_{IC} e K_{IC}

Griffith [10] è stato il primo a comprendere come, per utilizzare l'elasticità lineare nell'analisi della propagazione della fessura, fosse necessario adottare un criterio energetico per il collasso al posto dei criteri di resistenza convenzionalmente adoperati. Per

Griffith, la condizione per la propagazione instabile della fessura è raggiunta quando il tasso di energia rilasciata dalla fessura che si propaga, \mathcal{G} , è maggiore dell'energia necessaria per creare la nuova porzione di fessura, \mathcal{G}_C , detta tasso critico di rilascio dell'energia di deformazione. \mathcal{G} , per ciascuno dei modi I, II, e III può esprimersi in funzione dei fattori di intensificazione degli sforzi come segue [19]:

$$\mathcal{G}_I = \frac{K_I^2}{E'}, \quad \mathcal{G}_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}, \quad \mathcal{G}_{III} = \frac{K_{III}^2}{G} \quad (2.24)$$

ove G è il modulo elastico trasversale, $E = E'$ il modulo elastico per il caso di tensione piana ed $E' = E/(1-\nu^2)$ per deformazione piana, ν essendo il coefficiente di Poisson.

Per il caso della frattura in modo I, la condizione di Griffith di propagazione instabile della fessura è data da:

$$\mathcal{G}_I \geq \mathcal{G}_{IC} \quad (2.25)$$

In luogo dell'equazione (2.25), la condizione per la propagazione instabile della fessura può essere espressa in termini del fattore di intensificazione degli sforzi:

$$K_I \geq K_{IC} \quad (2.26)$$

in cui K_{IC} è la *tenacità alla frattura*, e risulta anch'essa una proprietà del materiale:

$$K_{IC} = \sqrt{\mathcal{G}_{IC} E'}. \quad (2.27)$$

Si osservi come K_{IC} e \mathcal{G}_{IC} siano in relazione tramite il modulo elastico E del materiale. È noto peraltro come i campi tensionali piani non dipendano da E . Ne segue quindi l'indipendenza del fattore K_I dal modulo elastico E , oltre che dal coefficiente di Poisson ν . Se si ragiona invece in termini energetici, e quindi di energia di frattura, l'influenza di E risulta manifesta.

Applicabilità della meccanica della frattura elastica lineare

Come già accennato, le tensioni per r che tende a zero diventano molto grandi, anche con carichi esterni modesti. In realtà, tensioni così alte non possono verificarsi avendo tutti i materiali resistenze finite. Occorre in ogni caso ipotizzare una zona, in prossimità dell'apice della fessura, soggetta a tensioni limitate. Nei metalli duttili tale zona è soggetta a deformazioni plastiche. La meccanica della frattura elastica lineare è applicabile soltanto quando la dimensione della zona plastica è molto più piccola delle dimensioni della sezione trasversale della struttura.

Per i calcestruzzi, le rocce, i ceramici ed altri materiali con comportamento quasi-fragile, il processo anelastico è invece costituito dalla formazione di una zona di microfessure in corrispondenza dell'estremità della fessura. Questa, detta zona di processo,

non è in genere trascurabile rispetto alla dimensione della sezione trasversale della struttura. Pertanto è necessario introdurre delle modifiche alla LEFM per tenere conto di ciò.

2.4 Modelli non lineari

Le soluzioni tensionali fornite dalle equazioni (2.15), (2.16) e (2.17), rispettivamente per i modi I, II e III, prevedono un valore delle componenti della tensione che tende all'infinito in prossimità dell'apice della fessura (Figura 2.4). Le tensioni devono comunque essere finite ed il valore massimo che può essere raggiunto coincide con la tensione di snervamento σ_P , come mostrato in Figura 2.9.a. D'altra parte per un materiale caratterizzato da una relazione costitutiva *elasto-softening*, la tensione può andare a zero in prossimità dell'apice della fessura (Figura 2.9.b).

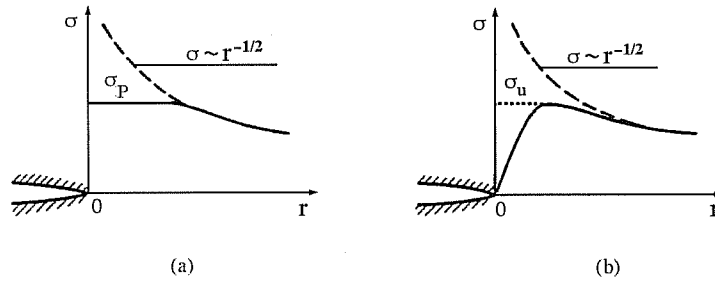


Figura 2.9: Limitazione delle tensioni nelle vicinanze dell'apice della fessura: (a) materiale perfettamente plastico e (b) materiale softening.

Nel caso di materiali elastici-perfettamente plastici, in corrispondenza dell'apice della fessura si crea una zona plastica che risulta essere più estesa quanto più è duttile il materiale. In prima approssimazione, il raggio r_P della zona plastica può essere valutato mediante la seguente equazione:

$$\sigma_P = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_P}}, \quad (2.28)$$

ove σ_P è la tensione di snervamento del materiale. In corrispondenza della condizione di criticità si ottiene il seguente valore:

$$r_{PC} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_{IC}^2}{\sigma_P^2}. \quad (2.29)$$

Il rapporto K_{IC}/σ_P rappresenta una misura della duttilità del materiale.

L'ipotesi di Irwin

Irwin [27], per ottenere una stima più precisa dell'estensione della zona plastica r_P , ha considerato una redistribuzione delle tensioni elastiche e plastiche, in prossimità della fessura. Egli ha ipotizzato una traslazione lungo l'asse r (Figura 2.10) della distribuzione tensionale singolare in maniera tale da uguagliare l'integrale delle tensioni elastiche e plastiche con l'integrale della sopraddetta distribuzione. Da un punto di vista grafico le aree tratteggiate in Figura 2.10 risultano uguali.

Poichè l'integrale tensionale singolare, calcolato tra l'estremità della fessura ed il raggio plastico r_P vale:

$$\int_0^{r_P} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_I r_P^{\frac{1}{2}}, \quad (2.30)$$

ricavando K_I dalla (2.28), si ottiene:

$$\int_0^{r_P} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr = \sigma_P r_P. \quad (2.31)$$

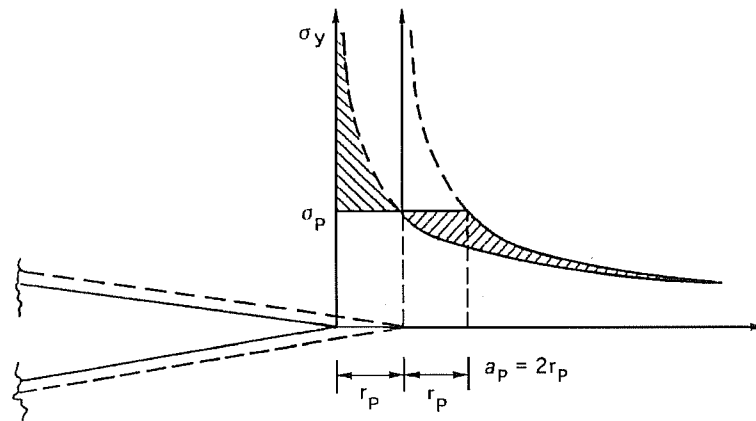


Figura 2.10: Estensione della zona plastica all'atto della crisi secondo Irwin.

Dalla (2.31) si deduce che l'area tratteggiata di sinistra risulta uguale all'area del rettangolo di lati σ_P , r_P . L'area tratteggiata di destra, ottenuta mediante una traslazione pari a r_P , risulta anch'essa uguale a quella del rettangolo di lati σ_P , r_P , poichè entrambe complementari della stessa area. In definitiva si ottiene:

$$a_{PC} = 2r_{PC}, \quad (2.32)$$

ovvero:

$$a_{PC} = \frac{1}{\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_P^2}, \quad (2.33)$$

ove a_{PC} rappresenta l'estensione della zona plastica all'atto della crisi.

Il modello di Dugdale

La valutazione dell'estensione della zona plastica fornita da Dugdale [28] sostituisce alle tensioni plastiche una distribuzione costante di forze, applicate direttamente alle facce di una fessura *fittiziamente* più lunga di quella reale. La condizione da applicare è quella di annullamento del fattore di intensificazione degli sforzi all'apice della fessura fittizia:

$$K_I(\sigma) + K_I(\sigma_P) = 0, \quad (2.34)$$

ove il primo termine è quello relativo alle sollecitazioni applicate all'infinito, mentre il secondo rappresenta l'intensificazione dovuta alle tensioni di richiusura σ_P , applicate ortogonalmente alle facce della fessura, a distanza dalle estremità minori o uguali a a_P (Figura 2.11). L'estensione della zona plastica in corrispondenza della condizione di criticità, secondo la valutazione di Dugdale è pertanto:

$$a_{PC} = \frac{\pi}{8} \frac{K_{IC}^2}{\sigma_P^2} \quad (2.35)$$

Anche in questo caso, nella stima di a_{PC} , è presente il rapporto di duttilità del materiale K_{IC}/σ_P . Nonostante le differenze dei due modelli, il confronto tra le estensioni plastiche secondo Irwin e Dugdale mostra come le due stime siano del tutto simili. L'estensione plastica secondo Dugdale è superiore rispetto a quella di Irwin di circa il 20 %.

Un modello introdotto da Barenblatt [29], e successivamente ripreso da Rice [30], considera le forze atomiche attrattive in una regione molto piccola vicino all'estremità della fessura e fornisce un'estensione della zona di snervamento plastico di Dugdale ai materiali idealmente fragili. Si ipotizza (Figura 2.11) che la tensione da applicare

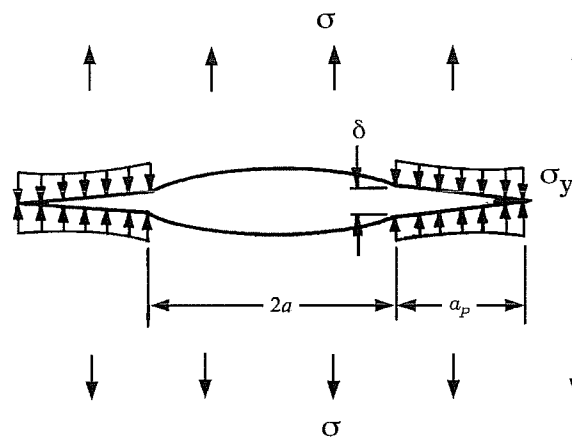


Figura 2.11: Rappresentazione schematica del modello della zona plastica di Dugdale.

nella zona di estensione fittizia della fessura sia quella limite di resistenza a trazione $\sigma_y = \sigma_u$.

A questo modello può essere ricondotto il successivo sviluppo del "Fictitious Crack Model".

Non linearità nel calcestruzzo

I fenomeni di microfessurazione, il comportamento softening e la presenza di una zona di processo di frattura, caratterizzano il calcestruzzo, e sono inerenti alla sua composizione non omogenea [31]. A causa di questi fenomeni, la LEFM non può essere direttamente applicata a tale materiale.

Quando un calcestruzzo viene sottoposto a carichi di trazione, con una prova in controllo di spostamenti, esso si comporta inizialmente in modo elastico lineare. Successivamente si osserva una zona non lineare in seguito alla formazione di microfessure. Generalmente si suppone che queste microfessure siano uniformemente distribuite nel provino prima di raggiungere la tensione di picco. In vicinanza della tensione di picco, l'unione di microfessure produce una zona di localizzazione della fessurazione. Questa sezione critica consente di trasferire livelli di tensioni decrescenti con ulteriori incrementi di spostamenti.

La risposta a trazione post-picco del calcestruzzo può essere incorporata nella LEFM in maniera simile al modello di forza coesiva di Dugdale e Barenblatt. In genere, i modelli nei quali si considerano forze coesive all'apice della fessura sono chiamati modelli di frattura non lineari, poichè essi includono il contributo di processi

che assorbono energia non elastica nella crescita della fessura. Tipicamente questi ultimi non tengono conto della singolarità delle tensioni all'apice della fessura fittizia a causa dell'azione di smussamento della zona di processo. Concettualmente, la localizzazione della fessurazione può essere incorporata nella LEFM attraverso il *modello della fessura fittizia* (Fictitious Crack Model).

Modello della fessura fittizia

Il modello della fessura fittizia utilizza una coppia di leggi costitutive per descrivere coerentemente il comportamento del calcestruzzo (Figura 2.12). La localizzazione è ipotizzata come una fessura fittizia in grado di trasferire tensioni [32-34]. La relazione tensione-apertura della fessura ($\sigma - w$) è considerata come una proprietà del materiale e definisce il comportamento post-picco del materiale. Il comportamento pre-picco è invece assunto elastico lineare ed è definito attraverso una relazione tensione-deformazione ($\sigma - \epsilon$). La non linearità pre-picco è spesso trascurata per facilità di calcolo e risulta in pratica poco influente rispetto al comportamento non elastico post-picco.

L'energia di frattura per il modello della fessura fittizia è fornita dalla seguente espressione:

$$G_F = \int_0^{w_0} \sigma(w) dw. \quad (2.36)$$

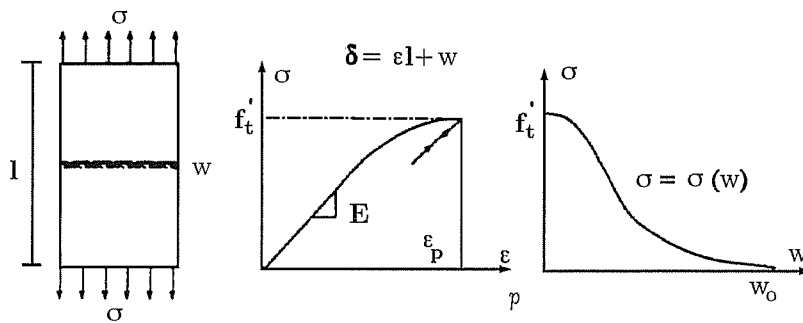


Figura 2.12: Risposta strutturale secondo il modello della fessura fittizia.

Numero di fragilità e risposta strutturale

Si è visto precedentemente come il rapporto (K_{IC}/σ_P) rappresenti una misura della duttilità del materiale. Irwin [27] ha espresso la dimensione della zona di snervamento all'apice di una fessura in un materiale elasto-plastico in funzione del parametro r_p . Esso a sua volta è proporzionale al quadrato del rapporto (K_{IC}/σ_P) , dove K_{IC} e σ_P sono rispettivamente la tenacità alla frattura e la tensione di snervamento a trazione del materiale. Hillerborg, Mod er e Petersson [34] hanno sostituito nella (2.33) al posto di σ_P e di K_{IC} rispettivamente la resistenza a trazione f_t del calcestruzzo ed il prodotto tra il modulo di Young E e l'energia di frattura \mathcal{G}_F , definendo il rapporto che ne deriva:

$$l_0 = \frac{\mathcal{G}_F E}{f_t^2} \quad (2.37)$$

lunghezza caratteristica l_0 . Essi hanno utilizzato tale parametro per caratterizzare la fragilit  di una struttura.

Per Carpinteri l'infragilimento della risposta strutturale, prodotto sia dalla diminuzione della tenacit  alla frattura \mathcal{G}_{IC} che dall'aumento della resistenza σ_u e/o dalla dimensione d , pu  venire descritto in modo unitario e sintetico, tramite la variazione del seguente numero adimensionale [35-37]:

$$s = \frac{K_{IC}}{\sigma_u d^{1/2}}. \quad (2.38)$$

In una modifica successiva [38], egli ha proposto un numero di fragilit  alternativo, s_E , basato su considerazioni energetiche, pi  adatto ai modelli delle forze coesive non lineari:

$$s_E = \frac{\mathcal{G}_{IC}}{\sigma_u d} \quad (2.39)$$

Mentre il numero di fragilit  (2.38)   di tipo statico, il numero di fragilit  (2.39)   di tipo energetico. Tenendo conto della relazione fondamentale (2.27), che connette K_{IC} e \mathcal{G}_{IC} , i numeri di fragilit  succitati sono legati dalla seguente espressione:

$$s_E = \epsilon_u s^2 \quad (2.40)$$

ove con $\epsilon_u = \sigma_u/E$, si intende la dilatazione ultima a rottura.

Capitolo 3

Comportamento a trazione del calcestruzzo

3.1 Introduzione

In genere, quando si parla di calcestruzzo, lo si suole definire come un materiale che non reagisce a trazione. Tale affermazione trova giustificazione nel fatto che la resistenza a trazione del calcestruzzo è notevolmente inferiore di quella a compressione. Ciononostante, le caratteristiche a trazione del calcestruzzo rivestono un'importanza rilevante soprattutto se inquadrare nell'ambito della Meccanica della Frattura.

Nel presente capitolo viene fornita una breve descrizione della struttura eterogenea del calcestruzzo e di come tale materiale risponda alla sollecitazione di trazione. Viene analizzata in particolare la fase post-lineare e di softening del diagramma carico-spostamento e si osserva come tale diagramma dipenda dalla lunghezza della base di misura degli allungamenti.

Nella seconda parte del capitolo viene invece presentata una panoramica sulle più significative prove a trazione sperimentali, dirette ed indirette condotte su provini di calcestruzzo non intagliati e reperite in letteratura, con particolare attenzione alle tecniche utilizzate per ovviare ai problemi di centraggio del carico, di instabilità globale e di attacco dei provini alla strumentazione di prova.

3.2 Struttura eterogenea del calcestruzzo

Il calcestruzzo è un materiale eterogeneo costituito da grandi aggregati immersi in una matrice cementizia. A sua volta la matrice cementizia è costituita da aggregati più piccoli e da pasta di cemento.

Questa particolare composizione di inerti di origine minerale, e di un legante, il

cemento, che indurisce se addizionato ad acqua, consente di classificare il calcestruzzo fra i materiali compositi. Le proprietà meccaniche, come anche altre proprietà fisiche, di questo materiale composito sono strettamente legate al tipo di aggregati ed al tipo di legante utilizzati.

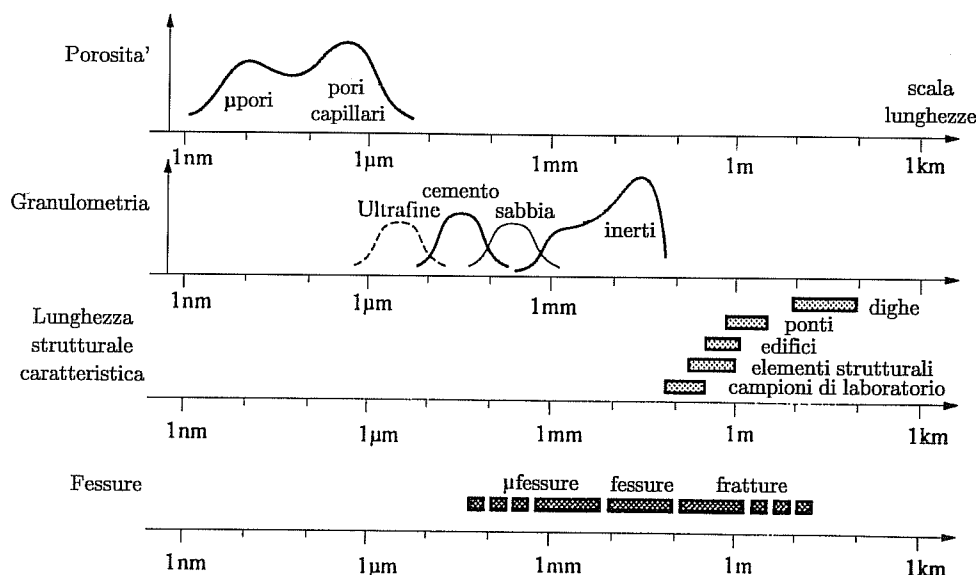


Figura 3.1: Le varie scale di eterogeneità del calcestruzzo [39].

Le inclusioni (sabbie e ghiaie) sono caratterizzate da una distribuzione dimensionale molto estesa che copre circa due ordini di grandezza (generalmente da 0.1 a 20 mm) e da una concentrazione all'interno della matrice molto alta. Ciò sostanzialmente influisce sull'analisi delle caratteristiche meccaniche di questo materiale, tanto a livello sperimentale, in particolare nella scelta della scala di osservazione, quanto a livello teorico, per esempio nella approssimazione dei metodi di omogeneizzazione.

Il calcestruzzo, a causa di questa composizione, è un materiale altamente poroso. Il volume totale di vuoti è dell'ordine del 10% (circa un quarto del volume della matrice). Anche i vuoti sono caratterizzati da una distribuzione dimensionale molto estesa (dal nanomicon al micron) e da un carattere frattale, o di *autosomiglianza*, su varie scale di osservazione [39]. Tali vuoti mostrano una geometria altamente ramificata con un notevole livello di connessione tra i pori e, di conseguenza, con un enorme interfaccia liquido/gas. Ciò fornisce al materiale un carattere altamente igroscopico rispetto agli altri materiali compositi, con parziale saturazione nel con-

tenuto di umidità, e lo rende sensibile alle variazioni di temperatura e di umidità. In Figura 3.1 sono riportate, in scala logaritmica, le varie scale di eterogeneità del calcestruzzo, nell'ordine: la porosità, la granulometria, la lunghezza strutturale caratteristica e, infine, la dimensione delle fessure. Questa eterogeneità può giustificare alcuni aspetti del complesso comportamento meccanico del calcestruzzo, in particolare la transizione dalla fessurazione uniforme a quella localizzata ed il fondamentale fenomeno dell'effetto scala. Poichè il meccanismo di collasso per questo materiale inizia con la microfessurazione, uno studio delle connessioni tra le proprietà del calcestruzzo e la microfessurazione aiuta a spiegare molte delle complesse relazioni causa-effetto presenti nella scienza dei materiali cementizi. Si evidenzierà nei capitoli successivi come l'effetto della localizzazione della microfessurazione conduca alla formazione di superfici aventi dimensioni fisiche differenti da quelle canoniche contemplate dalla geometria euclidea. Utilizzando tali dimensioni atipiche si riescono a giustificare fenomeni quali gli effetti di scala sui valori nominali della resistenza a trazione e della energia di frattura del calcestruzzo.

3.3 Leggi costitutive del calcestruzzo

Un'asta di calcestruzzo sottoposta a sforzo di trazione si allunga inizialmente in modo omogeneo e proporzionale allo sforzo applicato. Si ottiene così una relazione lineare carico-spostamento, almeno fino ad una certa aliquota del carico massimo (Figura 3.2). A livello macroscopico, le tensioni e le deformazioni risultano uniformemente distribuite lungo il provino e la relazione carico-spostamento per il provino può pertanto essere direttamente sostituita da una relazione tensione-deformazione per il materiale. Quando il carico aumenta, la curva diventa non-lineare (punto A) per la formazione di micro-fessure distribuite lungo tutto l'elemento strutturale. Tale fenomeno, come si mostrerà più avanti, risulta più o meno accentuato in funzione della dimensione del provino. Se si è in controllo di spostamenti, raggiunto il carico massimo (punto B), le deformazioni iniziano ad amplificarsi (localizzarsi) all'interno di una zona limitata (zona di processo o zona di softening), ove successivamente si sviluppa una macro-fessura continua, visibile peraltro soltanto in corrispondenza del punto C. Se la zona di processo si sviluppa all'interno della base di misura delle deformazioni, si ottiene una relazione carico-spostamento avente un andamento asintotico. La parte del provino al di fuori della zona di processo invece si scarica elasticamente. L'area sottesa dal diagramma carico-spostamento rappresenta l'energia dissipata in corrispondenza della zona di processo.

La misura della deformazione a cavallo di tale zona in una prova di trazione è costituita da due aliquote: la prima riguarda l'apertura della fessura mentre la seconda è costituita dalla deformazione elastica della parte di provino posta all'interno della

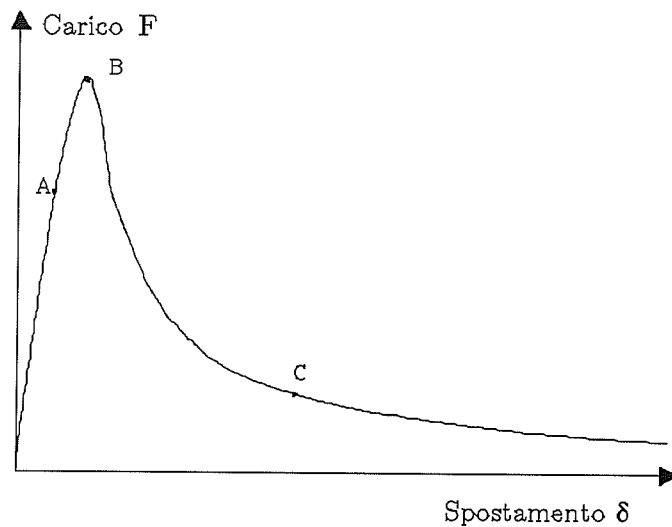


Figura 3.2: Relazione carico-spostamento per un'asta di calcestruzzo soggetta a trazione.

base di misura. Variando la lunghezza di tale base, l'apertura della fessura rimane costante, mentre varia il valore della deformazione elastica.

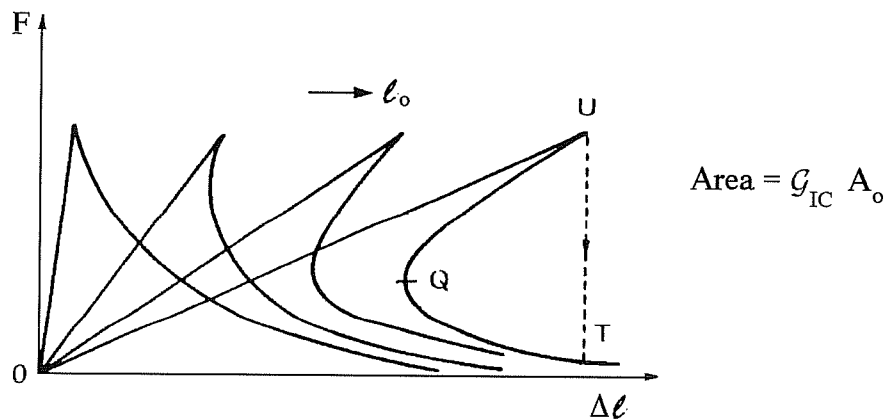


Figura 3.3: Fenomeno dello snap-back. Diagramma forza-allungamento.

Tracciando le curve carico-spostamento all'aumentare della lunghezza della base di misura, si ottengono dei tratti elastici con rigidità decrescente e tratti di softening

a pendenza negativa crescente (Figura 3.3). Aumentando ulteriormente la lunghezza della base si ottengono diagrammi di softening con pendenza positiva. In questi casi si assiste al cosiddetto fenomeno dello *snap-back*; utilizzando come parametro di controllo della prova gli spostamenti, si ottiene un improvviso salto, come indicato dal segmento verticale tratteggiato. Può accadere che, aumentando la base di lettura per far ricadere la zona di processo al suo interno, si incappi in situazioni di frattura instabile a causa di tali salti. L'area sottesa da ciascuna curva deve essere costante e pari a $G_{IC}A_0$ dove con G_{IC} si indica l'energia di frattura e con A_0 l'area nominale della sezione trasversale del provino.

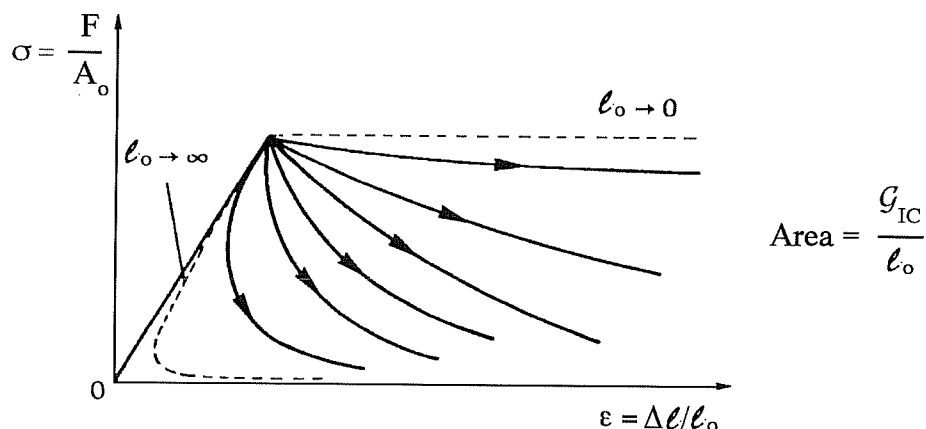


Figura 3.4: Fenomeno dello snap-back. Diagramma tensione-dilatazione.

Sul piano $\sigma - \epsilon$ (Figura 3.4) si ottiene invece un fascio di tratti softening, al crescere della lunghezza della base l_0 . In tal caso l'area sottesa varia, essendo pari a G_{IC}/l_0 .

3.4 Determinazione sperimentale delle caratteristiche meccaniche a trazione

3.4.1 Prove indirette

Per prove di trazione indiretta si intende una prova mediante la quale si deduce la resistenza a trazione di un calcestruzzo, sollecitando il saggio con un campo tensionale differente da quello di trazione uniforme. Le prove a trazione indiretta più comunemente usate per valutare la resistenza a trazione del calcestruzzo sono lo splitting test ASTM C 496 e la *prova a flessione su tre punti* ASTM C 78 (Third-point flexural

loading test).

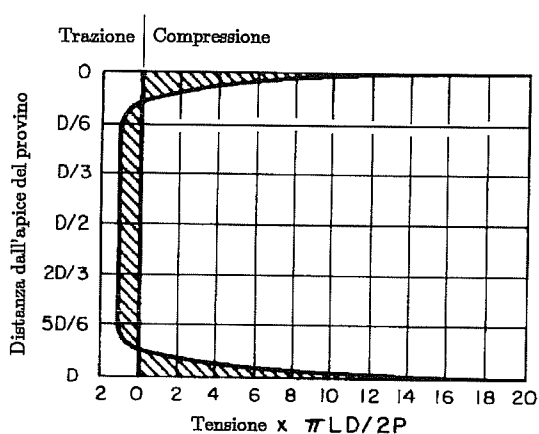
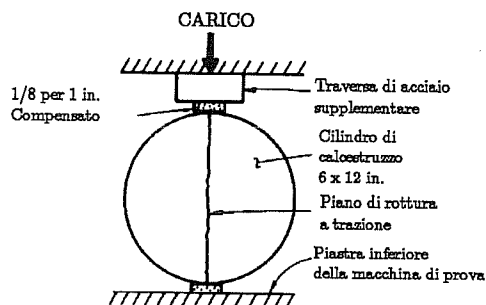


Figura 3.5: Prova a trazione indiretta del tipo splitting test.

Nello splitting test, detto anche *prova Brasiliana*, si applica un carico di compressione ad un cilindro di calcestruzzo di diametro di 15 cm e lunghezza 30 cm (6" di diametro e 12" di profondità secondo la normativa americana) lungo due generatrici diametralmente opposte. Il carico è applicato con un incremento costante dell'ordine di $0.5 \div 1$ MPa al minuto. Il carico di compressione produce una tensione di trazione trasversale che è abbastanza uniforme lungo il diametro verticale (Figura 3.5). La resistenza nominale per lo splitting test è ottenuta dalla formula:

$$\sigma_N = \frac{2P}{\pi ld}, \quad (3.1)$$

ove con σ_N si è indicata la resistenza nominale a trazione, con P il carico di rottura, con l la lunghezza e con d il diametro del cilindro. Alcuni autori [40] affermano come questa prova sovrastimi la resistenza a trazione del calcestruzzo del 10÷15 % rispetto alla prova di trazione diretta.

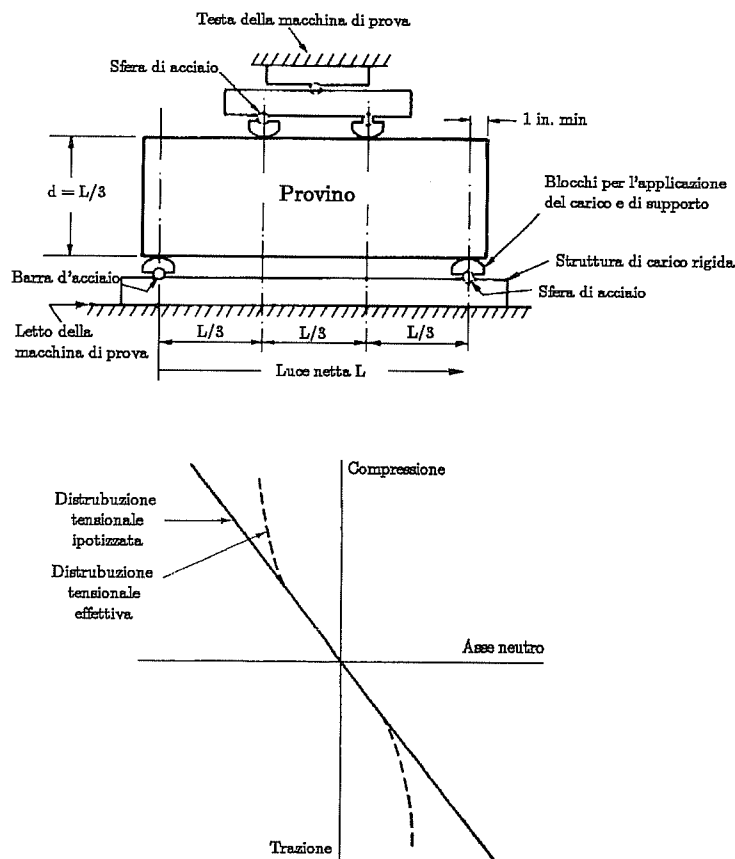


Figura 3.6: Prova a trazione indiretta di flessione.

Nella prova di flessione su tre punti (Figura 3.6) si applica un carico verticale su una trave prismatica di calcestruzzo di dimensioni 15x15x50 cm con un incremento di carico di 0.75÷1.3 MPa al minuto. La resistenza a flessione è espressa in funzione del modulo di rottura, e coincide con la massima tensione calcolata con la formula della flessione:

$$R = \frac{P L}{b d^2}, \quad (3.2)$$

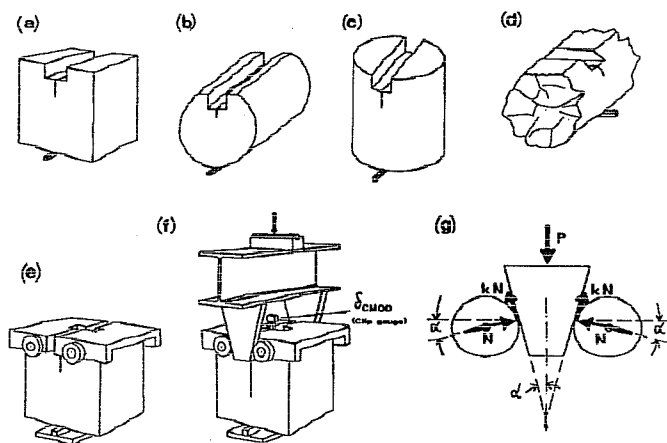


Figura 3.7: Differenti saggi utilizzati per la prova Wedge-splitting shape.

dove R è il modulo di rottura, P il carico massimo, L la distanza tra gli appoggi, b l'altezza della trave prismatica e d la base. La formula è valida solo se la frattura cade all'interno del terzo medio della luce della trave. Se la frattura ricade al di fuori ma di non più del 5 % della luce della trave, si può utilizzare una formula modificata:

$$R = \frac{3 P a}{b d^2}, \quad (3.3)$$

dove a è uguale alla distanza media tra la linea di frattura e l'appoggio più vicino misurato sulla parte di trave sollecitata a trazione. Quando invece la frattura cade più vicina agli appoggi, i risultati della prova devono essere scartati. I risultati del modulo di resistenza tendono a sovrastimare la resistenza a trazione del 50÷100 %, principalmente perchè la formula per la flessione utilizza una relazione tensione-deformazione lineare nel calcestruzzo per tutta la sezione trasversale della trave. Inoltre, nella prova a trazione diretta l'intero volume del provino è sottoposto ad uno sforzo di trazione, mentre nella prova di flessione solo una piccola parte del volume del prisma è soggetta ad alte tensioni di trazione.

Un'altro tipo di prova a trazione indiretta utilizzata è la *prova Wedge-splitting*. Essa è l'equivalente della prova *compact tension test* utilizzata per i metalli. Tale prova consiste nell'applicare una forza di trazione eccentrica alle facce dell'intaglio mediante un cuneo e successivamente nel valutare la tensione di trazione in corrispondenza della zona maggiormente sollecitata. Lo svantaggio di questa prova, nella determinazione della tensione di rottura a trazione, consiste nel dover valutare la componente della forza applicata P , parallela ai lati del cuneo, che dissipa lavoro di attrito tra le parti

meccaniche ed il provino. In Figura 3.7 sono riportate alcune geometrie utilizzate nella prova di wedge-splitting.

3.4.2 Prove dirette

In questo paragrafo si presentano in ordine cronologico alcune tra le più significative prove a trazione diretta su provini di calcestruzzo privi di intaglio, reperite in letteratura.

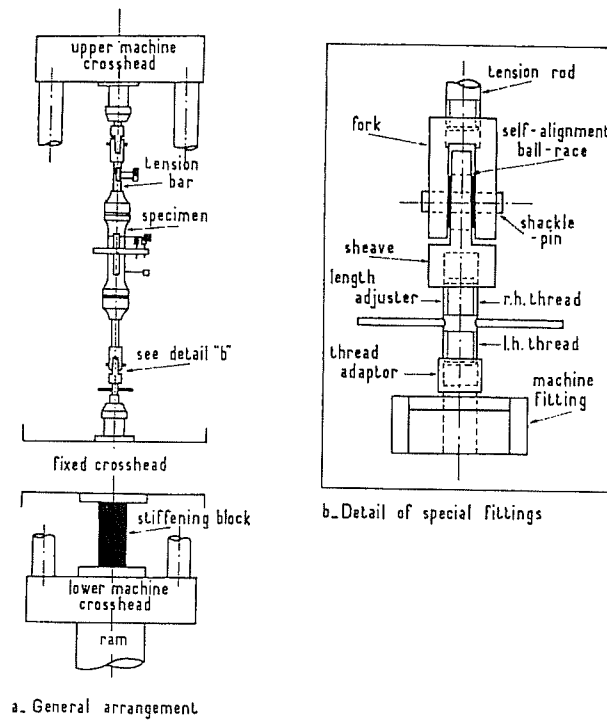


Figura 3.8: Schema della macchina di prova proposta da Hughes e Chapman [41].

Hughes e Chapman [41] hanno ottenuto delle curve complete carico-spostamento mediante un dispositivo capace di trasmettere una sollecitazione di trazione uniforme al calcestruzzo attraverso blocchi di acciaio accuratamente collegati ad un provino a forma di osso. Essi hanno utilizzato una normale macchina di prova universale da 100 tonn. Inizialmente, la macchina è risultata troppo resiliente per ottenere

una curva completa tensione-deformazione a trazione con il ramo decrescente. Per ottenere una strumentazione più rigida, pertanto, hanno successivamente puntellato la traversa inferiore con un blocco di acciaio in modo da limitarne l'inflessione durante la prova. I provini sono stati incollati a delle piastre di acciaio e l'incollaggio, ottenuto mediante una resina epossidica bifasica, è avvenuto all'interno di speciali casseformi. Il dispositivo della macchina di prova è riportato in Figura 3.8.

Gli autori hanno effettuato prove su malte, con diametro massimo dell'inerte di $3/8''$, e su calcestruzzi, con diametro massimo dell'inerte di $3/16''$. Essi hanno notato come le eccentricità presenti durante la prova, provocano una differenza delle deformazioni sulle facce opposte del provino dell'ordine del 4%.

Successivamente Evans e Marathe [42] hanno mostrato come, per ottenere una curva completa tensione-deformazione per il calcestruzzo in trazione diretta, sia essenziale eliminare l'eventualità di rotture improvvise vicino alla tensione di picco. Ciò è stato da loro ottenuto modificando una macchina di prova universale da 100 tonn in modo tale che le caratteristiche di rigidità della macchina fossero maggiori della massima rigidità del ramo discendente della curva tensione-deformazione. La

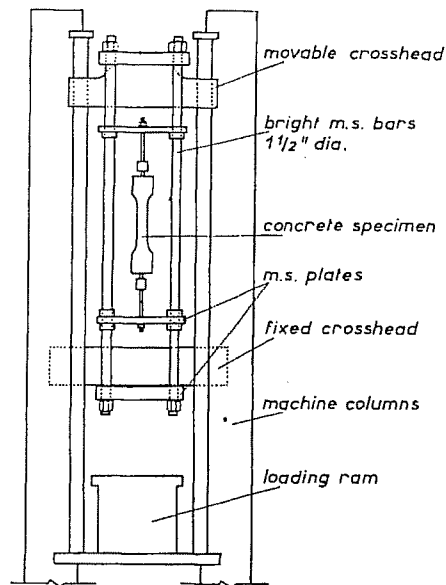


Figura 3.9: Schema della macchina di prova presentata da Evans e Marathe [42].

modifica è stata realizzata inserendo, tra le due traverse della macchina di prova, un telaio costituito da barre cromate di acciaio dolce e da piastre in acciaio. Questa

struttura è risultata tale da limitare gli spostamenti relativi delle traverse, e pertanto le deformazioni del provino sono state controllate con maggiore precisione. Tale soluzione (Figura 3.9) è risultata inoltre vantaggiosa in quanto il carico è stato inizialmente applicato al telaio mediante una traslazione verso l'alto della traversa superiore. L'allungamento delle barre provoca uno spostamento relativo tra le piastre a cui sono agganciati i provini. Le barre sono state progettate in modo da ottenere una estensione uguale al totale allungamento del provino, che consiste nell'allungamento globale e nella deformazione locale causata dall'inizio di una macrofessura. Essi hanno notato come, nelle prove ottenute utilizzando questa macchina, la propagazione della fessura fosse sensibilmente controllata dall'energia di deformazione assorbita dalle parti della macchina.

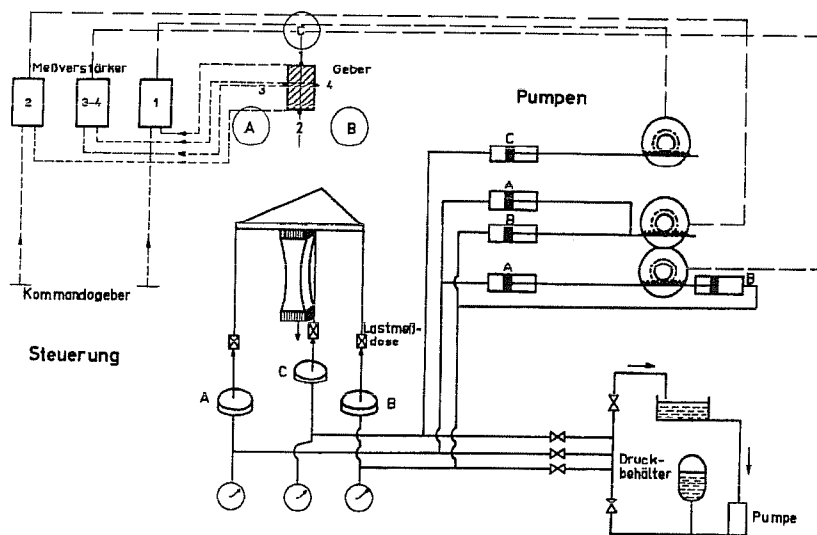


Figura 3.10: Schema del sistema di prova proposto da Heilmann et al.[43].

Heilmann, Hilsdorf e Finsterwalder [43] hanno studiato le caratteristiche di resistenza e deformazione su provini di calcestruzzo alti 60 cm e con una sezione trasversale di 9x15 cm. Le prove sono state condotte con una macchina (Figura 3.10) tale da controllare il tasso di deformazione e la distribuzione delle deformazioni all'interno del provino. Essi hanno registrato deformazioni medie con estensimetri lunghi 40 cm e deformazioni locali con estensimetri più corti da 6 cm. Utilizzando tre martinetti ed agendo sulla eccentricità del carico esterno, hanno rilevato come la resistenza appa-

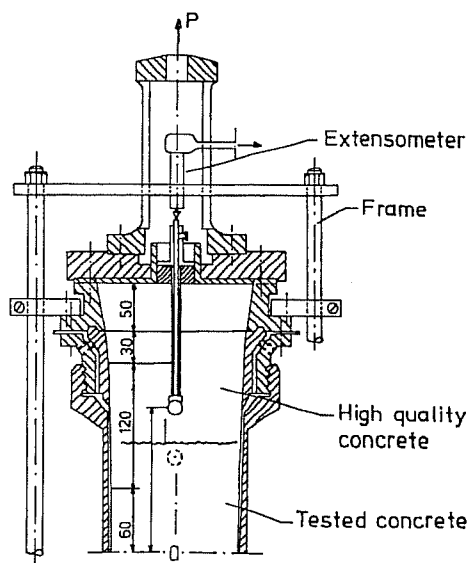


Figura 3.11: Schema della macchina di prova presentata da Weigler e Karl [44].

rente a trazione aumentasse al crescere dell'eccentricità del carico oppure al crescere del gradiente della deformazione. Un aumento del gradiente di un ordine di grandezza comporta un incremento della resistenza a trazione del 5 %.

Weigler e Karl [44] hanno presentato un metodo di prova a trazione diretta in cui il carico viene applicato lungo l'asse verticale del provino (Figura 3.11). Essi hanno utilizzato un provino di forma cilindrica con diametro di 120 mm, altezza di 250 mm e con le estremità rastremate. La prova è stata effettuata senza smantellare la cassaforma, con il provino sostenuto da un telaio sul quale applicare il carico. In corrispondenza delle estremità rastremate, essi hanno utilizzato un calcestruzzo più resistente, in modo che la rottura non avvenisse in corrispondenza della sezione di transizione.

Strange e Bryant [45] hanno progettato un sistema di prova costituito da quattro aste, per controllare la rotazione delle estremità del provino, riducendo l'asimmetria delle deformazioni lungo la sezione trasversale dovute alle imperfezioni del provino ed al non perfetto allineamento dello stesso con la macchina di prova (Figura 3.12). L'introduzione di tali barre ha inoltre aumentato la rigidità effettiva del sistema. La forza di trazione applicata al provino di calcestruzzo è data dalla differenza tra il carico applicato dalla macchina di prova e la somma delle forze nelle aste di controllo.

Petersson [46] ha presentato due tipi di prova a trazione. Il primo prevede un

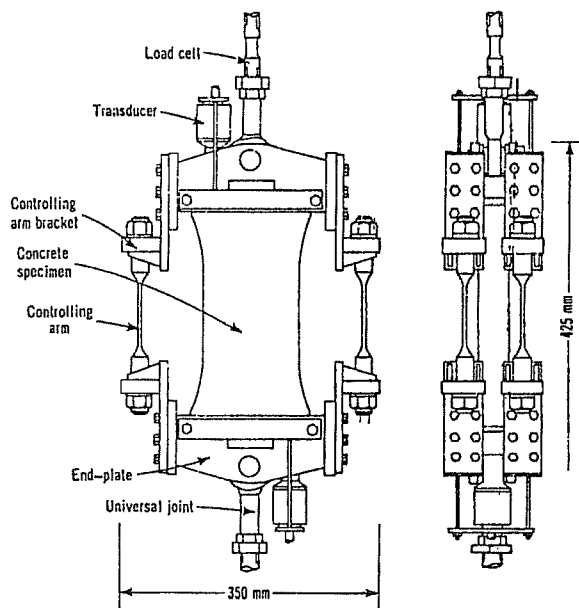


Figura 3.12: Schema del sistema di prova proposto da Strange e Bryant [45].

particolare tipo di vincolamento del provino alla macchina di prova. Esso è costituito da piastre di acciaio su cui incollare degli inserti di gomma a forma di cuneo. Ciascuna parte degli attacchi è pressata contro il provino in due punti; una forza vicino all'estremità del provino ed una più lieve vicino alla parte libera. Con tale strumentazione Petersson non è riuscito però a determinare la curva completa tensione-deformazione (Figura 3.13). Egli ha condotto pertanto uno studio sulle condizioni di stabilità per la prova diretta a trazione, ipotizzando una curva $\sigma - w$ lineare ed arrivando a scrivere la seguente condizione di stabilità:

$$l < C l_{ch} - \frac{AE}{K_1 + K_2},$$

dove $l_{ch} = \frac{GF}{E} f_t^2$ indica la lunghezza caratteristica del materiale, C è una costante variabile da 1 a 2 e che dipende dalla forma della curva $\sigma - w$, A è la sezione trasversale del provino (ipotizzata costante), K_1 la rigidezza della macchina di prova e K_2 la rigidezza di eventuali rinforzi disposti in parallelo con il provino per aumentare la rigidezza totale del sistema. Egli ha adottato allora un tipo di macchina molto rigida con tre colonne tozze di alluminio ($\Phi=120$ mm) (Figura 3.14), fissate a due blocchi

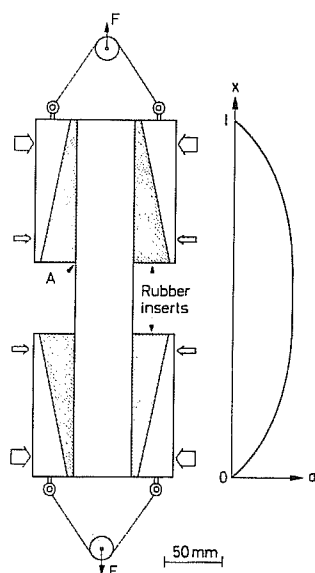


Figura 3.13: Schema dell'attacco del provino proposto da Petersson [46].

di calcestruzzo, e da resistenze cilindriche attaccate alle colonne. Il provino è stato incollato in speciali contenitori tra i blocchi in calcestruzzo. Le colonne di alluminio si allungano quando riscaldate e quindi il provino risulta soggetto a carichi di trazione. Il carico è stato registrato mediante degli estensometri attaccati su uno dei contenitori mentre le deformazioni sono state registrate mediante trasduttori induttivi di deformazione montati direttamente sul provino. Durante la prova le colonne di alluminio sono state isolate con lana di roccia (cotone silicato), per mantenere costante la temperatura intorno al provino.

Prove su calcestruzzi estremamente giovani sono frequentemente condotte con il provino disposto orizzontalmente per eliminare l'influenza del peso morto [47]. Quando si eseguono prove in posizione orizzontale, deve essere tenuto in considerazione l'attrito tra il lato inferiore del provino e la cassaforma. Orr e Haig [48] hanno sviluppato un sistema in cui il provino viene gettato su una base di mercurio in modo da eliminare quasi del tutto l'attrito (Figura 3.15).

Il sistema di prova presentato da Gopalaratnam e Shah [49] per ottenere una risposta post-picco più attendibile da provini soggetti a trazione uniassiale, ricalca per grandi linee il primo modello di Petersson. Per rendere più agevole la preparazione e il vincolamento dei provini, la prova è stata condotta su prismi rettangolari di dimensioni 76x19x305 mm e di 76x38x305 mm. Essi hanno utilizzato delle apposite

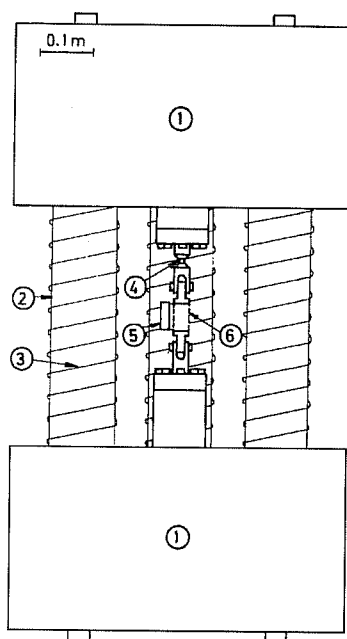


Figura 3.14: Schema della macchina di prova proposta da Petersson [46].

morse ad attrito del tipo a cuneo, progettate per assicurare che la fessura avvenisse al di fuori degli attacchi (Figura 3.16). Le morse erano costituite da cunei di alluminio morbido che scorrevano contro piastre di acciaio inclinate di un angolo complementare a quello dei cunei. La faccia verticale dei cunei di alluminio è stata ricoperta con uno strato spesso (3 mm) di caucciù, serrato come guarnizione. Questo sistema ha permesso un trasferimento uniforme delle tensioni di taglio dagli attacchi al provino in calcestruzzo. Le piastre di acciaio, su ciascuna faccia, sono state attaccate insieme mediante quattro tiranti che applicavano un modesto incremento di pressione sulla superficie del provino. Le piastre di acciaio sono state a loro volta collegate ad una macchina di prova universale da 178 kN a circuito chiuso tramite due snodi universali.

Una prova a trazione diretta originale è invece quella presentata da Luong [50]. La peculiarità è rappresentata dalla particolare geometria del provino, a forma di tubo cilindrico (Figura 3.17). La configurazione di tale cilindro, con due perforazioni tubolari inverse e coassiali, converte un carico di compressione applicato lungo le direttrici del cilindro, in una trazione per la zona del provino che ricade all'interno

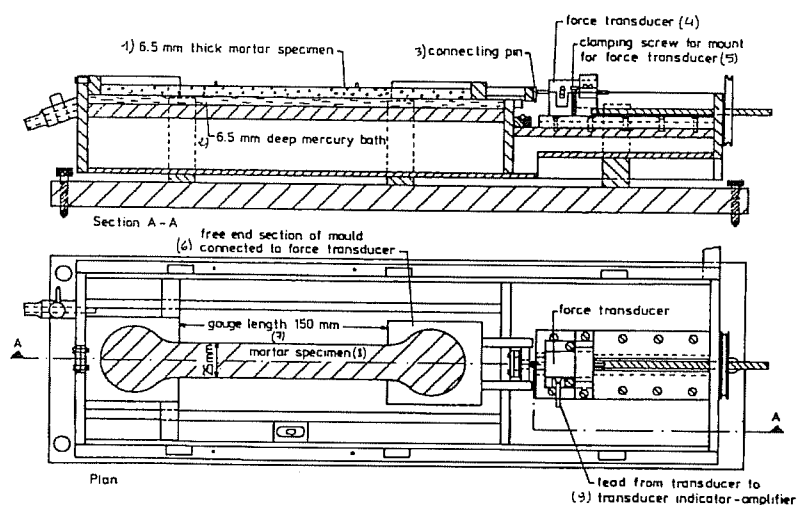


Figura 3.15: Schema della macchina di prova presentata da Orr e Haig [48].

delle due perforazioni. È pertanto possibile utilizzare una usuale macchina di prova a compressione. La simmetria cilindrica permette autoallineamenti del carico paralleli all'asse del provino. La prova non richiede speciali dispositivi per l'attacco del provino così che i carichi di compressione possono essere applicati senza particolari precauzioni. La geometria inoltre non ingenera flessione.

Raiss, Dougill e Newman [51] hanno condotto prove a trazione diretta su provini di calcestruzzo per studiare la propagazione della zona di processo della fessura durante la prova. La macchina di prova è costituita da un attuatore servo-controllato a circuito chiuso e da un telaio rigido costituito da blocchi di calcestruzzo prefabbricato. Il segnale di controllo è costituito dall'uscita di un trasformatore lineare di spostamenti variabili utilizzato per misurare l'allungamento del provino. Questo sistema di per sé non è risultato sufficientemente rigido e, di conseguenza, sono state caricate in parallelo con il provino quattro aste di acciaio. La rigidità delle aste è stata scelta in modo da aumentare la rigidità totale della macchina così da assicurare che avvenissero rotture stabili, dove, con rotture stabili, si definiscono le rotture che avvengono senza alcun rilascio improvviso di energia. Le aste parallele sono state dotate di estensometri, ed il carico sul provino è stato calcolato come differenza del carico applicato dal martinetto e del carico assorbito dalle aste. Tali aste, inoltre, hanno la funzione secondaria di limitare la rotazione relativa delle estremità del provino, causata dalle asimmetrie che si creano durante il processo di frattura.

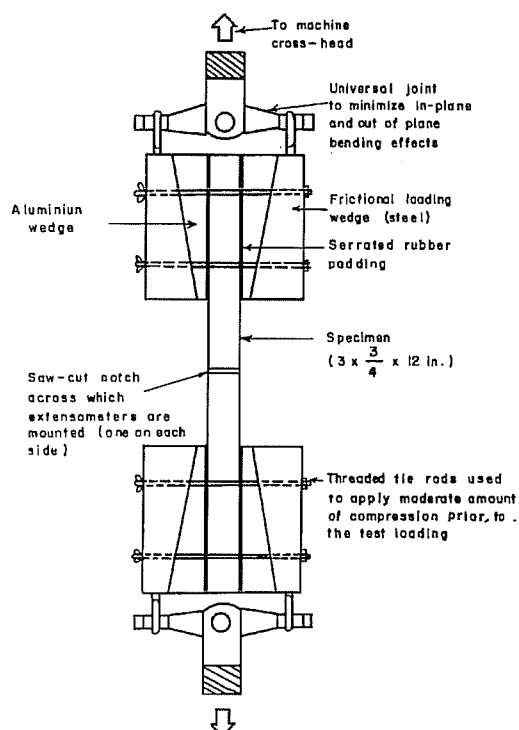


Figura 3.16: Schema della macchina di prova presentata da Gopalaratnam e Shah [49].

La soluzione scelta per attaccare i provini alla macchina è consistita in una resina epossidica resistente all'umidità.

Zhen-Hai e Xiu-Qin [52] hanno criticato le scarse dimensioni dei provini utilizzati da altri autori, e hanno effettuato delle prove a trazione utilizzando una macchina universale idraulica, della capacità massima di 1000 kN. Per renderla più rigida hanno utilizzato inoltre un telaio costituito da due travi e da quattro aste, poste in parallelo con il provino (Figura 3.18).

Per determinare la rigidezza K equivalente del sistema hanno calcolato le rigidezze della macchina, del trasduttore e del provino, queste ultime due disposte in parallelo con quella della macchina. Essi hanno imposto che la rigidezza equivalente dell'intero sistema risultasse maggiore della massima rigidezza del provino nel ramo discendente. Anche in questa prova l'attacco dei provini è stato ottenuto mediante incollaggio di piastre di acciaio con resina epossidica. Le letture degli allungamenti sul provino

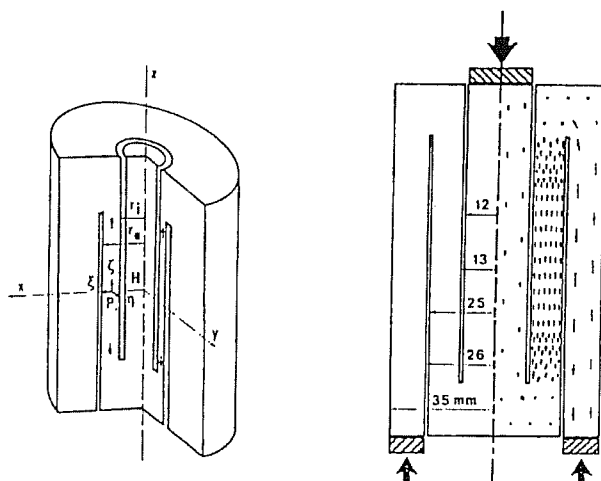


Figura 3.17: Schema del provino presentato da Luong [50].

sono state effettuate mediante degli estensimetri resistivi incollati direttamente sul provino, i quali, ovviamente, si rompono non appena la fessura li attraversa.

Cedolin, Dei Poli e Iori [53] hanno messo a punto una strumentazione per prove a trazione diretta prevedendo l'utilizzo di un sistema di interferometria olografica, al fine di ottenere una misura continua del campo di deformazioni e quindi per studiare la localizzazione della frattura nel calcestruzzo. La prova è stata condotta utilizzando una macchina in grado di generare una deformazione di trazione sul provino attraverso un cuneo collegato ad un cilindro idraulico, attivato a sua volta da una pompa volumetrica azionata manualmente (Figura 3.19). Queste due riduzioni, in serie, hanno reso possibile ottenere spostamenti molto piccoli delle teste della macchina, come richiesto dai valori della legge delle deformazioni medie a rottura del calcestruzzo sotto trazione. Le teste della macchina sono state equipaggiate con dei giunti sferici e perni di scorrimento, così che la forza applicata alle estremità delle sezioni del provino fosse concentrica ed il solo disturbo fosse causato dall'attrito. Estensometri attaccati in corrispondenza della sezione più debole dell'asta hanno poi permesso una misurazione sia della forza assiale che dei momenti flettenti, in modo che potessero essere controllati gli spostamenti della forza risultante. La macchina è stata progettata per ottenere la massima rigidità, compatibilmente con le potenzialità del sistema di supporto. Tale rigidità, comunque, non ha garantito in varie prove una propagazione stabile della fessura, rendendo impossibile determinare in modo completo la legge costitutiva. Per stabilizzare il processo di frattura e per eliminare rotture premature

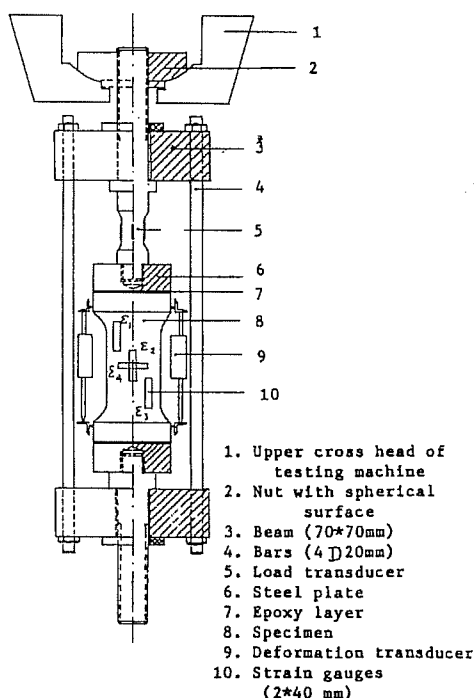


Figura 3.18: Schema della macchina di prova proposta da Zhen-Hai e Xiu-Qin [52].

causate da flessioni fuori dal piano del provino, veniva installato ad un certo punto della prova, quando la forza assiale superava il livello di picco, un sistema di quattro aste in parallelo col provino. La forza netta sul provino è stata determinata sottraendo le forze trasmesse dalle barre, misurate mediante estensometri.

Hordijk [54] ha presentato un sistema di prova mettendone in risalto l'evoluzione cronologica. In Figura 3.20.a è riportato uno schema dell'attrezzatura di prova inizialmente utilizzata. Con tale strumentazione sono stati utilizzati provini cilindrici Φ 120x300 mm. La prova è stata ideata per uno studio del comportamento a fatica sia a trazione che a trazione-compressione [55]. Per le prove a trazione uniassiale con deformazione controllata, si è cercato di determinare la posizione dell'apertura della fessura o della zona di softening, nonostante la distribuzione di deformazioni nella zona centrale del provino fosse uniforme durante l'intera prova. È apparso però come la posizione dell'apertura della fessura fosse completamente casuale. Il passo successivo è stato quello di progettare un sistema guida per prevenire rotazioni dei rulli di carico (Figura 3.20.b). Le dimensioni del provino sono state contemporaneamente ridotte a 60x50x250 mm con due intagli, essendo l'area della sezione trasversale di

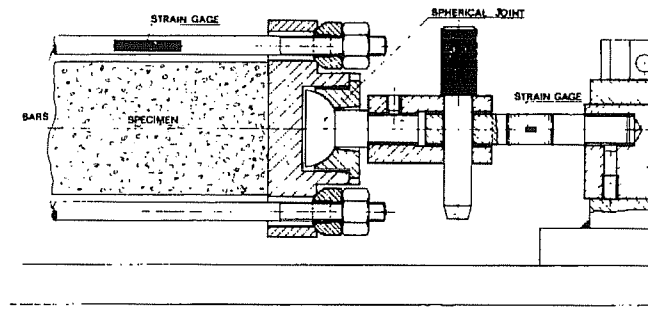


Figura 3.19: Schema della macchina di prova proposta da Cedolin, Dei Poli e Iori [53].

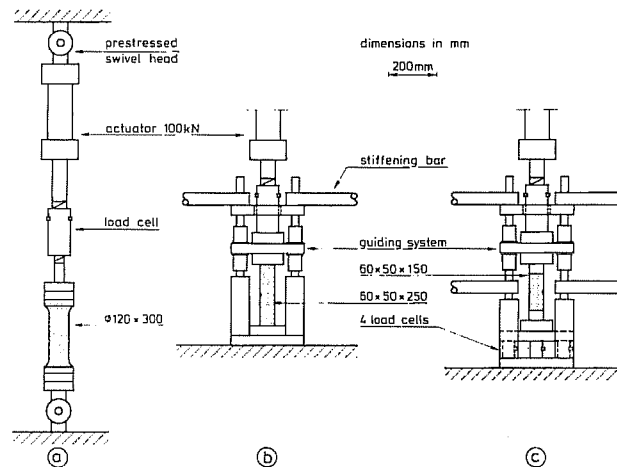


Figura 3.20: Schema degli adattamenti della macchina di prova proposta da Hordijk [54]: da (a) verso (c) in ordine cronologico.

50x50 mm [56]. Lo studio dei risultati ha evidenziato come anche con questa strumentazione non fosse possibile prevenire l'apertura di fessure non-uniformi. Ciò ha portato gli autori alla conclusione che non solo la rigidità torsionale dei rulli di carico è responsabile della non-uniformità dell'apertura della fessura, ma anche la stessa rigidità rotazionale del provino. Una ulteriore modifica è consistita nella riduzione

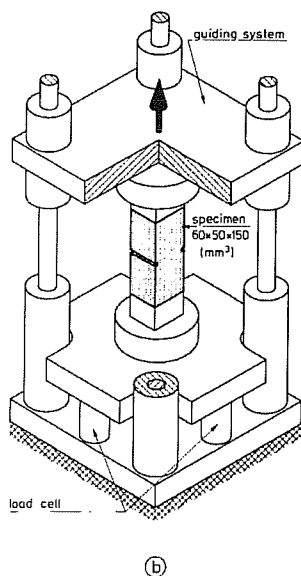


Figura 3.21: Schema della macchina di prova proposta da Hordijk [54].

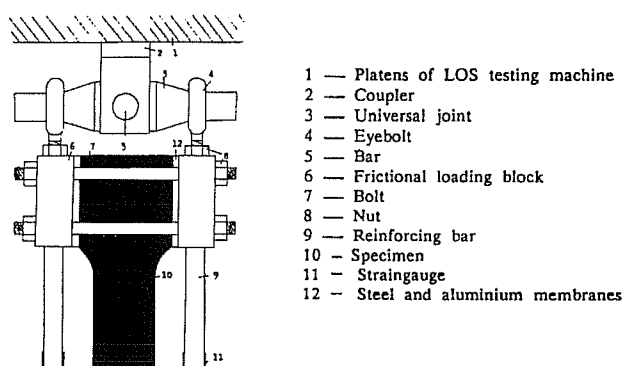


Figura 3.22: Schema della macchina di prova presentata da Phillips e Zhang [57].

della lunghezza del provino da 250 mm a 150 mm (Figura 3.20.c). Per il sistema di guida, sono state utilizzate tre boccole sferiche in modo da minimizzare l'attrito nel sistema, in quanto le celle di carico sono state posizionate al di fuori del sistema di guida. I provini, anche in questo caso, sono stati incollati con resine epossidiche.

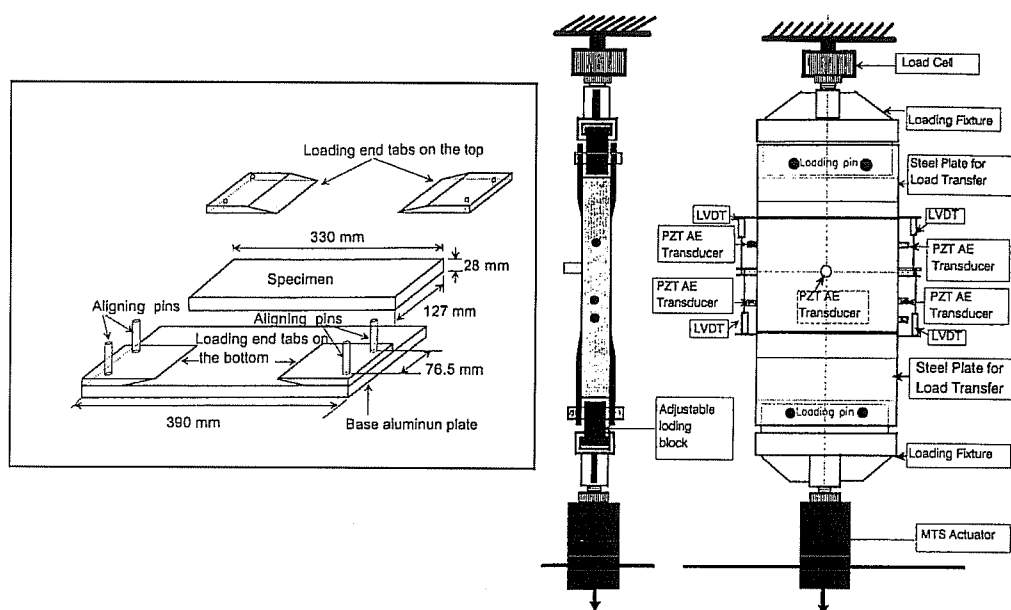


Figura 3.23: Schema del sistema di prova proposto da Li et al. [58].

Phillips e Zhang [57] hanno progettato una apparecchiatura per prove a trazione finalizzata allo studio della correlazione dei risultati fra provini con e senza intaglio e sugli effetti del rapporto acqua-cemento sui parametri di frattura, in particolare sull'energia di frattura. Le prove di trazione uniassiale sono state effettuate mediante una macchina di prova universale da 2000 kN con incorporato un telaio rigido appositamente progettato (Figura 3.22). Esso era formato da due barre parallele di acciaio dolce del diametro di 32 mm, collegate alle estremità con blocchetti serrati ai due lati opposti del provino, in modo tale da trasferire le tensioni al provino attraverso forze di attrito. Per fissare tali blocchi al provino sono stati utilizzati quattro bulloni. Gli autori hanno trovato, anche attraverso un'analisi agli elementi finiti, che è sufficiente, per la resistenza del calcestruzzo utilizzato, applicare un momento torcente di 50 Nm su ciascun bullone per evitare lo scorrimento e senza causare una eccessiva concentrazione di tensioni che avrebbe potuto causare l'inizio di una fessura nella parte terminale del provino. La rigidità totale del sistema è risultata pari a 3.5×10^5

N/mm. Le prove sono state condotte su provini alti 700 mm con sezione variabile da 300 mm, in corrispondenza degli attacchi, a 100 mm, in corrispondenza della sezione di mezzeria, dove si prevede l'inizio e la propagazione della fessura.

La macchina di prova messa a punto da Li, Kulkarni e Shah [58] per ottenere curve complete carico-spostamento per provini di calcestruzzo senza intaglio, mostra alcune peculiarità. La prima riguarda il tipo di attacco utilizzato, costituito da quattro piastre di acciaio incollate sulle facce laterali del provino, collegate fra loro e alla macchina mediante quattro tasselli (Figura 3.23). Tale accorgimento riduce la possibilità di scollamento del provino dagli attacchi in quanto aumenta la superficie di incollaggio. La seconda peculiarità consiste nel monitoraggio del provino lungo l'intera altezza. Tale controllo consente di evidenziare in quale parte del provino si localizzi la fessura. La prova, ovviamente in controllo di spostamenti, viene pilotata dall'estensometro che, istante per istante, mostra la deformazione maggiore. In questo modo si riescono a tracciare dei diagrammi di snap-back relativi agli estensometri che invece cadono al di fuori della zona di localizzazione della fessura. Dai diagrammi riportati in [58] non sembra però che gli autori siano riusciti a tracciare per intero la coda del tratto softening.

Capitolo 4

Variazione statistica della resistenza a trazione

4.1 Introduzione

È noto come la resistenza di un materiale vari con la dimensione del provino impiegato per misurarla. Tale fenomeno è stato evidenziato negli anni trenta da Weibull [7], che ha introdotto il concetto dell'*anello più debole della catena* per spiegare la diminuzione di resistenza con la scala dimensionale. La dimensione del difetto aumenta all'aumentare del volume del provino. Questo semplice modello non considera però né le caratteristiche dell'imperfezione né la relazione costitutiva del materiale.

Jayatilaka [59] e Freudenthal [60], più recentemente hanno considerato un materiale elastico lineare con un grande numero di crack alla Griffith distribuiti in maniera *random*, e hanno dimostrato come la variazione di resistenza col volume possa essere correlata alla densità di probabilità della distribuzione della dimensione del crack.

L'effetto di scala sulla resistenza delle strutture con angoli rientranti è stato oggetto di studio da parte di Leicester [61], che si è basato sulla potenza della singolarità delle tensioni al vertice della rientranza. Egli ha dimostrato come l'effetto di scala sulla resistenza sia imputabile alla presenza di una o più sorgenti di singolarità tensionale nel corpo. Queste sorgenti possono essere rappresentate da fessure macroscopiche o da interfacce parzialmente scollate.

Batdorf e Crose [62], hanno sviluppato una teoria per materiali macroscopicamente omogenei contenenti microfessure uniformemente distribuite ed orientate in modo casuale, nell'ipotesi che la frattura dipenda esclusivamente dalla tensione macroscopica normale al piano della fessura. La funzione rappresentativa del numero di fessure per unità di volume relative a ciascun valore della tensione normale è espansa in serie di Taylor mentre i coefficienti di tale serie vengono dedotti dai risultati spe-

rimentali.

Carpinteri [13] ha proposto una distribuzione di autosomiglianza per la dimensione dei difetti. Essa si basa sull'ipotesi che la dimensione del difetto più pericoloso (o critico) debba risultare proporzionale alla dimensione lineare del provino. Scopo di quanto segue è di riprendere tale ipotesi, e di estrapolarla ai casi in cui il disordine, interno al materiale e relativo alla sua microstruttura, sia inferiore al caso limite succitato.

Si parte dall'approccio di Leicester per strutture con un difetto dominante e si estende la teoria ad un materiale ideale con una distribuzione casuale di fessure microscopiche, vuoti o inclusioni. Viene inoltre definita una distribuzione dimensionale tridimensionale per i difetti. Tale distribuzione contiene un parametro N che misura il grado di disordine della microstruttura del materiale. Si mostra come la distribuzione dimensionale di autosomiglianza rappresenti il massimo grado di disordine riscontrabile nei materiali reali, mentre, normalmente, si trovano gradi di disordine inferiori. In particolare si evidenzia la relazione tra la pendenza α_N della retta che rappresenta l'effetto scala nel diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione e il parametro N di dispersione nella distribuzione dimensionale dei difetti. La relazione tra α_N ed N è ottenuta attraverso simulazioni statistiche di tipo Montecarlo.

Viene utilizzata infine anche la legge costitutiva di Ramberg-Osgood (con incrudimento). Vengono inoltre considerate le interazioni fra la forma geometrica di vuoti ipotizzati poligonali, la non-linearità della matrice ed il grado di disordine.

4.2 Strutture con un difetto dominante

Per strutture con un *difetto dominante* si intendono quelle strutture omogenee nelle quali esista un'unica sorgente di intensificazione degli sforzi. Si consideri un corpo bidimensionale elastico lineare avente una fessura disposta ortogonalmente alla direzione della forza applicata. Utilizzando i risultati di Irwin [19], si può definire il campo tensionale simmetrico intorno al vertice della fessura nella forma seguente:

$$\sigma_{ij} = K r^{-\frac{1}{2}} F_{ij}(\theta), \quad (4.1)$$

dove con K si indica il fattore di intensificazione degli sforzi, mentre con r e θ , rispettivamente le coordinate radiale ed angolare. In generale, il fattore K può essere espresso come [21]:

$$K = \sigma d^{\frac{1}{2}} f_1 \left(\frac{a}{d} \right), \quad (4.2)$$

dove σ è la tensione applicata, d una dimensione caratteristica della struttura e f_1 un fattore di forma, che dipende dalla geometria della struttura e dalla dimensione

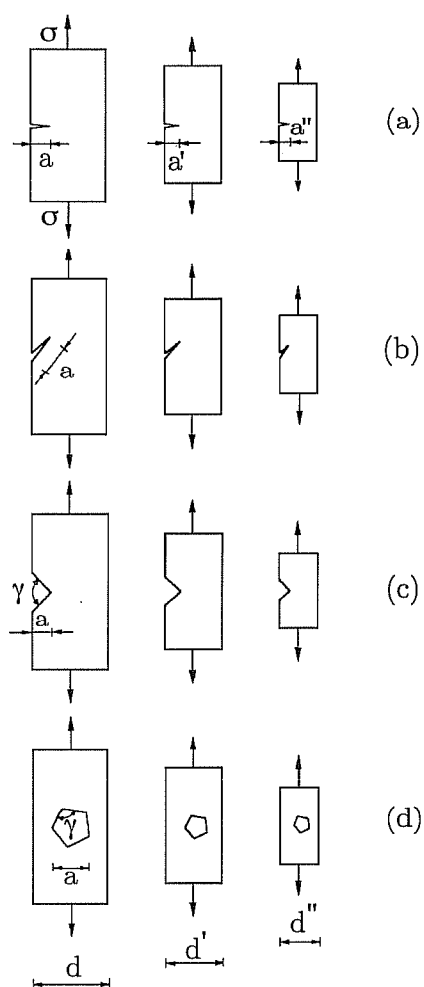


Figura 4.1: Corpi geometricamente simili con un difetto dominante: fessura in modo I (a), fessura in modo misto (b), angolo rientrante (c) e vuoto poligonale (d).

relativa $\frac{a}{d}$ della fessura. Si definisce tensione di rottura σ_u il valore della tensione per il quale K eguaglia il suo valore critico, K_c :

$$\sigma_u = K_c d^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{f_1\left(\frac{a}{d}\right)}. \quad (4.3)$$

Considerando i logaritmi di entrambi i membri della (4.3), si ottiene:

$$\ln \sigma_u = \left[\ln K_c - \ln f_1 \left(\frac{a}{d} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln d, \quad (4.4)$$

da cui si ricava la forma generale:

$$\ln \sigma_u = A \left(K_c, \frac{a}{d} \right) - \frac{1}{2} \ln d, \quad (4.5)$$

in cui A è una funzione dipendente dalla geometria della struttura, dal materiale e dalla dimensione relativa della fessura.

Si consideri ora un insieme di strutture fessurate geometricamente simili (Figura 4.1.a). Il logaritmo della resistenza $\ln \sigma_u$ risulta essere una funzione linearmente decrescente, con pendenza $-\frac{1}{2}$, del logaritmo della dimensione della struttura (Figura 4.2.a).

Ciò implica che, se $d \rightarrow \infty$, e quindi $\ln d$ tende a $+\infty$, $\ln \sigma_u$ tende a $-\infty$ e quindi $\sigma_u \rightarrow 0^+$. Invece, se $d \rightarrow 0^+$, e quindi $\ln d$ tende a $-\infty$, $\ln \sigma_u$ tende a $+\infty$ e quindi $\sigma_u \rightarrow +\infty$.

La retta orizzontale

$$\ln \sigma_u = \ln \sigma_{\bar{u}} \quad (4.6)$$

rappresenta il limite superiore intrinseco della resistenza. In termini meccanici, le strutture di piccole dimensioni sono caratterizzate da fenomeni di rottura dovuti a collasso plastico piuttosto che a propagazione della fessura.

Sotto un carico che generi un modo misto (Figura 4.1.b.), il campo di tensione al vertice della fessura assume la forma:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^2 K_k r^{-\frac{1}{2}} F_{ij}^k(\theta) \quad (4.7)$$

dove K_k ($k = 1, 2$) sono i fattori di intensificazione degli sforzi associati alla sollecitazione della fessura rispettivamente in modo I (apertura) ed in modo II (scorrimento). Come nel caso precedente, si può scrivere:

$$K_k = \sigma d^{\frac{1}{2}} f_k \left(\frac{a}{d} \right); \quad k = 1, 2. \quad (4.8)$$

È necessaria questa volta una combinazione dei due K_k , ($k = 1, 2$) per descrivere l'incipiente frattura [63]. Si noti come, anche nel caso di modo misto, continui a valere una relazione lineare per la variazione di resistenza in funzione della dimensione strutturale, con pendenza $-\frac{1}{2}$ nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$.

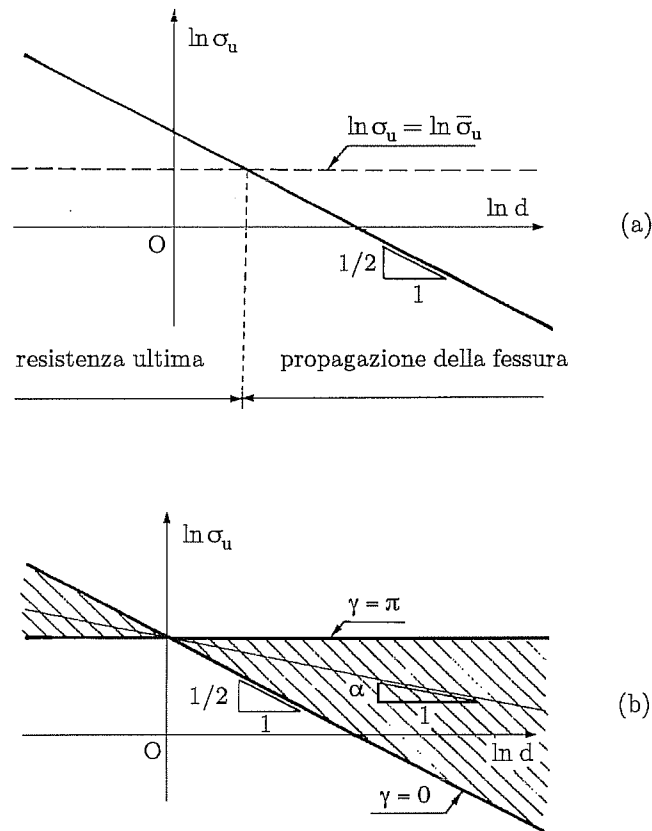


Figura 4.2: Diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione: interazione tra collasso per resistenza ultima e propagazione del crack (a); attenuazione del decremento della resistenza all'aumentare dell'ampiezza dell'angolo rientrante (b).

Si consideri ora una struttura elastica lineare caratterizzata dalla presenza di un angolo rientrante di ampiezza γ (Figura 4.1.c). Williams [64] ha dimostrato che, quando entrambe le superfici della fessura risultano scariche, il campo simmetrico delle tensioni al vertice della fessura vale:

$$\sigma_{ij} = K^* r^{-\alpha} F_{ij}^{(\gamma)}(\theta), \quad (4.9)$$

ove l'esponente α della singolarità tensionale varia da $\frac{1}{2}$ ($\gamma = 0$) a 0 ($\gamma = \pi$), come illustrato in Figura 4.3. Applicando l'analisi dimensionale, è possibile ricavare un'espressione per K^* analoga a quella trovata precedentemente per K in modo I,

ovvero:

$$K^* = \sigma d^\alpha g_1 \left(\frac{a}{d} \right). \quad (4.10)$$

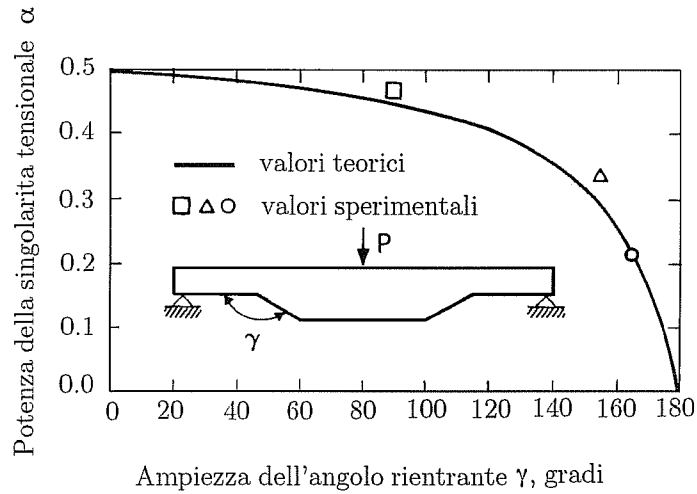


Figura 4.3: Potenza della singolarità tensionale in funzione dell'ampiezza dell'angolo rientrante.

Quando l'angolo rientrante γ risulta uguale a zero, l'equazione (4.10) coincide con la (4.2). Quando invece $\gamma = \pi$, la singolarità tensionale scompare e il fattore di intensificazione degli sforzi K^* assume pertanto la dimensione fisica di una tensione diventando proporzionale alla tensione applicata σ .

Leicester [61] ha dimostrato come la tensione di rottura σ_u venga raggiunta quando K^* raggiunge il suo valore critico, cioè:

$$\sigma_u = K_c^* d^{-\alpha} \frac{1}{g_1 \left(\frac{a}{d} \right)}. \quad (4.11)$$

In forma logaritmica si può scrivere:

$$\ln(\sigma_u) = B \left(K_c^*, \frac{a}{d} \right) - \alpha \ln d, \quad (4.12)$$

ove:

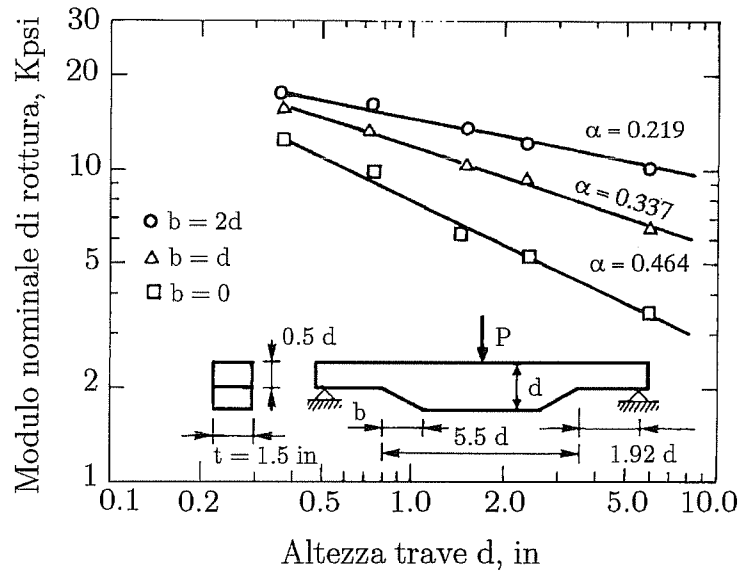


Figura 4.4: Effetto di scala sulla resistenza a flessione di travi in legno con angolo rientrante [61].

$$B\left(K_C^*, \frac{a}{d}\right) = \ln K_C^* - \ln g_1\left(\frac{a}{d}\right). \quad (4.13)$$

Per un insieme di strutture geometricamente simili con angolo rientrante (Figura 4.1.c), la resistenza $\ln \sigma_u$ è definita da una funzione di $\ln d$ linearmente decrescente con pendenza $-\alpha$, come si nota in Figura 4.2.b. Quando $\gamma \rightarrow \pi$ e quindi $\alpha \rightarrow 0$, l'effetto scala scompare e la retta che esprime la variazione della resistenza diventa orizzontale. In tal caso, la condizione di equilibrio diventa:

$$\sigma d = K^*(d - a) \quad (4.14)$$

e pertanto dall'equazione (4.10) si ricava il valore della funzione di forma g_1 pari a:

$$g_1\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{1}{1 - \frac{a}{d}}. \quad (4.15)$$

Quando la profondità della fessura $\frac{a}{d}$ tende a zero, $g_1\left(\frac{a}{d}\right) = 1$, il fattore di intensificazione degli sforzi K^* coincide con la tensione applicata σ , come mostra l'equazione (4.10). Conferme sperimentali a quanto detto sono mostrate nella Figura 4.4 [61].

I risultati ottenuti mostrano effetti scala con i decrementi della resistenza forniti in Figura 4.3.

Si consideri infine un corpo elastico lineare bidimensionale avente un vuoto poligonale di forma regolare con un numero arbitrario di lati M , Figura 4.1.d. L'angolo γ dello spigolo rientrante del vuoto poligonale è funzione del numero di lati M , ovvero:

$$\gamma = \pi \left(\frac{M-2}{M} \right). \quad (4.16)$$

Ciascuno spigolo rientrante è soggetto ad una sollecitazione di modo misto con una singolarità tensionale $r^{-\alpha}$. Per un dato carico esterno, esiste uno spigolo che è soggetto al campo di tensioni più severo. Quando il carico viene incrementato progressivamente, la condizione di crisi si raggiunge per prima in questo vertice. Dall'equazione (4.13) si ottiene:

$$B \left(K_c^*, \frac{a}{d} \right) = \ln K_c^* - \ln \sqrt{(g_1^2 + qg_2^2)}, \quad (4.17)$$

dove q ($q \geq 0$) misura il contributo del modo II. Il diagramma $\ln \sigma_u$ in funzione di $\ln d$ risulta anche in questo caso lineare e con pendenza $-\alpha$. Quando $M = 2$ si ricade nel caso di crack di Griffith e l'angolo rientrante γ risulta uguale a zero. Quando $M = \infty$, la cavità poligonale diventa un foro circolare mentre l'angolo rientrante γ risulta uguale a π . In questo caso, l'effetto scala svanisce e la retta nel piano $\ln \sigma_f - \ln d$ diventa orizzontale.

4.3 Strutture con più imperfezioni

Nel presente paragrafo vengono analizzate strutture tridimensionali con un grande numero di difetti caratterizzati da una data distribuzione dimensionale. Vengono formulate le seguenti tre ipotesi:

- (1) la struttura è macroscopicamente omogenea;
- (2) la struttura è macroscopicamente isotropa;
- (3) l'interazione tra le imperfezioni è trascurabile.

Come primo caso, si consideri un insieme di strutture geometricamente simili, dove sia presente una distribuzione di difetti e/o di vuoti poligonali di dimensione costante a (Figura 4.5.a). Queste strutture possono essere considerate come provini dello stesso materiale, e la loro rottura avviene quando la condizione di crisi è verificata per l'imperfezione avente l'orientazione più critica. Poichè tali imperfezioni sono tutte della stessa dimensione, si può asserire che, in questo caso ideale, è assente qualsiasi effetto di scala.

Si consideri ora un insieme di strutture geometricamente simili, dove le imperfezioni abbiano dimensione costante e proporzionale alla dimensione della struttura

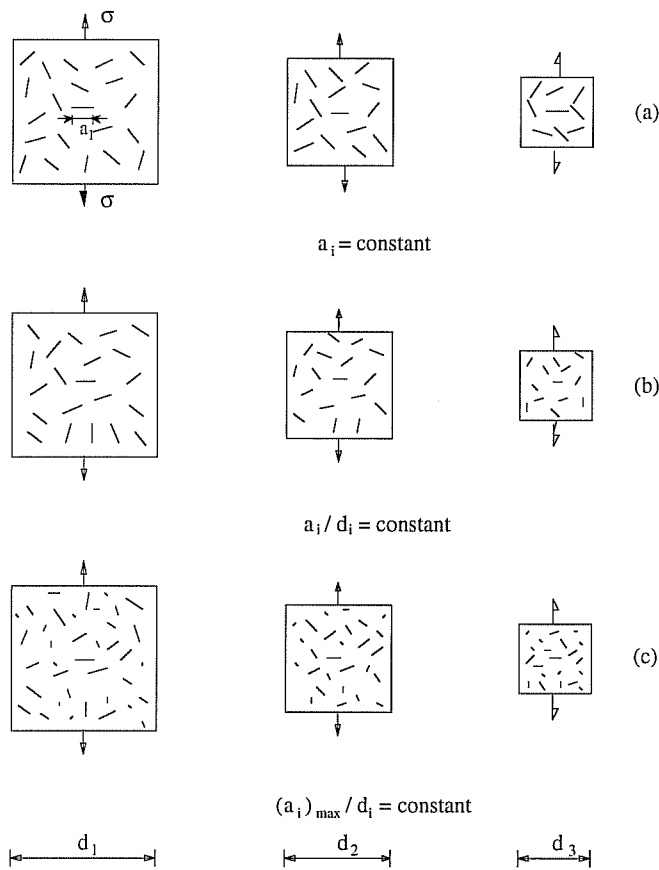


Figura 4.5: Strutture geometricamente simili con distribuzione statistica di difetti: (a) dimensione dei difetti costante; (b) dimensione dei difetti costante e proporzionale alla dimensione della struttura; (c) distribuzione di *autosomiglianza* della dimensione dei difetti.

stessa (Figura 4.5.b). In questo caso, esse non possono essere considerate come provini dello stesso materiale. La rottura avviene in corrispondenza dell'imperfezione con l'orientazione più critica, che è di dimensione proporzionale alla dimensione della struttura. Poichè l'influenza delle altre imperfezioni è per ipotesi trascurabile, questo caso è completamente equivalente a quello di un'unica imperfezione di dimensione proporzionale a quella della struttura. L'effetto di scala sulla resistenza è rappresentato, in questo caso, da un diagramma lineare nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$ con pendenza $-\alpha$, dove α è la potenza della singolarità tensionale provocata dall'imperfezione e d è una

dimensione caratteristica del provino. Se si hanno imperfezioni della stessa dimensione, ma con forma differente (per esempio fessure e vuoti circolari), la condizione di crisi deve essere valutata soltanto per le imperfezioni con il massimo valore di α ($0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$).

Si consideri infine un insieme di strutture simili dove le imperfezioni con la forma più pericolosa ($\alpha = \alpha_{max}$) abbiano una densità di probabilità $p(a)$ (Figura 4.5.c). Si può asserire che, se la distribuzione dimensionale è tale che la dimensione massima a_{max} risulti proporzionale alla dimensione lineare d della struttura (*autosomiglianza*), allora l'effetto di scala sulla resistenza sarà rappresentato, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, da un diagramma lineare con pendenza $-\alpha_{max}$. Tale ipotesi è notevolmente restrittiva ed è valida soltanto quando la densità di probabilità $p(a)$ della distribuzione dimensionale dei difetti presenta particolari proprietà. Indicando con ρ la densità delle imperfezioni (numero di imperfezioni per unità di volume), la dimensione massima a_{max} può essere definita come segue [13]:

$$\rho d^3 p(a_{max}) \Delta a \frac{1}{4\pi} \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta = 1 \quad (4.18)$$

dove φ e θ rappresentano la longitudine e la latitudine dell'orientazione del difetto. Il fattore $\frac{1}{4\pi}$ indica che tutti gli angoli di orientazione delle imperfezioni sono statisticamente equivalenti. Il valore unitario a secondo membro rappresenta la certezza di incontrare un difetto di dimensioni a_{max} . Considerando una struttura geometricamente simile di dimensione caratteristica kd , ed assumendo valida l'ipotesi precedente, si può scrivere:

$$\rho (kd)^3 p(ka_{max}) \Delta a \frac{1}{4\pi} \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta = 1. \quad (4.19)$$

Poichè a_{max} è una funzione di ρ e di d , oltre che di $\Delta a, \Delta \varphi, \Delta \theta$, segue che le equazioni (4.18) e (4.19) devono essere valide per qualsiasi dimensione del difetto a :

$$\rho d^3 p(a) \Delta a \frac{1}{4\pi} \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta = 1, \quad (4.20)$$

$$\rho (kd)^3 p(ka) \Delta a \frac{1}{4\pi} \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta = 1. \quad (4.21)$$

Dalle equazioni (4.20) e (4.21) segue che:

$$p(a) = k^3 p(ka), \quad \forall a \gg \bar{a}, \quad \forall k \in \mathbb{R}^+, \quad (4.22)$$

e quindi la funzione $p(a)$ assume la forma:

$$p(a) = \frac{C}{a^3}, \quad \forall a \gg \bar{a}, \quad (4.23)$$

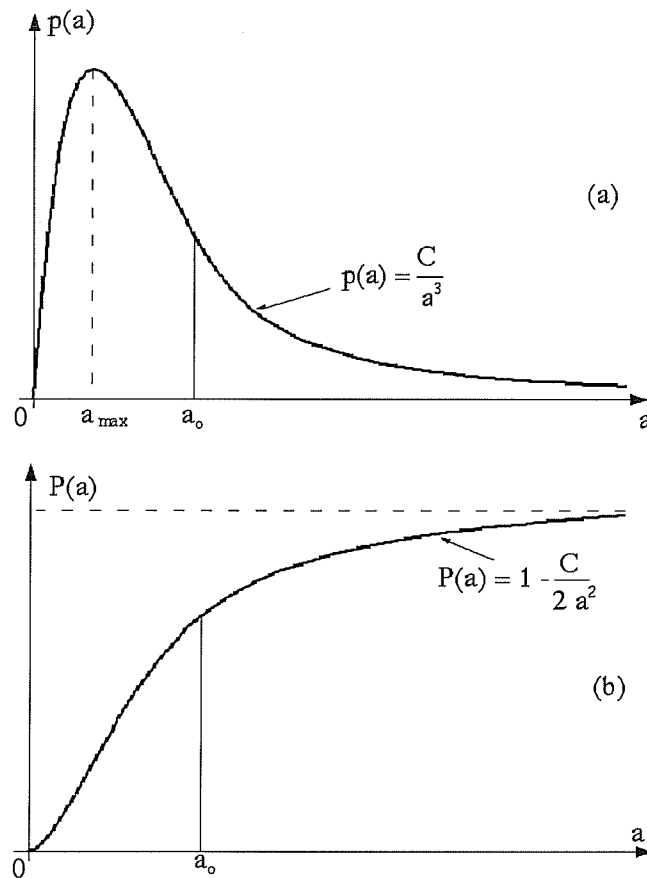


Figura 4.6: Distribuzione di *autosomiglianza* dei difetti: (a) densità di probabilità; (b) distribuzione cumulativa.

dove C è una costante con la dimensione fisica di una lunghezza al quadrato ed \bar{a} è la moda dei difetti. L'equazione (4.23) può essere denominata *distribuzione dimensionale di autosomiglianza*. La relativa funzione di distribuzione cumulativa P è:

$$P(a) = \int_0^a p(x)dx = \int_0^{a_0} p(x)dx + \int_{a_0}^a \frac{C}{x^3}dx, \quad (4.24)$$

dove $a_0 \gg \bar{a}$ è il valore oltre il quale il tratto discendente della funzione p può essere approssimato dall'equazione (4.23). Dall'equazione (4.24) si ottiene:

$$P(a) = P_o + \left[-\frac{C}{2x^2} \right]_{a_o}^a = P_o + \frac{C}{2a_o^2} - \frac{C}{2a^2}. \quad (4.25)$$

Per $a \rightarrow \infty$ la distribuzione cumulativa $P(a) \rightarrow 1$,

$$P_o + \frac{C}{2a_o^2} = 1, \quad (4.26)$$

e quindi (Figura 4.6.b):

$$P(a) = 1 - \frac{C}{2a^2}, \quad (4.27)$$

con

$$C = 2(1 - P_o)a_o^2. \quad (4.28)$$

In generale, quando la condizione di autosomiglianza non è soddisfatta, la funzione di distribuzione cumulativa P assume la seguente forma:

$$P(a) = 1 - \frac{C}{Na^N}, \quad \text{per } a > a_o \quad (4.29)$$

con

$$C = N(1 - P_o)a_o^N, \quad (4.30)$$

dove $N(1 < N < \infty)$ è un esponente che misura il grado di disordine. In questo caso, l'effetto di scala sulla resistenza può essere rappresentato nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$ da una retta con pendenza $-\alpha_N$ [13]:

$$\alpha_N(\gamma, N) = \frac{\alpha(\gamma)}{(N-1)\zeta}, \quad (4.31)$$

ove γ è l'angolo rientrante del vuoto poligonale mentre l'esponente ζ dipende da caratteristiche secondarie del materiale (densità delle imperfezioni, distribuzione dimensionale dei difetti meno pericolosi, ecc.). La densità di probabilità della distribuzione dimensionale, nel caso generale, assume pertanto la seguente espressione:

$$p(a) = \frac{dP}{da} = \frac{C}{a^{N+1}}, \quad \text{per } a > a_o \quad (4.32)$$

che coincide con la (4.23) per $N = 2$. L'equazione (4.31) mostra come l'effetto di scala svanisca quando $\alpha = 0$ ovvero quando $\gamma = \pi$ (vuoti circolari) e/o quando $N \rightarrow \infty$ (dimensione dei difetti quasi costante). D'altra parte, l'effetto di scala diventa enorme

quando $N \rightarrow 1$ (dispersione molto accentuata nella distribuzione dimensionale delle imperfezioni).

Si assuma ora che la distribuzione dimensionale dei difetti non sia quella di autosomiglianza, ma abbia un grado di dispersione maggiore ($1 < N < 2$) [4]. La dimensione massima del difetto a_{max} può venire definita dall'equazione (4.18), mentre la dimensione massima del difetto, per un corpo geometricamente simile di dimensione caratteristica kd ($k > 1$), sia data da una legge di potenza della forma:

$$a_{max}(k) = k^\beta a_{max}(1), \quad (4.33)$$

con $\beta > 1$. In questo caso, l'equazione (4.19) può essere sostituita dalla seguente:

$$\rho(kd)^3 p(k^\beta a_{max}) \Delta a \frac{1}{4\pi} \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta = 1. \quad (4.34)$$

Uguagliando la (4.18) con la (4.34), ed eliminando l'indice max, si ottiene:

$$p(a) = k^3 p(k^\beta a) \quad (4.35)$$

ed allora, considerando anche l'equazione (4.32), è possibile determinare l'esponente β in funzione di N :

$$\beta = \frac{3}{N+1}. \quad (4.36)$$

Non è difficile verificare come, nelle ipotesi precedenti e per dimensioni sufficientemente grandi, il difetto massimo risulti essere più grande del corpo stesso. Infatti dalle equazioni (4.33) e (4.36) si ottiene:

$$a_{max}(k) = k^{\frac{3}{N+1}} a_{max}(1), \quad (4.37)$$

che risulta una funzione non lineare di k , mentre la dimensione caratteristica del corpo cresce linearmente con k

$$d(k) = kd = k \frac{a_{max}(1)}{\xi}. \quad (4.38)$$

Il difetto massimo è più grande del corpo stesso,

$$a_{max}(k) \geq d(k), \quad (4.39)$$

e quindi si ha una situazione assurda per

$$k \geq \xi^{\frac{N-2}{N+1}} > 1. \quad (4.40)$$

È possibile pertanto concludere che la distribuzione di *autosomiglianza* della dimensione dei difetti sia quella corrispondente al massimo disordine.

Fino a questo punto sono state considerate esclusivamente fessure e cavità. Analoghe considerazioni possono essere fatte nel caso di inclusioni. La densità di probabilità p e la distribuzione cumulata P possono dipendere dalla dimensione dello scollamento tra matrice ed aggregato (Figura 4.7). Questa ipotesi è realistica per il calcestruzzo, dove si formano delle fessure dovute alla essiccazione interna ed al ritiro, in particolare per aggregati di grosse dimensioni [65]. Nel caso di inclusioni circolari, l'effetto scala sulla resistenza è rappresentato da un diagramma lineare, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, con pendenza $-\frac{1}{2(N-1)\zeta}$.

Il modello precedente può essere applicato soltanto ad effetti di scala relativi alla prima microfessurazione. Per analizzare stadi successivi di degradazione del materiale, risulta opportuno ricorrere a metodi numerici. Uno dei metodi più utilizzati recentemente prende il nome di *Lattice Model*. Esso consiste nella modellazione della struttura di un dato materiale attraverso una rete di aste o di travi e nell'assegnare alle costanti elastiche di tali elementi dei valori che obbediscano ad una determinata legge di probabilità.

La potenza dell'incrudimento del materiale secondo la legge di Ramberg-Osgood, caratterizzata da una relazione costitutiva del tipo:

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n \quad 1 \leq n < \infty, \quad (4.41)$$

può essere inserita nello studio dello stato tensionale in prossimità dell'angolo rientrante di ampiezza γ . Hutchinson [66], e Rice e Rosengren [67], nell'ipotesi che esista una macro-plasticità uniforme intorno al vertice della fessura, hanno fornito un'espressione per la singolarità tensionale al vertice della fessura, per questo tipo di materiale:

$$\lambda = \frac{1}{n+1}. \quad (4.42)$$

Quando $n = 1$, si ritrova un comportamento elastico lineare, $\lambda = \frac{1}{2}$. Quando $n \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow 0$ e quindi si ottiene un materiale rigido-perfettamente plastico. La singolarità tensionale pertanto svanisce ed il fattore di intensità degli sforzi plastico raggiunge la dimensione fisica di una tensione [68]. Questo caso limite è analogo a quello di un angolo rientrante con $\gamma \rightarrow \pi$ in elasticità lineare. Per $\gamma > 0$ e $n > 1$, il campo delle tensioni simmetriche al vertice dell'angolo può essere descritto come:

$$\sigma_{ij} = K^* r^{-s_0} F_{ij}^{(\gamma, n)}(\theta), \quad (4.43)$$

nella quale la potenza s_0 è data da:

$$s_0(\gamma, n) = 2\alpha(\gamma) \frac{1}{n+1}. \quad (4.44)$$

La funzione $s_0(\gamma, n)$ è rappresentata in Figura 4.8.

Estendendo l'analisi di una singola fessura, affrontata precedentemente, al caso di un grande numero di difetti con una data distribuzione dimensionale in un materiale non-lineare, l'effetto scala può essere rappresentato da una retta, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, con pendenza $-s_0$. Dalle equazioni (4.31) e (4.44), si trova che:

$$s_0(\gamma, n, N) = 2\alpha(\gamma) \frac{1}{(n+1)(N-1)\zeta}. \quad (4.45)$$

Dall'equazione (4.45) si può a questo punto dedurre la massima pendenza della retta che rappresenta il decremento della resistenza. Essa è prevista da tre situazioni concomitanti:

- (1) materiale elastico lineare;
- (2) crack di Griffith ($\alpha = 1/2$);
- (3) massimo disordine ($N = 2$, cioè autosomiglianza).

La pendenza $1/2$ appare essere un limite superiore teorico, mai superato nei risultati sperimentali riportati in letteratura.

D'altra parte, l'effetto di scala si annulla (retta orizzontale) quando almeno una delle tre seguenti condizioni è verificata:

- (1) materiale elastico-perfettamente plastico ($n \rightarrow \infty$);
- (2) pori che non producano singolarità tensionali ($\alpha = 0$);
- (3) massimo ordine ($N \rightarrow \infty$).

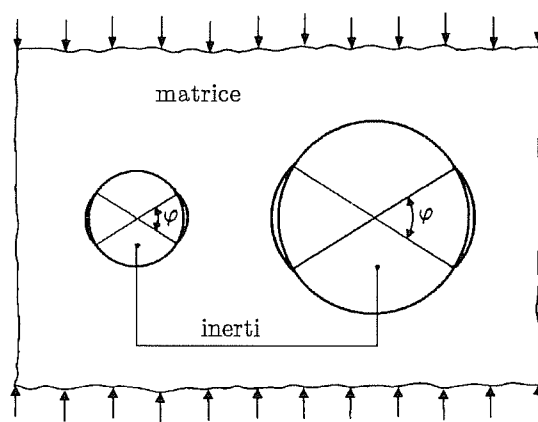


Figura 4.7: Fessure situate all'interfaccia tra matrice e aggregato.

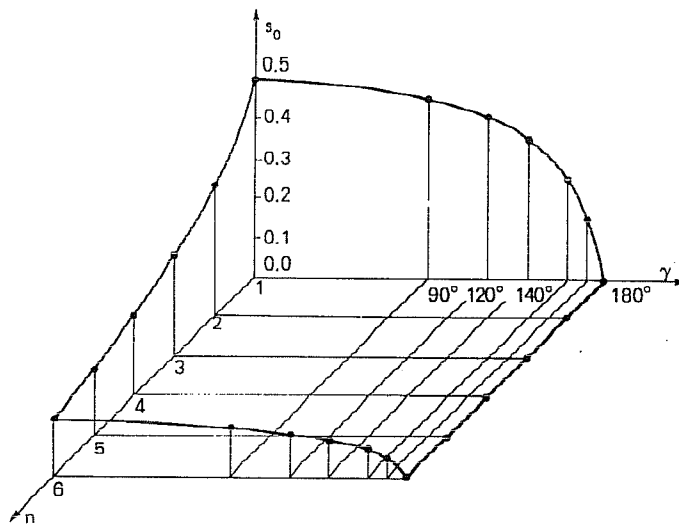


Figura 4.8: Potenza della singolarità tensionale in funzione dell'ampiezza γ dell'angolo rientrante e dell'esponente n di incrudimento del materiale.

Parametri di Weibull

Per determinare sperimentalmente il modulo di Weibull m , possono essere utilizzate le seguenti equazioni:

$$\ln \bar{\sigma}_u = \ln \left[\sigma_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) f(m) \right] - \frac{1}{m} \ln V \quad (4.46)$$

e

$$\ln \ln \left(\frac{1}{1 - P_f} \right) = \ln \frac{V}{\sigma_0^m} + m \ln \sigma \quad (4.47)$$

ove σ_0 è un fattore di normalizzazione, V il volume del provino, $f(m)$ una funzione di m che dipende dal particolare sistema di carico, Γ la "funzione Gamma" e P_f la probabilità di collasso. Numerosi ricercatori hanno applicato queste equazioni per determinare la relazione tra il modulo di Weibull m e la forma dei difetti, la duttilità del materiale e la dispersione della dimensione dei difetti. Jayatilaka [59] e Freudenthal [60] hanno utilizzato un modello con fessure distribuite in un materiale elastico lineare per determinare il modulo di Weibull, m . Jayatilaka ha espresso il valore di m in funzione del grado N della distribuzione cumulativa della dimensione di difetti:

$$m = 2N. \quad (4.48)$$

Freudenthal, d'altra parte, ha ricavato m in funzione del coefficiente di variazione C_v della densità di probabilità della dimensione dei difetti:

$$m = \frac{2}{C_v}. \quad (4.49)$$

Utilizzando l'equazione (4.46) ed assumendo la similitudine geometrica in un corpo tridimensionale di base quadrata con lato d e lunghezza kd risulta:

$$\ln \bar{\sigma}_u = \left[\sigma_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) f(m) \right] - \frac{1}{m} \ln(kd^3), \quad (4.50)$$

da cui si ottiene che

$$\ln \bar{\sigma}_u = D(\sigma_0, m) - \frac{3}{m} \ln d, \quad (4.51)$$

dove

$$D(\sigma_0, m) = \ln \frac{\sigma_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) f(m)}{(k)^{\frac{1}{m}}}. \quad (4.52)$$

Le equazioni (4.51) e (4.52) possono essere comparate con le (4.53) e (4.54) per $N = 2$:

$$\ln \bar{\sigma}_u = B \left(K_c^*, \frac{a_{max}}{d} \right) - s_0 \ln d, \quad (4.53)$$

$$B \left(K_c^*, \frac{a_{max}}{d} \right) = \ln \frac{K_c^*}{\sqrt{g_1^2 + qg_2^2}}. \quad (4.54)$$

Si ottiene pertanto:

$$m = \frac{3}{s_0}, \quad (4.55)$$

$$\sigma_0 = \frac{K_c^* (k)^{\frac{s_0}{3}}}{\Gamma \left(1 + \frac{s_0}{3} \right) f \left(\frac{3}{s_0} \right) \sqrt{g_1^2 \left(\frac{a_{max}}{d} \right) + qg_2^2 \left(\frac{a_{max}}{d} \right)}}. \quad (4.56)$$

Le equazioni (4.55) e (4.56) offrono un'interpretazione dei parametri di Weibull m e σ_0 . Utilizzando l'equazione (4.45), l'equazione (4.55) fornisce:

$$m = \frac{(n+1)(N-1)^\zeta}{\alpha(\gamma)}. \quad (4.57)$$

Quando $N = 2$, si ottiene un valore minimo di $m = 4$. Per il vetro, $m \simeq 2$ indica che $N < 2$. La distribuzione dimensionale dei difetti presenta in quel caso una grande dispersione. Utilizzando la (4.57), è possibile legare il modulo di Weibull con il parametro N che rappresenta il grado di disordine della microstruttura del materiale.

4.4 Determinazione della densità di probabilità della dimensione dei difetti

Nel precedente paragrafo è stata definita la funzione densità di probabilità per dimensioni dei difetti maggiori del valore a_o . Per valori inferiori si suppone che la funzione densità di probabilità sia di tipo esponenziale:

$$p_1(a) = N \frac{a e^{-Ba}}{D} \quad 0 \leq a \leq a_o, \quad (4.58)$$

mentre per valori maggiori si utilizza la funzione precedentemente ricavata:

$$p_2(a) = N \frac{C}{a^{N+1}} \frac{1}{D} \quad a \geq a_o. \quad (4.59)$$

Le costanti B , C , D si determinano mediante condizioni al contorno. Per B e C si impone che le due funzioni p_1 e p_2 abbiano in a_o lo stesso valore e la stessa derivata prima:

$$p_1(a_o) = p_2(a_o), \quad (4.60)$$

$$p_1'(a_o) = p_2'(a_o). \quad (4.61)$$

La costante D si ottiene invece imponendo la condizione di normalizzazione su tutto il dominio per la funzione di densità di probabilità.

Dall'equazione (4.60) si ottiene:

$$N \frac{a_o e^{-Ba_o}}{D} = N \frac{C}{a_o^{N+1}} \frac{1}{D}, \quad (4.62)$$

e quindi:

$$C = a_o^{N+2} e^{-Ba_o}. \quad (4.63)$$

Dall'equazione (4.61) si può scrivere:

$$N \frac{e^{-Ba_o}}{D} (1 - Ba_o) = -N \frac{(N+1)C}{a_o^{N+2}} \frac{1}{D}. \quad (4.64)$$

Sostituendo la (4.63) nella (4.64) si ottiene:

$$B = \frac{N+2}{a_o}, \quad (4.65)$$

$$C = a_o^{N+2} e^{-(N+2)}. \quad (4.66)$$

A meno della costante di normalizzazione D, le funzioni $p_1(a)$ e $p_2(a)$ assumono la seguente forma:

$$p_1(a) = \frac{1}{D} N a e^{-\left(\frac{N+2}{a_o}\right)a} \quad 0 \leq a \leq a_o, \quad (4.67)$$

$$p_2(a) = \frac{1}{D} N \frac{a_o^{N+2} e^{-(N+2)}}{a^{(N+1)}} \quad a \geq a_o. \quad (4.68)$$

Il valore \bar{a} per cui $p_1(a)$ assume il valore massimo risulta il seguente:

$$p_1'(a) = 0 \Rightarrow N \frac{e^{-Ba_o}}{D} (1 - Ba) = 0 \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{B} = \frac{a_o}{N+2}. \quad (4.69)$$

Pertanto il valore a_o , al di là del quale la funzione densità di probabilità segue la legge di *autosomiglianza*, risulta:

$$a_o = (N+2) \bar{a}, \quad (4.70)$$

dove \bar{a} è la moda dei difetti.

Le primitive delle funzioni $p_1(a)$ e $p_2(a)$ sono le seguenti:

$$P_1(a) = \frac{N}{D} \frac{e^{-Ba}}{B^2} (-Ba - 1) + C_1, \quad (4.71)$$

$$P_2(a) = -\frac{1}{D} \frac{C}{a^N} + C_2. \quad (4.72)$$

La costante C_1 si ricava imponendo che la funzione P_1 si annulli in corrispondenza dello zero:

$$P_1(0) = 0, \quad (4.73)$$

ovvero:

$$C_1 = \frac{N}{B^2 D}. \quad (4.74)$$

La costante C_2 si ricava invece imponendo la continuità delle funzioni P_1 e P_2 in a_o :

$$P_2(a_o) = \int_0^{a_o} p_1(a) da. \quad (4.75)$$

Essendo:

$$\int_0^{a_o} p_1(a) da = P_1(a_o) = \frac{N}{B^2 D} [e^{-Ba_o}(-Ba_o - 1) + 1], \quad (4.76)$$

si ha:

$$-\frac{1}{D} \frac{C}{a_o^N} + C_2 = \frac{N}{B^2 D} [e^{-Ba_o}(-Ba_o - 1) + 1] \quad (4.77)$$

e quindi:

$$C_2 = \frac{1}{D} \left[\frac{N e^{-Ba_o}}{B^2} (-Ba_o - 1) + \frac{N}{B^2} + \frac{C}{a_o^N} \right]. \quad (4.78)$$

L'integrale per $a \rightarrow \infty$ pertanto risulta:

$$P_2(\infty) = C_2 = \frac{1}{D} \left[\frac{N e^{-Ba_o}}{B^2} (-Ba_o - 1) + \frac{N}{B^2} + \frac{C}{a_o^N} \right]. \quad (4.79)$$

Imponendo la condizione di normalizzazione $P_2(\infty) = 1$, si ricava il valore della costante D :

$$D = \frac{N e^{-Ba_o}}{B^2} (-Ba_o - 1) + \frac{N}{B^2} + \frac{C}{a_o^N}. \quad (4.80)$$

4.5 Simulazioni statistiche

Le funzioni densità di probabilità della dimensione dei difetti $p_1(a)$ e $p_2(a)$, ricavate nel paragrafo precedente, possono essere utilizzate per effettuare simulazioni statistiche di tipo Montecarlo. Mediante tali simulazioni è possibile determinare la relazione che lega il parametro di dispersione statistica dei difetti N con la pendenza della retta che, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, definisce la legge di scala per la resistenza. Per ottenere tali funzioni si è ipotizzato che le interazioni tra le imperfezioni siano trascurabili e che pertanto la resistenza a trazione di un dato provino dipenda esclusivamente dal difetto avente la dimensione massima e l'orientazione più sfavorevole. In base a tale ipotesi, la resistenza a trazione di un provino può essere valutata come se quest'ultimo avesse un'unica fessura *penny-shaped* di dimensione massima data da:

$$\sigma_u = \frac{\pi}{2} \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a_{max}}}. \quad (4.81)$$

Le funzioni densità di probabilità risultano dipendere da N e a_0 . Bisogna quindi definire quali valori assegnare ai due parametri, utilizzando, se possibile, i risultati sperimentali di prove a trazione.

Il parametro N , come già premesso, rappresenta il grado di dispersione dimensionale dei difetti. Il suo limite inferiore è 1 per strutture bidimensionali, 2 nel caso tridimensionale. Tali valori corrispondono al massimo grado di dispersione che i difetti presentano nei materiali reali, ed è relativo alla distribuzione dimensionale di auto-somiglianza. Aumentando il valore di N , si ottiene un minore grado di dispersione dei difetti. Per $N \rightarrow \infty$ si ottiene una distribuzione dimensionale dei difetti ordinata, ovvero tutti i difetti risultano essere di uguale dimensione.

Il parametro a_0 indica invece la dimensione oltre la quale vale la funzione densità $p_2(a)$, ed è legato strettamente alla moda dei difetti attraverso la (4.70). Il valore da assegnare al parametro a_0 dipende quindi dal tipo di difetti da considerare per le simulazioni statistiche. Alla moda è legata anche la densità, ρ , ovvero il numero di difetti per unità di volume.

Una stima di a_0 e ρ si ottiene effettuando misurazioni sui campioni del materiale da analizzare. I valori così dedotti risultano peraltro condizionati dal tipo di osservazione e della precisione degli strumenti utilizzati. In generale, aumentando la sensibilità degli strumenti, si dovrebbero osservare difetti sempre più piccoli. Utilizzando ad esempio microscopi elettronici, si potrebbero apprezzare difetti persino a livello atomico.

In Figura 4.9 sono riportati i diagrammi delle funzioni $p_1(a)$ e $p_2(a)$ al variare del parametro a_0 e quindi \bar{a} . Si osservi come, per $a_0 \rightarrow 0$, la distribuzione tenda alla funzione δ di Dirac. In tal caso infatti $p(a) = 0$ per ogni valore di $a \neq 0$ ed inoltre $\int_{-\infty}^{+\infty} p(a) = 1$, essendo la funzione $p(a)$ normalizzata.

Volendo condurre un'analisi macroscopica su campioni di calcestruzzo, la moda dei difetti da considerare per le simulazioni statistiche deve avere l'ordine di grandezza dei vuoti tra i granelli di sabbia, in quanto risultano essere questi ultimi i più numerosi tra quelli aventi rilevanza fisica. Difetti di dimensione inferiore a quella dei granelli di sabbia non hanno alcuna rilevanza dal punto di vista meccanico.

Dai risultati sperimentali è possibile ricavare il valore di a_{max} per una data dimensione strutturale utilizzando la formula inversa della (4.81):

$$a_{max} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_u} \right)^2. \quad (4.82)$$

Il procedimento della simulazione consiste nell'effettuare una serie di estrazioni pseudo-casuale di numeri compresi tra 0 e 1. A ciascun numero viene poi associata, attraverso la funzione cumulativa $P(a)$, la dimensione a di un difetto. Ogni estrazione pertanto fornisce un difetto del materiale; bisogna pertanto determinare la densità ρ dei difetti per valutare il numero di estrazioni da effettuare.

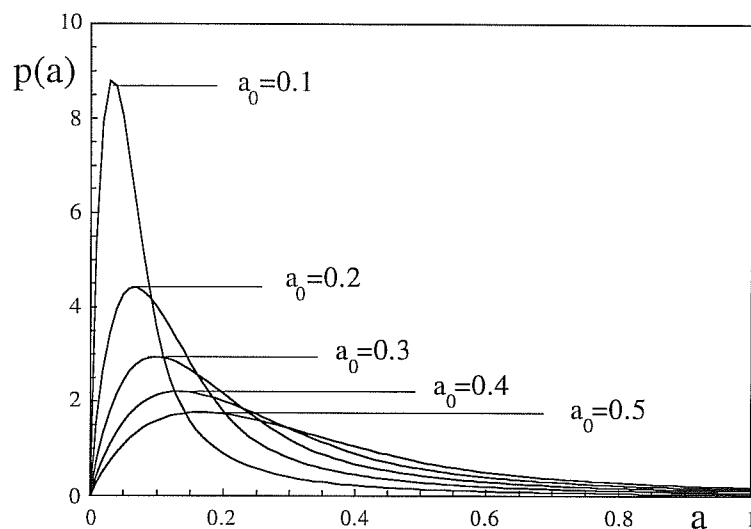


Figura 4.9: Distribuzione di probabilità della dimensione dei difetti al variare del parametro a_0 .

Fissata la densità, ovvero il numero di estrazioni per unità di area o di volume, nel caso di provini bidimensionali di forma quadrata, un aumento della dimensione lineare del provino implica un aumento quadratico del numero di estrazioni da effettuare. Nel caso di provini tridimensionali di forma cubica, l'aumento della dimensione lineare del provino implica invece un aumento cubico del numero di estrazioni.

Operativamente, per ogni dimensione del provino, sono state effettuate quattro serie di estrazioni con semi differenti. La resistenza a trazione del provino quadrato è stata valutata come se quest'ultimo avesse un'unica fessura alla Griffith di dimensione pari alla media delle quattro massime dimensioni relative a ciascuna serie di estrazioni. Tale procedimento prevede inoltre che sia assegnato un valore al parametro di dispersione dei difetti N . L'influenza di N sulle leggi di scala è riportata nel paragrafo successivo. Al variare di N comunque si ottengono delle leggi di scala sulla resistenza, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, caratterizzate da una diagramma lineare con pendenza variabile compresa tra -0.5 e zero.

In Figura 4.10 sono riportati i risultati di una simulazione statistica su provini bidimensionali di forma quadrata con lato variabile da 2 cm a 80 cm [69]. Si è ipo-

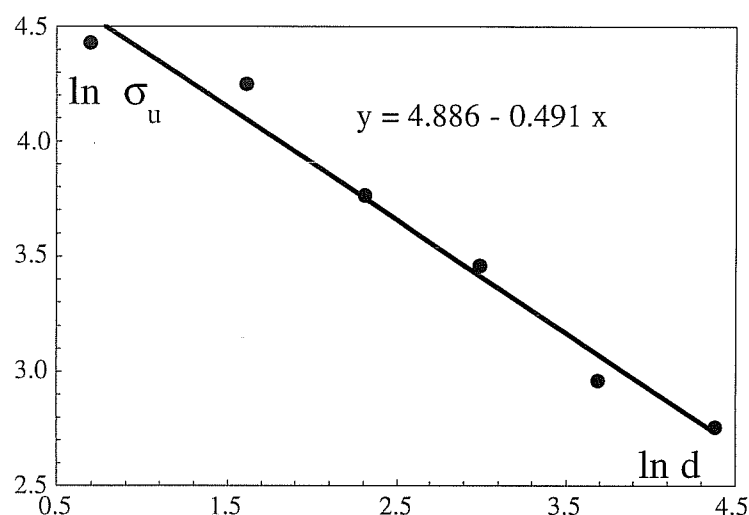


Figura 4.10: Effetto di scala sulla resistenza a trazione di provini bidimensionali per $a_0 = 1$ (risultati delle simulazioni).

tizzato un materiale con una densità di un difetto per centimetro quadro, mentre il parametro a_0 è stato posto pari ad 1 mm. Come parametri meccanici del materiale sono stati utilizzati quelli relativi alla prima serie di prove a trazione su calcestruzzo effettuate presso il Laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino [1-3], che saranno presentate nel capitolo seguente. L'energia di frattura, calcolata in osservanza alle raccomandazioni RILEM [70], è risultata pari a: $G_F = 0.140 \text{ N mm}^{-1}$, mentre il modulo di elasticità a trazione è risultato pari a

$$E_t = 26500 \text{ MPa}. \quad (4.83)$$

Il valore critico del fattore di intensificazione degli sforzi è valutabile quindi come segue:

$$K_{IC} = \sqrt{G_F E_t} = 60.9 \text{ N mm}^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.84)$$

In Figura 4.10 sono riportati, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, i risultati ottenuti dalla simulazione con $N=1$. La retta di best-fitting, che descrive i risultati, ha una pendenza negativa pari ad $\alpha = 0.49$, e risulta molto prossima alla potenza della singolarità tensionale relativa alla Meccanica della Frattura Elastica Lineare.

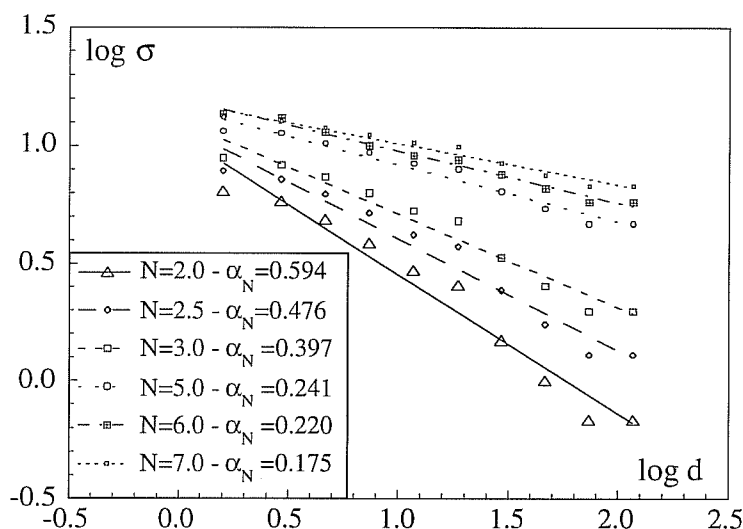
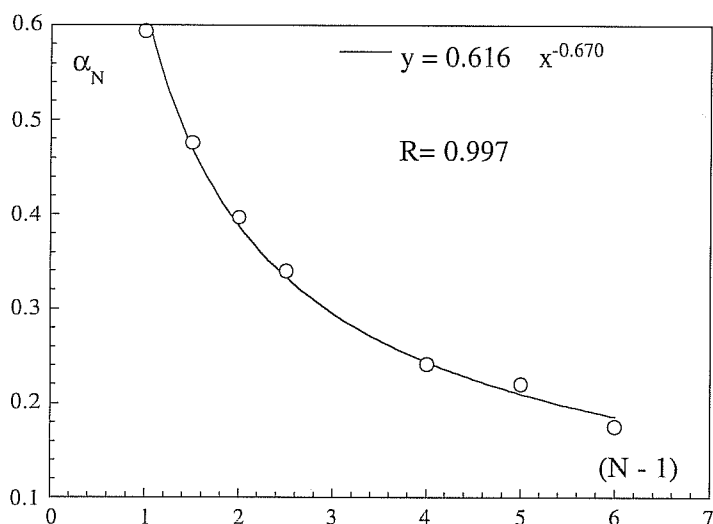


Figura 4.11: Effetto di scala sulla resistenza a trazione di provini tridimensionali al variare del parametro N (risultati delle simulazioni).

4.6 Effetti di scala sulla resistenza a trazione dovuti alla dispersione statistica dei difetti

In questo paragrafo si definisce la relazione che lega il parametro N , indice del grado di dispersione dei difetti, con l'effetto di scala sulla resistenza nominale a trazione determinata sperimentalmente. Come già accennato, al variare di N si ottengono delle leggi di scala sulle resistenze, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, caratterizzate da un diagramma lineare a pendenza variabile. Una proprietà caratteristica delle funzioni $p_1(a)$ e $p_2(a)$ ottenute in questo capitolo è che l'effetto di scala non risulta dipendere dalla scelta di a_o . Pertanto, ad ogni valore del parametro N , qualunque sia a_o , risulta associata una retta delle resistenze in funzione della dimensione strutturale nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$. In Figura 4.11 sono riportate le leggi ricavate per un corpo tridimensionale al variare di N , con i parametri $a_o = 1$ mm e ρ pari ad un difetto per centimetro cubo [71].

Figura 4.12: Variazione di α_N in funzione di N .

È quindi possibile far risalire l'effetto di scala ricavato sperimentalmente al grado di dispersione dei difetti. Effettuando una interpolazione lineare, nel piano bilogarithmico dei risultati sperimentali, è immediato legare il valore della pendenza della retta di best-fitting con il parametro N . In Figura 4.12 è riportata la legge di potenza che lega la pendenza α_N della retta al parametro N di dispersione dei difetti. In questo modo è possibile determinare, per un qualsiasi materiale, il grado di disordine della microstruttura ricavando il valore di N in funzione del decremento della resistenza a trazione con la dimensione strutturale. Ovviamente, maggiore è la pendenza, minore risulta N e quindi maggiore risulta il disordine del materiale.

Per materiali ordinati a livello microstrutturale, il parametro N risulta essere molto grande. Materiali con queste caratteristiche presentano un basso effetto di scala sulla resistenza a trazione. Al limite, per materiali dotati di un perfetto ordine interno, l'effetto di scala svanisce ed il parametro N tende a ∞ . Viceversa, materiali caratterizzati da un grande disordine a livello della microstruttura, presentano un

effetto di scala accentuato con pendenza della retta, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, che tende al valore di $-\frac{1}{2}$, pari alla potenza della singolarità tensionale della Meccanica della Frattura Elastica Lineare. In questo caso il parametro N di dispersione dei difetti tende al limite inferiore 2.

Dalle simulazioni riportate in Figura 4.11 si ottiene in effetti, per $N = 2$, un valore leggermente superiore a 0.5. La legge ottenuta per α_N in funzione di N , dalle simulazioni statistiche, risulta la seguente (Figura 4.12):

$$\alpha_N = \frac{0.616}{(N-1)^{0.67}}. \quad (4.85)$$

Il valore dell'esponente di $(N-1)$, ζ , definito nella (4.31), risulta dipendere da caratteristiche secondarie del materiale. L'analisi della variazione di ζ sarà oggetto di successivi studi.

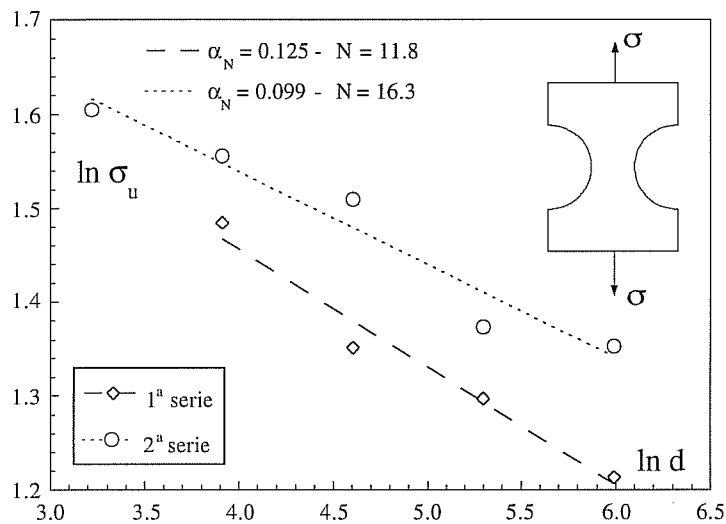


Figura 4.13: Effetto di scala sulla resistenza ultima a trazione: risultati sperimentali (Capitolo 5).

Un aspetto notevole, che scaturisce dalle simulazioni effettuate, è costituito dall'in-

di dipendenza di α_N dal valore del parametro a_0 . Sono state infatti effettuate simulazioni analoghe a quelle presentate in Figura 4.11, con valori di a_0 differenti, ottenendo effetti di scala identici. Pertanto si può concludere affermando che la pendenza α_N è funzione esclusivamente della dispersione dei difetti e non del tipo di difetto presente a livello microstrutturale. Il parametro N può quindi essere considerato effettivamente come un indice assoluto di disordine di un dato materiale.

Nel caso delle prove sperimentali effettuate presso il Laboratorio del Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino, che verranno presentate nel capitolo successivo, l'approssimazione lineare dei valori della tensione nominale a trazione presenta una pendenza negativa pari a 0.125, per la prima serie, e a 0.099 per la seconda. A tali α_N , tramite la (4.85), corrispondono $N = 11.8$ e $N = 16.3$, rispettivamente (Figura 4.13).

4.7 Conclusioni

In questo capitolo è stato affrontato il problema della variazione della resistenza a trazione da un punto di vista statistico. Facendo riferimento alle ipotesi avanzate nel corso di questi ultimi anni da Carpinteri [13] è stata presentata una distribuzione dimensionale dei difetti, nella quale gioca un ruolo fondamentale il disordine della microstruttura del materiale. Nei Capitoli 6 e 7 vengono approfonditi i legami teorici fra disordine e comportamento macroscopico di una struttura. In ogni caso, un primo risultato cui si è giunti mediante le simulazioni statistiche consiste nell'indipendenza di α_N (gradiente dell'effetto di scala) dal parametro a_0 (ovvero dalla moda della dimensione dei difetti). Pertanto, nelle ipotesi della presente legge di distribuzione, è possibile affermare come la pendenza α_N della legge di scala sulla resistenza a trazione dipenda esclusivamente dal grado di disordine della microstruttura del materiale, misurato dal parametro N .

Per materiali ordinati a livello microstrutturale, il parametro N risulta essere molto grande. Materiali con queste caratteristiche presentano un basso effetto di scala sulla resistenza a trazione. Al limite, per materiali dotati di un perfetto ordine interno, l'effetto di scala svanisce ed il parametro N tende a ∞ . Viceversa, materiali caratterizzati da un grande disordine a livello della microstruttura, presentano un effetto di scala accentuato con pendenza della retta, nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, che tende al valore di $-\frac{1}{2}$, pari alla potenza della singolarità tensionale della Meccanica della Frattura Elastica Lineare. In questo caso il parametro di dispersione dei difetti tende al limite inferiore 2.

Capitolo 5

Prova di trazione diretta con tre martinetti

5.1 Introduzione

Numerosi ricercatori negli ultimi decenni si sono interessati allo studio delle proprietà di trazione di materiali eterogenei (calcestruzzo, malta, rocce, ecc.). Nel Capitolo 3 sono stati presentati alcuni schemi di prova, realizzati per analizzare il comportamento post-picco di tali materiali. Le difficoltà sostanziali che si presentano nelle prove di trazione sono le seguenti:

- ottenere una risposta *softening* stabile e completa;
- riuscire a mantenere in ogni istante la risultante del carico applicato sul provino perfettamente centrata;
- risolvere i problemi di ancoraggio.

Le metodologie di prova a trazione diretta, fino ad oggi approntate, non hanno consentito di ottenere curve carico-spostamento stabili e complete, indispensabili per una valutazione attendibile del comportamento post-lineare e post-picco del calcestruzzo e quindi una quantizzazione effettiva dell'energia di frattura \mathcal{G}_F . Volendo analizzare il comportamento sotto pura trazione, risulta indispensabile realizzare un dispositivo che consenta di mantenere il carico di prova perfettamente centrato rispetto alla sezione reagente effettiva. Tale centraggio, già laborioso in fase elastica lineare, diventa, con le apparecchiature tradizionali, impossibile nella fase post-picco, nella quale si innescano delle fessure che rendono asimmetrica la sezione. Infine, la realizzazione degli ancoraggi pone il problema di garantire un'unione efficace anche per provini di grandi dimensioni, non alterando, allo stesso tempo, lo stato tensionale alle estremità dei saggi.

In questo capitolo viene presentato uno schema di prova completamente innovativo costituito da tre martinetti disposti ortogonalmente fra loro, che consente di ovviare alle problematiche su esposte. Lo scopo principale è quello di annullare qualsiasi effetto flettente secondario che possa condurre ad interpretazioni errate degli effetti di scala sulla resistenza apparente e sulla energia di frattura.

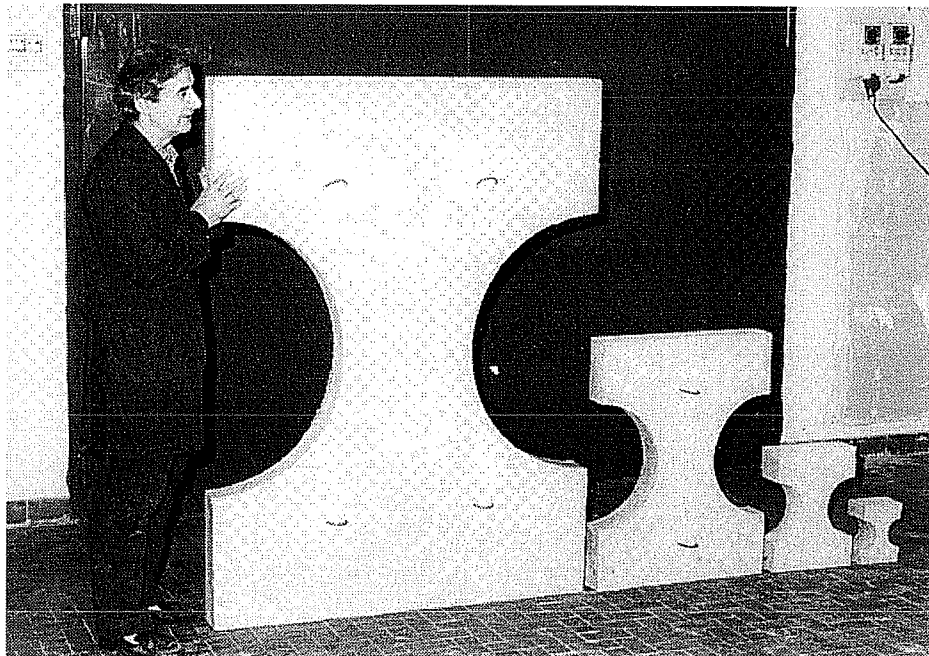


Figura 5.1: Le quattro differenti dimensioni utilizzate nella prima serie.

5.2 Scelta della geometria e della dimensione dei provini

Il primo problema da risolvere nel progettare una prova a trazione, finalizzata allo studio degli effetti di scala, consiste nella scelta della geometria e della dimensione dei provini. La geometria è funzione tanto del tipo di attacco quanto della necessità di creare una zona preferenziale per la rottura. L'intervallo dimensionale dei provini è, d'altra parte, limitato inferiormente dal diametro massimo degli inerti e superiormente dalle potenzialità della strumentazione disponibile. Essendo fissate le dimensioni della strumentazione, per avere un intervallo accettabile si è scelto di utilizzare un diametro

massimo dell'inerte relativamente piccolo (16 mm).

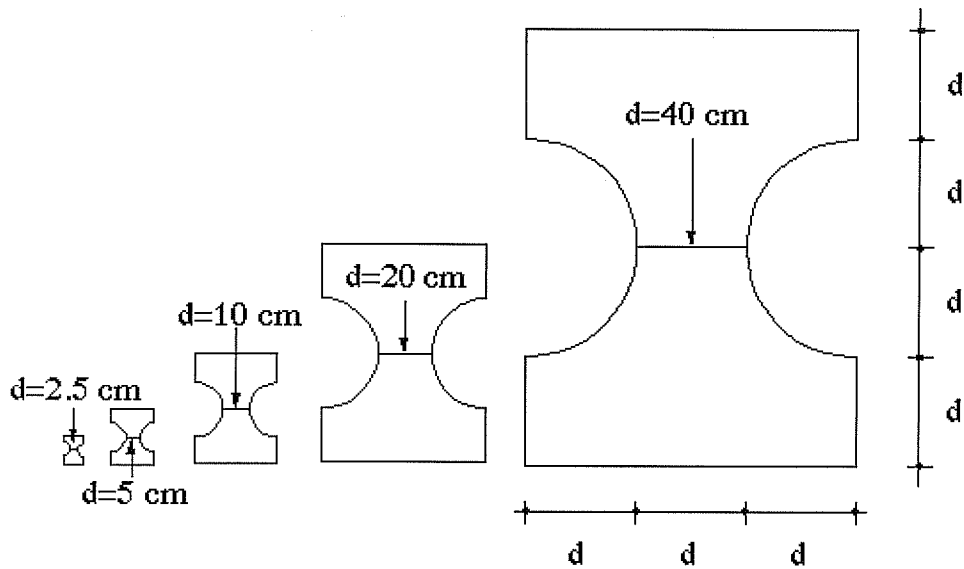


Figura 5.2: Geometria dei provini utilizzati nella seconda serie.

La forma a clessidra adottata per la presente campagna di prove è costituita da un rettangolo di base $3d$ ed altezza $4d$ a cui siano asportati due semicerchi di raggio d in corrispondenza della zona centrale. La sezione centrale del provino risulta avere così una dimensione pari a d , contro la dimensione $3d$ delle zone di attacco. La dimensione dei provini è pertanto funzione del solo parametro d . La prima serie di prove, che è servita per collaudare la strumentazione di prova, è consistita in 4 differenti dimensioni di saggi ($d = 5, 10, 20, 40$ cm) (Figura 5.1). Il rapporto di scala tra la dimensione massima e quella minima è risultato pari a 1:8. In realtà, per ottenere risultati sperimentali significativi per lo studio degli effetti di scala, è necessario disporre di provini con almeno un ordine di grandezza di differenza, ovvero con un rapporto minore o uguale a 1:10. Pertanto, la seconda serie di prove è stata condotta su cinque differenti dimensioni, aggiungendo cioè alle dimensioni della prima serie un'ulteriore dimensione, $d = 2.5$ cm (Figura 5.2). Il massimo rapporto dimensionale della seconda serie risulta quindi uguale a 1:16. L'accorgimento del rapporto dimensionale è molto importante, in quanto, come sarà sottolineato nel Capitolo 7, risultati sperimentali ottenuti su provini con un rapporto inferiore a 10 non forniscono

risultati pienamente significativi. Lo spessore invece è stato mantenuto costante per tutte le dimensioni e pari a 10 cm. L'attacco dei provini alla macchina di prova è stato ottenuto incollando le estremità a piastre di acciaio, opportunamente forate per l'imbullonatura alle traverse della macchina, mediante una resina epossidica bifasica.

5.3 Macchina di Prova

La macchina di prova è stata progettata tenendo presenti le seguenti problematiche.

- La generale impossibilità di ottenere provini geometricamente perfetti, anche impiegando una notevole cura nella loro preparazione, fa sì che inevitabilmente siano presenti difetti di forma.
- L'estrema difficoltà ad eliminare gli errori di centraggio, sia pure introducendo cerniere lungo la catena della strumentazione, mediante cui si applica la forza di trazione, rende estremamente improbabile che si verifichi la coassialità del provino con la retta congiungente le cerniere.
- Anche supponendo di riuscire a centrare perfettamente il carico, lo sviluppo di fessure durante la fase di caricamento conduce a nuove dissimmetrie della sezione trasversale e di conseguenza alla presenza di momenti flettenti.
- L'utilizzo di macchine servo-controllate elettronicamente a circuito chiuso diventa indispensabile, sia per mantenere costante l'incremento di deformazione, sia per controllare il ramo decrescente (softening) della curva carico-spostamento, misurando le deformazioni mediante estensometri applicati direttamente sul provino sotto trazione.

Soluzione con un unico martinetto

Il primo sistema per prove a trazione diretta, progettato presso il Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino, è stato realizzato utilizzando un unico martinetto. Per il collegamento del martinetto alla traversa mobile è stata utilizzata una traversa di acciaio, con due snodi sferici interposti fra i dadi di serraggio (Figura 5.3). L'operazione di centraggio del carico, peraltro molto laboriosa, è risultata efficace esclusivamente nella fase elastica, poichè le fessurazioni che si producevano nella fase post-elastica, hanno condotto a dissimmetrie della sezione trasversale e quindi ad eccentricità dello sforzo di trazione.

Il martinetto è stato controllato mediante la somma dei quattro segnali elettrici degli estensimetri applicati nella zona centrale del provino. La fase di accostamento

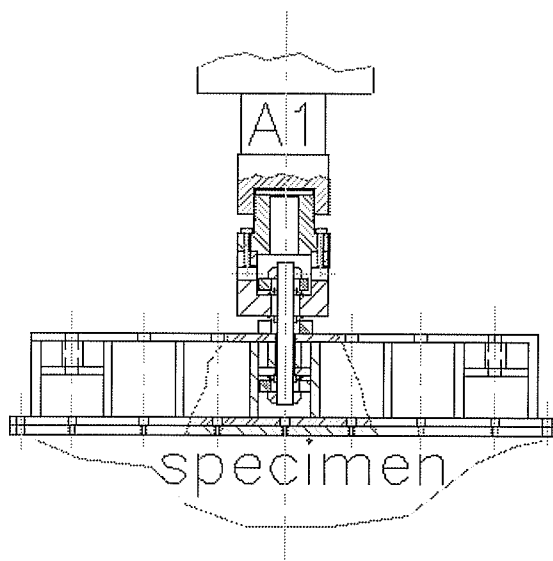


Figura 5.3: Schema della traversa mobile utilizzata nella soluzione con un unico martinetto.

della traversa mobile è risultata particolarmente delicata, non potendo valutare, a priori, in quale punto potesse avvenire il contatto della traversa con le piastre. Un contatto eccentrico può portare infatti il provino a rottura ancor prima che la prova abbia avuto inizio. Rappresentando la somma dei segnali di misura il controllo del carico, ciascun estensimetro contribuisce alla formazione del segnale di controreazione del sistema, per cui, in qualsiasi punto del provino avvenga il contatto, il sistema reagisce in modo opportuno. È stato a tal fine impiegato un amplificatore operazionale appositamente costruito. Una volta centrato il carico, vengono serrati i dadi della barra di collegamento, annullando così l'azione dello snodo e rendendo rigida la struttura. Misurando le deformazioni in quattro punti posti sulle quattro facce della sezione resistente, è stato possibile controllare come nella fase post-lineare le deformazioni non fossero uniformi.

Infatti le curve carico-spostamento, rilevate con questo sistema, e relative alle deformazioni dei quattro punti della sezione, sono risultate coincidenti fino al carico di picco ma divergenti nel tratto discendente (Figura 5.4). Le letture degli estensimetri mostrano come una parte della sezione vada addirittura in compressione. Alla luce di quanto ottenuto in questa prima fase, il sistema non è risultato sufficientemente rigido, anche con l'aggiunta di opportuni tiranti di irrigidimento sulla traversa mobile.

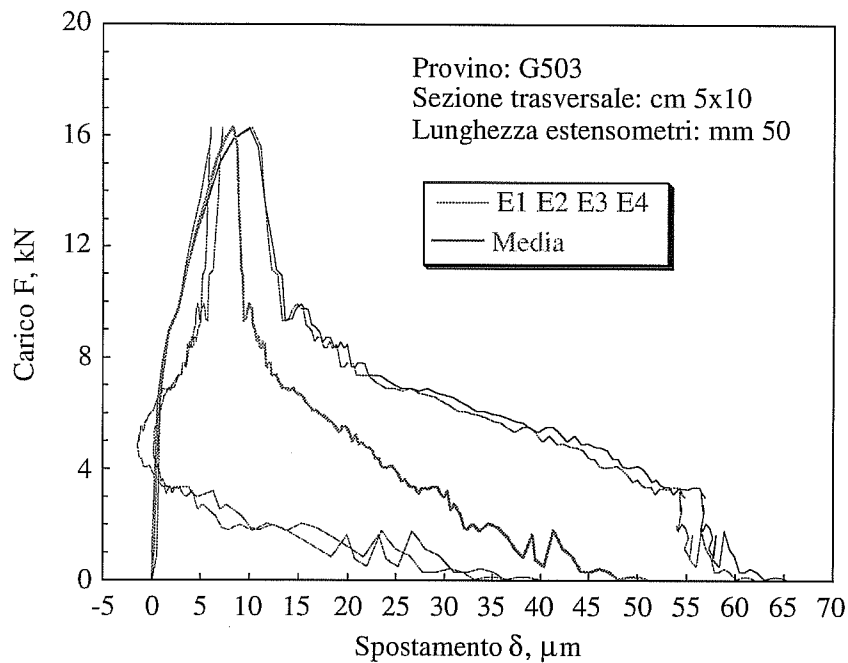


Figura 5.4: Diagrammi carico-spostamento dei quattro estensimetri: soluzione con un unico martinetto.

Soluzione con tre martinetti

È parso allora conveniente ricercare un metodo di prova alternativo. Si è così pensato all'impiego di macchine servo-assistite per tenere sotto controllo anche gli sforzi flessionali secondo due piani ortogonali fra loro. È stato necessario, a questo proposito, disporre di un segnale elettrico capace di funzionare come controllo in un sistema controreagente, proporzionale ai momenti flettenti che si fossero manifestati sulla sezione del provino [2].

In un primo momento i nuovi segnali di controreazione sono stati ottenuti rilevando le deformazioni mediante ulteriori estensimetri elettrici disposti sui due lati opposti del provino e collegati sui lati adiacenti del ponte di misura. Tali segnali elettrici risultano proporzionali alla differenza delle deformazioni e quindi al momento flettente agente secondo un piano passante per l'asse del provino. La prova si è rivelata particolarmente utile per mettere a fuoco le problematiche relative al funzionamento contemporaneo dei tre servosistemi. Essa non è però risultata del tutto soddisfacente in quanto le curve di deformazione sono risultate ancora divergenti. È

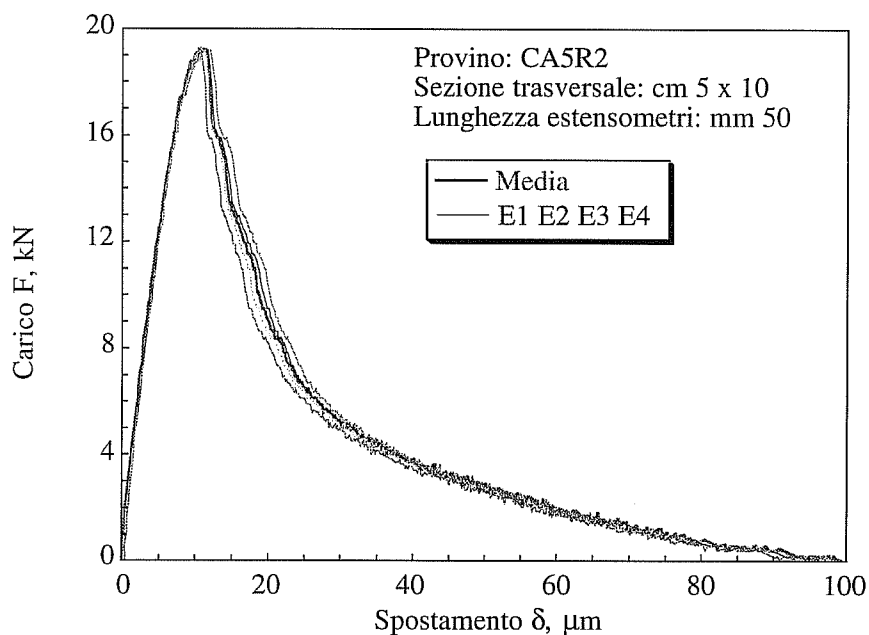


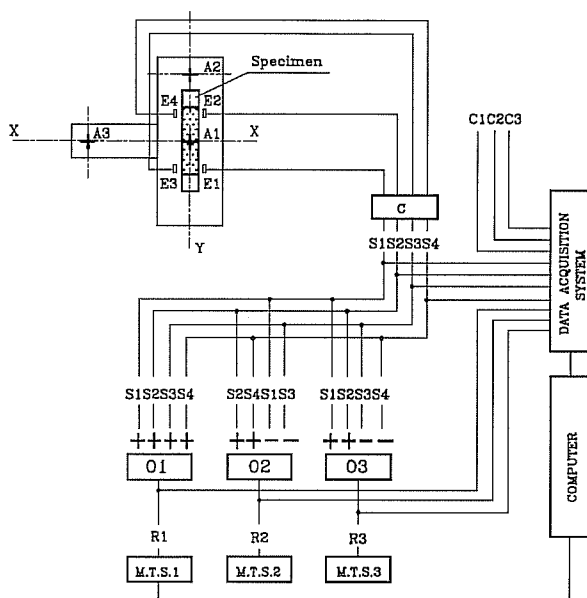
Figura 5.5: Diagrammi carico-spostamento dei quattro estensimetri: soluzione a tre martinetti.

apparso allora logico utilizzare, ai fini del controllo, gli stessi segnali analogici forniti dai quattro estensimetri impiegati per la misura delle deformazioni, effettuando su di essi opportune operazioni algebriche.

Se con $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ si indicano le deformazioni dei singoli punti di misura disposti come in Figura 5.6, le deformazioni causate dai momenti flettenti risultano essere:

- lungo l'asse x,
$$\epsilon_x = \frac{(\epsilon_2 + \epsilon_4) - (\epsilon_1 + \epsilon_3)}{2},$$
- lungo l'asse y,
$$\epsilon_y = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) - (\epsilon_3 + \epsilon_4)}{2}.$$

La prova è stata condotta imponendo al martinetto centrale di generare una deformazione sul provino con incremento costante, mentre gli altri due martinetti mantenevano i valori ϵ_x e ϵ_y uguali a zero. In Figura 5.5 sono presentate le curve carico-spostamento dei quattro estensometri ottenute col metodo dei tre martinetti. È possibile osservare come tali curve tendano a coincidere fino al punto in cui il carico va a zero nella fase softening. In Figura 5.6 è riportato lo schema elettrico che il-



LEGEND :

E1 E2 E3 E4	Fracture mechanics extensometers
S1 S2 S3 S4	Extensometer output signals
A1	Actuator used to apply tension load
A2	Actuator used to reduce the bending moment in the Y-Y direction
A3	Actuator used to reduce the bending moment in the X-X direction
C	Signal conditioner amplifier
O1	Operational amplifier for the addition of the four extensometer output signals
O2 O3	Operational amplifiers to make other algebraical operations on extensometer output signals
$R1=S1+S2+S3+S4$	Feed-back signal for actuator A1
$R2=(S2+S4)-(S1+S3)$	Feed-back signal for actuator A2
$R3=(S1+S2)-(S3+S4)$	Feed-back signal for actuator A3
C1 C2 C3	A1 A2 A3 actuator output signals

Figura 5.6: Schema elettrico contro-reagente.

lustra l'impiego degli amplificatori analogici nelle operazioni di addizione e sottrazione dei quattro segnali degli estensometri collegati ai tre martinetti servo-controllati. In Figura 5.7 è riportato lo schema del sistema di martinetti, mentre la Figura 5.9 mostra l'intera strumentazione con uno dei provini più grandi sotto carico.

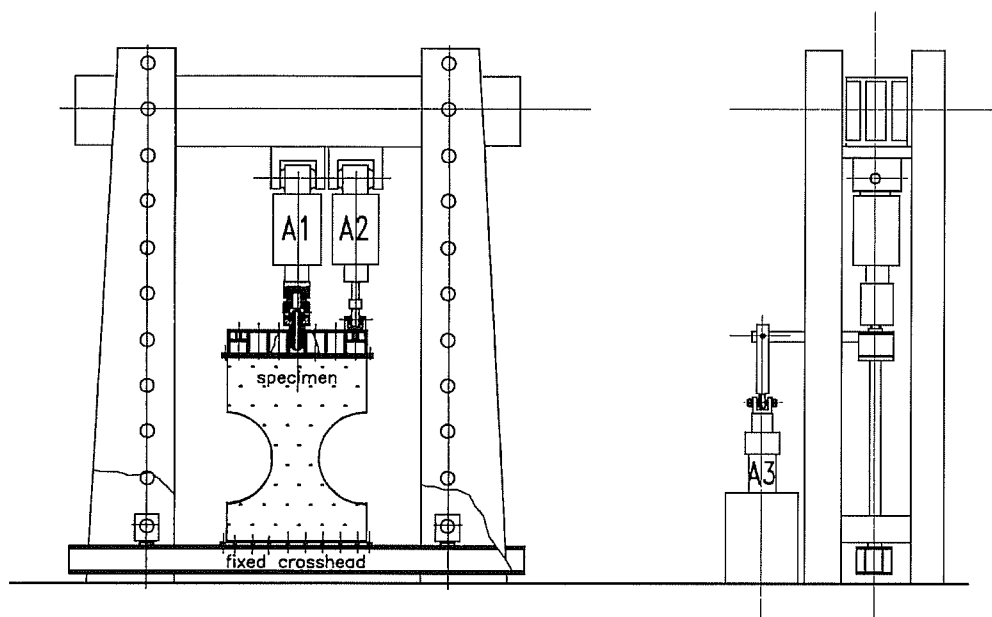


Figura 5.7: Schema di prova con tre martinetti.

Descrizione dello schema di prova

Lo schema di prova è illustrato in Figura 5.7. Il martinetto centrale (A1) applica la forza di trazione al centro della traversa ed è controllato attraverso la somma dei segnali dei quattro estensometri montati sul provino. Gli altri due martinetti (A2 e A3) sono disposti, uno all'estremità della traversa principale e l'altro all'estremità di una traversa ausiliaria, disposta perpendicolarmente a quella principale. Entrambi questi martinetti generano una coppia che agisce lungo un piano d'inerzia principale del provino (Figura 5.6).

Lo schema di traversa inferiore fissa equivale ad ipotizzare il provino come una mensola incastrata alla base, sollecitata da una forza di trazione all'estremità libera. Nel caso di non coassialità tra provino e martinetto, la forza applicata ha una componente tagliante che ovviamente genera un diagramma di momento flettente lineare (Figura 5.8). I martinetti A2 e A3 agiscono in modo tale da annullare il momento flettente nella zona centrale del provino. Il diagramma del momento flettente risultante, anziché triangolare, diviene perciò a farfalla. Mentre per i provini più piccoli l'entità del momento all'incastro è trascurabile, per le dimensioni maggiori ($d = 20$ cm), si sono riscontrate nella prima serie delle rotture alla base, causate proprio dall'elevato tasso di sollecitazione. È stata pertanto realizzata una traversa inferiore vincolata mediante snodi sferici, per garantire l'annullamento del momento nella direzione di

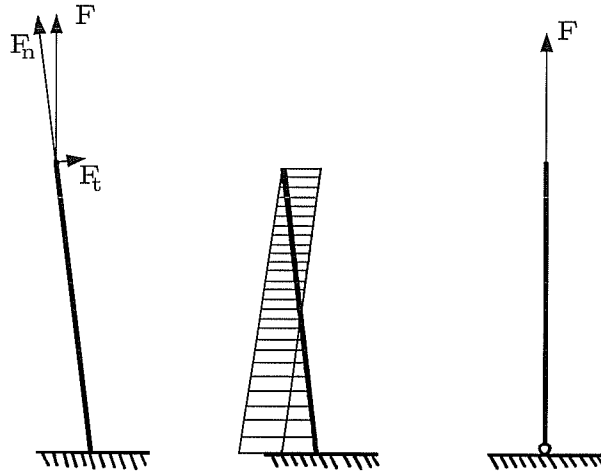


Figura 5.8: Ipotesi di non coassialità fra provino e martinetto.

minore inerzia della sezione (Figura 5.10).

Procedura di incollaggio

Il sistema di attacco dei provini alla traversa inferiore ed a quella superiore della macchina è stato realizzato imbullonando le piastre di acciaio, precedentemente incollate sulle teste dei saggi mediante una resina epossidica bifasica. Si è utilizzata una resina costituita da due componenti adesivi del tipo Starcement 2X:N della MPM Milano. Tale resina ha assicurato un'alta aderenza sia al calcestruzzo che all'acciaio. La geometria dei provini, con una zona di incollaggio tre volte maggiore della sezione trasversale, riduce inoltre la tensione sull'area incollata. Il sistema di incollaggio, qui descritto, ha garantito una buona riuscita delle prove per dimensioni dei provini con $d \leq 20$ cm. Per i provini con $d = 40$ cm tale sistema è stato integrato da apposite selle e da due staffe passanti, come mostrato in Figura 5.12. In qualche caso si è verificato lo scollamento anche per provini con $d = 20$ cm. Tale fenomeno, citato anche da altri autori [54], si è verificato esclusivamente nei casi di non perfetto incollaggio (colla non spalmata uniformemente, vuoti, piastre non perfettamente pulite). Osservando attentamente la zona di rottura, in detti casi, si è constatato come nelle zone terminali la colla non avesse aderito perfettamente anche per centimetri. Il tratto di non aderenza avrebbe quindi funzionato come un intaglio, con una concentrazione di sforzi tale da portare a rottura il saggio molto prima del raggiungimento della resistenza naturale

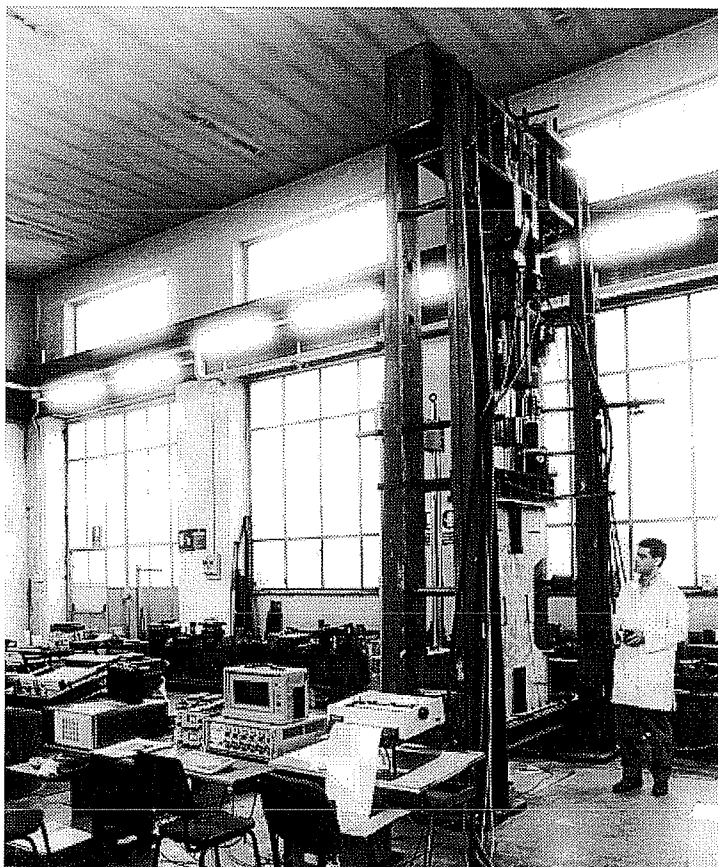


Figura 5.9: Panoramica della macchina di prova.

a trazione.

5.4 Procedura di prova

Dopo aver monitorizzato il saggio, si è agganciata la piastra inferiore del provino alla traversa mediante bulloni. In questa fase è stata effettuata la lettura degli zeri dei tre martinetti e degli estensometri. La traversa superiore è stata agganciata al martinetto centrale, sotto al quale era montata la cella di carico, senza poggiare in un primo tempo sulla piastra superiore del provino. Successivamente si è provveduto a rilassare il martinetto centrale fino a far poggiare la traversa superiore sul provino.

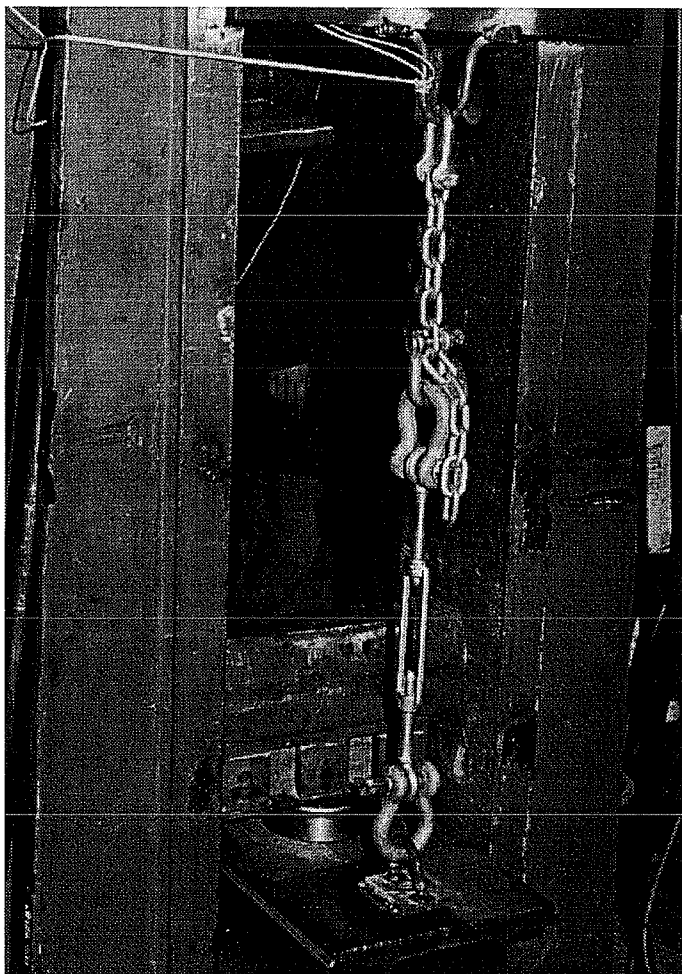


Figura 5.10: Traversa inferiore vincolata mediante snodi sferici.

Terminata l'operazione di aggancio della piastra superiore, è stato abbassato il martinetto da 25 tonnellate fino alla traversa. Tali fasi di avvicinamento vengono effettuate molto lentamente, per evitare rotture a flessione del provino, in particolar modo per i provini più piccoli. Durante la manovra di avvicinamento dei martinetti laterali, si controlla che le eccentricità del carico (misurate calcolando le differenze dei segnali elettrici dei DD1) restino nulle. Infine si avvicina il terzo martinetto e lo si aggancia alla traversa ausiliaria, ortogonale a quella principale.

Ultimata questa fase si dà inizio alla prova. Durante la prova, il martinetto

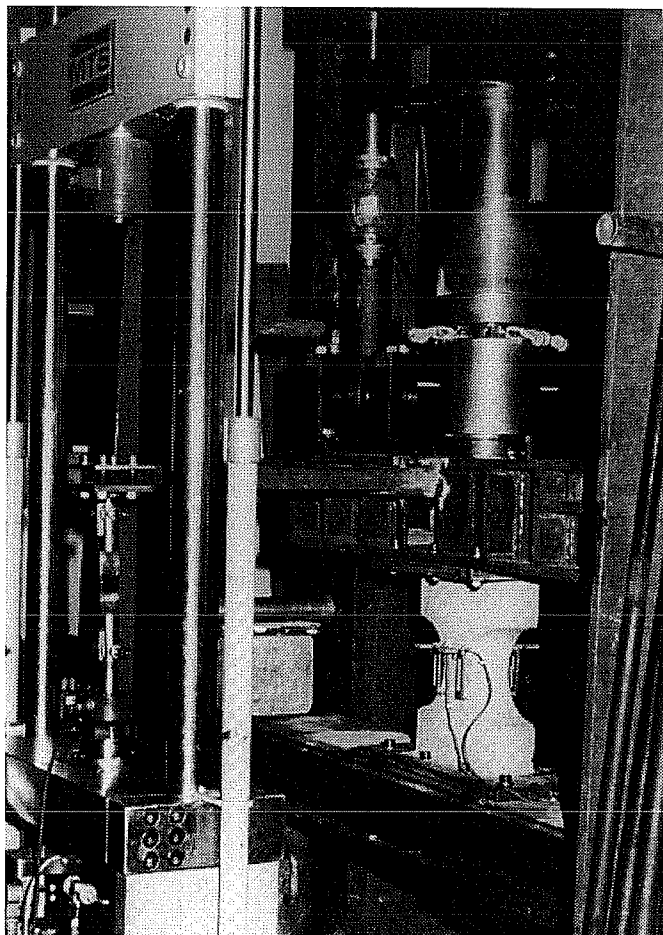


Figura 5.11: Soluzione con tre martinetti.

da 100 t lavora in controllo di deformazioni secondo una rampa prestabilita. I due martinetti laterali controbilanciano invece i segnali elettrici dei DD1 in modo che le differenze nelle due direzioni restino nulle. Il carico applicato dai due martinetti laterali comunque rappresenta al massimo l'1% del carico totale.

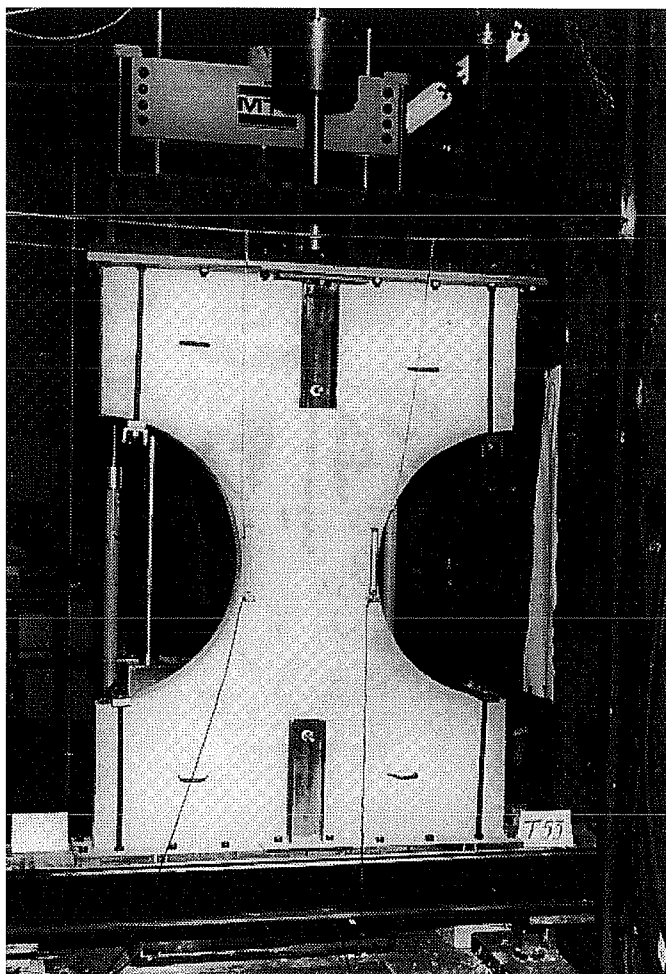


Figura 5.12: Sistema di attacco per i provini di dimensione massima.

5.5 Analisi elastica del campo tensionale

La forma a clessidra del provino è stata scelta al fine di ottenere una zona di rottura preferenziale. I provini realizzati hanno valori di d variabili tra 2.5 cm e 40 cm, mantenendo uno spessore costante di 10 cm. Per valutare l'andamento del campo tensionale dei provini, almeno in fase elastica, e quindi per determinare il fattore di concentrazione degli sforzi in corrispondenza della sezione di mezzeria, si è eseguita una analisi agli elementi finiti del provino più piccolo. Il provino da 2.5 cm è stato

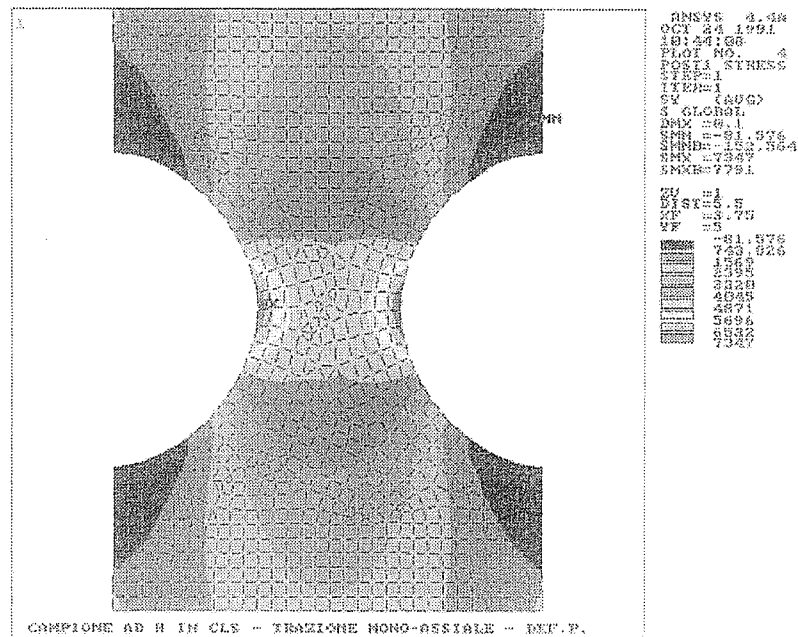


Figura 5.13: Risultati dell'analisi elastica.

modellizzato assumendo un modulo elastico $E = 31000 \text{ kN cm}^{-2}$ e un coefficiente di Poisson $\nu = 0.2$. Il reticolo è stato ottenuto suddividendo la base e gli archi in 30 elementi ed i segmenti verticali in 10 elementi. Sono stati utilizzati elementi quadrangolari a 4 nodi, con lato pari a circa 2.5 mm. Come condizione di carico si è imposto uno spostamento relativo delle basi pari a $\delta = h/100$. Per questo provino la sezione più sollecitata ha uno spessore pari a 4 volte la dimensione trasversale; è perciò realistico ipotizzare una condizione di deformazione piana.

Come mostrato in Figura 5.10, il fattore di concentrazione degli sforzi, ottenuto come rapporto tra la tensione massima e la tensione media lungo la sezione di mezzeria, è risultato pari a 1.43. L'incremento tensionale, dovuto alla particolare geometria del provino, non risulta quindi particolarmente elevato.

5.6 Risultati sperimentali

Come accennato in precedenza, sono state condotte due serie di prove. Naturalmente, per ciascuna serie, i provini sono stati ottenuti da un unico getto; le proprietà mec-

caniche dei calcestruzzi sono riportate in Appendice A.

Prima serie

Nella prima serie sono stati provati saggi di quattro dimensioni differenti, con sezioni trasversali di dimensioni 5x10, 10x10, 20x10 e 40x10, rispettivamente. Sono stati confezionati quattro provini per ciascuna misura. Il calcestruzzo è stato preparato con un rapporto acqua-cemento pari a 0.5. Si è utilizzato un diametro massimo dell'inerte $d_{max} = 16$ mm, mentre la resistenza a compressione, valutata su cubi di lato da 160 mm, è risultata $f_c = 36.9$ MPa. Per i provini più piccoli è disponibile solo un diagramma completo (con sigla CA54), poichè gli altri tre sono stati sacrificati per regolare la sensibilità delle tre macchine servo-controllate (Figura 5.14). Per la dimensione successiva sono state ottenute due prove significative (CA101 e CA102). Per quelli alti 80 cm sono invece state introdotte due cerniere in corrispondenza della traversa inferiore, in quanto i primi due saggi si sono rotti in corrispondenza delle piastre di aggancio. Per questo motivo è disponibile solo un diagramma completo (CA204). Infine per i provini più grandi è stato possibile misurare solo il valore della resistenza ultima, in quanto la lunghezza degli estensometri, scelta per ogni dimensione pari a d , è risultata in questo caso maggiore di quella critica. Si è pertanto verificato il fenomeno dello snap-back, ovvero si è ottenuta una rottura improvvisa in corrispondenza della tensione di picco senza poter rilevare il tratto di softening. I risultati medi della prima serie, resistenza a trazione ed energia di frattura, sono riportati nella Tabella 6.1, mentre i valori relativi ai singoli provini sono riportati in Appendice B.

d d (cm)	Area sezione trasversale (cm ²)	Resistenza a trazione σ_N (MPa)	Energia di frattura \mathcal{G}_F (N/mm)
5	50	4.25	0.083
10	100	3.78	0.102
20	200	3.64	0.142
40	400	3.11	-

Tabella 6.1: Risultati sperimentali medi per la resistenza a trazione e l'energia di frattura (1^a serie).

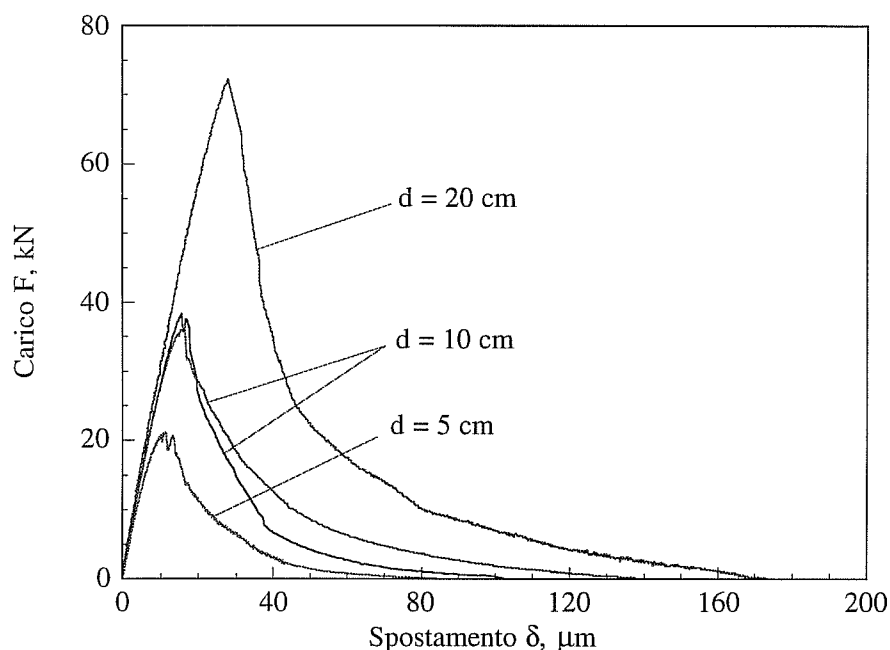


Figura 5.14: Diagrammi sperimentali carico-spuntamento (1ª serie).

Le curve sperimentali carico-spuntamento, per le tre prime dimensioni, sono presentate in Figura 5.14. Si può notare come la pendenza del tratto elastico sia la stessa per tutte le dimensioni. Questo dipende dalla scelta della lunghezza degli estensometri, proporzionale alla dimensione del provino, d . Inoltre la forma di queste curve è in ogni caso la stessa e questa circostanza indica come la procedura di prova sia tale da garantire una rigidità della macchina praticamente infinita (piastre rigide). Infatti, a differenza delle prove realizzate da van Mier [72] con piastre di ancoraggio fisse, non si sono ottenuti salti nel tratto softening. Ciò è dovuto al fatto che il carico è sempre risultato centrato, il controllo essendo stato effettuato tanto nel piano del provino quanto fuori piano. Nelle prove presentate da van Mier, invece, il controllo è stato effettuato esclusivamente nel piano del provino, mentre non è stato previsto alcun controllo per l'eccentricità fuori dal piano.

I valori della resistenza a trazione apparente sono diagrammati in Figura 4.13 in funzione di d . L'effetto scala è rappresentato dalla pendenza della retta ottenuta dalla regressione lineare dei punti del diagramma. La pendenza, come premesso al

Capitolo 4, è risultata 0.14, indicando un effetto di scala di gran lunga inferiore a quello di massimo disordine e pari a 0.50.

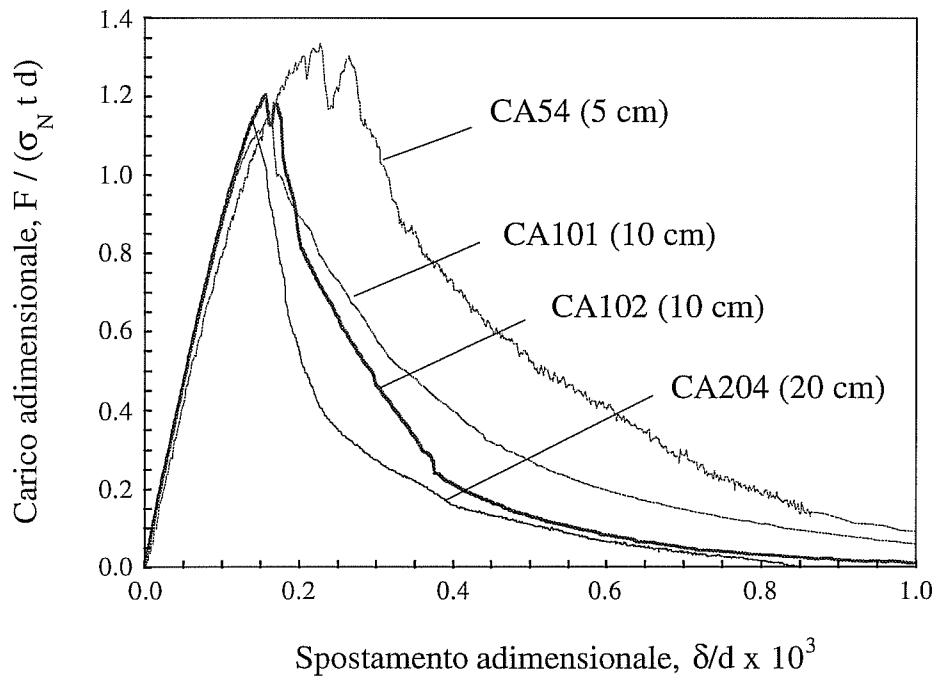


Figura 5.15: Diagrammi sperimentali adimensionalizzati carico-spostamento (1^a serie).

In Figura 5.15 sono riportati i diagrammi carico-spostamento adimensionali. Il carico è stato adimensionalizzato dividendo il valore della forza per l'area della sezione trasversale e per una tensione di riferimento $\bar{\sigma}_N$, che rappresenta la resistenza per un provino di dimensione infinita (Capitolo 7). Dalla Figura 5.15 si osserva come, oltre alla diminuzione di resistenza al crescere della dimensione strutturale, vari il comportamento strutturale dei saggi al variare della dimensione. Per le dimensioni maggiori si accentua il comportamento fragile, diminuendo la non linearità pre-picco e diventando più ripido il tratto softening. L'energia di frattura mostra peraltro un comportamento opposto, ovvero aumenta con l'aumentare della dimensione del saggio.

I valori di \mathcal{G}_F ottenuti sono diagrammati in Figura 6.23 nel piano bilogarithmico $\ln \mathcal{G}_F - \ln d$. L'effetto di scala sul \mathcal{G}_F , rappresentato dalla pendenza della regressione lineare, è risultato pari a 0.38.

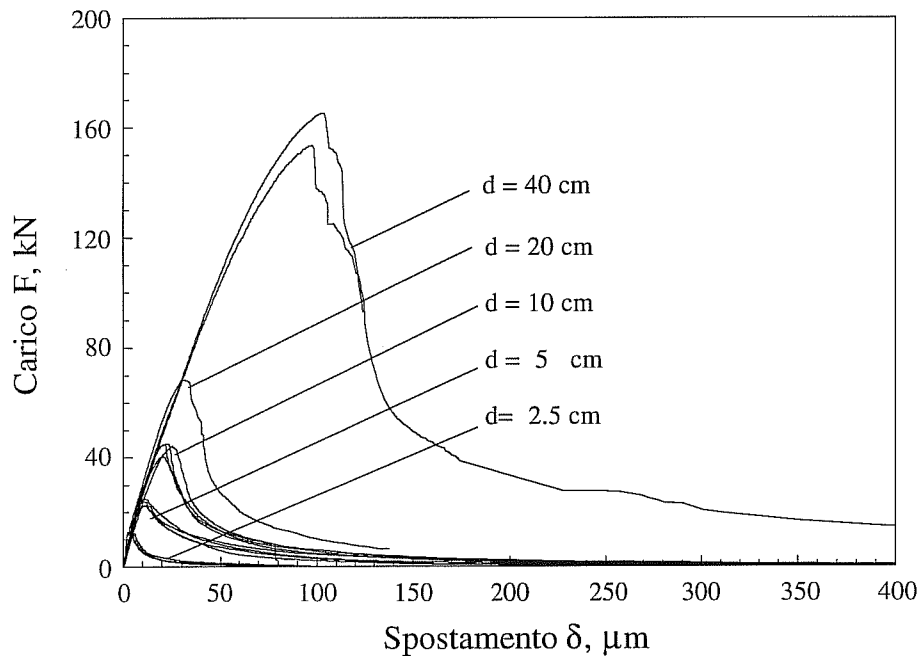


Figura 5.16: Diagrammi sperimentali carico-spostamento (2^a serie).

Seconda serie

Nella seconda serie sono stati provati saggi di cinque dimensioni differenti, con sezioni trasversali di dimensioni 2.5x10, 5x10, 10x10, 20x10 e 40x10, rispettivamente. Sono stati confezionati otto provini per ciascuna dimensione. Anche per questa serie il calcestruzzo è stato preparato con un rapporto acqua-cemento pari a 0.5 e si è utilizzato un diametro massimo dell'inerte $d_{max} = 16$ mm mentre la resistenza a compressione, valutata su cubi di lato 160 mm, è risultata $f_c = 42.7$ MPa. Per la seconda serie sono stati ottenuti, eccezion fatta per la dimensione con $d = 20$ cm, una media di cinque diagrammi completi per ciascuna misura dei saggi. In Figura 5.16 sono riportate tutte

le curve disponibili. Per le Figure successive è stata selezionata, per motivi grafici, una curva rappresentativa per ogni misura.

Per i provini più piccoli è stato scelto come rappresentativo quello con sigla T13, in quanto presenta i valori più vicini a quelli medi. La base per gli allungamenti per questa dimensione è stata assunta pari a $2d$, essendo risultato difficoltoso l'incollaggio delle basi da 2.5 cm. Per la seconda dimensione è stato scelto il provino T27 come campione, mentre per la terza il provino T38. I provini da 80 cm, come accennato prima, sono stati quelli a creare più difficoltà. Alcuni sono stati provati più volte, poichè si sono verificati vari casi di distacco delle piastre di attacco. A ciò è dovuto probabilmente il basso valore della resistenza nominale di questa dimensione. Inoltre si dispone solo del diagramma completo del provino T48. Come descritto nel paragrafo precedente, per la dimensione massima si è invece modificato il sistema di attacco, inserendo due selle laterali ed un tassello centrale di rinforzo. Si è inoltre utilizzata come lunghezza degli estensometri $d/2$, ovvero 20 cm, per evitare, come nel caso della prima serie, che si verificassero fenomeni di snap-back. Accorciando la base di misura degli spostamenti, daltronde, è capitato che un provino, il T54, si sia rotto al di fuori della zona di controllo. I risultati medi della seconda serie, resistenza a trazione ed energia di frattura, sono riportati nella Tabella 6.2.

d d (cm)	Area sezione trasversale (cm ²)	Resistenza a trazione σ_N (MPa)	Energia di frattura \mathcal{G}_F (N/mm)
2.5	25	4.79	0.147
5	50	4.56	0.257
10	100	4.37	0.236
20	200	3.80	0.158
40	400	3.72	0.286

Tabella 6.2: Risultati sperimentali medi per la resistenza a trazione e l'energia di frattura (2^a serie).

Le curve sperimentali carico-spostamento per le cinque differenti misure sono presentate in Figura 5.16. Per tenere conto delle basi di misura utilizzate e ottenere la stessa pendenza del tratto elastico, gli spostamenti relativi ai provini da

2.5 cm sono stati divisi per due, mentre quelli relativi alla dimensione più grande sono stati raddoppiati. È da sottolineare la notevole ripetitività delle curve di softening. L'andamento di queste ultime segue una legge di potenza con esponente compreso tra -0.85 e -1.25, con valori del coefficiente di correlazione superiori a 0.95. Uno studio più approfondito sull'esponente delle leggi di softening sarà oggetto di studi futuri, alla luce anche della procedura di rinormalizzazione presentata al Capitolo 6.

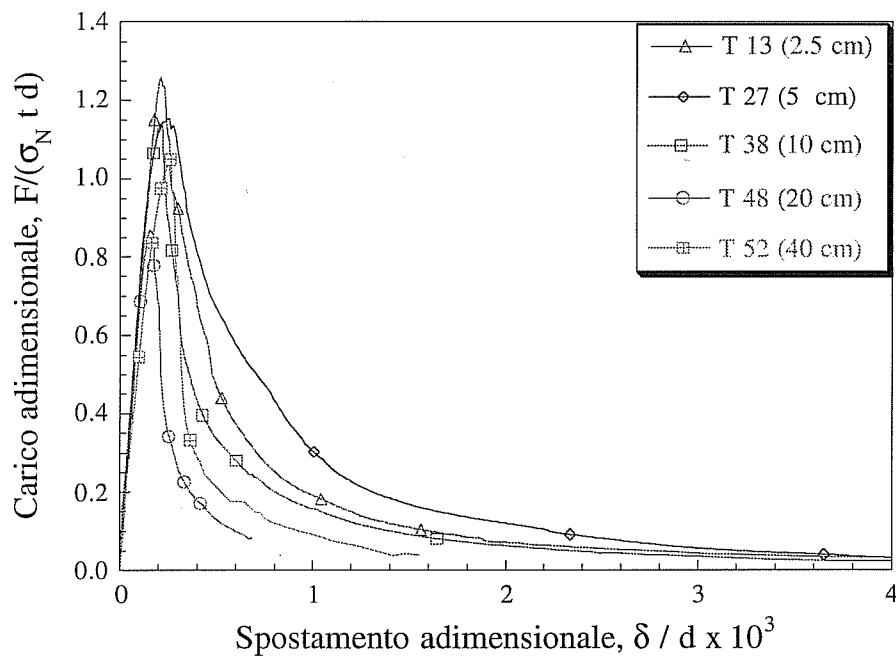


Figura 5.17: Diagrammi sperimentali adimensionalizzati carico-spostamento (2^a serie).

I valori della resistenza a trazione apparente sono diagrammati in Figura 4.13 in funzione di d nel piano bilogarithmico. L'effetto scala è rappresentato dalla pendenza della retta ottenuta dalla regressione lineare dei punti del diagramma. La pendenza, come premesso al Capitolo 4, è risultata pari a 0.099, indicando un effetto scala di poco inferiore a quello della prima serie.

In Figura 5.17 sono stati riportati i diagrammi carico-spostamento adimensionalizzati. Anche per la seconda serie è evidente la variazione del comportamento strutturale dei provini al variare della dimensione. I provini più grandi forniscono una risposta notevolmente più fragile rispetto a quelli più piccoli. Si osservi come la pendenza del tratto softening per il provino con $d=40$ cm risulti pressochè verticale. Se fosse stata utilizzata una base di misura da 40 cm, si sarebbe sicuramente verificato il fenomeno dello snap-back.

L'energia di frattura mostra invece un comportamento opposto, ovvero aumenta con l'aumentare della dimensione del saggio. I valori medi ottenuti sperimentalmente sono riportati in Figura 6.25 nel piano bilogarithmico $\ln G_F - \ln d$. L'effetto scala su G_F , rappresentato dalla pendenza della regressione lineare, è risultato pari a 0.122.

Capitolo 6

Natura frattale della microstruttura dei materiali disordinati

1

6.1 Introduzione

Gli effetti di scala sulla resistenza nominale a trazione e sulla tenacità alla frattura sono stati oggetto ricorrente di ricerche ed argomento rilevante nella letteratura scientifica degli ultimi anni [13, 73]. Nonostante siano state avanzate diverse ipotesi per i singoli fenomeni [74-81], non è stata ancora proposta una spiegazione unitaria basata su concetti generali. Al Capitolo 4 è stata proposta una distribuzione statistica di autosomiglianza per la dimensione dei difetti più pericolosi, per analizzare gli effetti scala sulla resistenza nominale a trazione. Nonostante la suddetta idea contenga il concetto frattale di autosomiglianza, questo è circoscritto esclusivamente alla dimensione massima dei difetti, mentre la natura disordinata della microstruttura del materiale risulta completamente trascurata. In questo capitolo la reale natura del materiale viene descritta attraverso un modello frattale più complesso, nel quale la proprietà di autosomiglianza viene estesa all'intera popolazione dei difetti. Questo modello rappresenta una descrizione più aderente della realtà e più coerente con la giustificazione frattale dell'effetto di scala sull'energia di frattura.

Questa nuova interpretazione teorica è basata sulla natura frattale degli spazi di riferimento usati nella meccanica dei solidi classica. Uno spazio frattale è un dominio matematico con dimensione non intera. Questo vecchio concetto, recentemente rein-

¹Il presente capitolo è stato in larga misura tratto da [12]

trodotto e sistematizzato da Mandelbrot [11], Falconer [82] ed altri autori, presenta un largo campo di applicazioni nella moderna tecnologia. Ad esempio, il peso di alcuni materiali spugnosi non aumenta proporzionalmente al volume, poichè essi presentano una densità classica, intesa come massa riferita al volume, non costante. È peraltro possibile definire una densità *universale* costante, intesa come massa riferita ad una lunghezza elevata alla dimensione frattale dello spazio occupato dall'oggetto. Questa dimensione risulta compresa tra 2 e 3.

La visione frattale della meccanica dei solidi potrebbe essere considerata come uno dei più importanti esempi di superamento dei confini della classica meccanica del continuo [83]. Le idee di Griffith [10] e di Irwin [19], avendo introdotto concetti quali l'energia di frattura ed il fattore di intensificazione degli sforzi, entrambe quantità non convenzionali aventi dimensioni fisiche desuete, potrebbero, alla pari della Meccanica Quantistica e della Teoria delle Catastrofi, essere considerate vere e proprie rivoluzioni concettuali nell'ambito scientifico generale, e non solo limitate quindi al campo della resistenza dei materiali.

Evidenze sperimentali di *autosomiglianza (frattalità)* sopra un ampio intervallo di scale sono state recentemente riportate in letteratura: le superfici di frattura di acciai [84] e di calcestruzzi [85] mostrano di condividere proprietà frattali, almeno nel campo di dimensioni che spaziano tra quella macroscopica dell'oggetto e quella microscopica, caratteristica della microstruttura del materiale.

L'autosomiglianza implica una morfologia simile (anche solo statisticamente) in un ampio intervallo di scale delle superfici di frattura. Ciò denota come le microstrutture frattali siano caratterizzate da un certo grado, e non assenza, di ordine, nel senso che esiste una correlazione tra due punti successivi della superficie. *La dimensione frattale D è allora un modo di misurare questo ordine dietro il caos.*

La natura frattale delle superfici di frattura dei materiali disordinati produce un incremento rispetto al numero 2. L'interpretazione meccanica della dimensione frattale D , essendo maggiore di 2, potrebbe essere quella di considerare la dissipazione dell'energia di frattura, durante lo sviluppo della superficie di frattura, come un qualcosa di intermedio tra dissipazione di energia superficiale (che è l'ipotesi della LEFM [10, 19]) e dissipazione di energia volumetrica (che è il classico approccio delle teorie della resistenza dei materiali, Analisi Limite e Meccanica del Danneggiamento) [12].

L'errore sistematico che si è ripetuto nel misurare le proprietà meccaniche dei materiali disordinati, come il calcestruzzo e le rocce, è quello di considerare aree e volumi di riferimento con dimensioni ideali intere, 2 e 3 rispettivamente. Se questo errore è compiuto nell'intervallo di scala nel quale valgono le proprietà frattali, risulta impossibile misurare proprietà del materiale costanti, fintantochè non si abbandonino le dimensioni intere della sezione reagente o della superficie di frattura. Definire nuove proprietà meccaniche con dimensioni fisiche dipendenti dalla dimensione frattale della microstruttura del materiale danneggiato, rappresenta la procedura cosiddetta di *ri-*

normalizzazione, già utilizzata nella fisica statistica di processi casuali [86]. In questo modo risulta possibile ottenere le cosiddette proprietà "universali", cioè costanti del materiale, invarianti con la scala.

Alcuni autori hanno di recente cercato di correlare la dimensione frattale della superficie di frattura con la tenacità alla frattura K_{IC} [87, 88]. Questo tentativo non ha però avuto successo, in particolare perchè le dimensioni fisiche di K_{IC} non sono state assunte variabili con la dimensione frattale della superficie di frattura. La variazione nelle dimensioni fisiche della tenacità alla frattura (e quindi dell'energia di frattura) e della resistenza a trazione produce una attenuazione dell'effetto scala relativo alla disparità dimensionale tra resistenza e tenacità. Per i materiali molto disordinati l'attenuazione è completa e svanisce qualsiasi effetto di scala [89], avendo sia la resistenza a trazione che l'energia di frattura una dimensione pari a $[\text{Forza}] \times [\text{Lunghezza}]^{-1.5}$. Attenuazioni analoghe sono state osservate ed analizzate da Carpinteri per materiali incrudenti in presenza di fessure [68] e per materiali elastici in presenza di angoli rientranti [90].

6.2 Insiemi frattali e dimensioni frattali

Un tipico esempio di insieme frattale è fornito dall'insieme del *terzo medio di Cantor* il quale può essere costruito da un intervallo unitario attraverso una sequenza di operazioni di cancellazione (Figura 6.1).

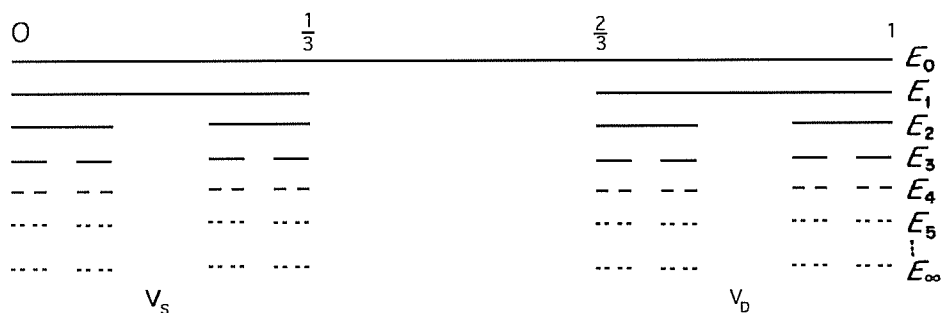


Figura 6.1: Insieme del terzo medio di Cantor (dimensione frattale = 0.631).

Sia E_0 l'intervallo $[0, 1]$. Sia E_1 l'insieme ottenuto eliminando il terzo medio di E_0 , così che E_1 risulti costituito dai due intervalli $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Eliminando i terzi medi di questi intervalli si ottiene E_2 ; E_2 è così costituito dai quattro intervalli $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$,

$[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$. Procedendo in maniera analoga, E_k si ottiene eliminando i terzi medi di ciascun intervallo di E_{k-1} . E_k risulta costituito da 2^k intervalli, ciascuno di lunghezza 3^{-k} . L'insieme del terzo medio di Cantor è dato dall'intersezione $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, e così esso può esser pensato come il limite della sequenza di insiemi E_k , per k che tende all'infinito. La lunghezza dell'insieme del terzo medio di Cantor è nulla, poichè il limite $(\frac{2}{3})^k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. Si può dimostrare, comunque, che la dimensione frattale dell'insieme è 0.631, e pertanto esso può essere misurato in modo coerente soltanto mediante una lunghezza elevata a 0.631.

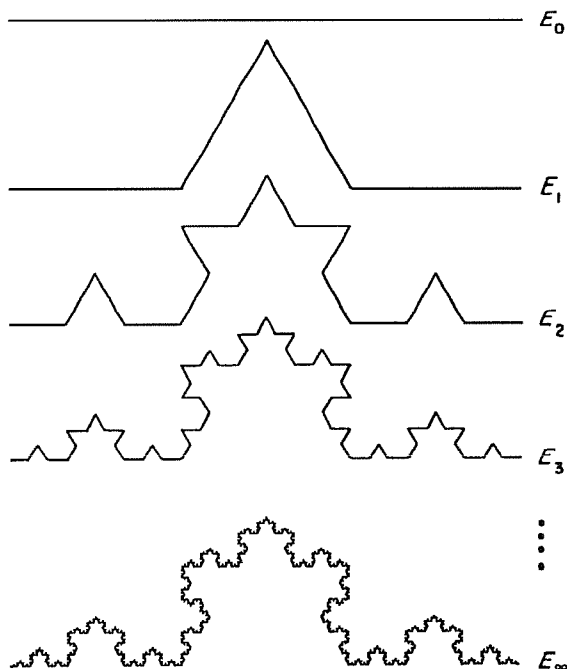


Figura 6.2: Curva di von Kock (dimensione frattale = 1.262).

Un secondo esempio di insieme frattale, con dimensione questa volta maggiore di uno, è costituito dalla *curva di von Koch* (Figura 6.2). Sia E_0 un segmento di lunghezza unitaria. L'insieme E_1 sia costituito da quattro segmenti ottenuti rimuovendo il terzo medio di E_0 e sostituendolo con gli altri due lati del triangolo equilatero con base sul segmento rimosso. E_k si costruisce applicando la stessa procedura a ciascuno dei segmenti in E_{k-1} , e così via. La sequenza di curve poligonali

approssima alla curva di von Koch quando k tende ad infinito. La lunghezza della curva di von Koch tende all'infinito poichè $(\frac{4}{3})^k$ tende all'infinito per $k \rightarrow \infty$. La dimensione frattale della curva è 1.262; l'incremento dimensionale di 0.262 è dovuto alla sua tortuosità. La curva potrebbe allora essere misurata in modo coerente solo attraverso una lunghezza elevata a 1.262.

I due esempi di insiemi frattali appena descritti sono utili per introdurre un'ipotesi per analizzare e giustificare gli effetti di scala tanto sulla resistenza nominale a trazione quanto sulla tenacità alla frattura. L'insieme del terzo medio di Cantor è caratterizzato da una dimensione frattale minore di 1. Insiemi di questo tipo verranno introdotti per descrivere la sezione resistente di un materiale disordinato. Infatti la dimensione frattale di tale sezione risulta essere minore della dimensione canonica, 2, a causa della presenza di vuoti e fessure. Di contro la curva di von Koch, tipico insieme con dimensione frattale maggiore di 1, può venire utilizzata per descrivere la traiettoria di una fessura, e quindi per rappresentare geometricamente la superficie di frattura di un materiale disordinato. La dimensione frattale delle superfici di frattura, infatti, proprio a causa delle irregolarità e delle tortuosità che le caratterizzano, risulta essere maggiore della dimensione canonica, 2.

Dimensione di Hausdorff

Se U è un sottoinsieme dello spazio Euclideo di dimensione n , R^n , si definisce *diametro* di U la massima distanza tra una qualsiasi coppia di punti in U :

$$|U| = \sup \left\{ |x - y| : x, y \in U \right\}. \quad (6.1)$$

Si dice che una collezione di insiemi numerabili (o finiti) di diametro massimo δ che includa V :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset V, \quad (6.2)$$

con $0 \leq |U_i| \leq \delta$, $\forall i$, è un δ -ricoprimento di V .

Si supponga che V sia un sottoinsieme di R^n ed α un numero non negativo. Per qualsiasi $\delta > 0$ si definisce:

$$\mathcal{M}_\delta^\alpha(V) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^\alpha : \{U_i\} \text{ è un ricoprimento } \delta \text{ di } V \right\}, \quad (6.3)$$

ed allora la *misura α -dimensionale di Hausdorff* dell'insieme V è data dal limite:

$$\mathcal{M}^\alpha(V) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{M}_\delta^\alpha(V). \quad (6.4)$$

La misura di Hausdorff è sempre 0 o ∞ , eccetto che per un particolare valore di $\alpha = \bar{\alpha}$, chiamato *dimensione di Hausdorff* dell'insieme V . La dimensione di Hausdorff generalizza i familiari concetti di lunghezza, area e volume: $\mathcal{M}^0(V)$ è il numero di punti di un insieme discreto V ; $\mathcal{M}^1(V)$ fornisce la lunghezza di una curva regolare; $\mathcal{M}^2(V)$ fornisce l'area di una superficie regolare; $\mathcal{M}^3(V)$ fornisce il volume di un dominio tridimensionale *non-spugnoso* V .

Le proprietà di scala per la lunghezza, l'area ed il volume sono ben note. Per ottenere un'amplificazione di un fattore λ , si moltiplica la lunghezza di una curva per λ , l'area di una superficie per λ^2 ed il volume di un dominio tridimensionale per λ^3 . La misura di Hausdorff secondo la dimensione α varia invece con un fattore λ^α :

$$\mathcal{M}^\alpha(\lambda V) = \lambda^\alpha \mathcal{M}^\alpha(V), \quad (6.5)$$

dove $\lambda V = \{\lambda x : x \in V\}$ è l'insieme scalato di un fattore λ .

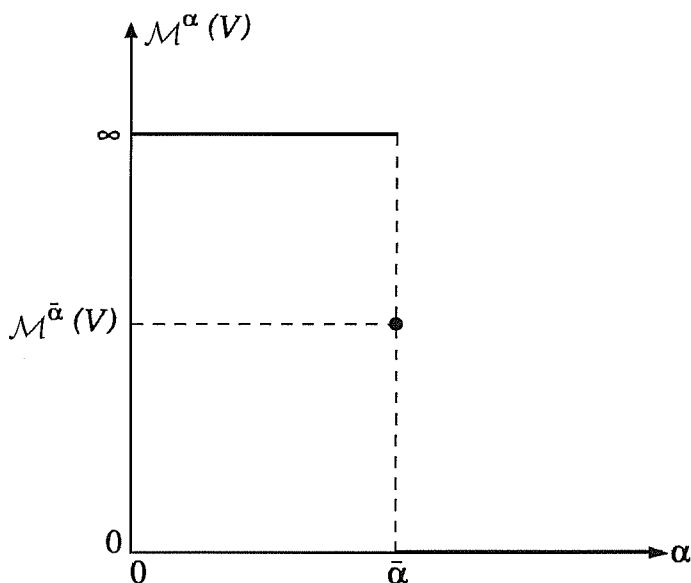


Figura 6.3: Misura di Hausdorff α -dimensionale di un insieme in funzione del parametro α .

Il diagramma di $\mathcal{M}^\alpha(V)$ in funzione di α (Figura 6.3) mostra il valore critico $\alpha = \bar{\alpha} = \dim_H V$; la funzione $\mathcal{M}^\alpha(V)$ presenta in corrispondenza di $\bar{\alpha}$ un salto da ∞ a 0. Può essere data allora la seguente definizione:

$$\bar{\alpha} = \dim_H V = \inf\{\alpha : \mathcal{M}^\alpha(V) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{M}^\alpha(V) = \infty\}. \quad (6.6)$$

Se $\bar{\alpha} = \dim_H V$, allora $\mathcal{M}^\alpha(V)$ è finito se V è finito. Per esempio, un disco piatto di raggio unitario presenta lunghezza infinita e volume nullo, e, più in generale, $\mathcal{M}^\alpha(V) = \infty$ se $\alpha < 2$ e $\mathcal{M}^\alpha(V) = 0$ se $\alpha > 2$, mentre $\mathcal{M}^2(V) = \pi$.

Si riconsideri l'insieme del terzo medio di Cantor (Figura 6.1). Un calcolo euristico della dimensione di Hausdorff può essere svolto considerando l'insieme di Cantor suddiviso nella parte sinistra $V_S = V \cap [0, \frac{1}{3}]$ e nella parte destra $V_D = V \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Entrambe le parti sono geometricamente simili a V ma scalate del rapporto $\frac{1}{3}$, e $V = V_S \cup V_D$, essendo questa unione disgiunta. Così per ogni α :

$$\mathcal{M}^\alpha(V) = \mathcal{M}^\alpha(V_S) + \mathcal{M}^\alpha(V_D) = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \mathcal{M}^\alpha(V) + \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \mathcal{M}^\alpha(V), \quad (6.7)$$

in accordo con la equazione (6.5). Se si dividono entrambi i membri dell'equazione (6.7) per la misura di Hausdorff $\mathcal{M}^\alpha(V)$, assunta pertanto essere una quantità finita, si ottiene:

$$1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0.631. \quad (6.8)$$

Per la curva di von Kock (Figura 6.2), con analogo calcolo, si ottiene:

$$1 = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1.262. \quad (6.9)$$

Il precedente metodo euristico fornisce la risposta corretta per la dimensione di molti insiemi frattali. Più in generale, se $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, dove ciascun V_i è geometricamente simile a V ma scalato di un differente fattore c_i , allora il metodo euristico fornisce $\dim_H V$ come la radice α dell'equazione:

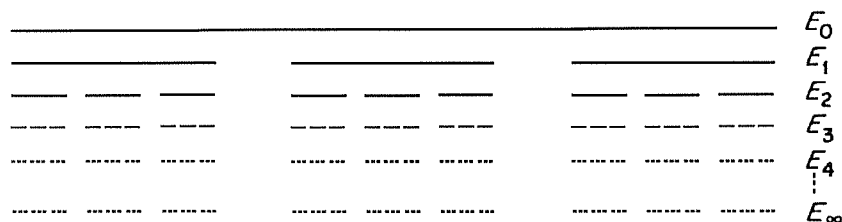


Figura 6.4: Insieme uniforme di Cantor (dimensione frattale = 0.831).

$$\sum_{i=1}^m c_i^\alpha = 1. \quad (6.10)$$

Si consideri l'*insieme uniforme di Cantor* di Figura 6.4, con $m = 3$ e $\lambda = \frac{4}{15}$. In questo caso il bilancio è:

$$1 = 3 \left(\frac{4}{15} \right)^\alpha \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\ln \frac{1}{3}}{\ln \frac{4}{15}} \simeq 0.831. \quad (6.11)$$

Più in generale, per un numero intero $m \geq 2$ e $0 < \lambda < \frac{1}{m}$, è possibile provare che:

$$\dim_H = -\frac{\ln m}{\ln \lambda}, \quad (6.12)$$

$$0 < \mathcal{M}^{-\frac{\ln m}{\ln \lambda}}(V) < \infty. \quad (6.13)$$

Il caso della curva di von Kock modificata (Figura 6.5) coinvolge per esempio più di un rapporto nell'equazione (6.10).

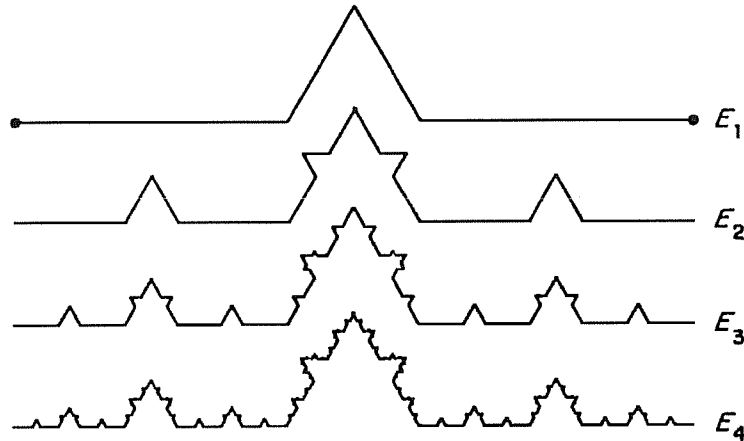


Figura 6.5: Curva di von Kock modificata.

Si fissi $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ e si costruisca una curva V attraverso ripetute sostituzioni della porzione media a di ciascun intervallo con gli altri due lati del triangolo equilatero di base a ; la $\dim_H V$ è in questo caso la soluzione dell'equazione:

$$1 = 2a^\alpha + 2 \left[\frac{1}{2} (1-a) \right]^\alpha. \quad (6.14)$$

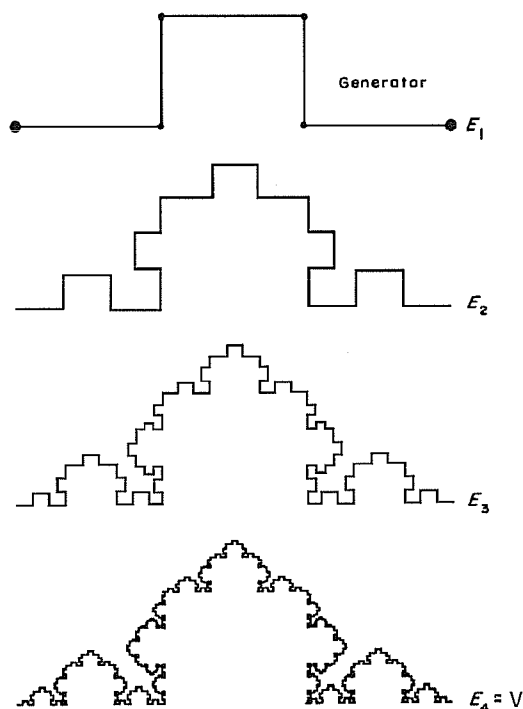


Figura 6.6: Curva frattale (dimensione frattale = 1.34).

Si osservi che la dimensione di Hausdorff del relativo insieme uniforme di Cantor, con $m = 2$ e $d = \frac{1}{2}(1 - a)$, è data da:

$$1 = 2 \left[\frac{1}{2} (1 - a) \right]^\alpha, \tag{6.15}$$

Applicazioni simili dell'equazione (6.10) forniscono la dimensione di Hausdorff delle curve frattali rappresentate nelle Figure 6.6, 6.7 e 6.8. Le lunghezze dei segmenti nel *generator* di Figura 6.6 sono rispettivamente $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, ed il bilancio è:

$$1 = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^\alpha + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^\alpha \text{ ovvero } \alpha \simeq 1.34. \tag{6.16}$$

Allo stesso modo, il generatore di Figura 6.7 fornisce:

$$1 = 8 \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \text{ ovvero } \alpha = \frac{\ln 8}{\ln 4} = 1.5, \quad (6.17)$$

mentre il generatore di Figura 6.8 da:

$$1 = 5 \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \text{ ovvero } \alpha = \frac{\ln 8}{\ln 4} \simeq 1.465. \quad (6.18)$$

Altri tipi di frattali si possono ottenere rimuovendo ripetutamente alcune parti simili nel piano, come per esempio nel caso del triangolo di Sierpinski (Figura 6.9), che è ottenuto da un triangolo equilatero rimuovendo ripetutamente triangoli equilateri invertiti:

$$1 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \text{ ovvero } \alpha = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \quad (6.19)$$

Una analogia piana dell'insieme di Cantor, la "polvere di Cantor", è rappresentata in Figura 6.10. A ciascun passo ciascun quadrato rimanente viene diviso in 16 quadrati più piccoli dei quali quattro rimangono mentre gli altri vengono cancellati. Il bilancio è:

$$1 = 4 \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \text{ ovvero } \alpha = 1. \quad (6.20)$$

Naturalmente, possono essere considerati diverse configurazioni o numeri di quadrati per ottenere differenti insiemi. L'esempio riportato in Figura 6.11 è costruito usando due differenti rapporti di similitudine, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ rispettivamente:

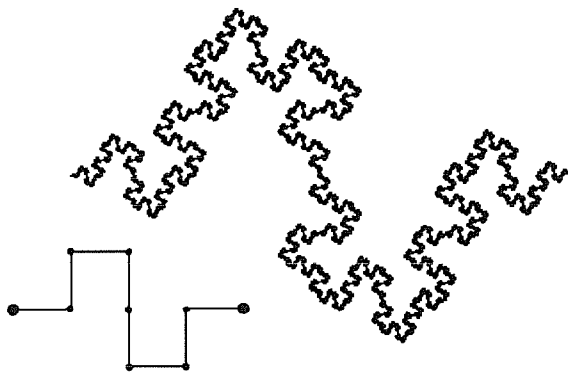


Figura 6.7: Curva frattale (dimensione frattale = 1.50).

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha + 4\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \quad \text{ovvero} \quad \alpha \simeq 1.357. \quad (6.21)$$

Mentre la curva di von Kock è un esempio di incremento dimensionale dovuto a tortuosità e serpeggiamenti a scale differenti, si può ottenere un incremento simile in insiemi ottenuti per ricorsiva sovrapposizione a scale differenti. Si consideri l'intervallo $[0, 1] = [0, \frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$ e poi, ricorsivamente, $[0, \frac{2}{3}] = [0, \frac{4}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{1}{3}, 1] = [\frac{1}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{5}{9}, 1]$, ecc. (Figura 6.12). L'equazione di bilancio è pertanto:

$$1 = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \simeq 1.709. \quad (6.22)$$

Dimensione del Box Counting Method

La dimensione di Hausdorff, discussa precedentemente, è la definizione principale della dimensione per geometrie frattali. Possono tuttavia essere proposte altre definizioni equivalenti utilizzabili da un punto di vista pratico. Risulta fondamentale per molte definizioni di dimensione l'idea della *misurazione alla scala δ* . Per ogni δ , si misura l'insieme in un modo da ignorare le irregolarità di dimensione inferiore a δ , e si osserva come queste misure si comportino per $\delta \rightarrow 0$. Per esempio, se V è una curva piana (cioè una costa o il letto di un fiume), la misurazione $M_\delta(V)$ potrebbe essere rappresentata mediante il numero di intervalli discreti e rettilinei di lunghezza

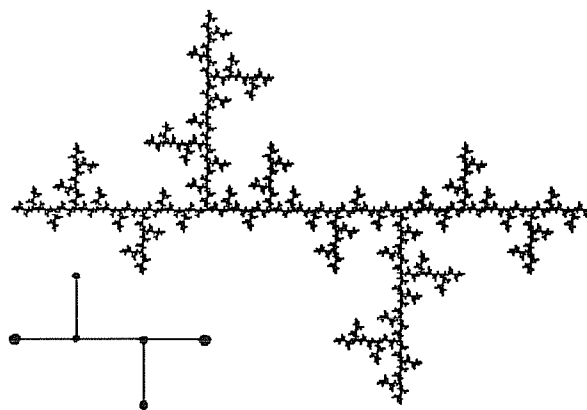


Figura 6.8: Curva frattale (dimensione frattale = 1.465).

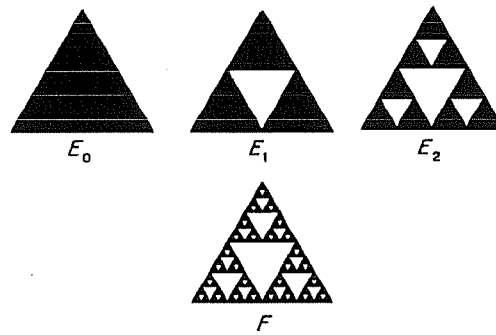


Figura 6.9: Triangolo di Sierpinski (dimensione frattale = 1.585).

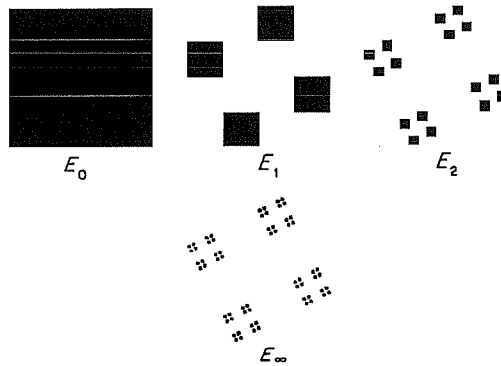


Figura 6.10: Polvere di Cantor (dimensione frattale = 1).

δ necessari per approssimare V attraverso una curva poligonale. La dimensione di V è allora determinata attraverso la legge di potenza a cui obbedisce $M_\delta(V)$ quando $\delta \rightarrow 0$:

$$M_\delta(V) = c\delta^{-\alpha}, \quad (6.23)$$

dove α è la cosiddetta *dimensione del Box Counting Method* e c è la lunghezza della curva poligonale per $\delta = 1$. Nel caso di una curva regolare ideale, dalla geometria classica è ben noto come $\alpha = 1$. Prendendo i logaritmi:

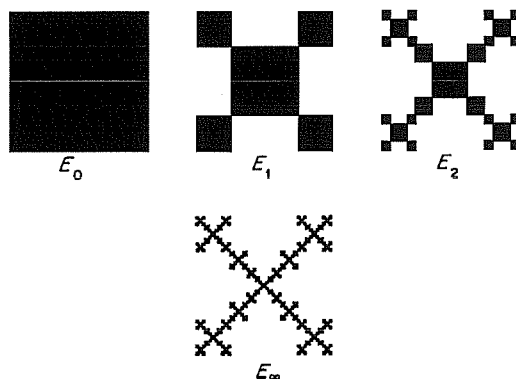


Figura 6.11: Insieme frattale piano (dimensione frattale = 1.357).

$$\ln M_\delta(V) = \ln c - \alpha \ln \delta. \quad (6.24)$$

Questa formula è molto utile per determinare sperimentalmente la dimensione frattale di un oggetto, poichè α può essere calcolata come gradiente di un diagramma bilogarithmico tracciato su di un intervallo sufficientemente ampio di δ (Figura 6.13). Generalmente questo intervallo è limitato. Per esempio, per un calcestruzzo il limite minimo e massimo potrebbero essere correlati con gli estremi della curva granulometrica.

Per trovare la dimensione box di un insieme piano V bisogna disegnare un reticolo di quadrati o caselle di lato δ e contare il numero $M_\delta(V)$ in cui ricade l'insieme. Il numero di caselle quadrate o di cubi di lato δ che intercettano un insieme è un indice di quanto sia diffuso o irregolare l'insieme, quando esaminato alla scala δ . La dimensione frattale è quindi un indice di quanto rapidamente si sviluppino le irregolarità per $\delta \rightarrow 0$.

Se si considera l'insieme del terzo medio di Cantor alla k -esima operazione di cancellazione si può assumere (Figura 6.1):

$$\delta = 3^{-k}, \quad (6.25)$$

e si può valutare:

$$M_\delta(V) = 2^k, \quad (6.26)$$

trascurando tutte le irregolarità di dimensione inferiore a δ . Dall'equazione (6.24) si ottiene:

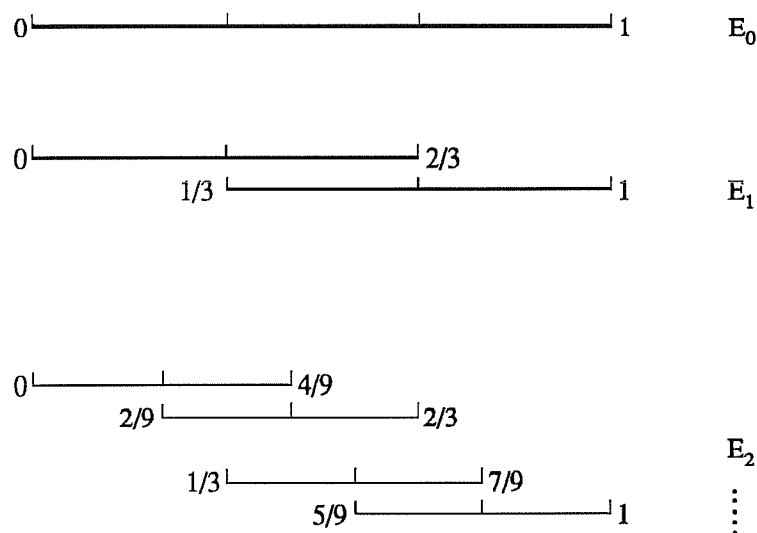


Figura 6.12: Insieme frattale ottenuto dalla sovrapposizione a scale differenti (dimensione frattale = 1.709).

$$k \ln 2 = \ln 1 + k\alpha \ln 3 \quad (6.27)$$

ovvero $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Per la curva di von Koch valgono considerazioni analoghe.

Frattali statistici (random)

I frattali deterministici presentati negli esempi precedenti hanno dei corrispondenti statistici. Per esempio, nella costruzione della curva di von Koch, ogni volta che si sostituisce il terzo medio di un intervallo con gli altri due lati di un triangolo equilatero, si potrebbe lanciare una moneta per determinare dove posizionare la nuova parte, al di sopra o al di sotto del segmento rimosso. Dopo pochi passi, si ottiene una curva che appare piuttosto irregolare, la quale, tuttavia, mantiene alcune caratteristiche della curva di von Koch (Figura 6.14).

La costruzione dell'insieme del terzo medio di Cantor può essere *randomizzata* (resa di tipo statistico) in due differenti modi (Figura 6.15). Ogni volta che si divide un segmento in tre parti si può, invece di rimuovere il segmento centrale, lanciare un dado per decidere quale parte rimuovere. Alternativamente, si potrebbero scegliere le lunghezze dell'intervallo a ciascun livello della costruzione, secondo una data distribu-

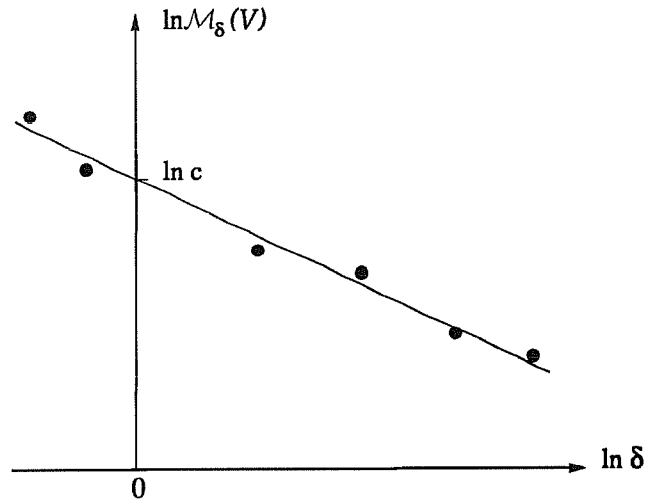


Figura 6.13: Definizione della dimensione del Box Counting Method.

zione statistica.

I frattali statistici non sono perfettamente autosomiglianti; la loro apparente non-uniformità è però spesso più vicina ai fenomeni naturali quali le coste marine, le superfici topografiche o le superfici di frattura. Si dice che i frattali statistici sono *statisticamente autosomiglianti*, nel senso che un ingrandimento di una piccola parte possiede la stessa distribuzione statistica dell'intero insieme.

È possibile dimostrare una versione statistica dell'equazione (6.10), quando i fattori c_i presentano una data densità di probabilità $p(c_i)$ sull'intervallo di base $[0, c_i^{max}]$:

$$1 = \sum_{i=1}^m \frac{\int_0^{c_i^{max}} c_i^\alpha p(c_i) dc_i}{\int_0^{c_i^{max}} p(c_i) dc_i}. \quad (6.28)$$

I due casi limite sono rappresentati dal *caos deterministico*, con $p(c_i)$ definito dalla funzione di Dirac δ e l'equazione (6.28) che va a coincidere con l'equazione (6.10), ed il *caos completamente casuale* con $p(c_i) = \frac{1}{c_i^{max}}$.

A tal proposito si consideri la curva statistica di von Koch, dove c sia una variabile completamente casuale con una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, \frac{1}{3}]$. A ciascun passo, viene sostituito un segmento di lunghezza 1 da quattro segmenti di lunghezze rispettivamente $\frac{1}{2}(1-a)$, a , a , $\frac{1}{2}(1-a)$, in modo tale che si abbia $m = 4$, $c_1 = c_4 = \frac{1}{2}(1-a)$ e $c_2 = c_3 = a$. Poichè in questo caso $p(c_i) = 3$ per $i = 1, 2, 3, 4$, l'equazione

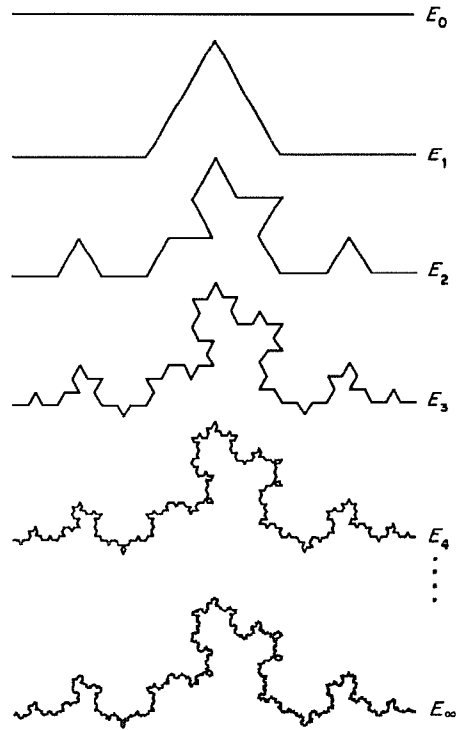


Figura 6.14: Curva di von Kock statistica.

(6.28) diventa:

$$1 = \int_0^{\frac{1}{3}} 3 \times 2 \left\{ \left[\frac{1}{2}(1-a) \right]^\alpha + a^\alpha \right\} da, \quad (6.29)$$

ovvero:

$$\alpha + 1 = 12x2^{-(\alpha+1)} - 6x3^{-(\alpha+1)}, \quad (6.30)$$

così che $\alpha \simeq 1.144$.

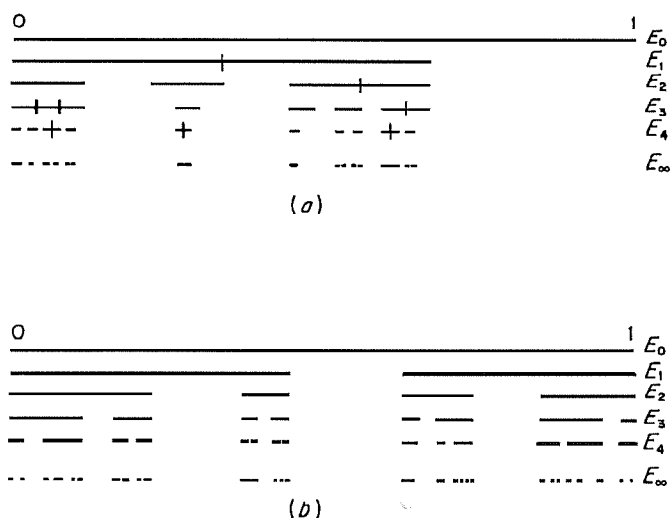


Figura 6.15: Insieme di Cantor statistico.

6.3 Natura frattale della sezione reagente del materiale ed effetto di scala sulla resistenza nominale a trazione

Si è visto come la resistenza nominale a trazione di molti materiali sia soggetta ad effetti di scala molto evidenti. Ciò che accade usualmente è che la resistenza decresca con la dimensione, e questo fenomeno risulta più accentuato per materiali disordinati (cioè macroscopicamente eterogenei e/o danneggiati). Griffith [10] ha interpretato l'effetto di scala sulla resistenza nel caso di filamenti di vetro, assumendo la preesistenza di microfessure nel materiale di dimensione proporzionale al diametro della sezione trasversale del filamento. Alcuni anni più tardi Weibull [7] ha fornito una spiegazione puramente statistica dello stesso fenomeno utilizzando il concetto dell'anello più debole della catena. Solo di recente le due spiegazioni sono state armonizzate, integrando l'approccio empirico di Weibull con l'assunzione fenomenologica di Griffith [59, 60, 15]. La *distribuzione statistica di autosomiglianza* definita in [13, 15] e presentata nel Capitolo 4, assume il difetto più pericoloso di lunghezza proporzionale alla dimensione della struttura. Questo corrisponde al fatto che i materiali presentano una considerevole dispersione nella distribuzione statistica della dimensione delle microfessure (materiali disordinati). In questo caso, la potenza della singolarità ten-

sionale della LEFM, $-\frac{1}{2}$, risulta essere la pendenza del diagramma bilogarithmico della resistenza in funzione della dimensione. Quando la dispersione statistica è relativamente bassa (materiali ordinati), la pendenza risulta minore di $\frac{1}{2}$ e tende a zero per distribuzioni regolari (materiali perfettamente ordinati).

Nonostante la suddetta idea contenga il concetto frattale di autosomiglianza, questo è circoscritto esclusivamente alla dimensione massima del difetto, mentre la natura disordinata della microstruttura del materiale risulta completamente trascurata. In questo paragrafo viene descritta mediante un modello frattale più complesso la reale natura del materiale, dove la proprietà di autosomiglianza viene estesa all'intera popolazione dei difetti. Questo modello rappresenta un quadro più realistico ed è coerente con l'interpretazione frattale dell'effetto di scala sull'energia fittizia di frattura, che verrà presentata nel paragrafo seguente. D'altra parte, come si mostrerà, valori della pendenza maggiori di $\frac{1}{2}$ rappresenterebbero, con entrambi i modelli, un grado di disordine usualmente assente nei materiali reali.

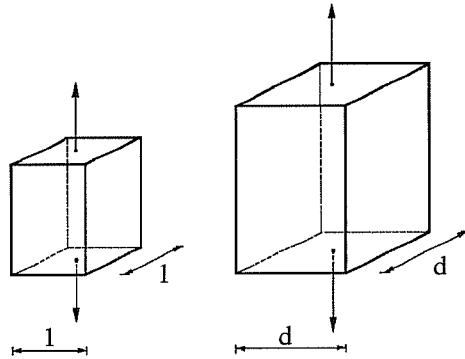


Figura 6.16: Corpi geometricamente simili dove d è il rapporto di scala.

Si assuma che la sezione reagente di un materiale disordinato alla tensione di picco possa essere rappresentato da uno spazio frattale di dimensione $\alpha = 2 - d_\sigma$, con $1 < \alpha \leq 2$ e, pertanto, $0 \leq d_\sigma < 1$. Il decremento dimensionale d_σ può essere dovuto alla presenza di fessure e vuoti e quindi, generalmente, ad un indebolimento della sezione reagente. Si considerino due corpi, geometricamente simili e costituiti dello stesso materiale disordinato (Figura 6.16). Se il rapporto di similitudine geometrica è uguale a d e la resistenza a trazione rinormalizzata σ_N^* viene assunta come una costante del materiale, con una dimensione fisica di $[\text{forza}] \times [\text{lunghezza}]^{-(2-d_\sigma)}$, si ottiene allora:

$$\sigma_N^* = \frac{F_1}{1^{2-d_\sigma}} = \frac{F_2}{d^{2-d_\sigma}}, \quad (6.31)$$

dove F_1 e F_2 sono le forze ultime a trazione agenti rispettivamente sui due corpi.

D'altra parte, le resistenze apparenti nominali a trazione sono rispettivamente:

$$\sigma_N^{(1)} = \frac{F_1}{l^2}, \quad \sigma_N^{(2)} = \frac{F_2}{d^2}, \quad (6.32)$$

dove l'ultima, in accordo con l'equazione (6.31), diventa:

$$\sigma_N^{(2)} = \sigma_N^{(1)} d^{-d_\sigma}. \quad (6.33)$$

È possibile scrivere la relazione tra le resistenze nominali alle differenti dimensioni in forma logaritmica:

$$\ln \sigma_N = \ln \sigma_N^{(1)} - d_\sigma \ln d. \quad (6.34)$$

L'equazione (6.34) rappresenta una retta con pendenza $-d_\sigma$ in un piano $\ln \sigma_N$ - $\ln d$ (Figura 6.17).

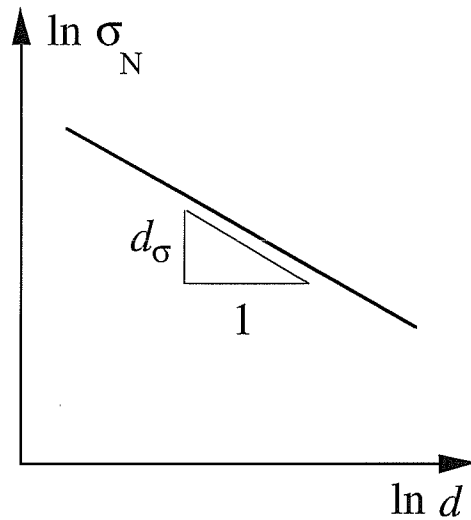


Figura 6.17: Decremento della resistenza nominale a trazione con la dimensione del provino.

Una strada alternativa per spiegare il decremento della resistenza nominale a trazione con la dimensione del provino è quella di considerare una sequenza di scale di osservazione. Se la forza totale F , applicata al provino, è invariante rispetto alla scala di osservazione, si ha [4]:

$$F = \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 = \dots = \sigma_{n-1} A_{n-1} = \sigma_n A_n = \sigma_{n+1} A_{n+1} = \dots = \sigma_\infty A_\infty \quad (6.35)$$

dove la prima scala di osservazione potrebbe essere quella macroscopica, con $\sigma_1 A_1 = \sigma_N A$, dove A risulta essere l'area della sezione trasversale, mentre la scala asintotica di osservazione potrebbe essere considerata quella microscopica, con $\sigma_\infty A_\infty = \sigma_N^* A^*$, dove questa volta A^* risulta essere la misura dell'insieme frattale che rappresenta la sezione resistente danneggiata.

Dall'uguaglianza tra i membri estremi dell'equazione (6.35) si ha:

$$\sigma_N = \sigma_N^* \left(\frac{A^*}{A} \right) \quad (6.36)$$

e pertanto:

$$\sigma_N = \sigma_N^* \left(\frac{d^{2-d_\sigma}}{d^2} \right) \quad (6.37)$$

essendo d la dimensione caratteristica della sezione trasversale. Utilizzando l'equazione (6.36) è possibile generalizzare la (6.34):

$$\log \sigma_N = \log \sigma_N^* - d_\sigma \log d. \quad (6.38)$$

Analoghe relazioni di gruppi rinormalizzati sono state proposte da Wilson [86] nella teoria dei campi ed in meccanica statistica, come anche da Barenblatt [91] nella descrizione asintotica intermedia della turbolenza e dei fenomeni di esplosione.

Conferme dell'equazione (6.33) sono state fornite dalle molte precedenti sperimentazioni, eseguite su differenti materiali metallici e cementizi e con differenti geometrie del provino. Questi risultati sono sintetizzati in [12]. Lo stesso andamento è stato ottenuto nelle prove sperimentali condotte presso il Politecnico di Torino dallo scrivente e presentate nel capitolo precedente. Come è possibile osservare in Figura 6.18, la pendenza della retta che approssima i risultati sperimentali relativi alla prima serie risulta essere uguale a 0.14. Si ottiene allora per la sezione reagente del materiale la dimensione 1.86, cioè un insieme frattale che risulta molto vicino ad una superficie bidimensionale. Le dimensioni del provino analizzate in questa serie spaziano su un intervallo dimensionale di $1 \div 8$. La natura frattale della sezione resistente del materiale appare molto evidente alla scala dei provini. D'altra parte, è molto probabile che la proprietà di autosomiglianza scompaia oppure vari a scale più grandi o più piccole, a causa del carattere limitato della curva granulometrica.

Utilizzando l'equazione (6.38) è possibile trovare il valore della σ_N^* rinormalizzata con dimensione fisica di $[\text{Forza}] \times [\text{Lunghezza}]^{-1.86}$. I valori rinormalizzati delle σ_N^* sono pressochè costanti, al variare di d . La regressione lineare fornisce il valore della

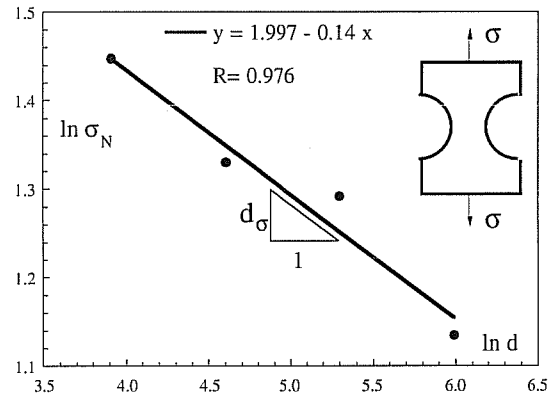


Figura 6.18: Effetto di scala sulla resistenza a trazione ricavata dalle prove di trazione presentate al capitolo 5 (1^a serie).

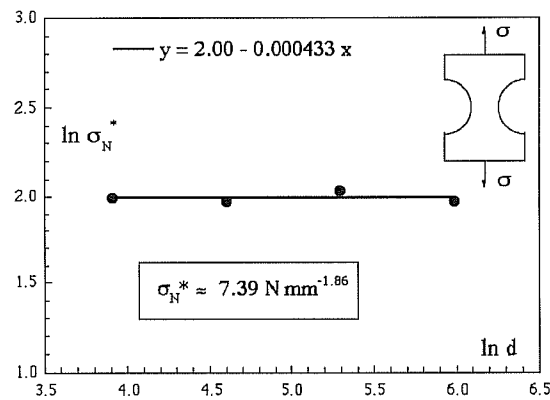


Figura 6.19: Valori rinormalizzati della resistenza a trazione (1^a serie).

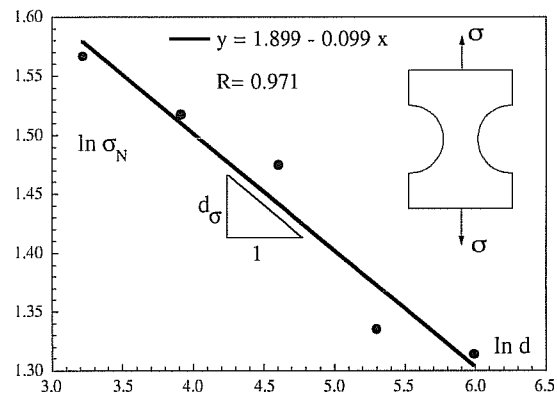


Figura 6.20: Effetto di scala sulla resistenza a trazione ricavata dalle prove di trazione presentate al capitolo 5 (2^a serie).

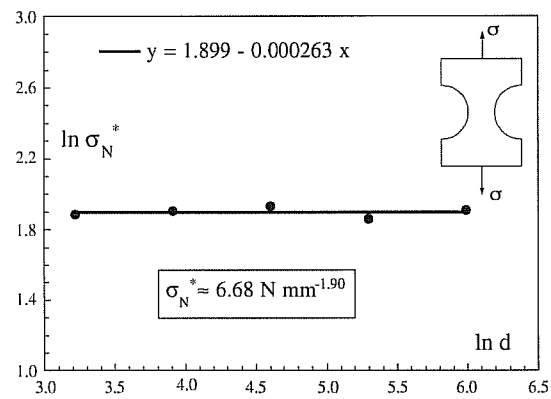


Figura 6.21: Valori rinormalizzati della resistenza a trazione (2^a serie).

tensione rinormalizzata uguale a $\sigma_N^* = 7.39 \text{ N mm}^{-1.86}$, mentre la pendenza della retta è praticamente nulla (Figura 6.19).

La stessa operazione può essere effettuata per la seconda serie di prove. In questo caso la pendenza della regressione lineare risulta uguale a 0.099 (Figura 6.20), che fornisce una dimensione frattale per la sezione reagente pari a 1.90. Tale dimensione è ancora più vicina a quella canonica ed indica una maggiore compattezza della sezione e quindi un minore effetto scala. Per questa serie si è raddoppiato l'intervallo dimensionale, portandolo a $1 \div 16$. Rinormalizzando le tensioni di picco, si ricava la resistenza a trazione rinormalizzata uguale a $6.68 \text{ N mm}^{-1.90}$, che risulta essere quindi invariante con la scala (Figura 6.21).

6.4 Natura frattale della superficie di frattura ed effetto di scala sulla energia di frattura

È ben noto come la superficie di frattura dei metalli [84] e del calcestruzzo [85] presenti una natura frattale con una scabrosità che produce un incremento dimensionale rispetto al numero 2. Anche in questo caso si può osservare una conseguenza meccanica rilevante, considerando l'effetto scala sull'energia di frattura \mathcal{G}_F . Dopo che la porposta di Hillerborg di una prova di frattura per il calcestruzzo è stata pubblicata come Raccomandazione RILEM [70], molti ricercatori hanno misurato una energia di frattura \mathcal{G}_F che aumenta con la dimensione del provino e, più specificatamente, con la dimensione della sezione resistente non fessurata. Poichè questo andamento è stato rilevato sistematicamente, in ciascun caso gli autori hanno tentato di fornire diverse spiegazioni empiriche o fenomenologiche. Nessuno si è comunque cimentato nel tentativo di interpretare i propri risultati in un più largo ambito concettuale. D'altra parte, per comprendere le osservazioni sperimentali, è necessario abbandonare il concetto termodinamico classico di energia superficiale di un solido ideale, e assumere che la dissipazione dell'energia avvenga in uno spazio frattale di dimensione $\alpha = 2 + d_G$, con $2 \leq \alpha < 3$ e, pertanto, $0 \leq d_G < 1$. Ciò rappresenta una attenuazione della localizzazione della frattura dovuta alla eterogeneità del materiale ed alla presenza di fessurazioni multiple.

Si considerino due corpi, geometricamente simili e costituiti dello stesso materiale disordinato (Figura 6.16). Se il rapporto di similitudine geometrica è uguale a d e l'energia di frattura rinormalizzata \mathcal{G}_F^* si assume come una costante del materiale con dimensioni fisiche $[\text{forza}] \times [\text{lunghezza}]^{-(1+d_G)}$, si ottiene:

$$\mathcal{G}_F^* = \frac{W_1}{l^{2+d_G}} = \frac{W_2}{d^{2+d_G}}, \quad (6.39)$$

dove W_1 e W_2 sono le energie dissipate rispettivamente nei due corpi.

D'altra parte, le energie di frattura apparenti sono rispettivamente:

$$\mathcal{G}_F^{(1)} = \frac{W_1}{l^2}, \quad \mathcal{G}_F^{(2)} = \frac{W_2}{d^2}, \quad (6.40)$$

dove la seconda, in accordo con l'equazione (6.39), diventa:

$$\mathcal{G}_F^{(2)} = \mathcal{G}_F^{(1)} d^{d_G}. \quad (6.41)$$

Si può scrivere la relazione tra le energie di frattura alle differenti dimensioni in forma logaritmica:

$$\ln \mathcal{G}_F = \ln \mathcal{G}_F^{(1)} + d_G \ln b. \quad (6.42)$$

L'equazione (6.42) rappresenta una retta con pendenza d_G nel piano $\ln \mathcal{G}_F - \ln d$ (Figura 6.22).

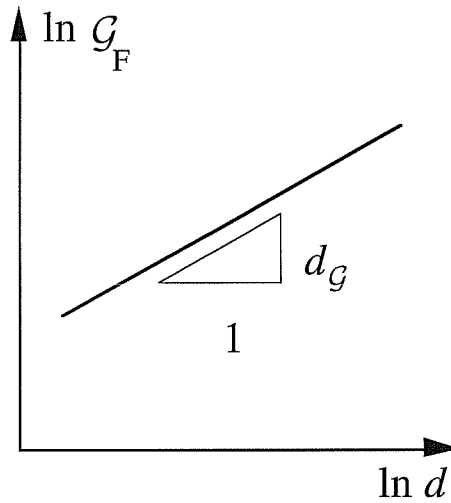


Figura 6.22: Incremento dell'energia di frattura con la dimensione del provino.

Un modo alternativo di spiegare l'incremento dell'energia di frattura con la dimensione del provino è quella di considerare una sequenza di scale di osservazione. Se l'energia totale W , dissipata attraverso la frattura, è invariante rispetto alla scala di osservazione, si ha:

$$W = \mathcal{G}_1 A_1 = \mathcal{G}_2 A_2 = \dots = \mathcal{G}_{n-1} A_{n-1} = \mathcal{G}_n A_n = \mathcal{G}_{n+1} A_{n+1} = \dots = \mathcal{G}_\infty A_\infty \quad (6.43)$$

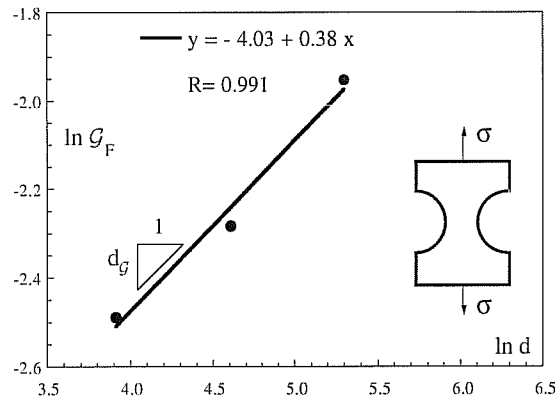


Figura 6.23: Effetto di scala sull'energia di frattura ricavata dalle prove di trazione presentate al capitolo 5 (1^a serie).

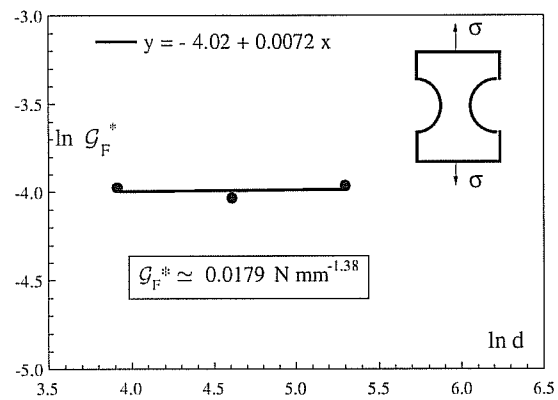


Figura 6.24: Valore dell'energia di frattura rinormalizzata (1^a serie).

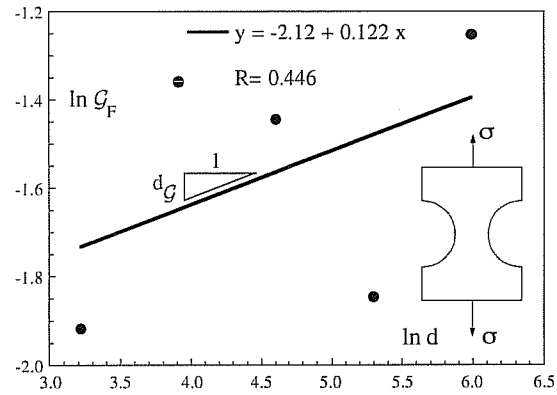


Figura 6.25: Effetto di scala sull'energia di frattura ricavata dalle prove di trazione presentate al capitolo 5 (2^a serie).

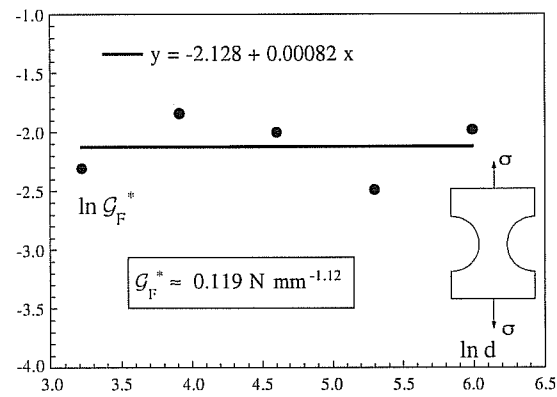


Figura 6.26: Valore dell'energia di frattura rinormalizzata (2^a serie).

dove la prima scala di osservazione potrebbe essere quella macroscopica, con $\mathcal{G}_1 A_1 = \mathcal{G}_F A$, con A pari all'area della sezione trasversale, mentre la scala asintotica di osservazione potrebbe essere quella microscopica, con $\mathcal{G}_\infty A_\infty = \mathcal{G}_F^* A^*$, dove A^* questa volta è la misura dell'insieme frattale che rappresenta la superficie irregolare di frattura.

Dall'uguaglianza tra i membri estremi dell'equazione (6.43), si ottiene:

$$\mathcal{G}_F = \mathcal{G}_F^* \left(\frac{A^*}{A} \right), \quad (6.44)$$

e pertanto:

$$\mathcal{G}_F = \mathcal{G}_F^* \left(\frac{d^{2+d_G}}{d^2} \right), \quad (6.45)$$

con d uguale alla dimensione caratteristica della sezione trasversale. Dall'equazione (6.45) si può ottenere una generalizzazione dell'equazione (6.42):

$$\ln \mathcal{G}_F = \ln \mathcal{G}_F^* + d_G \ln d. \quad (6.46)$$

Lo stesso andamento dell'equazione (6.42) è stato ottenuto con le prove sperimentali a trazione eseguite dallo scrivente e presentate nel capitolo precedente. La prima serie di prove a trazione fornisce una pendenza uguale a 0.38 (Figura 6.23), che consente di ottenere un parametro energetico (*universale*) costante nel caso in cui la dissipazione avvenga in uno spazio di danneggiamento di dimensione 2.38 (Figura 6.24).

Per la seconda serie si ottiene invece una pendenza inferiore pari a 0.122 (Figura 6.25). In questo caso il parametro rinormalizzato, si ottiene ipotizzando che la dissipazione avvenga in uno spazio di dimensione 2.122 (Figura 6.26).

6.5 Curve sperimentali rinormalizzate

In questo paragrafo vengono riconsiderati i diagrammi sperimentali presentati al Capitolo 5. Si cerca di operare su tali diagrammi una rinormalizzazione, in modo da ottenere una sovrapposizione di quest'ultimi, e quindi l'annullamento della dispersione dovuta agli effetti di scala. Le curve sperimentali $F - \delta$ sono caratterizzate da due regimi differenti. Il primo regime corrisponde alla fase elastica pre-picco, nella quale si formano delle microfessure isolate. In questa fase la forza esterna cresce monotonicamente fino al valore massimo. Le variazioni statistiche fra le curve risultano molto deboli.

Nel secondo regime, che si può chiamare di *softening*, l'interazione tra le microfessure inizia a dominare il processo, finchè si forma una fessura macroscopica che si

propaga attraverso tutto il provino. In questo regime le fluttuazioni statistiche sono più forti. La rinormalizzazione delle curve sperimentali si basa sulla determinazione della legge di scala sia della forza che degli spostamenti. I diagrammi sperimentali relativi alle varie dimensioni devono essere cioè riscaldati con una opportuna legge di potenza di d , in modo tale da ottenere la massima sovrapposizione delle curve. Tale legge ha la seguente forma:

$$F = d^\alpha \Phi(\delta d^{-\beta}), \quad (6.47)$$

dove Φ è la funzione di scala cercata.

Le curve $F - \delta$, in prima approssimazione, sono state diagrammate riscaldando sia i carichi che gli spostamenti e utilizzando un unico valore della dimensione frattale ricavato dalla rinormalizzazione delle resistenze nominali. In Figura 6.27 sono riportati diagrammi relativi alla prima serie ed in Figura 6.28, quelli relativi alla seconda. I carichi sono stati divisi per la σ_N^* rinormalizzata, per lo spessore t e per la dimensione caratteristica d , riscaldata in funzione della dimensione frattale, della sezione reagente alla tensione di picco. Gli spostamenti, d'altra parte, sono stati divisi anch'essi per la dimensione caratteristica riscaldata. Riferendosi alla legge (6.47), gli esponenti sono stati assunti costanti e pari a $\alpha = \beta = 0.86$ per la prima serie e $\alpha = \beta = 0.90$ per la seconda. Questa rinormalizzazione, coerente peraltro con l'ipotesi monofrattale precedentemente introdotta, funziona in modo egregio ovviamente per il regime pre-picco, mostrando una sovrapposizione notevole delle varie curve. In questo regime, infatti, la dimensione frattale della sezione reagente è proprio quella ottenuta dalla rinormalizzazione delle resistenze nominali. Nel regime *softening* invece, le curve mostrano ancora notevoli divergenze. Ciò è dovuto al fatto che, propagandosi la macrofessura, la dimensione frattale della sezione reagente tende a decrescere, fino ad annullarsi in corrispondenza del completo distacco delle due parti del provino. È evidente pertanto come l'ipotesi di monofrattalità nel regime softening non fornisca i risultati voluti. Per ottenere una sovrapposizione completa delle curve si rende necessaria una rinormalizzazione che contempra una variazione continua degli esponenti α e β , in rapporto all'effettivo decremento della dimensione della sezione reagente durante tutto il processo di prova. In termini matematici, gli esponenti della (6.47) dovrebbero essere delle opportune funzioni di δ , $\alpha(\delta)$ e $\beta(\delta)$, a valori compresi nell'intervallo $[0,1]$.

In Figura 6.29 e 6.30 sono riportate le curve rinormalizzate con l'esponente β che meglio sovrappone le curve di softening. In effetti, però, come anche si evince dai diagrammi, il valore β per entrambe le serie risulta efficace solo in una parte della zona post-picco, dove cioè le curve approssimativamente si sovrappongono. Ciò significa che in quel particolare tratto la dimensione frattale della sezione reagente risulta effettivamente molto vicina al β scelto.

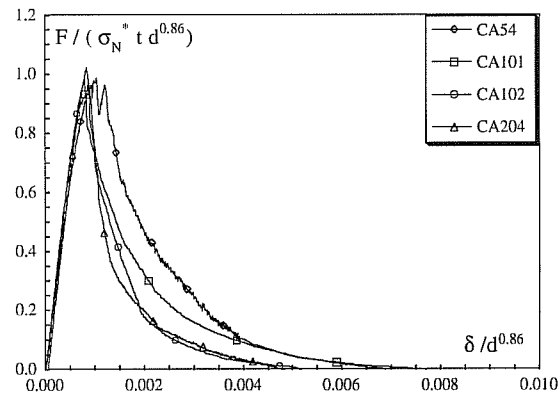


Figura 6.27: Diagrammi sperimentali rinormalizzati (1^a serie).

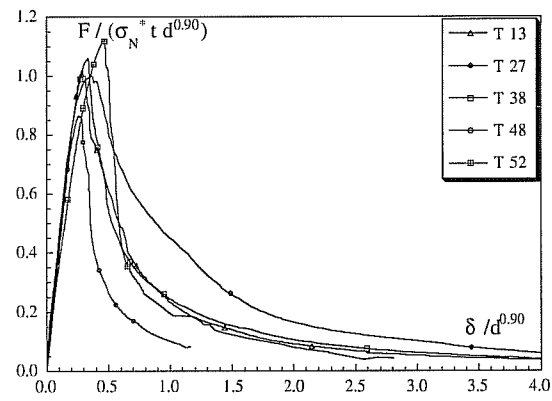
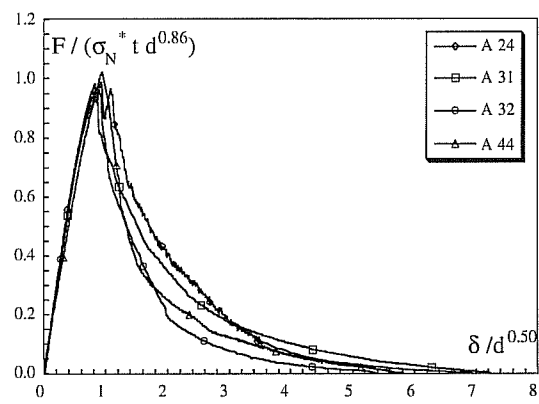
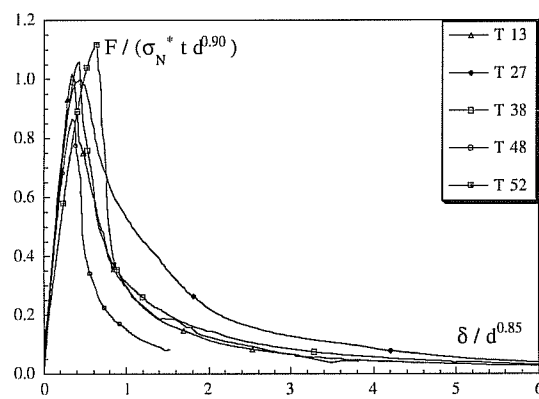


Figura 6.28: Diagrammi sperimentali rinormalizzati (2^a serie).

Figura 6.29: Diagrammi sperimentali rinormalizzati (1^a serie) con differenti esponenti.Figura 6.30: Diagrammi sperimentali rinormalizzati (2^a serie) con differenti esponenti.

6.6 Determinazione sperimentale della dimensione frattale della superficie di frattura

Esistono molte definizioni di dimensione frattale di un oggetto, quali la dimensione di Hausdorff, la dimensione Box ed altre. Partendo da queste definizioni sono state così sviluppate diverse tecniche per estrarre la dimensione frattale di una superficie di frattura o di un profilo. Sebbene esse siano tutte equivalenti nel limite delle scale più piccole, sostanzialmente differiscono quando utilizzate nella forma discretizzata ed applicate a dati digitalizzati. La proprietà di *autoaffinità* afferma che possono essere determinate per ciascun profilo due dimensioni: la dimensione *locale* (non intera) nel limite delle scale che tendono a zero, e la dimensione *globale*, che corrisponde alle grandi scale, ed è uguale a 1 (o, equivalentemente, per la superficie di frattura, a 2). Inoltre, l'assunzione che i profili di una superficie di frattura di materiali disordinati possano essere meglio rappresentati mediante i modelli frattali autoaffini piuttosto che mediante i modelli autosomiglianti, evidenzia le carenze di alcune tecniche.

In questo paragrafo viene presentata una indagine post-mortem delle superfici di frattura del calcestruzzo delle prove di trazione diretta analizzate al Capitolo 5.

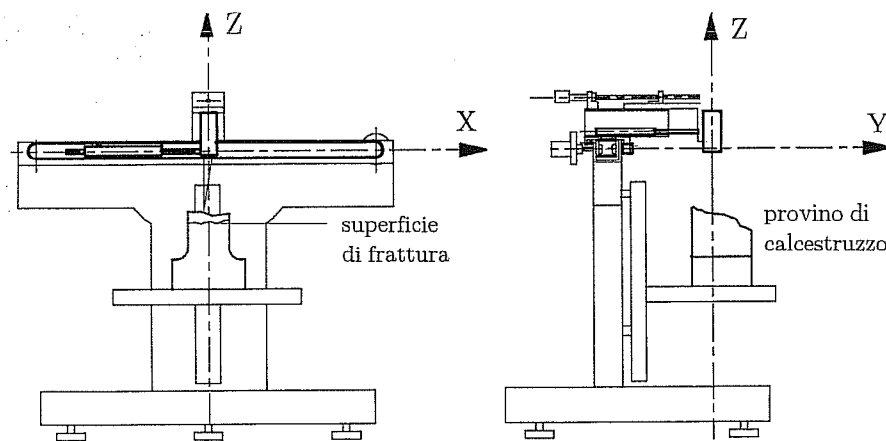


Figura 6.31: Profilometro laser per la digitalizzazione dei profili.

È stato utilizzato un profilometro laser (semiconduttore da 3mW, classe IIIb) per

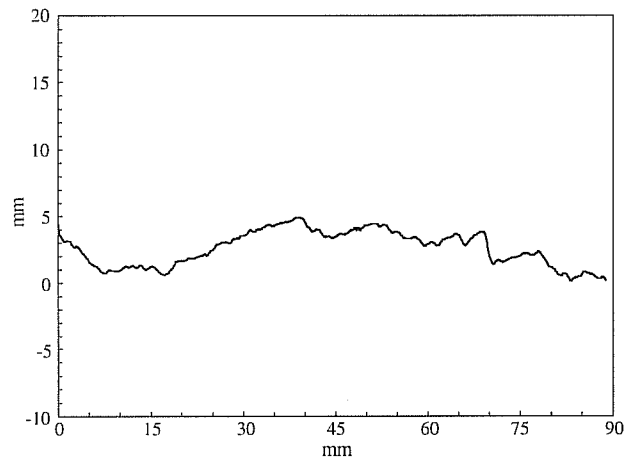


Figura 6.32: Profilo di una sezione di un provino rilevata con il laser [92].

esplorare le superfici lungo una serie di profili paralleli. Un meccanismo servocontrollato manovra il profilometro lungo una guida orizzontale (in direzione X) attraverso una cinghia di trascinamento, mentre un sistema di acquisizione dati, automatizzato e controllato da un computer, legge le elevazioni del profilo (coordinata Z) a ciascun passo, con una precisione verticale di ± 0.01 mm. I profili sono stati discretizzati con un intervallo orizzontale uguale a 0.2 mm, fornendo quindi 500 punti per un profilo di lunghezza 10 cm. Il sistema può essere considerato come un dispositivo semi-automatico (Figura 6.31), poichè l'incremento nella direzione della coordinata Y è ottenuto attraverso una vite micrometrica controllata da un trasduttore con una sensibilità di 0.01 mm. I profili sono stati digitalizzati lungo due direzioni orizzontali principali, in modo da mediare gli effetti indesiderati di una eventuale correlazione. In figura 6.32 è riportato un profilo della superficie di frattura rilevato con il sistema descritto.

Sono stati analizzati almeno 70 profili, per i differenti provini relativi alla prima serie. Sono inoltre stati implementati quattro metodi numerici ed applicati ai profili digitalizzati per estrarre la dimensione frattale (metodo del divisore, di Minkowski-Bouligand, statistico e del box counting) [92].

Mediando i risultati ottenuti dai quattro metodi per la valutazione della dimensione frattale D , si è ottenuto per D il seguente risultato:

$$D = 2.12 \div 2.36. \quad (6.48)$$

L'incremento dimensionale d_G è pertanto compreso fra 0.12 e 0.36. L'estremo superiore risulta quindi in ottimo accordo con la pendenza del diagramma bilogarithmico che rappresenta l'energia di frattura in funzione della dimensione (Figura 6.23). In quella sede è stato infatti determinato un incremento dimensionale d_G pari a 0.38. Ciò conferma la validità dell'approccio frattale nella descrizione della fenomenologia della frattura in materiali disordinati, ed in particolare, dell'effetto scala sull'energia di frattura.

6.7 Conclusioni

L'abbondante letteratura sull'effetto di scala sulla resistenza nominale a trazione e sull'energia di frattura, così come le teorie frattali recentemente introdotte, indicherebbero la necessità di un drammatico cambiamento del quadro concettuale e dello stesso modo di pensare, qualora si vogliano determinare parametri costanti riguardanti la resistenza dei materiali o la meccanica della frattura. Ciò significa che si deve rinunciare a considerare aree di riferimento ideali quando si esaminino la resistenza a trazione e l'energia di frattura di materiali disordinati con una microstruttura frattale. I cosiddetti materiali omogenei (a scala macroscopica o mesoscopica) presentano, d'altra parte, una deviazione molto piccola dal caso ideale. Solo alla scala microscopica essi possono presentare un certo livello di frattalità [93]. Per i calcestruzzi e le rocce, per cui il micro ed il mesolivello coincidono con il livello strutturale, la resistenza a trazione è data da una forza che agisce su una superficie avente una dimensione frattale minore di 2, come invece l'energia di frattura è rappresentata da una dissipazione su una superficie con dimensione frattale maggiore di 2.

Nel caso della resistenza nominale a trazione il decremento dimensionale rappresenta vacanze autosomiglianti della sezione reagente, dovute a pori, vuoti, difetti, fessure, aggregati, inclusioni, ecc. Similmente, nel caso dell'energia di frattura, l'incremento dimensionale rappresenta tortuosità autosomiglianti della superficie di frattura, dovute ad aggregati e inclusioni, come pure a sovrapposizioni e distribuzioni di fessure autosomiglianti anche in direzione ortogonale a quella della macrofessura in formazione [72].

Per quanto concerne il decremento dimensionale d_σ e l'incremento dimensionale d_G , sperimentalmente essi appaiono sempre compresi nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$. Il decremento dimensionale d_σ tende al limite della LEFM, $\frac{1}{2}$, solo per materiali estremamente fragili e disordinati (distribuzione dimensionale di autosomiglianza, Capitolo 4) ed è connesso con il parametro di Weibull m , nel caso di similitudine piana [15]: $d_\sigma = \frac{2}{m}$ oppure nel caso di similitudine tridimensionale: $d_\sigma = \frac{4}{m}$.

Anche l'incremento dimensionale d_G tende allo stesso limite $\frac{1}{2}$ per materiali estremamente fragili e disordinati. La spiegazione di questo secondo limite è fornita dall'Analisi Dimensionale. Una generalizzazione del *numero di fragilità*, definito dall'equazione (2.39), può essere la seguente [35-38]:

$$s_E^* = \frac{\mathcal{G}_F^*}{\sigma_N^* d^{(1-d_\sigma-d_G)}}. \quad (6.49)$$

Se si ammette che sia assurda un'inversione dei significati fisici di tenacità e resistenza, allora l'esponente della dimensione lineare caratteristica d deve essere positivo:

$$d_\sigma + d_G < 1. \quad (6.50)$$

La somma del decremento dimensionale (per la sezione reagente del materiale) e dell'incremento dimensionale (per la superficie di frattura) deve pertanto essere minore dell'unità. D'altra parte, quando, per materiali molto disordinati, si ha $d_\sigma \simeq \frac{1}{2}$, il limite superiore dell'equazione (6.50) diventa: $d_G \lesssim \frac{1}{2}$.

Le interpretazioni frattali precedenti possono essere considerate da alcuni come pure astrazioni matematiche, se non addirittura distorsioni della realtà. La verità è che sia i domini geometrici classici che le geometrie frattali sono idealizzazioni della realtà. La domanda a cui si dovrebbe rispondere è la seguente: quale modello è più vicino alla reale traiettoria della frattura in un provino di calcestruzzo: una linea retta o la curva di von Koch? Naturalmente la seconda, anche se la natura frattale della traiettoria della frattura è statistica e valida esclusivamente in un intervallo di scala limitato. Ciò significa che, per scale dimensionali che tendono all'infinito, o, in altre parole, per provini molto grandi, la resistenza a trazione σ_N e l'energia di frattura \mathcal{G}_F possono apparire costanti al variare della dimensione del provino [94, 95], mentre, per scale dimensionali ove valgono autosomiglianze statistiche, le cosiddette *proprietà universali* del sistema $(\sigma_N^*, \mathcal{G}_F^*)$ risultano essere costanti, sebbene esse siano rappresentate da quantità fisiche con dimensioni inusuali. In questo capitolo è stata presentata infine la cosiddetta procedura di *rinormalizzazione*, cioè la determinazione di quantità fisiche che siano invarianti al variare della scala delle lunghezze [39, 89].

Capitolo 7

Legge di scala multifrattale

7.1 Introduzione

Per scale dimensionali che tendono ad infinito, o, in altre parole, per provini molto grandi, la resistenza nominale a trazione appare costante, mentre, per scale dimensionali dove è verificata l'ipotesi di *autosomiglianza statistica*, cioè alla microscala, la resistenza nominale a trazione aumenta al diminuire della dimensione strutturale. Questo fenomeno è ben noto e può essere parzialmente spiegato mediante gli approcci di Griffith [10] e Weibull [7]. Usualmente le indagini sperimentali non superano un ordine di grandezza per l'intervallo di scala. In questi casi, che oltretutto sono molto frequenti, è possibile determinare un'unica pendenza tangenziale nel diagramma bilogaritmico della resistenza in funzione della dimensione, come visto al Capitolo precedente [2]. Soltanto considerando variazioni di scala su più ordini di grandezza, può essere evidenziata la transizione da un regime disordinato ad uno ordinato e può apparire una variazione continua dalla pendenza $-\frac{1}{2}$ a zero [4-6, 12].

Nella realtà fisica, la sezione resistente al carico di picco può essere considerata come un multifrattale [11, 82], di dimensione 1.5 alle piccole scale, e di dimensione 2 alle grandi scale. Ciò significa che, alle piccole scale, è prevalente una distribuzione autosomigliante di fessure alla Griffith, mentre, alle grandi scale, il disordine non è visibile, essendo limitata la dimensione dei difetti e delle eterogeneità. Appare allora evidente una transizione dall'estremo *disordine* (pendenza $-\frac{1}{2}$) all'estremo *ordine* (pendenza nulla) nel diagramma bilogaritmico resistenza-dimensione. La pendenza uguale a $-\frac{1}{2}$, pertanto, non può essere considerata come un comportamento universale sull'intero intervallo dimensionale delle strutture non pre-intagliate.

L'assunzione di multifrattalità per la microstruttura del materiale danneggiato rappresenta la base per la cosiddetta *legge di scala multifrattale* (MFSL). Questa legge consiste in un metodo di approssimazione che impone la concavità della curva biloga-

ritmica verso l'alto, in contrasto con la legge dell'effetto dimensionale di Bažant (SEL).

La legge di Bažant (SEL), ottenuta per provini pre-intagliati ed assumendo una lunghezza dell'intaglio proporzionale alla dimensione della struttura, considera di contro valida l'ipotesi di autosomiglianza a tutte le scale, a meno di quelle più piccole. Sotto queste ipotesi il collasso avviene per flusso plastico alle piccole dimensioni e per propagazione della fessura alle grandi. In particolare, per alcune geometrie di prova, ad esempio la prova di *splitting*, per le quali è già stata evidenziata l'inadeguatezza della SEL, la MFSL dimostra invece descrivere l'andamento in modo soddisfacente.

Secondo la MFSL, la resistenza nominale tende all'infinito quando la dimensione tende a zero (come per i filamenti di vetro di Griffith), ed invece tende ad un valore costante relativamente basso quando la dimensione tende all'infinito (si vedano ad esempio le navi Liberty).

7.2 Legge dell'effetto dimensionale

Un effetto dimensionale ben noto sulla capacità portante si può ottenere applicando semplicemente l'Analisi Dimensionale agli usuali parametri che regolano la Meccanica della Frattura Elastica Lineare [96]. La disparità dimensionale tra la tensione di trazione ($[F][L]^{-2}$) ed il fattore di intensificazione degli sforzi ($[F][L]^{-\frac{3}{2}}$) determina nel diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione strutturale, una pendenza costante ed uguale a -0.5 (Figura 7.1).

Si è dimostrato come questa situazione corrisponda alla condizione limite di estremo disordine (parametro N che tende a 2 come ottenuto al Capitolo 4), e non può essere considerata come un comportamento universale sull'intero intervallo dimensionale di strutture prive di fessure iniziali.

Nel 1984 Bažant [9] ha proposto una legge dell'effetto dimensionale (SEL), dall'inglese Size Effect Law, riportata in forma logaritmica in Figura 7.2, secondo la quale i concetti della Meccanica della Frattura Elastica Lineare e dell'Analisi Limite sono composti in modo da ottenere la seguente forma:

$$\sigma_N = \frac{B f_t}{\left(1 + \frac{d}{\lambda_0 d_{max}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (7.1)$$

ove con σ_N si indica la resistenza nominale a trazione, con d una dimensione caratteristica del saggio, con f_t un parametro di resistenza (che può essere la resistenza a trazione diretta), con B e λ_0 due costanti empiriche, che possono essere determinate attraverso un'approssimazione dei risultati relativi a provini geometricamente simili di varie dimensioni, ed infine con d_{max} la dimensione massima dell'inerte. Per ottenere la SEL, Bažant ha assunto che l'energia potenziale totale, rilasciata a causa della presenza di una fessura, risulti proporzionale al quadrato della lunghezza della fessura a ,

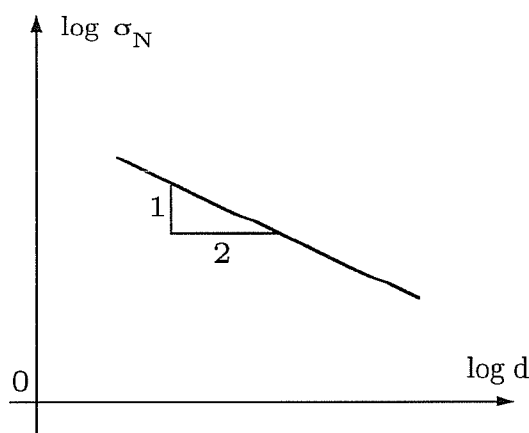


Figura 7.1: Effetto scala sulla resistenza secondo la Meccanica della Frattura Elastica Lineare.

che egli scala proporzionalmente alla dimensione del provino ($a/d = \text{costante}$), mentre la dissipazione di energia risulti proporzionale ad a , avendo assunto lo spessore della banda della fessura (*crack band*) costante e proporzionale al diametro massimo dell'inerte (nd_{max}). Numerose analisi condotte utilizzando il modello della fessura fittizia di Hillerborg [32] hanno confermato la SEL di Bažant. Poichè effetti di scala sono presenti anche in elementi senza fessure iniziali, la SEL di Bažant è stata estesa anche a geometrie senza intaglio.

Numerosi risultati sperimentali, invece, indicano che anche gli elementi strutturali più grandi, se privi di fessure iniziali, resistono alle tensioni, al contrario di quanto previsto dalla SEL, mentre filamenti molto sottili (ad esempio i cristalli whisker) presentano una resistenza molto elevata. Pertanto, sulla base di questa evidenza sperimentale, sono state fornite nella recente letteratura, alcune proposte di modifica alla legge dell'effetto dimensionale di Bažant, limitatamente peraltro alle grandi dimensioni.

Brühwiler ed al. [97] hanno osservato come l'effetto di d_{max} sul comportamento in scala del calcestruzzo non corrisponda con quanto predetto dalla SEL. Tang ed al. [94] hanno evidenziato un punto debole della SEL, esaminandone l'ipotesi di base. Infatti Bažant ha ottenuto la sua formulazione esclusivamente per provini intagliati e supponendo una lunghezza dell'intaglio proporzionale alla dimensione della struttura (Figura 7.3). Quando si applica la SEL a provini senza intaglio, la suddetta ipotesi non ha più valore. Infatti, per un materiale disordinato, la dimensione a del difetto

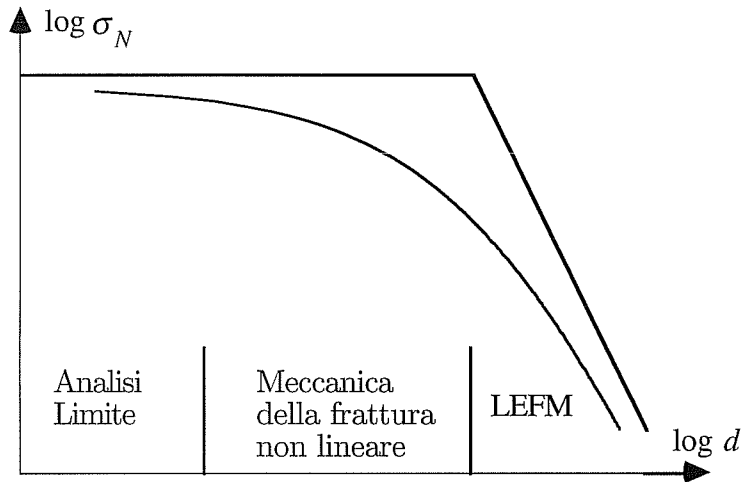


Figura 7.2: Legge dell'effetto dimensionale di Bažant.

caratteristico, responsabile della propagazione della fessura, è indipendente dalla dimensione del provino. D'altra parte, alle piccole scale si ipotizza che il collasso sia di tipo plastico, trascurando l'effetto del disordine, che è invece preponderante.

Questo scostamento dalla realtà conduce ad una errata previsione circa la variazione della resistenza in funzione della dimensione strutturale. Secondo la SEL infatti, per dimensioni grandi la resistenza segue la legge di effetto dimensionale prevista dalla Meccanica della Frattura Elastica Lineare. Questa previsione presuppone l'esistenza di una dimensione strutturale per cui la resistenza risulti nulla (Figura 7.2).

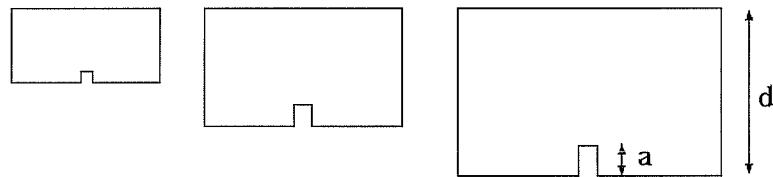


Figura 7.3: Ipotesi di Bažant: $a/d = \text{costante}$.

Kim ed al. [98] hanno considerato l'influenza variabile del difetto caratteristico a , nel caso di provini non fessurati. Essi hanno inserito al posto del parametro λ_0

dell'equazione (7.1), una funzione monotona decrescente del rapporto $\frac{a}{d}$:

$$\sigma_N = \frac{Bf_t}{\left(1 + \frac{d}{f\left(\frac{a}{d}\right) d_{max}}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.2)$$

L'equazione (7.2) fornisce, per provini di calcestruzzo con fessure non provocate artificialmente, una riduzione della resistenza notevolmente più dolce di quella prevista dalla SEL. Sfortunatamente è molto difficile ottenere la funzione $f\left(\frac{a}{d}\right)$. Pertanto è stata proposta una legge di effetto scala modificata da Kim ed Eo [99] e da Bažant ed al. [100] per approssimare i dati sperimentali ottenuti da prove Brasiliane su provini di calcestruzzo, dove l'inadeguatezza della SEL risulta più evidente:

$$\sigma_N = \frac{Bf_t}{\left(1 + \frac{d}{\lambda_0 d_{max}}\right)^{\frac{1}{2}}} + \sigma_0. \quad (7.3)$$

Applicando l'equazione (7.3), si ottiene un valore asintotico diverso da zero, più realistico per la resistenza a trazione.

7.3 Legge di scala multifrattale

Il concetto topologico di *multifrattalità geometrica*, che può essere considerato come un'estensione del concetto di *autoaffinità*, può spiegare le inconsistenze presentate al paragrafo precedente. Alla base della Legge di Scala Multifrattale mostrata in Figura 7.4 (Multifractal Scaling Law) sta la consapevolezza del ruolo decisivo giocato dal disordine della microstruttura nella definizione delle proprietà meccaniche del materiale. Poichè la morfologia microstrutturale di un materiale è ovviamente la stessa, indipendentemente dalla dimensione macroscopica del provino, l'influenza del disordine sulle proprietà del materiale dipende strettamente dal rapporto tra la dimensione delle eterogeneità (granelli, aggregati, fibre, ecc.) e la dimensione macroscopica del provino.

L'analogia topologica che sostiene questo concetto è la cosiddetta multifrattalità geometrica che può essere considerata come un'estensione del concetto di autoaffinità (self-affinity). Un frattale autoaffine [101] è un frattale che mostra una differente legge di scala rispetto a quella di autosomiglianza, nel senso che (statisticamente) la morfologia simile può essere ottenuta se e solo se le lunghezze sono riscalate attraverso fattori dipendenti dalla direzione. Un tale insieme frattale può essere identificato attraverso due differenti valori di dimensione: una *dimensione frattale locale*, nel limite delle scale che tendono a zero, che è il classico esponente di scala non intero,

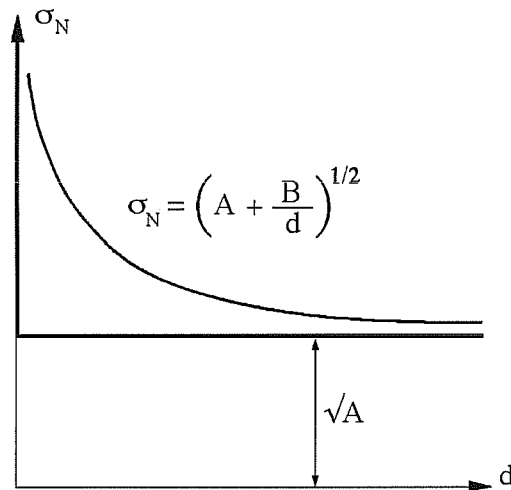


Figura 7.4: Multifractal Scaling Law (diagramma proporzionale).

e una *dimensione frattale globale*, che corrisponde alle scale più grandi, strettamente uguale alla dimensione topologica.

D'altra parte, come mostrato in Figura 7.5, appare più realistico assumere una variazione continua della dimensione frattale al variare della dimensione strutturale (cioè multifrattalità geometrica), che considerare esclusivamente i due valori limite della dimensione frattale [92]. Da un punto di vista fisico, può essere enfatizzata una stretta corrispondenza con questo andamento: *l'effetto del disordine della microstruttura sul comportamento meccanico diventa progressivamente meno importante alle scale più grandi, mentre esso rappresenta le caratteristiche fondamentali alle scale più piccole*.

Se questi risultati geometrici vengono estrapolati al problema meccanico dell'effetto scala, si può dire che, per strutture relativamente grandi (cioè grandi quando comparate alla dimensione caratteristica della microstruttura), la microstruttura disordinata (danneggiata) risulta in qualche modo *omogeneizzata*, cioè, si comporta macroscopicamente come una struttura ordinata. Pertanto l'effetto scala svanisce nel limite della dimensione strutturale d che tende all'infinito, per cui può essere determinata una resistenza asintotica finita.

D'altra parte, per provini relativamente piccoli (cioè piccoli quando comparati alla dimensione caratteristica della microstruttura), l'effetto della microstruttura disordinata diventa più importante e la resistenza aumenta con il diminuire della dimensione,

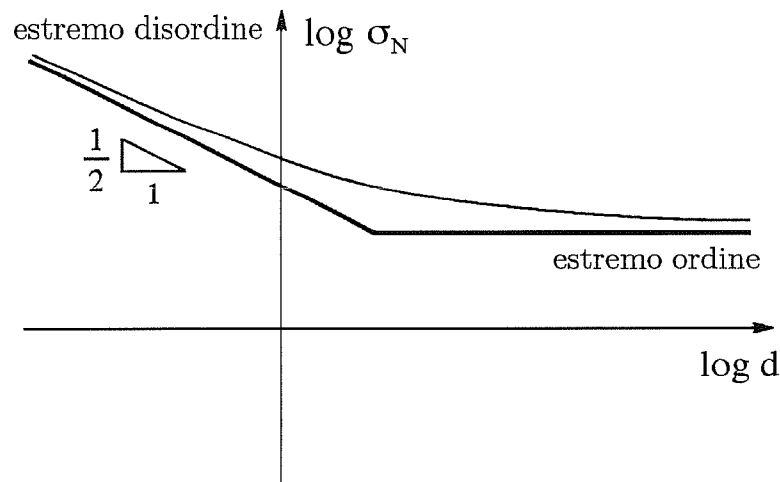


Figura 7.5: Multifractal Scaling Law (diagramma bilogarithmico).

tendendo idealmente ad infinito quando la dimensione tende a zero. Nel diagramma bilogarithmico (Figura 7.5) la pendenza della curva rappresenta il decremento frattale della dimensione fisica della sezione resistente, d_σ , che può essere assunto come una misura dell'influenza del disordine sul comportamento meccanico [12]. Due condizioni limite devono essere soddisfatte: $d_\sigma \rightarrow 0$ per strutture grandi (effetti microstrutturali omogeneizzati) e $d_\sigma \rightarrow 0.5$ per strutture piccole. Quest'ultima situazione corrisponde al più alto grado di disordine, che rappresenta un limite teorico, come mostrato da Carpinteri [4].

L'espressione analitica della Multifractal Scaling Law (MFSL) è la seguente (Figura 7.4):

$$\sigma_N(d) = \left(A + \frac{B}{d} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.4)$$

dove:

σ_N = resistenza nominale a trazione;

d = dimensione strutturale caratteristica;

$A = [[F][L]^{-2}]^2$ = costante con dimensione fisica uguale al quadrato di una tensione;

$B = [[F][L]^{-\frac{3}{2}}]^2$ = costante con dimensione fisica uguale al quadrato di un fattore di intensificazione degli sforzi.

Le due costanti A e B sono determinate attraverso un algoritmo numerico non-lineare ai minimi quadrati, il metodo di Levenberg-Marquardt [102], in modo da ottenere

un'approssimazione dei dati sperimentali. I requisiti fisici richiesti precedentemente sono così rispettati:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \left(A + \frac{B}{d} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}, \quad (7.5)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0^+} \left(A + \frac{B}{d} \right)^{\frac{1}{2}} = +\infty. \quad (7.6)$$

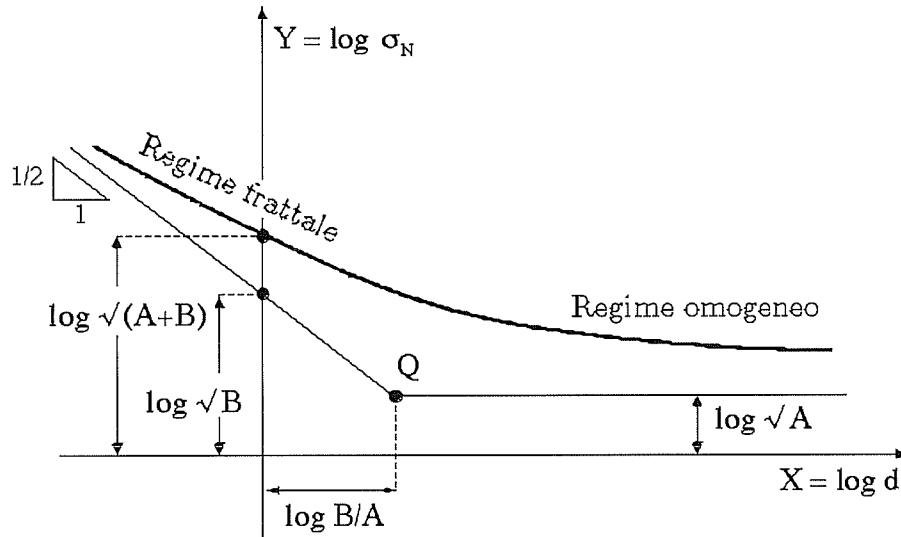


Figura 7.6: Significato fisico dei parametri A e B .

Nel diagramma bilogaritmico mostrato in Figura 7.6 ($X = \log d$; $Y = \log \sigma_N$), l'espressione analitica diventa:

$$Y(X) = \frac{1}{2} \log \left(A + \frac{B}{10^X} \right). \quad (7.7)$$

Gli asintoti nel grafico bilogaritmico presentano significati fisici particolari (Figura 7.6). L'asintoto orizzontale, che corrisponde alle grandi dimensioni (regime *omogeneo*), ha la seguente espressione:

$$H_1(X) = \log \sqrt{A}, \quad (7.8)$$

mentre l'asintoto obliquo, che corrisponde alla dimensione macroscopica d che tende a zero (cioè, $X \rightarrow -\infty$) e governa il regime *disordinato* o *frattale*, ha la seguente espressione:

$$H_2(X) = -\frac{1}{2}X + \log \sqrt{B}. \quad (7.9)$$

Si vuole a questo punto enfatizzare la differenza fondamentale della MFSL rispetto alla SEL di Bažant, per cui le ipotesi fisiche sono concettualmente le opposte. In quel caso, infatti, si raggiunge un valore della resistenza asintotico e costante per dimensioni che tendono a zero, per cui il meccanismo di rottura si suppone governato dall'Analisi Limite, mentre nella MFSL, l'Analisi Limite entra in gioco soltanto in corrispondenza del regime omogeneo, quando la microstruttura disordinata è stata omogeneizzata alle scale più grandi.

D'altra parte, secondo la MFSL, si suppone che il meccanismo di collasso di un materiale senza intagli sia governato dalla Meccanica della Frattura Elastica Lineare quando la dimensione macroscopica tende a zero o, che è lo stesso, quando il disordine entra in gioco in modo essenziale. Così, quando la dimensione strutturale progressivamente decresce, il comportamento meccanico (Figura 7.5) tende ad un asintoto obliquo (regime *disordinato* o *frattale*) controllato dal parametro B , le cui dimensioni sono, significativamente, quelle di un fattore di intensificazione degli sforzi elevato al quadrato. Inoltre, quando la dimensione strutturale d tende a zero, la pendenza del diagramma bilogarithmico tende a -0.5 , che rappresenta l'effetto di scala della LEFM semplicemente ottenuto dall'Analisi Dimensionale. Il modo di collasso di Griffith, governato da una potenza della singolarità tensionale pari a 0.5 , diventa il principale meccanismo di collasso solo al limite in cui la dimensione macroscopica d tende a zero. Da questo punto di vista, la MFSL rappresenta un'ideale prosecuzione del pionieristico lavoro di Griffith [10], dove era stata considerata la resistenza di filamenti di vetro sorprendentemente alta se comparata con quella dei provini di vetro di dimensioni normali.

Il punto Q (Figura 7.6) è l'intersezione dei due asintoti e la sua coordinata orizzontale è data da:

$$X_Q = \log \frac{B}{A}, \quad (7.10)$$

dove la dimensione della quantità B/A è una lunghezza. Il punto Q idealmente separa il regime *disordinato* da quello (*ordinato*) omogeneo. Sembra naturale associare questa quantità con la lunghezza caratteristica microstrutturale, proporzionale alla massima dimensione dell'aggregato d_{max} :

$$l_{ch} = \frac{B}{A} = \alpha d_{max}. \quad (7.11)$$

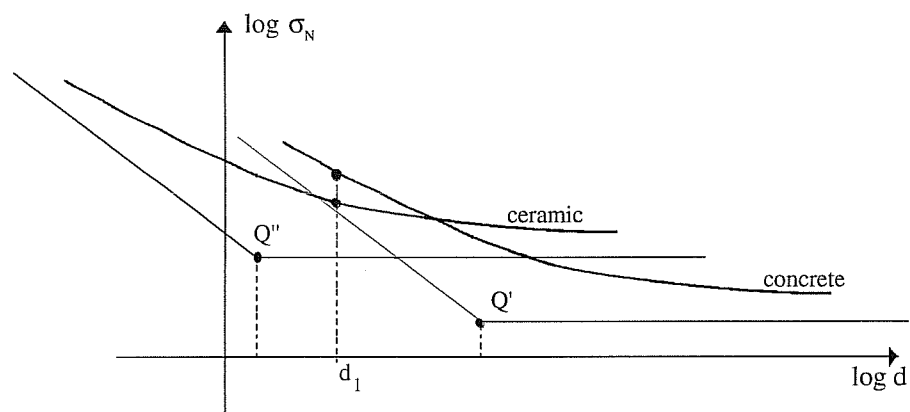


Figura 7.7: Multifractal Scaling Law per due differenti microstrutture di materiali.

È ragionevole supporre che, per materiali con grani più fini (rocce, ceramiche, metalli) questo valore potrebbe essere considerevolmente più piccolo che nel caso del calcestruzzo, così da traslare la MFSL orizzontalmente verso sinistra nel diagramma bilogarithmico. Assegnando una dimensione particolare d_1 , per esempio, un provino di calcestruzzo di detta dimensione potrebbe comportarsi secondo il regime disordinato frattale, mentre un provino di vetro o di ceramica della stessa dimensione potrebbe essere posizionato nella parte (quasi) orizzontale (Figura 7.7), mostrando così un comportamento macroscopicamente omogeneo.

L'intervallo dell'effetto scala pronunciato, corrispondente al regime frattale, può quindi essere individuato caso per caso per ciascun materiale o, più precisamente, per ciascuna microstruttura. Questo spiega perchè, in materiali quali i metalli, l'effetto scala sulla resistenza non è osservato, in assenza di fessure iniziali, alle usuali dimensioni strutturali. Per chiarire il significato fisico dei vari termini, l'equazione (7.4) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\sigma_N(d) = f_t \left(1 + \frac{l_{ch}}{d} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.12)$$

dove il termine non-dimensionale in parentesi rappresenta la deviazione positiva, dovuta al disordine, dalla resistenza nominale limite f_t , valida per strutture infinitamente grandi. In questo caso l_{ch} e f_t rappresentano i due parametri costanti che devono essere determinati attraverso l'approssimazione dei dati sperimentali.

7.4 Linearizzazione della legge multifrattale

L'applicazione della legge di scala multifrattale ad una serie di risultati sperimentali necessita dell'utilizzo di un algoritmo per il best-fitting non lineare. Un modo alternativo e più semplice per la determinazione delle costanti della MFSL può essere quello di ottenere un'espressione lineare, riferendosi però a coordinate modificate. Riportando i dati sperimentali nel nuovo piano è possibile già graficamente verificare con quale grado di precisione la MFSL possa descrivere la variazione della resistenza. Infatti in questo piano i punti rappresentativi tendono ad allinearsi.

Elevando al quadrato la (7.4) si ottiene:

$$\sigma_N^2 = \left(A + \frac{B}{d} \right). \quad (7.13)$$

Ponendo $Y^* = \sigma_N^2$ e $X^* = \frac{1}{d}$ si ottiene la seguente legge, che rappresenta la versione lineare della MFSL nel piano $X^* Y^*$:

$$Y^* = A + BX^*, \quad (7.14)$$

dove A e B sono le stesse costanti della espressione non lineare.

Anche la SEL può essere linearizzata ma su un piano $\overline{X} \overline{Y}$ differente. Da un punto di vista matematico, risulta più conveniente riscrivere la SEL nel seguente modo:

$$\sigma_N = \frac{A}{(B + d)^{\frac{1}{2}}}. \quad (7.15)$$

Elevando al quadrato la (7.15) e considerando i reciproci, si ottiene:

$$\frac{1}{\sigma_N^2} = \frac{1}{A^2} (B + d). \quad (7.16)$$

Ponendo $\overline{Y} = \frac{1}{\sigma_N^2}$ e $\overline{X} = d$, si ottiene la seguente legge che rappresenta la linearizzazione della SEL nel piano $\overline{X} \overline{Y}$:

$$\overline{Y} = C + D\overline{X}, \quad (7.17)$$

dove $C = \frac{B}{A^2}$ e $D = \frac{1}{A^2}$. Determinati mediante una regressione lineare i valori di C e D , i parametri della SEL saranno quindi dati da: $A = \frac{1}{\sqrt{D}}$ e $B = \frac{C}{D}$. Nel paragrafo successivo si analizzano i risultati di alcune fra le più significative prove sperimentali sugli effetti scala e si confronta l'andamento della MFSL con quello della SEL. Viene inoltre effettuato un confronto fra le due leggi linearizzate. Dal punto di vista numerico i coefficienti della MFSL, ottenuti mediante regressione lineare nel piano $X^* Y^*$, si discostano da quelli ottenuti con il best-fitting non lineare molto meno che non quelli relativi alla SEL.

7.5 Applicazione della legge multifrattale a provini di differenti geometrie

La legge di scala multifrattale, porposta nei paragrafi precedenti, viene ora utilizzata per analizzare gli effetti scala su alcune fra le più significative prove sperimentali reperite in letteratura. I risultati presentati riguardano prove a trazione diretta o indiretta condotte su provini di differenti geometrie, tutte caratterizzate dalla assenza di intaglio iniziale e con un intervallo dimensionale maggiore o uguale ad un ordine di grandezza.

Prova a trazione indiretta (splitting)

La prima geometria analizzata è costituita dalla prova a trazione indiretta (splitting), illustrata al Capitolo 3, condotta da Hasegawa, Shioya and Okada [103]. Tali prove sono state eseguite su un intervallo dimensionale pari a **1:30**. Sono stati utilizzati provini con uno spessore costante di 500 mm e con un diametro massimo dell'inerte del calcestruzzo di 25 mm. La resistenza media a compressione, calcolata su cilindri di diametro 100 mm e altezza 200 mm, è risultata uguale a 23.4 MPa. La resistenza nominale a trazione è stata definita in accordo alla tensione principale massima fornita dalla Teoria dell'Elasticità:

$$\sigma_N = \frac{2P_u}{\pi b d}, \quad (7.18)$$

dove P_u è il carico di rottura, mentre b e d sono rispettivamente lo spessore ed il diametro del provino.

I valori delle costanti della MFSL sono i seguenti: $A=2.09 \text{ MPa}^2$ e $B=416.30 \text{ MPa}^2\text{mm}$. L'asintoto orizzontale per $d \rightarrow \infty$ è dato da $f_t = \sqrt{A} = 1.45 \text{ MPa}$. Approssimando i risultati sperimentali, la MFSL fornisce un coefficiente di correlazione $R=0.966$, mentre dalla SEL si ricava un valore $R=0.663$. Il rapporto B/A rappresenta una lunghezza caratteristica l_{ch} uguale a 199.2 mm e fornisce il seguente rapporto adimensionale $l_{ch}/d_{max}=7.96$.

Nelle Figure 7.8 e 7.9 sono riportate le due leggi di scala nel piano $\sigma_N - d$, mentre in Figura 7.10 sono state sovrapposte nel piano bilogaritmico. Dalla sovrapposizione delle due leggi si evince come i risultati sperimentali seguano un andamento opposto a quello previsto dalla SEL. Nelle Figure 7.11 e 7.12 sono presentate le versioni lineari rispettivamente della MFSL e della SEL nei due differenti piani. Le figure successive mostrano infine come la linearizzazione della MFSL costituisca una ottima approssimazione del fitting non lineare (Figura 7.13), mentre non altrettanto può dirsi della SEL (Figura 7.14).

La seconda prova di splitting (Figura 7.15) presa in considerazione è stata realiz-

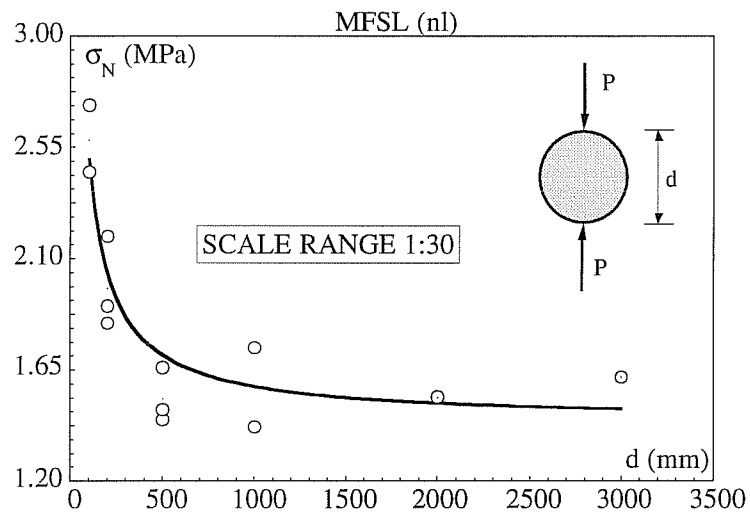


Figura 7.8: Legge di scala multifrattale nel piano $\sigma_N - d$ per le prove di splitting di Hasegawa et al. [103] (fitting non lineare).

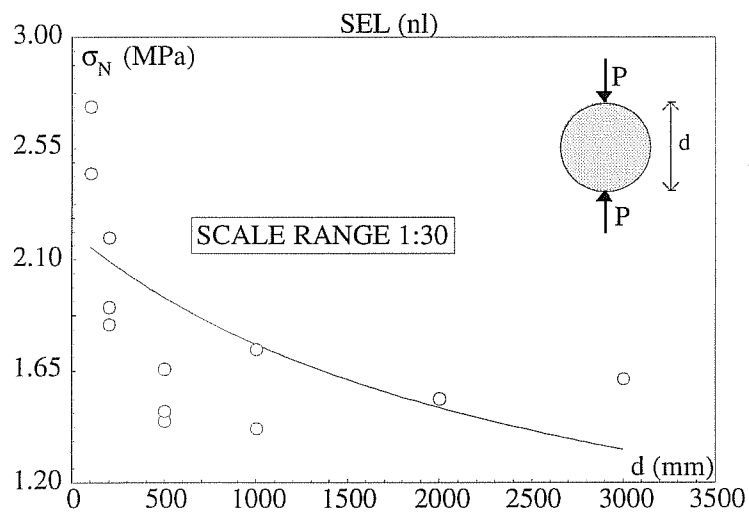


Figura 7.9: Size effect law nel piano $\sigma_N - d$ per le prove di splitting di Hasegawa et al. [103] (fitting non lineare).

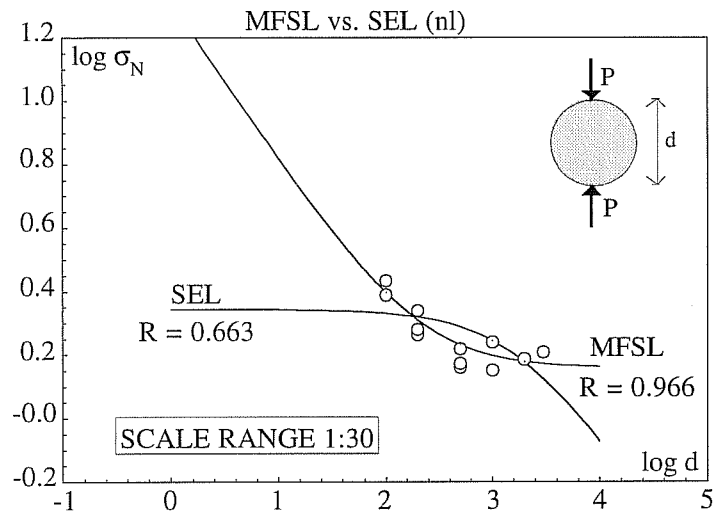


Figura 7.10: Confronto tra MFSL e SEL nel piano $\ln \sigma_N - \ln d$ per le prove di splitting di Hasegawa et al. [103] (fitting non lineare).

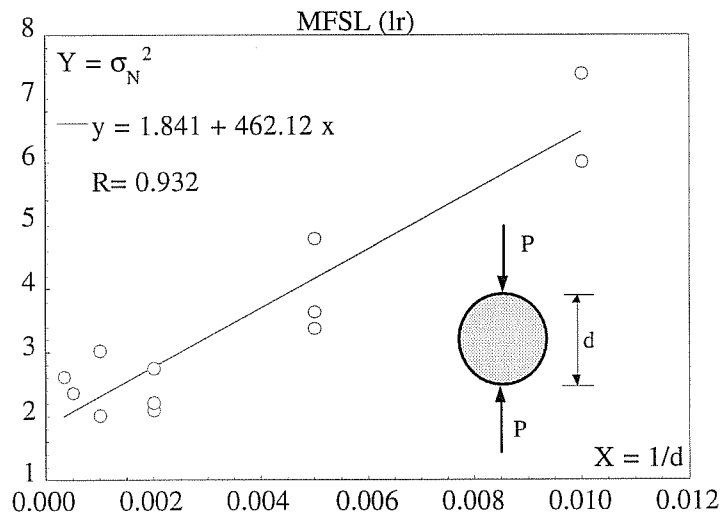


Figura 7.11: MFSL per le prove di splitting di Hasegawa et al. [103] (fitting lineare).

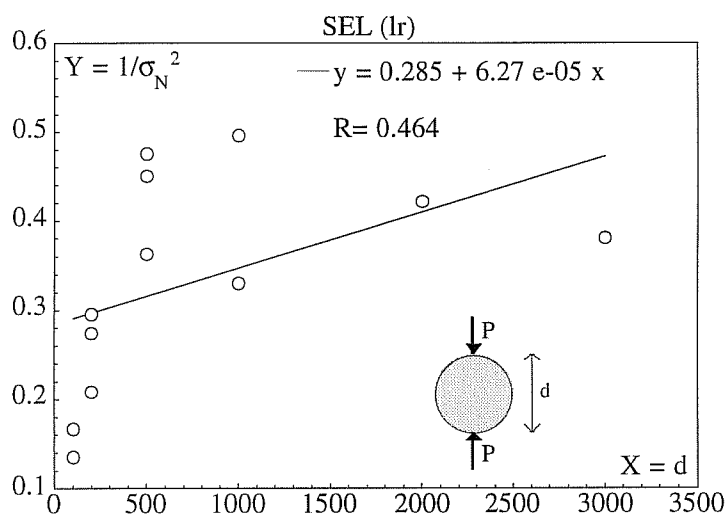


Figura 7.12: SEL per le prove di splitting di Hasegawa et al. [103] (fitting lineare).

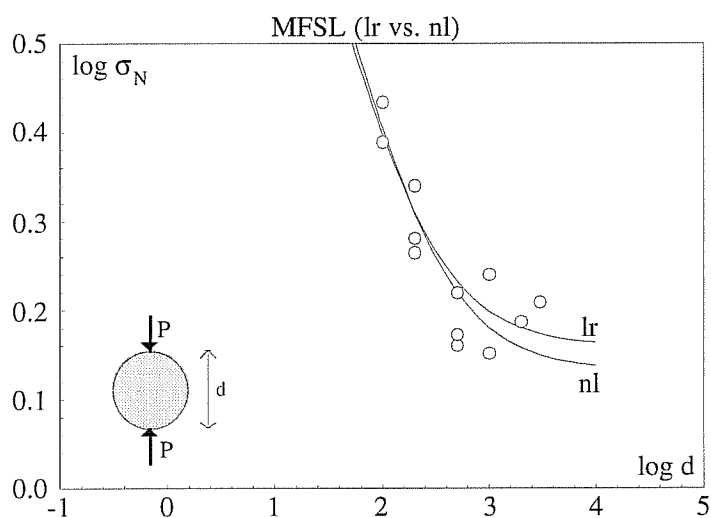


Figura 7.13: Confronto fra il fitting lineare e quello non lineare della MFSL per le prove di splitting di Hasegawa et al. [103].

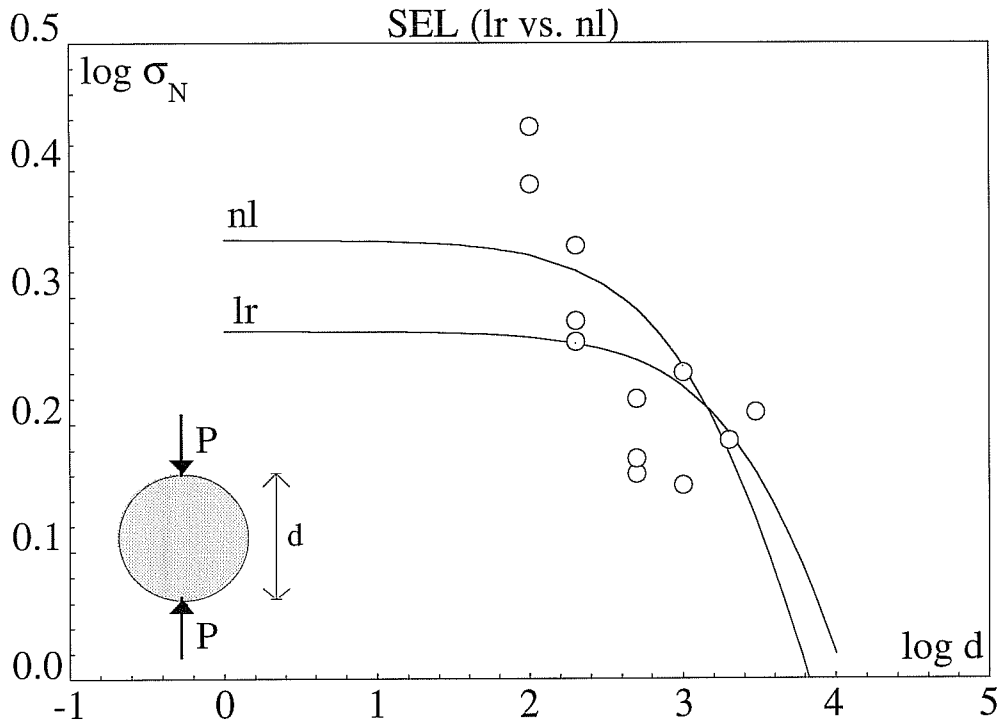


Figura 7.14: Confronto fra il fitting lineare e quello non lineare della SEL per le prove di splitting di Hasegawa et al. [103].

zata alla Northwestern University [100]. Tale prova è stata condotta su un intervallo dimensionale di 1:26, con diametri dei cilindri rispettivamente uguali a $d=19, 38, 76, 152, 254$ e 508 mm. È stato utilizzato uno spessore per tutti i cilindri (ovvero la lunghezza del cilindro) di $b=51$ mm. Tutti i saggi sono stati ottenuti da un unico getto di microcalcestruzzo, con dimensione massima dell'inerte di $d_{max}=5$ mm. Sono state adottate proporzioni nella composizione del calcestruzzo di 1:2:4 (per peso). La resistenza a compressione f_c è stata misurata su cilindri campione di 76 mm di diametro e 152 mm di altezza, ottenuti da un unico getto, che hanno fornito un valore di 51.4 MPa. I valori della resistenza nominale, ricavati dai valori del carico massimo, sono riportati in Figura 7.15. Il fitting della MFSL fornisce i seguenti valori: $A = 22.84$ MPa² e $B = 559.50$ MPa²mm. L'ordinata dell'asintoto orizzontale è $f_t = \sqrt{A} = 4.80$

MPa ed è circa uguale ad un decimo della resistenza a compressione f_c . Il coefficiente di correlazione R è uguale a 0.872 per la MFSL e 0.570 per la SEL. Il rapporto B/A fornisce una lunghezza interna l_{ch} uguale a 24.5 mm ed il rapporto adimensionale $l_{ch}/d_{max} = 4.9$.

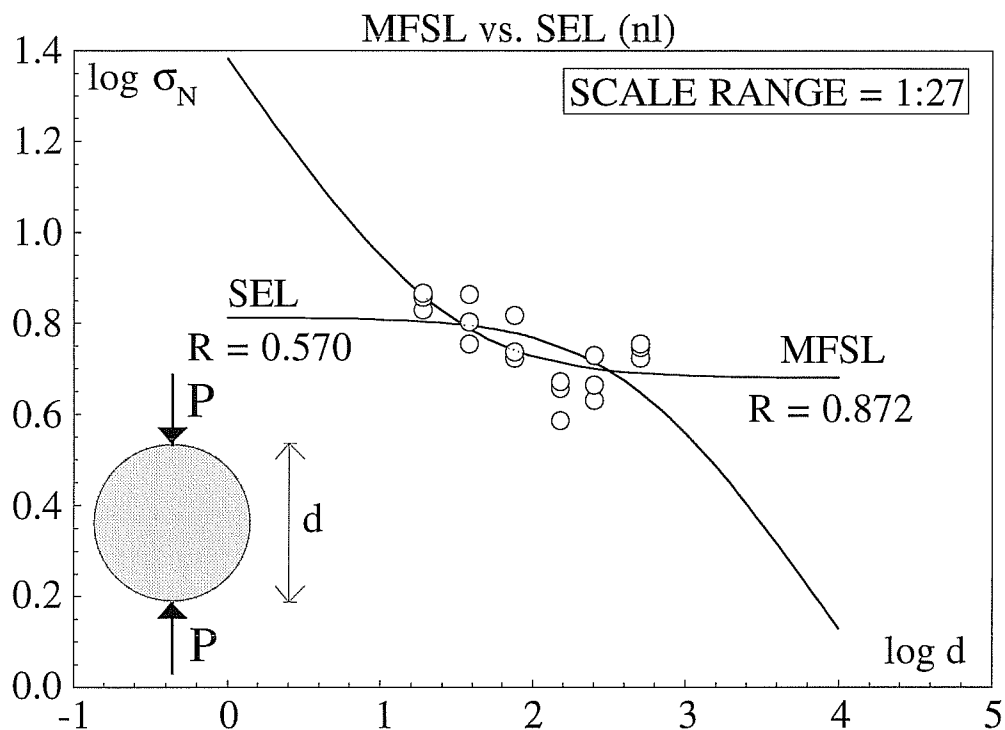


Figura 7.15: Confronto fra la MFSL e la SEL per le prove di splitting di Bažant et al. [100].

Prova di doppio punzonamento

La seconda geometria che viene analizzata riguarda le prove di doppio punzonamento (dall'inglese *double-punch tests*) realizzate da Marti [104] in due differenti serie (Figura 7.16) rispettivamente di 23 e 19 provini, ciascuna serie essendo stata ottenuta da un unico getto di calcestruzzo. La dimensione rappresentativa d (costituita dal diametro

della base del cilindro) è compresa tra 76 e 610 mm per la prima serie (intervallo dimensionale **1:8**) e tra 76 e 1219 mm per la seconda serie (intervallo dimensionale **1:16**). Il diametro massimo degli inerti per il confezionamento del calcestruzzo è stato di 10 mm. Le resistenze a compressione medie, determinate mediante prove su cilindri, sono risultate pari a 33.3 e 23.6 MPa rispettivamente, per la serie 1 e 2. La resistenza nominale è stata ottenuta dalla seguente formula:

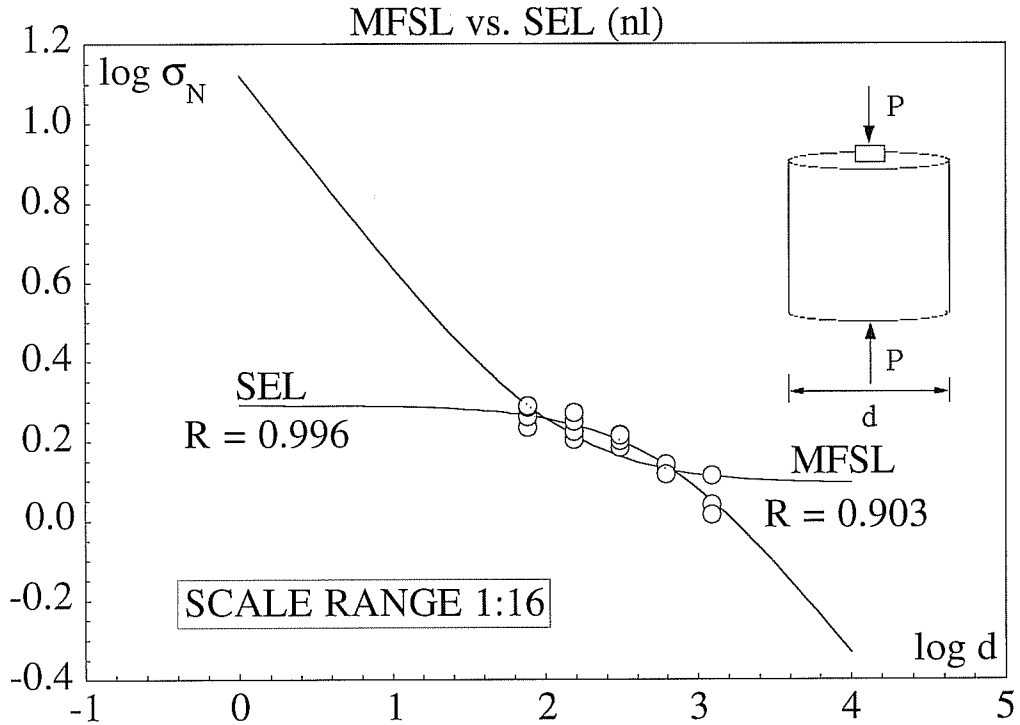


Figura 7.16: Confronto fra la MFSL e la SEL per le prove a doppio punzonamento di Marti [104].

$$\sigma_N = 0.4 \frac{P_u}{d^2}, \quad (7.19)$$

ove P_u è il carico di rottura, e d il diametro del saggio. I valori della tensione nominale per la seconda serie, più significativa perchè realizzata in un intervallo dimensionale

maggiore di un ordine di grandezza, sono riportati in Figura 7.16. Per la prima serie il fitting della MFSL fornisce i seguenti valori: $A=2.65 \text{ MPa}^2$ e $B =282.89 \text{ MPa}^2\text{mm}$. L'asintoto orizzontale per $d \rightarrow \infty$ è dato da $f_t = \sqrt{A} = 1.63 \text{ MPa}$. Il coefficiente di correlazione R è uguale a 0.906 per la MFSL e a 0.989 per la SEL. Per la seconda serie il fitting della MFSL fornisce i seguenti valori: $A=1.54 \text{ MPa}^2$ e $B =173.33 \text{ MPa}^2\text{mm}$. L'asintoto orizzontale per $d \rightarrow \infty$ è dato da $f_t = \sqrt{A} = 1.24 \text{ MPa}$. Il coefficiente di correlazione R è uguale a 0.903 per la MFSL e a 0.996 per la SEL. Per la prima serie il rapporto B/A dà una lunghezza interna l_{ch} uguale a 106.75 mm e un rapporto adimensionale $l_{ch}/d_{max}=10.6$. Per la seconda serie il rapporto B/A fornisce una lunghezza interna l_{ch} uguale a 112.7 mm e un rapporto adimensionale $l_{ch}/d_{max}=11.27$.

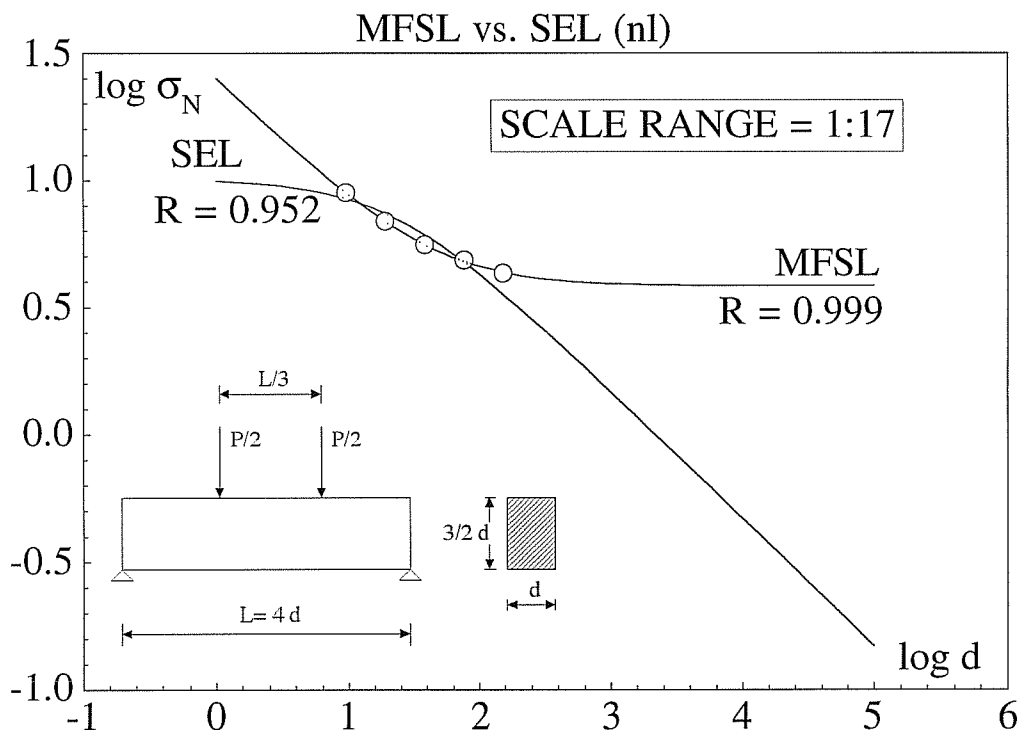


Figura 7.17: Confronto fra la MFSL e la SEL per le prove a flessione su quattro punti di Sabnis e Mirza [105].

Prova di trazione indiretta a flessione

La terza geometria che viene analizzata riguarda la *prova a flessione su quattro punti* eseguita da Sabnis e Mirza [105] per provini non intagliati (Figura 7.17). L'intervallo dimensionale di queste prove è **1:17**. I provini avevano una sezione trasversale variabile da 6 mm x 9 mm a 100 mm x 150 mm. Ciascuna trave presentava una luce pari a quattro volte l'altezza. Per calcolare la tensione in corrispondenza della fibra estrema è stata utilizzata la teoria convenzionale della flessione:

$$\sigma_N = \frac{8P_u}{9d^2} \quad (7.20)$$

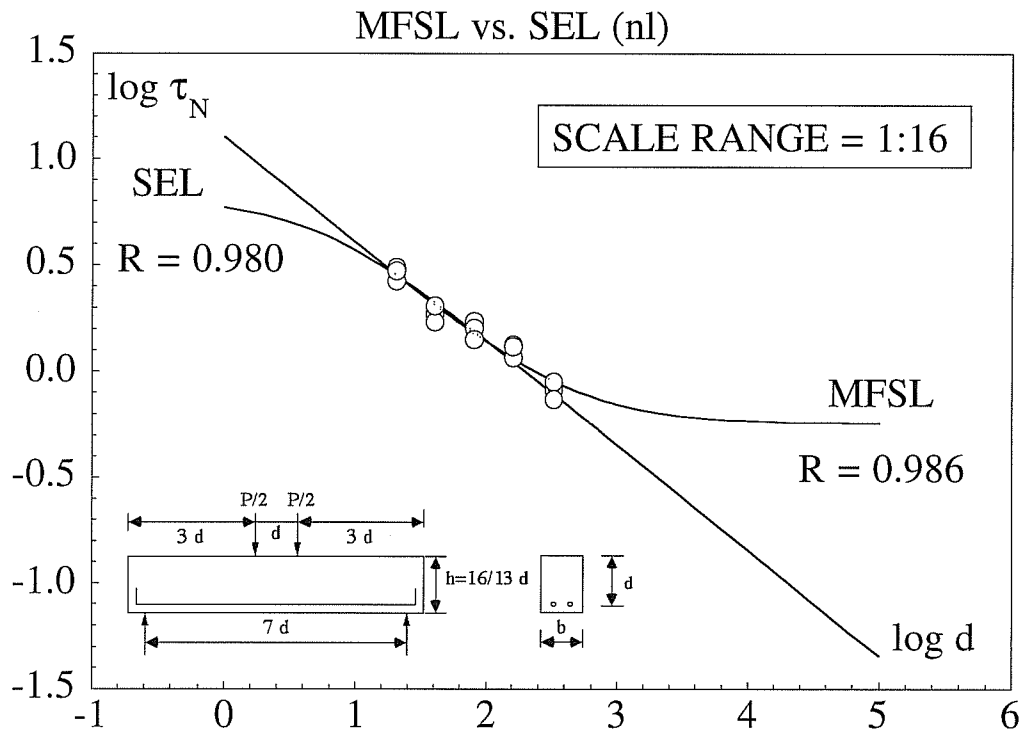


Figura 7.18: Confronto fra la MFSL e la SEL per le prove di taglio di Bažant e Kazemi [106].

I valori dei parametri A and B sono i seguenti: $A = 14.67 \text{ MPa}^2$ e $B = 616.31$

MPa²mm. La radice quadrata del parametro A rappresenta il valore asintotico della resistenza nominale per $d \rightarrow \infty$. In questo caso si ottiene $f_t = \sqrt{A} = 3.830$ MPa ed il parametro $l_{ch} = B/A = 42.02$ mm. Il coefficiente di correlazione R è uguale a 0.999 per la MFSL e a 0.952 per la SEL. Graficamente appare evidente come i punti rappresentativi nel piano bilogarithmico suggeriscano una curvatura opposta a quella prevista dalla SEL e come, incrementando la dimensione strutturale d , il decremento della resistenza nominale tenda ad attenuarsi. In altre parole, per $d \rightarrow \infty$, la resistenza nominale dovrebbe avere un asintoto orizzontale, come previsto dalla MFSL.

La stessa geometria (Figura 7.18) è stata adottata da Bažant e Kazemi [106] per provini armati e senza intaglio con un'altezza utile delle trave d (d = distanza della faccia compressa dal baricentro dell'armatura tesa) per verificare l'effetto scala sul taglio. L'intervallo dimensionale per queste prove è **1:16**. Sono stati utilizzati provini con spessore costante e pari a $b = 38.1$ mm. La resistenza a compressione del calcestruzzo, $f_c = 46.2$ MPa, è stata misurata su cilindri di 76 mm di diametro e 152 mm di altezza. La resistenza nominale a taglio può essere definita, in base alla teoria dell'elasticità, come:

$$\tau_N = \frac{P_u}{2bd}, \quad (7.21)$$

dove P_u è il carico di rottura, b lo spessore del provino e d l'altezza effettiva della trave.

I parametri A e B della MFSL in questo caso sono rispettivamente uguali a 0.326 MPa² e 158.4 MPa²mm. La resistenza asintotica per $d \rightarrow \infty$ risulta essere $f_t = \sqrt{A} = 0.571$ MPa, mentre la dimensione caratteristica $l_{ch} = \frac{B}{A} = 485.9$ mm e $l_{ch}/d_{max} = 101.23$.

Il fitting è stato condotto, sia per la MFSL che per la SEL, sui valori medi. In questo caso la MFSL fornisce il coefficiente di correlazione 0.986 mentre per la SEL si ottiene il valore $R=0.980$. Dal diagramma è possibile osservare come le due curve presentino approssimativamente lo stesso andamento solo nel range dei risultati sperimentali.

Prova di trazione diretta

L'ultima geometria riguarda le prove a trazione diretta presentate al Capitolo 5. I parametri A e B della MFSL per i valori relativi alla seconda serie, con intervallo dimensionale di **1:16**, sono rispettivamente uguali a 13.47 MPa² e 273.70 MPa²mm. La resistenza asintotica per $d \rightarrow \infty$ risulta essere $f_t = \sqrt{A} = 3.67$ MPa mentre la lunghezza caratteristica $sl_{ch} = B/A$ è uguale a 20.32 mm e la quantità l_{ch}/d_{max}

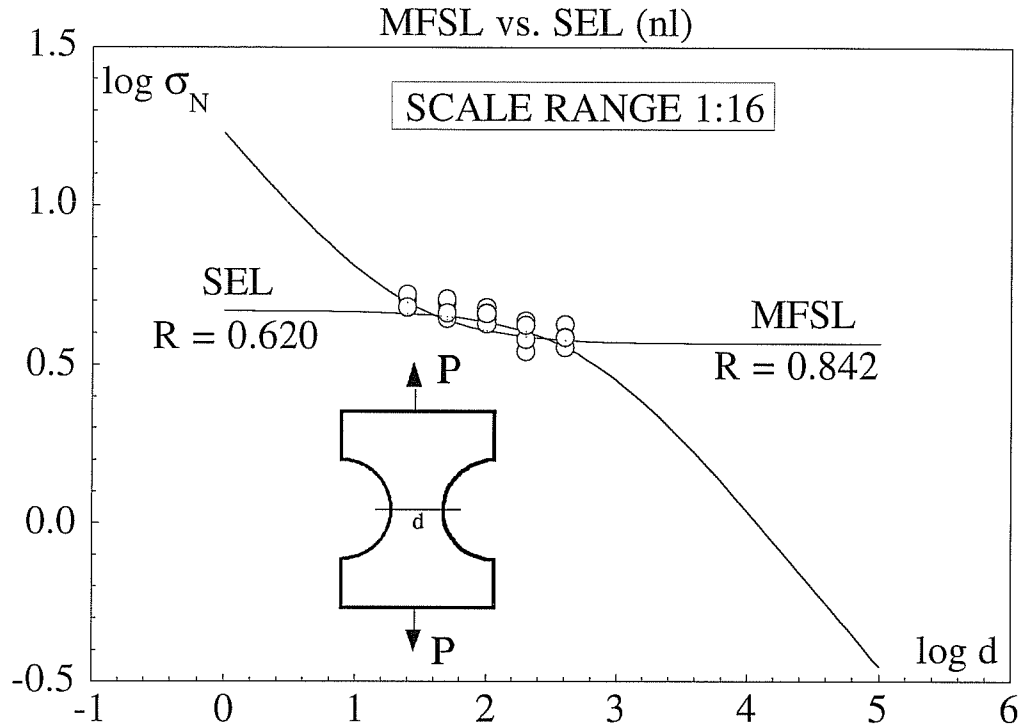


Figura 7.19: Confronto fra la MFSL e la SEL per le prove a trazione diretta presentate al Capitolo 5.

= 1.27. In questo caso la MFSL fornisce un coefficiente di correlazione uguale a 0.842 mentre, dal fitting della SEL, si ricava il valore $R=0.620$. Come si evince dai valori dei coefficienti di correlazione (Figura 7.18), la MFSL riesce a descrivere i punti sperimentali meglio della SEL. Questo risultato, ottenuto per prove a trazione diretta, con provini non pre-intagliati e su un intervallo dimensionale maggiore di un ordine di grandezza, è quello che forse più di ogni altro rafforza la validità della MFSL.

Bibliografia

1. Carpinteri, A., Ferro, G., "Apparent tensile strength and fictitious fracture energy of concrete: a fractal geometry approach to related size effects", on *Fracture and Damage of Concrete and Rock - FDCR 2*, Proceedings of the Second International Conference, Vienna, Austria, 9-13 November 1992, pp. 86-94, 1993.
2. Carpinteri, A., Maradei, F., "Three-jack solution to obtain a truly stable and symmetric tensile concrete test", *Experimental Mechanics*, in pubblicazione, 1993.
3. Carpinteri, A., Ferro, G., "Size effect on tensile fracture properties: a unitary explanation based on disorder and fractality of concrete microstructure", *Materials and Structures (RILEM)*, in pubblicazione, 1994.
4. Carpinteri, A., "Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials", *International Journal of Solids and Structures*, 31, pp. 291-302, 1994.
5. Carpinteri, A., Chiaia, B., Ferro, G., "Multifractal nature of material microstructure and size effect on nominal tensile strength", in pubblicazione su *Proceedings of IUTAM International Symposium on Fracture of Brittle Disordered Materials: Concrete, Rocks, Ceramics*, September 20-24, Brisbane, Australia, 1993.
6. Carpinteri, A., Chiaia, B., Ferro, G., "Multifractal scaling law for nominal strength variation of concrete structures", *Preprints of JCI International Workshop on "Size effect in concrete structures"*, Oct. 31 - Nov. 2, Sendai, Japan, pp. 173-185, 1993.
7. Weibull, W., "A Statistical Theory of the Strength of Materials", Swedish Royal Institute for Engineering Research, Stockholm, 1939.
8. Carpinteri, A., "Static and energetic fracture parameters for rocks and concretes", *Materials and Structures (RILEM)*, 14, pp. 151-162, 1981.
9. Bažant, Z.P., "Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 110, pp. 518-535, 1984.
10. Griffith, A.A., "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transaction of the Royal Society*, London, A221, pp. 163-198, 1921.

11. Mandelbrot, B.B., "The Fractal Geometry of Nature", W.H. Freeman and Company, New York, 1982.
12. Carpinteri, A., "Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties", *Mechanics of Materials*, in pubblicazione, 1993.
13. Carpinteri, A., "Mechanical Damage and Crack Growth in Concrete-Plastic Collapse to Brittle Fracture", Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
14. Carpinteri, A., "Cusp catastrophe interpretation of fracture instability", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 37, pp. 567-582, Great Britain, 1989.
15. Carpinteri, A., "Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: two different explanations based on fracture mechanics", *International Journal of Solids and Structures*, 25, pp. 407-429, Great Britain, 1989.
16. Kirsch, G., "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", *V.D.I.*, 42, pp. 797-807, 1898.
17. Inglis, C.E., "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners", *Transaction of the Royal Institution of Naval Architects*, 60, pp. 219-241, London, 1913.
18. Carpinteri, A., "Crack dominante e microcracks nei materiali fragili", *Giornale del Genio Civile*, 1-2-3, pp. 67-82, 1978.
19. Irwin, G.R., "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics*, 24, pp. 361-364, 1957.
20. Westergaard, H.M., "Bearing pressures and cracks", *Journal of Applied Mechanics*, 6, pp. 49-53, 1939.
21. Sih, G.C., "Handbook of Stress Intensity Factors", Bethlehem, Leigh University, 1973.
22. Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G.R., "Stress Analysis of Cracks Handbook", Hellertown, Del Research Corporation, 1973.
23. Rooke, D.R., Cartwright, D.J., "Compendium of Stress Intensity Factors", Uxbridge, Hellingdon Press, 1976.
24. Murakami, Y., "Stress Intensity Factors Handbook", Vol. I-II, Pergamon Press, Oxford, 1987.
25. Carpinteri, A., "Meccanica dei Materiali e della Frattura", Pitagora, Bologna, 1992.

26. Sneddan, I.N., "The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid", *Proc. Royal Soc.*, London A 187, pp. 229-260, 1946.
27. Irwin, G.R., "Plastic zone near a crack and fracture toughness", *Proceedings of the 7th Sagamore Conference*, IV-63, 1960.
28. Dugdale, D.S., "Yielding of steel sheets containing slits", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8, pp. 100-104, 1960.
29. Barenblatt, G.I., "The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture", *Advances in Applied Mechanics*, 7, pp. 55-129, 1962.
30. Rice, J.R., "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics*, 35, pp. 379-386, 1968.
31. ACI Committee 446, "Fracture Mechanics: Applications to Concrete Structures and Implications with Regard to the Code", 1992.
32. Hillerborg, A., "A model for fracture analysis", *Lund Institute of Technology*, Report TVBM 3005, Lund, Sweden, 1978.
33. Hillerborg, A., "Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fiber reinforced concrete", *International Journal of Cement Composites*, 2 (4), pp. 177-185, 1980.
34. Hillerborg, A., Modéer, M., Petersson, P.E., "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, 6, pp. 773-782, 1976.
35. Carpinteri, A., "Notch sensitivity in fracture testing of aggregative materials", *Engineering Fracture Mechanics*, 16, pp. 467-481, 1982.
36. Carpinteri, A., "Size effect in fracture toughness testing: a dimensional analysis approach", *Proceedings of the International Conference on Analytical and Experimental Fracture Mechanics*, Rome, Italy, June 23-27, 1980, (Eds. G.C. Sih and M. Mirabile) Sijthoff & Noordhoff, pp. 785-797, 1981.
37. Carpinteri, A., "Interpretation of the Griffith instability as a bifurcation of global equilibrium", in *N.A.T.O. Advanced Research Workshop on Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites* (Ed. S.P. Shah), Evanston Illinois, Sept. 4-7, 1984, Martinus Nijhoff, pp. 287-316, 1985.
38. Carpinteri, A. "Size-scale effects on the brittleness of concrete structures: dimensional analysis and snap-back instability", *American Concrete Institute, ACI SP-118*, (Eds. V. Li, Z.P. Bazant), Detroit, pp. 197-235, 1989.

39. Herrmann, H.J., Roux, S., "Statistical Models for the Fracture of Disordered Media", Elsevier Science Publishers, B.V. North Holland, 1990.
40. Kuman Mehta, P., "Concrete-Structure, Applications and Materials", Prentice-Hall, New Jersey, 1986
41. Hughes, B.P., Chapman, G.P., "The complete stress-strain curve for concrete in direct tension", *Bulletin RILEM*, 30, pp. 95-97, 1966.
42. Evans, R.H., Marathe, M.S., "Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension", *Material and Structures (RILEM)*, 1, pp. 61-64, 1968.
43. Heilmann, H.G., Hilsdorf, H.K., Finsterwalder, K., "Festigkeit und verformung von beton unter zugspannungen", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, 203, 1969.
44. Weigler, Karl, "Junger Beton", Teil I+II, *Betonwerk Fertigteil Technik*, 6-7, 1974.
45. Strange, P.C., Bryant, A.H., "Experimental tests on concrete fracture", *Journal of the Engineering Mechanics, ASCE*, 104, pp. 337-342, 1979.
46. Petersson, P.E., "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials", *Division of Building Materials, Lund Institute of Technology*, Report TVBM-1006, 1981.
47. Byfors, J., "General Report", *RILEM Technical Committee 42-CEA, International Conference on Concrete at Early Ages*, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris 6-8 April, 1982.
48. Orr, Haig, "An apparatus for measuring the shrinkage characteristic of plastic mortars", *Magazine of Concrete Research*, 25, pp. 43-48, 1971.
49. Gopalaratnam, V.S., Shah S.P., "Softening response of plain concrete in direct tension", *Journal of ACI*, 82, pp. 310-323, 1985.
50. Luong, M.P., "Fracture resistance testing of concrete and rocks", *10th International Conference S.M.I.R.T.* Anaheim, California, pp. 15-20, August 1989.
51. Raiss, M.E., Dougill, J.W., Newman, J.B., "Observation of the development of fracture process zones in concrete", su *Fracture of Concrete and Rock: Recent Developments* (Eds. S.P. Shah, S.E. Swartz, B. Barr), Proceedings of the International Conference, Cardiff, UK, 20-22 September, 1989, pp. 243-253, 1990.

52. Zhen-Hai, G., Xiu-Qin, Z., "Investigation of complete stress-deformation curves for concrete in tension", *ACI Materials Journal*, July-August, pp. 278-285, 1987.
53. Cedolin, L., Dei Poli, S, Iori, I, "Tensile behavior of concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, 113, pp. 431-449, 1987.
54. Hordijk, D. A., "Local approach to fatigue of concrete", Doctoral Thesis, *Technische Universiteit Delft*, 1991.
55. Cornelissen, H.A.W., "Fatigue failure of concrete in tension", *Heron*, 29(4), 68 pp.
56. Reinhardt, H. W., Cornelissen, A. W., Hordijk, D. A., "Tensile tests and failure analysis of concrete", *J. Struct. Eng.*, 112, pp. 2462-2477, 1986.
57. Phillips, D. V., Zhang, B., "Fracture energy and brittleness of plain concrete specimens under direct tension", in *Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures* (Ed. D. Firrao), Proceedings of the 8th European Conference on Fracture, Torino, Italia, October, 1990, EMAS, Warley, pp. 646-652, 1991.
58. Li, Z., Kulkan, S.M., Shah, S.P., "New test method for obtaining softening response of unnotched concrete specimen under uniaxial tension", *Experimental Mechanics*, september, pp. 181-188, 1993.
59. Jayatilaka, A.S., "Fracture of Engineering Brittle Materials", Applied Science, London, 1979.
60. Freudenthal, A.M., "Statistical approach to brittle fracture", in *Fracture* (Ed. H. Liebowitz), 2, Academic Press, New York, pp. 591-619, 1968.
61. Leicester, R.H., "Effect of size on the strength of structures", Paper No.71, *Division of Building Research, Forest Products Laboratory, C.S.I.R.O.*, Malbourne, 1973.
62. Batdorf, S.B., Crose, J.G., "A statistical theory for the fracture of brittle structures subjected to nonuniform polyaxial stresses", *Journ. Appl. Mechanics, ASME*, June, pp. 459-464, 1974.
63. Carpinteri, A., Di Tommaso, A., Viola, E., "Collinear stress effect on the crack branching phenomenon", *Materials and Structures (RILEM)*, 12, pp. 439-446, 1979.
64. Williams, M.L., "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", *Journal of Applied Mechanics*, 19, pp. 526-528, 1952.

65. Ziegeldorf, S., Müller, H.S., Hilsdorf, H.K., "Effect of aggregate particle size on mechanical properties of concrete", *Proceedings of the 5th International Conference on Fracture*, Cannes, pp. 2243-2251, 1981.
66. Hutchinson, J.W., "Singular behaviour of the end of a tensile crack in a hardening material", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, pp. 13-31, 1968.
67. Rice, J.R., Rosengren, G.F., "Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16, pp. 1-12, 1968.
68. Carpinteri, A., "Plastic flow collapse versus separation collapse (fracture) in elastic-plastic strain-hardening structures", *Materials and Structures (RILEM)*, 16, pp. 85-96, 1983.
69. Carpinteri A., Ferro G., "Effetti di scala sulla resistenza dei materiali dovuti alla dispersione statistica dei difetti", Atti del XI Congresso A.I.M.E.T.A., Trento, Italia, 28 settembre-2 ottobre 1992, pp. 197-202, 1992.
70. RILEM Technical Committee 50, "Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams", Draft Recommendation, *Materials and Structures (RILEM)* 18, pp. 287-290, 1985.
71. Carpinteri A., Ferro G., "Variation of tensile strength related to structural size: an experimental and statistical investigation", in pubblicazione su *Proceedings of Tenth European Conference on Fracture*, ESIS, Berlin (FRG), 20-23 September 1994.
72. Van Mier, J. G. M., "Scaling in tensile and compressive fracture of concrete", in *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete* (Ed. A. Carpinteri), Chapman and Hall, London, pp. 19-31, 1992.
73. Mazars, J., Bazant, Z.P. (Eds.), "Cracking and Damage: Strain Localization and Size Effect", Elsevier Applied Science, London and New York, 1989.
74. Carpinteri, A., Ingrassia, A.R. (Eds.), "Fracture Mechanics of Concrete: Material Characterization and Testing", Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1984.
75. Shah, S.P., Carpinteri, A. (Eds.), "Fracture Mechanics Test Methods for Concrete", Chapman and Hall, London, 1991.
76. Carpinteri, A. (Ed.), "Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete", Elsevier Applied Science, London and New York, 1992.

77. van Mier, J.G.M., Rots, J.G., Bakker, A. (Eds.), "Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics", Chapman and Hall, London, 1991.
78. Hu, X.Z., Wittmann, F.H., "Fracture energy and fracture process zone", *Materials and Structures (RILEM)*, 25, pp. 319-326, 1992.
79. Guinea, G.V., Planas, J., Elices, M., "Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 1- Influence of experimental procedures", *Materials and Structures (RILEM)*, 25, pp. 212-218, 1992.
80. Planas, J., Elices, M., Guinea, G.V., "Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 2 - Influence of bulk energy dissipation", *Materials and Structures (RILEM)*, 25, pp. 305-312, 1992.
81. Elices, M., Guinea, G.V., Planas, J., "Measurement of the fracture energy using three-point bend tests: Part 3 - Influence of cutting the P- tail", *Materials and Structures (RILEM)*, 25, pp. 327-334, 1992.
82. Falconer, K., "Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications", John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
83. Panagiotopoulos, P.D., "Fractal geometry in solids and structures", *International Journal of Solids and Structures*, 29, pp. 2159-2175, 1992.
84. Mandelbrot, B.B., Passoja, D.E., Paullay, A.J., "Fractal character of fracture surfaces of metals", *Nature*, 308, pp. 721-722, 1984.
85. Saouma, V.E., Barton, C.C., Gamaleldin, N.A., "Fractal characterization of fracture surfaces in concrete", *Engineering Fracture Mechanics*, 35, pp. 47-53, 1990
86. Wilson, K., "Renormalization group and critical phenomena", *Physical Review*, B4, pp. 3174-3205, 1971.
87. Mackin, T.J., Mecholsky Jr., J.J., Passoja, D.E., Tsai, Y.L., "Scaling concepts applied to brittle fracture", *Proceedings of Symposium 1990 Fall Meeting of the Materials Research Society*, Boston, pp. 33-36, 1990.
88. Long, Q.Y., Suqin, L.I., Lung, C.V., "Studies on the fractal dimension of a fracture surface formed by slow stable crack propagation", *Journal of Applied Physics*, 24, pp. 602-607, 1991.
89. Carpinteri, A., Chiaia, B., "Fractals, renormalization group theory and scaling laws for strength and toughness of disordered materials", *Proceedings of PROBAMAT Workshop, NATO ARM 930521*, Cachan, 1994.

90. Carpinteri, A., "Stress-singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners", *Engineering Fracture Mechanics*, 26, pp. 143-155, 1987.
91. Barenblatt, G.I., "*Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*", Consultant Bureau, New York, 1979.
92. Carpinteri, A., Chiaia, B., Maradei, F., "Experimental determination of the fractal dimension of disordered fracture surfaces", in pubblicazione su *Advanced Technology on Design and Fabrication of Composite Materials and Structures*, Kluwer 1994.
93. Meakin, P., "Models for material failure and deformation", *Science*, 252, pp. 226-234, 1991.
94. Tang, T., Shah, S.P., Ouyang, C., "Fracture mechanics and size effect of concrete in tension", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 118, pp. 3169-3185, 1992.
95. Lange, D.A., Jennings, H.M., Shah, S.P., "Relationship between fracture surface roughness and fracture behavior of cement paste and mortar", *Journal of the American Ceramics Society*, 76, pp. 589-597, 1993.
96. Carpinteri, A., "Application of fracture mechanics to concrete structures", *Journal of the Structural Division, ASCE*, 108, pp. 833-848, 1982.
97. Brühwiler, E., Broz, J.J., Saouma, V.E., "Fracture model evaluation of dam concrete", *Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE*, 3, pp. 235-251, 1991.
98. Kim, J.K., Eo, S.H., Park, H.K., "Size effect in concrete structures without initial crack", in *Fracture Mechanics: Application to Concrete*, SP-118, American Concrete Institute, Detroit, pp. 179-196, 1989.
99. Kim, J.K., Eo, S.H., "Size effect in concrete specimens with dissimilar initial cracks", *Magazine of Concrete Research*, 42, pp. 233-238, 1990.
100. Bažant, Z.P., Kazemi, M.T., Hasegawa, T., Mazars, J., "Size effects in Brazilian split-cylinder tests: measurements and fracture analysis", *ACI Materials Journal*, 88, pp. 325-332, 1991.
101. Mandelbrot, B.B., "Self-affine fractals and fractal dimension", *Physica Scripta*, 32, pp. 257-260, 1985.
102. Marquardt, D.W., "An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters", *Journal of Soc. Industr. Appl. Math.*, 11, pp. 431-441, 1963.

103. Hasegawa, T., Shioya, T., Okada, T., "Size effect on splitting tensile strength of concrete", *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, 7th Conference, pp. 309-312, 1985.
104. Marti, P., "Size effect in double-punch tests on concrete cylinders", *ACI Materials Journal*, 86, pp. 597-601, 1989.
105. Sabnis, G.M., Mirza, S.M., "Size effect in model concretes ?", *Journal of Structural Division, ASCE*, 105, pp. 1007-1020, 1979.
106. Bažant, Z.P., Kazemi, M.T., "Size effect on diagonal shear failure of beams without stirrups", *ACI Structural Journal*, 88, pp. 268-276, 1991.

Appendice A

Caratteristiche meccaniche del calcestruzzo utilizzato per le prove di trazione

Composizione del calcestruzzo

Le prove di trazione, presentate al Capitolo 5, sono state effettuate utilizzando un calcestruzzo classe R_{ck} 300, con diametro massimo dell'inerte pari a 16 mm. Per l'impasto si è utilizzata una proporzione acqua-cemento-inerti di 1:2:4.5, con un cemento del tipo Portland 425. Il calcestruzzo è stato confezionato dalla Calcestruzzi Torino.

Valori della resistenza a compressione a 28 giorni

La resistenza a compressione a 28 giorni, ottenuta su cubi di lato 160 mm, è risultata pari a 37.6 MPa per la prima serie e a 41.9 MPa per la seconda.

Il modulo elastico a compressione, valutato utilizzando 6 prismi di dimensioni 160x160x500 mm, è risultato pari a $E_c = 26.5$ MPa per la prima serie e di $E_c = 27.3$ MPa per la seconda.

Determinazione dell'energia di frattura

L'energia di frattura è stata determinata in osservanza alle Raccomandazioni RILEM riportate in [70]. Sono state eseguite tre prove per ciascun tipo di calcestruzzo, ottenendo i seguenti valori di \mathcal{G}_F : 0.140 N mm⁻¹ per la prima serie e 0.162 N mm⁻¹ per la seconda serie.

Appendice B

Risultati sperimentali delle prove di trazione

Prima serie

<i>Sigla provino</i>	<i>Area sezione trasversale(cm²)</i>	<i>Resistenza a trazione σ_N (MPa)</i>	<i>Energia di frattura \mathcal{G}_F(N/mm)</i>
CA54	50	4.24	0.089
CA101	100	3.73	0.119
CA102	100	3.71	0.091
CA103	100	4.12	-
CA104	100	3.55	-
CA201	200	3.92	-
CA202	200	3.49	-
CA204	200	3.52	0.142
CA401	400	2.99	-
CA402	400	3.24	-

Tabella B.1: Risultati sperimentali per la resistenza a trazione e l'energia di frattura dei singoli provini (1^a serie).

Seconda serie

<i>Sigla provino</i>	<i>Area sezione trasversale(cm²)</i>	<i>Resistenza a trazione σ_N (MPa)</i>	<i>Energia di frattura G_F(N/mm)</i>
T13	25	4.91	0.138
T14	25	5.05	0.137
T15	25	4.59	0.180
T16	25	4.62	0.130
T22	50	4.41	0.244
T23	50	4.24	0.194
T25	50	4.73	0.318
T26	50	4.78	0.338
T27	50	4.45	0.197
T28	50	4.90	0.281
T29	50	4.41	0.231

Tabella B.2: Risultati sperimentali per la resistenza a trazione e l'energia di frattura dei singoli provini (2^a serie).

<i>Sigla provino</i>	<i>Area sezione trasversale(cm²)</i>	<i>Resistenza a trazione σ_N (MPa)</i>	<i>Energia di frattura G_F(N/mm)</i>
T31	100	4.21	-
T32	100	4.46	-
T34	100	4.59	0.228
T35	100	4.33	-
T36	100	4.42	0.208
T37	100	4.07	0.270
T38	100	4.40	0.239
T45	200	4.16	-
T46	200	3.65	-
T47	200	4.04	-
T48	200	3.35	0.158
T52	400	4.05	0.286
T53	400	3.45	-
T54	400	3.70	-
T55	400	3.69	0.142

Tabella B.3: Risultati sperimentali per la resistenza a trazione e l'energia di frattura dei singoli provini (2^a serie).