

Analisi delle proprietà dei *pattern*

«The principle of sacrifice admits and indeed implies the existence of a multiplicity of values. What is sacrificed is acknowledged to be a value even though it has to yield to another value which commands priority».

«Il principio del sacrificio ammette e anzi implica l'esistenza di una molteplicità di valori. Ciò che è sacrificato è riconosciuto come un valore anche se deve cedere ad un altro valore che ha la priorità».

ERNST HANS JOSEF GOMBRICH, *Norm and form: studies in the art of the Renaissance*, London, Phaidon 1966², p. 97.

Le proprietà dei *pattern* vengono identificate e descritte in base a differenti modelli di riferimento¹, che possono essere di volta in volta culturale, storico, cromatico, semiotico o geometrico-matematico. All'ultima matrice fa riferimento il presente lavoro perché, pur non essendo più significativa delle prime, rivela numerosi punti di contatto con l'altro caposaldo della tesi: la modellazione parametrica, una tecnica di rappresentazione virtuale che offre molte opportunità per una maggiore comprensione della natura matematica dei *pattern*. Nel presente capitolo vengono descritte, oltre all'autosimilarità e alla metamorfosi, quelle proprietà che permettono di classificare i *pattern* nei "17 Wallpaper Groups", raggruppandoli in base ai vari tipi di simmetria (riflessione, traslazione, rotazione e antitraslazione).

Si può affermare che ogni *pattern* «sfrutta in qualche modo un modulo originale copiandolo mediante un isomorfismo, ossia una trasformazione che conserva l'informazione. A volte le copie sono al rovescio, altre volte a ritroso, altre volte ancora rimpicciolite o ingrandite, possono comportare cambiamenti di scala, torsioni o ribaltamenti e altre trasformazioni del genere. Eppure permane una

¹ ANNA MAROTTA, *Segno e simbolo, rilievo e analisi. L'esempio nell'ornatus architettonico*, in: MARIO CENTOFANTI (a cura di), *Sistemi informativi integrati per la tutela, la conservazione e la valorizzazione del patrimonio architettonico e urbano*, Roma, Gangemi 2010, pp. 112-121.

sorta di identità nello schema generale che l'occhio coglie con uno sforzo minimo²».

Premesso che un'isometria³ è una trasformazione che permette di mappare il piano euclideo su sé stesso perché le distanze vengono conservate, si potrà affermare che dato uno spazio matematico S e una figura $F \subseteq S$, una volta definito un insieme di movimenti rigidi M che preservano la struttura di S , l'isometria σ sarà una simmetria di F se lo mappa su sé stesso⁴, cioè $\sigma(F) = F$. Le isometrie a cui si fa riferimento (figg. 67 e 68) sono quattro:

- rotazione secondo un angolo assegnato θ attorno a un punto O , dove O è il “centro della rotazione”; se $\theta = \pi$ la trasformazione prende il nome di “semigiorno”, mentre $\theta = 2\pi$ rappresenta l'identità, cioè quella trasformazione che lascia lo spazio invariato;
- traslazione in una determinata direzione secondo una distanza stabilita;
- riflessione rispetto ad una retta l assegnata, detta “asse di riflessione”;
- antiriflessione, che associa alla riflessione rispetto ad una retta l la traslazione con distanza data nella direzione perpendicolare ad l .

La definizione di simmetria può quindi essere estesa alle tassellature in quanto un'isometria σ è una simmetria della tassellatura T se fa coincidere ogni tassello di T con un altro; l'insieme di tutte le simmetrie di T si indica con $S(T)$.

Se una tassellatura ammette una qualsiasi simmetria oltre all'identità, la si definisce simmetrica; se il gruppo di simmetria contiene almeno due traslazioni in direzioni non parallele viene detta periodica, altrimenti sarà non periodica.

² DOUGLAS R. HOFSTADTER, *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Milano, Adelphi 1984, p. 158.

³ PAUL CHURCH, *Snakes in the Plane*, Ontario, University of Waterloo, Master's degree of Mathematics in Computer Science 2008, p. 6.

⁴ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 22.



Fig. 67 – Rappresentazione grafica delle quattro isometrie: rotazione, traslazione, riflessione e antiriflessione.



Fig. 68 – Esempi di rotazione, traslazione, riflessione e antiriflessione ottenuti rielaborando un motivo ornamentale messo a punto nel 1873 da Owen Jones e denominato “*Italian*”.

Una tassellatura può dunque essere non periodica perché non ammette simmetrie, oppure le ammette unicamente lungo una certa direzione, o ancora perché consente solo simmetrie che non siano traslazioni (fig. 69).

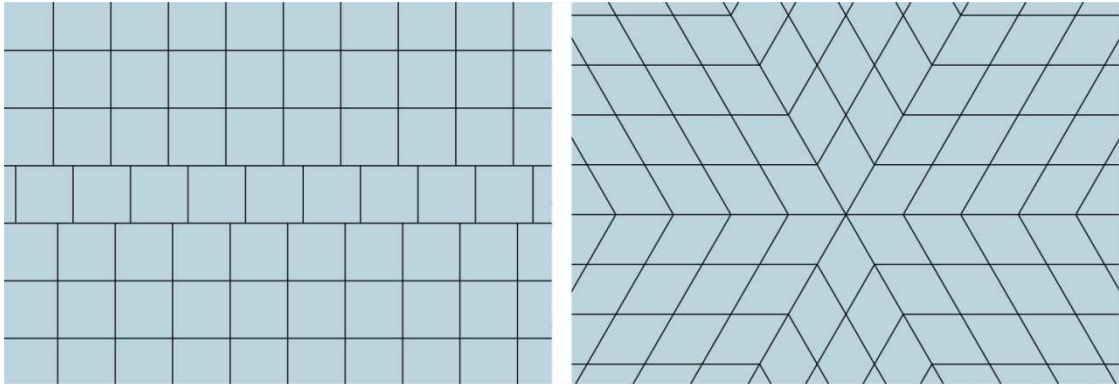


Fig. 69 - Tassellazioni non periodiche: quella di sinistra permette una traslazione solo lungo una direzione, quella di destra non consente simmetrie di traslazione.

La parola “simmetria” (da *sýn*, “assieme con” che nelle parole composte indica “unione”, “connessione”, “coesione”, e *-métron*, “misura” o “misurazione”⁵) assume significati diversi, più o meno specifici⁶.

Forme e simboli simmetrici sono riscontrabili negli oggetti di uso quotidiano e nella mitologia delle religioni, ma si possono ritrovare anche nell’arte e in architettura. In questo ambito le forme regolari sono giudicate più stabili, più economiche nell’uso dei materiali, maggiormente definite, semplici, facili da riprodurre e da tramandare alle generazioni successive. Sin dai tempi antichi la natura stessa ci ha fornito degli esempi: dai minerali alle piante, all’anatomia degli esseri viventi, alle costellazioni, ogni elemento sembra riproporsi in maniera ricorsiva. Le civiltà del passato, così come le attuali e i vari gruppi etnici, usano *pattern* simmetrici per ordinare la natura e il loro mondo⁷.

⁵ NICOLA ZINGARELLI, *Vocabolario della lingua italiana*, Bologna, Zanichelli 2004, *ad vocem*, p. 1702.

⁶ JOHN H. CONWAY, HEIDI BURGIEL, CHAIM GOODMAN-STRAUSS, *The Symmetries of Things*, Natick (U.S.A.), A K Peters 2008, p. 7.

⁷ KLAUS MAINZER, *Symmetry and complexity. The spirit and beauty of nonlinear science*, London, World Scientific Publishing 2005, p. 23.

Si tratta di un fenomeno trasversale all'esistenza umana, alla tecnologia e alla natura, che rappresenta un tema di attualità nelle discipline scientifiche come la chimica e la biologia, per le quali ancora oggi i problemi di simmetria sono frequenti⁸.

In età medievale armonia e proporzionalità erano concetti ricorrenti nel *quadrivium*⁹ dal momento che, per ragioni tecniche, estetiche o religiose, la simmetria è stata uno dei temi centrali in matematica¹⁰. Essa descrive la misura della ridondanza di una figura, un concetto che conduce a quello di "unità minima", ovvero al più piccolo *patch* contenente le informazioni essenziali che, associate alle simmetrie proprie del *pattern*, permettono di ricostruirlo nella sua interezza¹¹. Questa proprietà può essere percepita come fonte di interesse e stimolo oppure come rigida costrizione; per Dagobert Frey¹² "simmetria" era sinonimo di riposo e vincolo, mentre "asimmetria" significava movimento e arbitrarietà: rigida regolarità in opposizione alla vita e alla libertà, un'opinione condivisa anche da Rudolf Arnheim¹³.

Kant¹⁴ riteneva la simmetria pura qualcosa di troppo duro e lontano dalla vita mentre uno storico come Ernst Gombrich¹⁵ reputava che, una volta colto il principio di ordine in un oggetto, quest'ultimo non fosse più in grado di riservare sorprese.

⁸ Ivi, p. 1.

⁹ In epoca medievale costituiva assieme al *trivium* la formazione scolastica delle arti liberali; era composto dalle quattro discipline attinenti la matematica: geometria, aritmetica, musica e astronomia.

¹⁰ KLAUS MAINZER, *Symmetry and complexity. The spirit and beauty of nonlinear science*, London, World Scientific Publishing 2005, p. 2.

¹¹ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, tesi di dottorato, University of Washington 2002, p. 23.

¹² DAGOBERT FREY, *Zum Problem der Symmetrie in der bildenden Kunst*, «Studium Generale», n. 2, 1949, pp. 268-278.

¹³ JOACHIM SCHUMMER, *Aesthetics of chemical products: materials, molecules, and molecular models*, «HYLE - International Journal for Philosophy of Chemistry», n. 1, vol. 9, 2003, pp. 73–104.

¹⁴ I. C. MCMANUS, *Symmetry and asymmetry in aesthetics and the arts*, «European Review», n. 2, vol. 13, 2005, p. 159.

L'arte primitiva mostra invece come uomini di epoche e culture differenti abbiano avuto una naturale percezione dell'equilibrio e delle configurazioni derivanti dalle forme geometriche¹⁶; per Jay Hambridge «*The savage decorating his canoe or paddle, his pottery or his blanket, uses static symmetry unconsciously. The crude drawings of the caveman disclose no design, consequently no symmetry. As civilization advances the artist becomes more or less conscious of the necessity for symmetry or that quality in a work of art or craft which we recognize as design*»¹⁷.

Owen Jones¹⁸ rintraccia l'importanza della simmetria nell'arte egizia, ma identifica la restaurazione degli ordini architettonici e della simmetria architettonica in generale dapprima con l'avvento del Rinascimento e poi con il Manierismo¹⁹. A tal proposito afferma:

«*Proceeding from Vatican to the Villa Madama, we find, immediately on entering its halls, that division create a less confusing general effect. In all the principal decorations there is a better regulated proportion, and greater symmetry; and in the magnificent roofs, notwithstanding the multiplicity of their ornaments, a more gratifying and calming influence is exerted upon us*»²⁰.

¹⁵ JOACHIM SCHUMMER, *Aesthetics of chemical products: materials, molecules, and molecular models*, «HYLE - International Journal for Philosophy of Chemistry», n. 1, vol. 9, 2003, pp. 73-104.

¹⁶ CLARE E. HORNE, *Geometric symmetry in patterns and tilings*, Cambridge, The Textile Institute, Woodhead Publishing 2000, p. 1.

¹⁷ «Il selvaggio, decorando la sua canoa o la pagaia, la sua ceramica o la sua coperta, utilizza inconsciamente la simmetria statica. I disegni rozzi dei cavernicoli non rivelano nessuna progettazione e di conseguenza nessuna simmetria. Con l'avanzare della civiltà l'artista diventa più o meno consapevole della necessità di una simmetria o di una qualche qualità in un'opera d'arte o mestiere che noi riconosciamo come progettazione».

JAY HAMBRIDGE, *The Elements of Dynamic Symmetry*, New York, Dover Publications 1967, pp. XII-XIII.

¹⁸ OWEN JONES, *The Grammar of Ornament: All 100 Color Plates from the Folio Edition of the Great Victorian Sourcebook of Historic Design*, New York, Dover Publications 1987, p. 24.

¹⁹ Ivi, p. 136.

²⁰ «Procedendo dal Vaticano a Villa Madama, appena entrati nelle loro sale, troviamo che la divisione crea un effetto generale meno confuso. In tutte le decorazioni principali vi è una proporzione meglio

È ormai un'idea condivisa che, nel corso delle varie epoche storiche, il disegno e la decorazione siano stati influenzati dall'equilibrio, dall'armonia e dalla complessità che presentano le strutture della natura, dalle più piccole a quelle macroscopiche. Tali proporzioni sono poi diventate norma estetica.

D'Arcy Wentworth Thompson²¹, un matematico con mente da biologo, rimase affascinato dagli scheletri silicei dei microscopici radiolari²², incredibilmente raffinati e complessi per la grande varietà di forme a fronte della loro semplicità di organismi monocellulari, giungendo a paragonarli ai fiocchi di neve dalla caratteristica struttura esagonale, declinata in infinite variabili.

In arte la simmetria è piacevole all'occhio e la complessità dei *pattern* simmetrici può affascinare il visitatore allo stesso modo dei fiocchi di neve. Le tipologie più semplici sono quelle che si ripetono lungo una sola direzione, come si può riscontrare nei fregi e nelle modanature, classificati in base ai *Frieze Groups*. Si tratta di elementi che, oltre alla riflessione e alla rotazione, proprie delle figure singole, ammettono anche simmetrie di traslazione.

regolata e maggiore simmetria; le magnifiche volte, nonostante la molteplicità delle loro decorazioni, esercitano un'influenza più gratificante e rilassante su di noi».

Ivi, p. 143.

²¹ D'ARCY WENTWORTH THOMPSON, *On Growth and Form*, Cambridge, Cambridge University Press 1961, p. 152.

²² Protozoi ameboidi, organismi unicellulari che costituiscono parte del plancton marino in tutti gli oceani.

2.1

Simmetria di riflessione

«Long before any science, man was fascinated by symmetry. Symmetric ornaments seem to represent perfect order, beauty, and divine harmony. Symmetrical forms and symbols are to be found in art and architecture as well as in everyday useful objects and in the mythologies of religions. Symmetry is a multi-cultural phenomenon. It spans the human life world, technology, culture and nature, and thereby searches out a unity of the natural and human science».

«Molto tempo prima di ogni scienza, l'uomo è stato affascinato dalla simmetria. Decorazioni simmetriche sembrano rappresentare l'ordine perfetto, la bellezza e l'armonia divina. Forme e simboli simmetrici si incontrano nell'arte e nell'architettura così come negli oggetti di uso quotidiano e nelle mitologie delle religioni. La simmetria è un fenomeno multiculturale. Attraversa il mondo dell'esistenza umana, la tecnologia, la cultura e la natura, e cerca quindi un'unità tra il naturale e la scienza umana».

KLAUS MAINZER, *Symmetry and complexity. The spirit and beauty of nonlinear science*, London, World Scientific Publishing 2005, p. 1.

Nel linguaggio corrente al concetto di "simmetria" si attribuiscono due significati differenti. Uno intende qualcosa di ben proporzionato ed equilibrato, evidenziando una sorta di accordo armonico tra le parti che compongono un'entità. Si tratta della condizione a cui faceva riferimento Policleto¹ nel proprio canone, indicando come modello da perseguire la simmetria anatomica della figura umana e fornendo le proporzioni tra le diverse parti del corpo. Lo stesso fece Dürer² proponendo un suo ideale estetico di figura umana (fig. 70).

¹ Scultore e bronzista greco del periodo classico.


² ALBRECHT DÜRER, *Di Alberto Durerò pittore e geometra chiarissimo della simmetria dei corpi umani. Libri quattro*, Padova, Roberto Meietti 1594.

D I
ALBERTO DVRERO
 PITTORE E GEOMETRA
 CHIARISSIMO
DELLA SIMMETRIA
 DE I CORPI HVMANI.
 Libri Quattro.

Nonamente tradotti dalla lingua Latina nella Italiana,
 DA M. GIO. PAOLO GALLVCCI SALODIANO.
Academico Veneto.

Et accresciuti del quinto Libro, nel quale si tratta, con quei modi possono i Pittori, & Scoltori mostrare la diversità della natura de gli huomini, & donne, & con quali le passioni, che sentono per li diuersi accidenti, che li occorrono. Hora di nouo stampati.

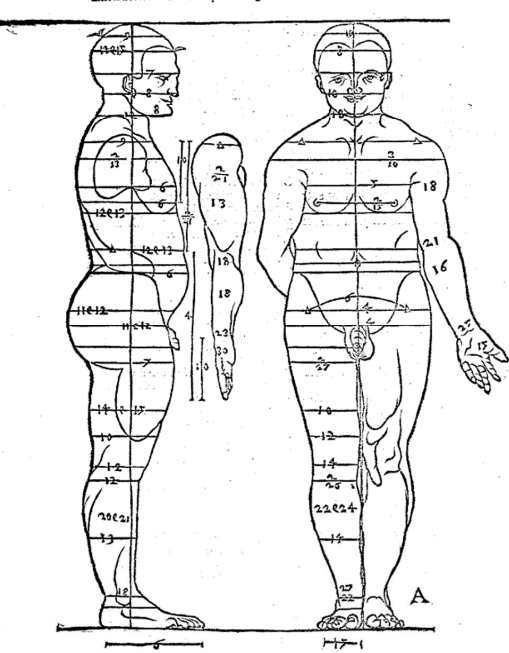
Opera à i Pittori, e Scoltori non solo utile, ma necessaria, & ad ogni altro, che di tal materia desidera acquistarsi perfetto giudicio.



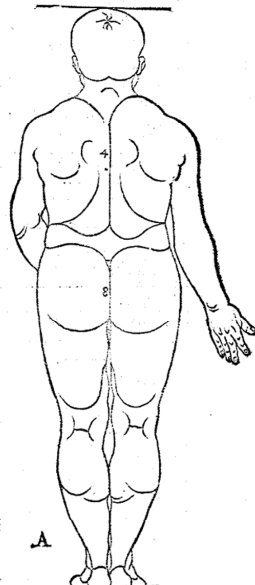
In Venetia, Appresso Roberto Meietti. 1594.

DELLA SIMMETRIA

nostri effempi, defcriuendo noi tale habito intorno al ventre, & l'osso sacro l'habbiamo fatto quasi circolare. Ora questi effempi della prima effigie perche fiano conosciuti da gli altri si deono notare con qualche segno, & noi l'habbiamo nott con le A.



DE I CORPI HVMANI, LIB. I
L'altetza de i membri virili.



Sommità del capo.
 Giro de i capelli.
 Fronte.
 Sopracigli.
 Naso.
 Mentto.
 Sommità delle spalle.
 Cauo della gola.
 Petto.
 Ascelle.
 Mammelle.
 Sotto le mammelle.
 I lumbi, o cintura.
 Ventralico.
 Il fino delle coscie.
 La sommità delle coscie.
 I membri virili.
 Il fine del membro.
 Sotto le natiche.
 A mezo la coscia.
 Sopra'l genocchio.
 A mezo'l genocchio.
 Sotto'l genocchio.
 Sotto'l ventricello effiore.
 Sotto'l ventricello intetiore.
 Monte del piede.
 Sotto'l taloue.
 Pianta del piede

DELLA SIMMETRIA

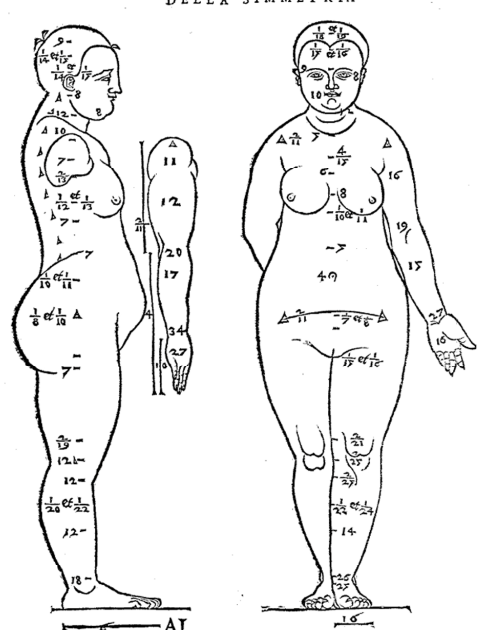


Fig. 70 – ALBRECHT DÜRER, *Di Alberto Durero pittore e geometra chiarissimo della simmetria dei corpi humani. Libri quattro*, Padova, Roberto Meietti 1594, frontespizio, f. 3v, f. 4r, f. 5v.

In questo senso l'idea di simmetria diventa sinonimo di armonia³, un'immagine di equilibrio che conduce al secondo modo di intendere il sostantivo quando viene abbinato all'aggettivo "bilaterale"⁴. Si vuole così evidenziare la particolare proprietà per la quale le parti di un oggetto risultano speculari rispetto ad una linea o ad un piano, definiti "asse" e "piano di simmetria"; si tratta della congruenza tra parti sinistra e destra.

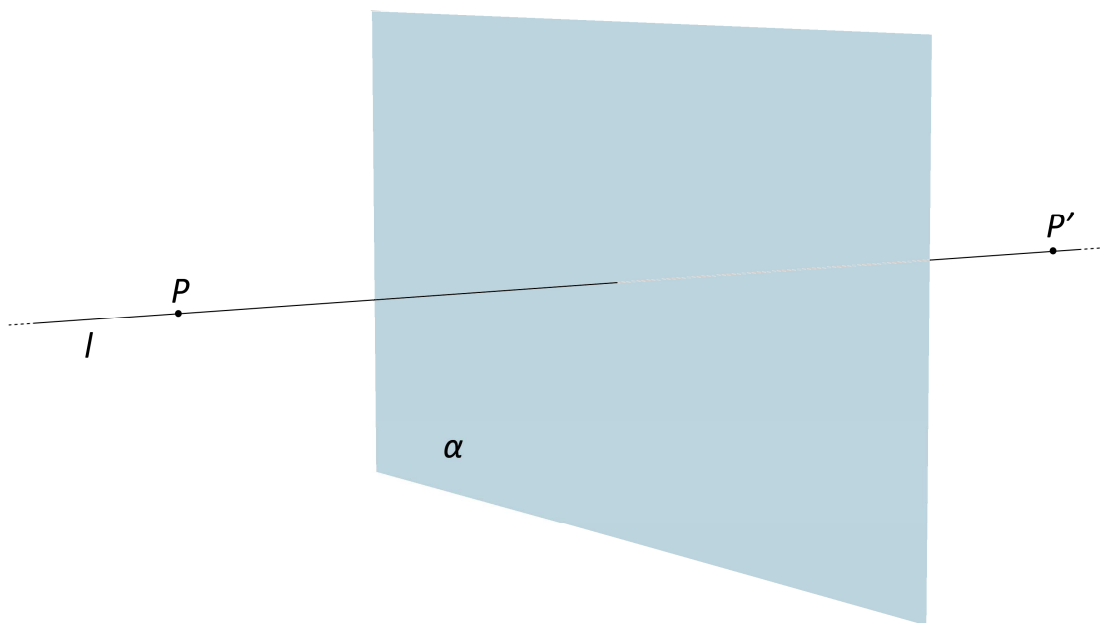


Fig. 71 – Riflessione rispetto ad un piano.

Questo tipo di simmetria, di chiara matrice geometrica, risulta estremamente preciso⁵, a differenza del precedente concetto astratto di "armonia". Un corpo o una figura vengono definiti simmetrici se la riflessione rispetto ad un piano α di riferimento li porta a coincidere con sé stessi; in altre parole, presa una qualunque linea retta l perpendicolare ad α , per ogni punto P di l esiste uno ed un solo punto P' appartenente ad l che abbia la stessa distanza di P da α , ma giaccia dalla parte

³ HERMANN WEYL, *Symmetry*, Princeton (U.S.A.), Princeton University Press 1982, p. 3.

⁴ JOHN H. CONWAY, HEIDI BURGIEL, CHAIM GOODMAN-STRAUSS, *The Symmetries of Things*, Natick (U.S.A.), A K Peters 2008, p. 7.

⁵ Ivi, pp. 4-6.

opposta rispetto al piano stesso. Il punto P' coincide con P se e solo se appartiene ad α (fig. 71).

Le riflessioni sono tipologie basilari di isometrie; tutte le altre isometrie si possono invece ottenere attraverso riflessioni multiple. La composizione di riflessioni rispetto a due rette che si intersecano produce, ad esempio una rotazione con un angolo doppio rispetto a quello di intersezione delle rette stesse e con centro nel loro punto di intersezione. La simmetria di riflessione è una proprietà comune a molti *pattern*, poiché tutte le culture hanno sempre avuto un'innata predilezione per questo aspetto, strettamente legato all'osservazione degli elementi naturali⁶.

Importanti ricerche sul ruolo della simmetria nella percezione furono condotte dagli studiosi della psicologia della *Gestalt*⁷, per i quali il cervello umano è naturalmente predisposto a riconoscere tale proprietà⁸, a cui tende ad attribuire la capacità di dare ordine e struttura in un *pattern*.

Le tassellazioni con un elevato grado di simmetria risultano allora di più facile comprensione rispetto a quelle che ne sono prive, perché contengono informazioni ridondanti attraverso le quali si arriva a prevederne lo sviluppo. Osservando una pur piccola porzione di una struttura simmetrica è quindi possibile intuirne la parte mancante⁹.

⁶ DOROTHY KOSTER WASHBURN, DONALD W. CROWE, *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*, Washington, University of Washington Press 1988, pp. 3-4.

⁷ MAURICE MERLEAU PONTY, *Fenomenologia della percezione*, Milano, Il Saggiatore 1965.

WOLFGANG KOHLER, *La psicologia della Gestalt*, Milano, Feltrinelli 1961.

EDGARD D. ADRIAN, *I fondamenti fisiologici della percezione*, Torino, Einaudi 1952.

DAVID KATZ, *La psicologia della forma*, Torino, Einaudi 1950.

KURT KOFFKA, *Principles of Gestalt*, New York, Harcourt 1935.

⁸ A. V. SHUBNIKOV, V. A. KOPTSIK, *Symmetry in Science and Art*, New York, Plenum Publishing Corporation 1974, p. 7, p. 155.

⁹ Ivi, pp. 16-17.

Anche nel design contemporaneo si nota come la maggior parte delle decorazioni mostrino un certo grado di simmetria, legato agli aspetti pratici della produzione industriale che utilizza, ad esempio, rulli cilindrici per lo stampaggio di tessuti e carte da parati, dove i motivi riprodotti vengono ripetuti almeno in una direzione. Non va infine sottovalutata la ragione neurologica alla base della nostra propensione per la simmetria. La psicoestetica¹⁰ sostiene in proposito che il giudizio in merito ad uno stimolo visivo deriva dall'eccitazione (*arousal*) creata e sostenuta dall'esplorazione e dallo sforzo di assimilazione dello stesso.

Si tratta di teorie che hanno trovato conferma misurando le reazioni fisiche e psichiche di soggetti sottoposti a determinati stimoli visivi. Si è così appurato che nell'uomo il riconoscimento della simmetria impegna il processo percettivo ad un livello talmente basso che egli può discernere, con notevole precisione, gli oggetti simmetrici in meno di un ventesimo di secondo¹¹. L'occhio risulta particolarmente veloce e preciso nel rilevare forme con simmetria di specularità verticale, probabilmente perché tale caratteristica, propria di molti animali, potrebbe indicare la presenza di un predatore in avvicinamento¹².

Locher e Nodine¹³, esaminando su un tracciato i movimenti della pupilla, sono giunti a dimostrare che l'occhio, in presenza di una simmetria verticale, si limita ad esplorare le parti non ridondanti della scena: una volta che il cervello ha riconosciuto questa caratteristica analizza solo metà dell'immagine, sottintendendo la parte restante. L'aumento della simmetria, inoltre, comporta una riduzione dell'eccitazione tanto che, quando viene richiesto il livello di apprezzamento di un'opera d'arte, gli intervistati valutano più favorevolmente i soggetti asimmetrici

¹⁰ Scienza che tenta di quantificare la risposta estetica agli stimoli sensoriali.

¹¹ http://www.ski.org/CWTyler_lab/CWTyler/Art%20Investigations/Symmetry/Symmetry.html (consultato 20-01-2011).

¹² CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 5.

¹³ P. J. LOCHER, C. F. NODINE, *The perceptual value of symmetry*, «Computers and Mathematics with Applications», n. 4-6, vol. 17, 1989, pp. 475-484.

(fig. 72), mentre il giudizio di valore diminuisce col crescere della simmetria. La psicoestetica giustifica questo risultato affermando che l'assimilazione di una scena maggiormente ordinata richiede un processo mentale ridotto, con un conseguente minor impegno generale.

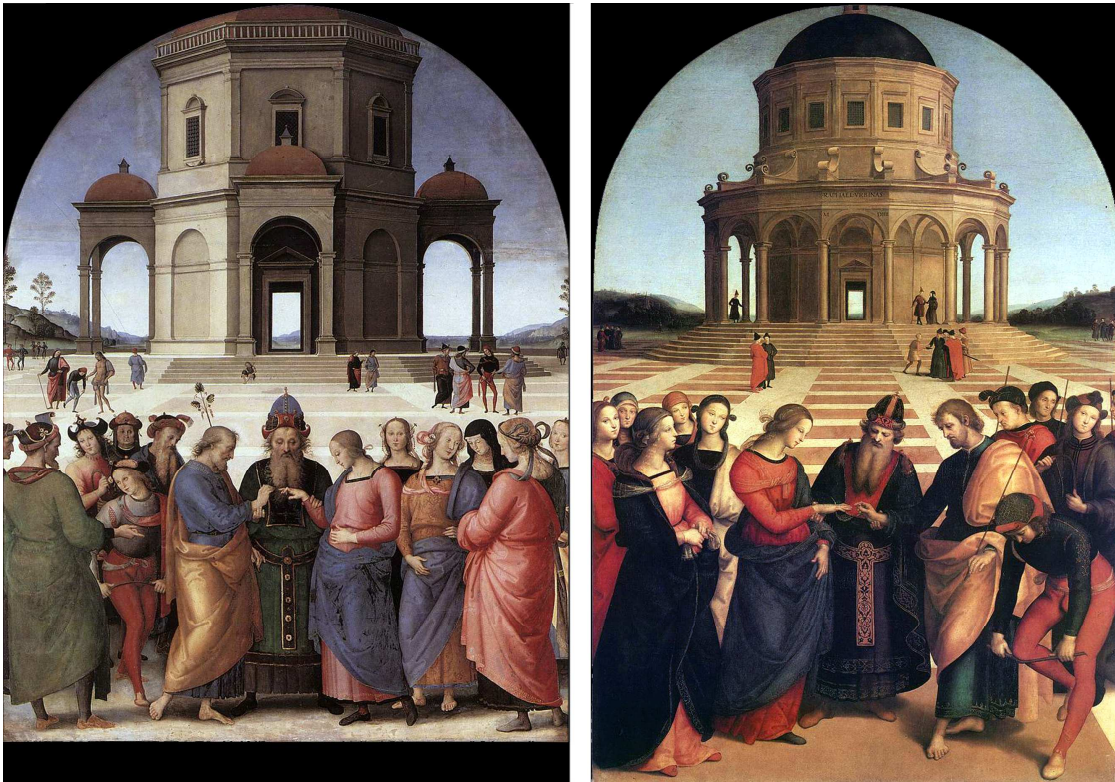


Fig. 72 – PIETRO PERUGINO, *Lo sposalizio della Vergine*, 1503-1504. Olio su tavola, 234x185 cm, Caen, Musée des Beaux-Arts (a sinistra).

RAFFAELLO, *Lo sposalizio della Vergine*, 1504. Olio su tavola, 170x117 cm, Milano, Pinacoteca di Brera (a destra).

La sperimentazione sembrerebbe portare ad una valutazione negativa, in merito all'efficacia dei *pattern* simmetrici; occorre tuttavia considerare che in questo caso entrano in gioco anche altri fattori: la riduzione dell'eccitazione, associata allo stimolo visivo, risulterebbe infatti appropriata per una decorazione¹⁴ perché spesso, in campo architettonico, lo scopo di un ornamento è di compiacere l'occhio senza distrarlo. A

¹⁴ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 5.

tale proposito, Locher e Nodine rilevano come la maggior complessità di una scena comporti un aumento piacevole dell'eccitazione finché l'immagine non diventa repulsiva o sgradevole¹⁵.

¹⁵ P. J. LOCHER, C. F. NODINE, *The perceptual value of symmetry*, «Computers and Mathematics with Applications», n. 4-6, vol. 17, 1989, p. 482.

2.2

Simmetria rotazionale, simmetria di traslazione e antitraslazione

«What magic is there in the rule of six that compels the snowflake to conform so rigidly to its laws? [...] Much wonder has been excited, because the snow crystals exhibit such a bewildering diversity and beauty. They form with in a very thin gaseous solvent, the air, and this allows the molecules of water an unexampled freedom of motion and adjustment while arranging themselves in crystal form. The fact doubtless largely explains why the crystals of snow far exceed other crystals in complexity and symmetry».

«Quale magia c'è nella regola del sei che costringe il fiocco di neve a conformarsi in modo così rigido alle sue leggi? [...] Molto stupore è stato sollevato sul perché i cristalli di neve mostrino una sconcertante varietà e bellezza. Si formano in un aerosol gassoso molto rarefatto, l'aria, e questo permette alle molecole d'acqua una singolare libertà di movimento e di assestamento mentre si organizzano in forma cristallina. Senza dubbio il fatto spiega ampiamente perché i cristalli di neve superino di gran lunga gli altri cristalli in complessità e simmetria».

WILSON A. BENTLEY, *Snow Beauties*, «Technical World», 1910.

Nelle opportune condizioni le molecole d'acqua sono in grado di produrre una varietà infinita di cristalli di neve. Questo fatto divenne quasi un'ossessione per Wilson Bentley che passò buona parte della propria vita a studiare i fiocchi di neve tanto che, nei 55 anni che precedettero la sua morte avvenuta nel 1931, fotografò 5.381 cristalli differenti, dimostrando che non esistevano due fiocchi uguali (fig. 73).

Per lo studioso la simmetria rotazionale a sei lati rappresentava il risultato delle caratteristiche interne della nuvola di origine, dell'altitudine, dell'elettromagnetismo e della temperatura, tutte variabili in grado di generare forme sempre diverse, pur mantenendo i vincoli imposti dalle regole intrinseche alla molecola d'acqua¹.

¹ BENJAMIN ARADA, CHRIS LASCH, *Tooling*, «Pamphlet Architecture», vol. 27, New York, Princeton Architecture Press 2006, p. 8.

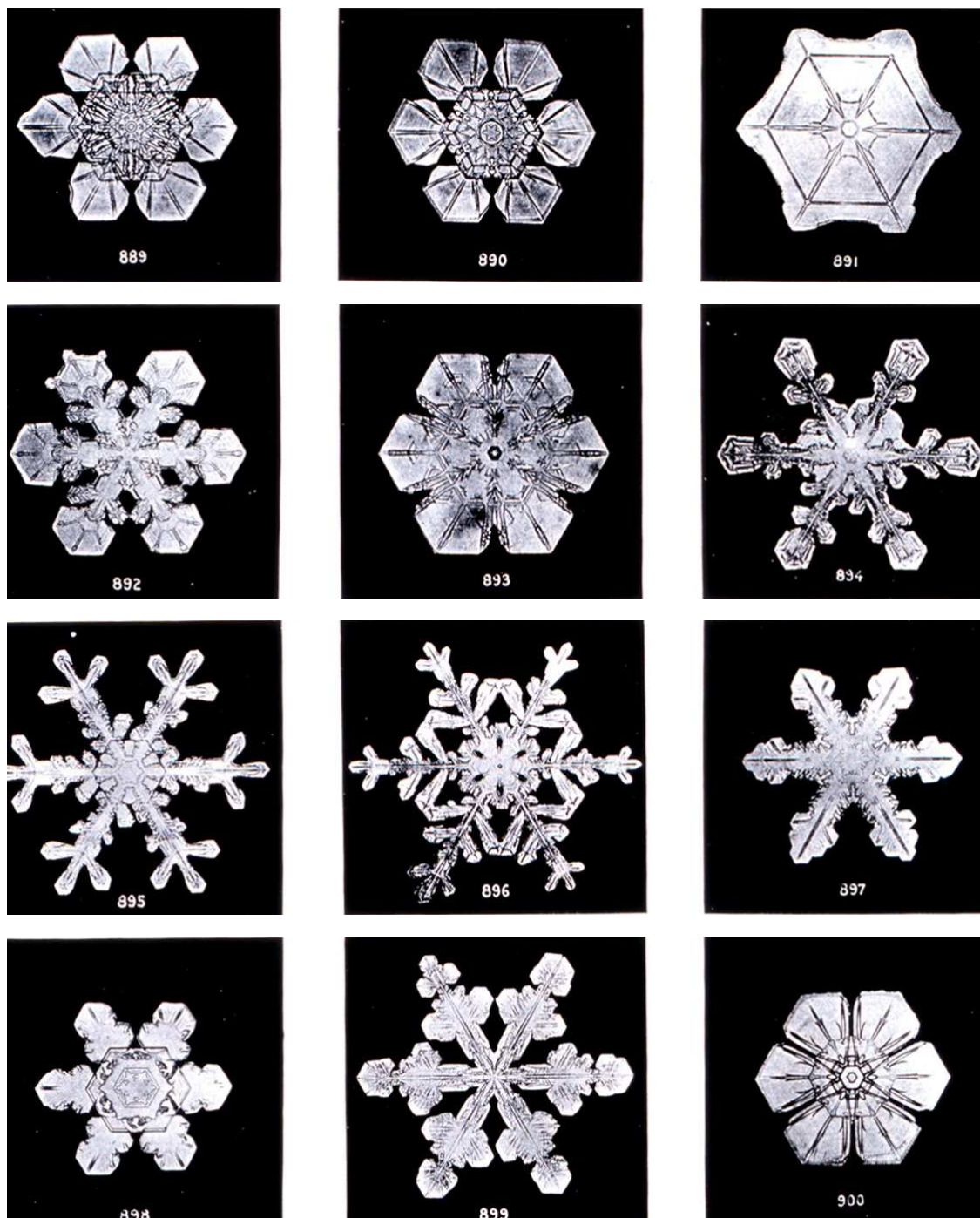


Fig. 73 – Immagini di fiocchi di neve realizzate da Wilson Bentley.
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/SnowflakesWilsonBentley.jpg> (consultato 28-11-2011).

Una forma è dotata di simmetria rotazionale a n -raggi (n -fold, dove n è un numero intero) con centro in un punto fisso P se, ruotata sul proprio piano rispetto a P di

$2\pi/n$ o di un suo multiplo intero, coincide con sé stessa² (fig. 74). Il punto fisso prende il nome di “centro della rotazione” mentre n è detto “ordine di simmetria”. È chiaro quindi che qualsiasi oggetto possiede almeno un ordine di simmetria pari a 1, generato da una rotazione completa di 360° . In questo caso si ricade nella trasformazione identità ed è possibile affermare che la figura risulta priva di simmetria rotazionale.

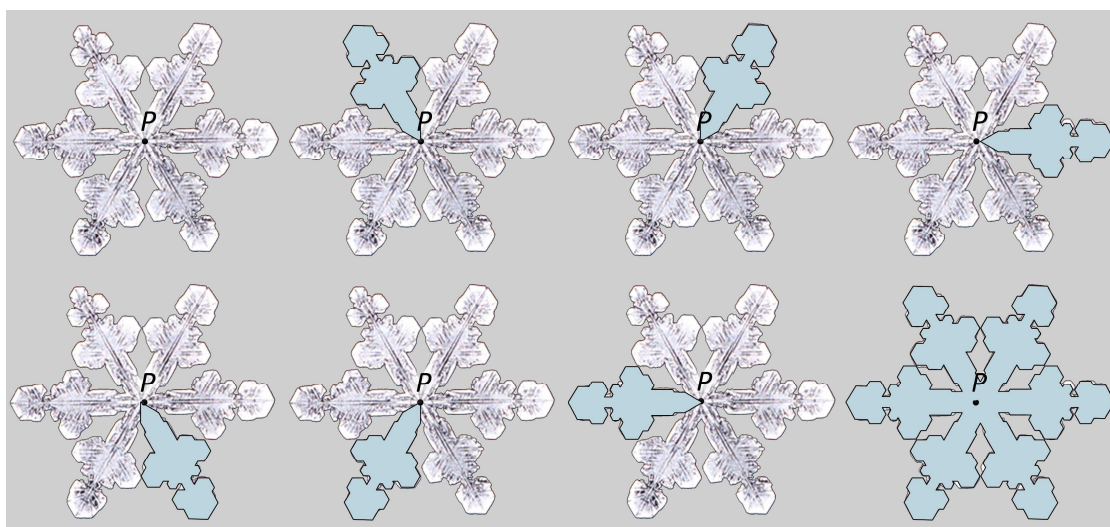


Fig. 74 – Fiocco di neve: esempio di simmetria a 6-raggi.

Un altro tipo di simmetria è la “traslazione”, che rappresenta l'invarianza di una forma sottoposta ad un movimento rigido secondo un vettore T o un suo multiplo intero. Nel campo dei *pattern* e delle tassellazioni si dice che gli elementi sono dotati di “simmetria di traslazione” se tutti i motivi o le tessere da cui sono formati possono essere portati a sovrapporsi su altri identici, attraverso spostamenti in tutte le direzioni³.

² CLARE E. HORNE, *Geometric symmetry in patterns and tilings*, Cambridge, The Textile Institute, Woodhead Publishing 2000, p. 8.

³ Ibidem.

L'antitraslazione è un'isometria del piano euclideo che si ottiene unendo una traslazione T con una simmetria di riflessione S avente l'asse parallelo alla direzione di T . Associando due antitraslazioni identiche si ottiene una traslazione di modulo doppio rispetto alla singola antitraslazione⁴ (fig. 75).

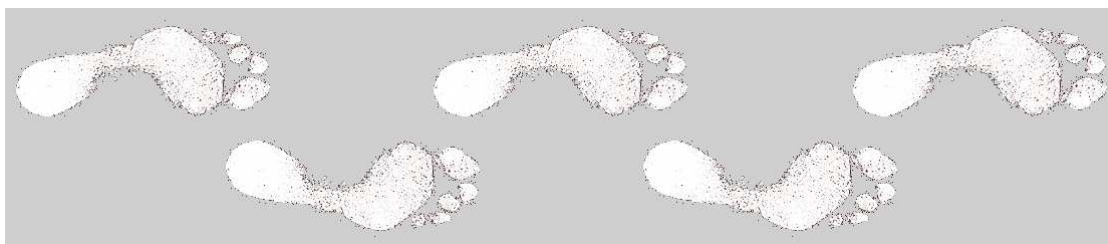


Fig. 75 – Impronte lasciate dai piedi: un classico esempio di antitraslazione.

Queste simmetrie sono anche dette “glissosimmetrie” o “glissoriflessioni” o ancora “simmetrie con scorrimento” e sono sempre invertenti in quanto composizioni di una trasformazione invertente (la simmetria di riflessione) e una non invertente (la traslazione). Occorre ancora precisare che, essendo la composizione di traslazioni commutativa, per ogni punto P risulta $S(T(P)) = (T(S(P)))$.

La simmetria di riflessione può essere considerata un caso particolare di antitraslazione con modulo di traslazione nullo, ossia si ricade in un'identità.

⁴ Ibidem.

2.3

Auto-similarità

«The idea of symmetry is familiar in everyday life, whether applied to solid object or to patterns and design. The essential feature of symmetrical object is that it can be divided into two or more identical parts: and furthermore that these parts are systematically disposed in relation to one another. [...] Many varieties of symmetry are found in decorative art and in the natural and other forms that surround us. But some natural forms, such as those of shells and plants, exhibit a structure in which parts are similar but differ in size, often diminishing at a uniform rate».

«L'idea di simmetria si ritrova comunemente nella vita quotidiana, applicata sia a oggetti concreti, a *pattern* o a disegni. La caratteristica essenziale di un oggetto simmetrico è di poter essere diviso in due o più parti identiche, disposte inoltre sistematicamente in relazione tra loro. [...] Molte tipologie di simmetria si riscontrano nelle arti decorative, nelle forme naturali e nelle altre forme che ci circondano. Tuttavia alcune forme naturali, come quelle di conchiglie e piante, presentano una struttura in cui le parti sono simili ma differiscono nelle dimensioni, che spesso diminuiscono in modo uniforme».

EDWARD HARRINGTON LOCKWOOD, ROBERT HUGH MACMILLAN, *Geometric Symmetry*, Cambridge, Cambridge University Press 2009, p. 1.

Il principio di “similarità”, uno dei concetti legati alla percezione investigati dalla *Gestalt*¹, asserisce che gli elementi simili vengono visti come gruppo singolo o unità in quanto interpretati dalla mente in stretta relazione tra loro, a differenza di quelli dissimili che non godendo di tale caratteristica sono percepiti distintamente².

Partendo dal concetto di similarità è quindi possibile pervenire a quello di “auto-similarità”, proprietà per la quale una figura è simile ad una parte superiore o minore

¹ WILLIS D. ELLOIS, *A Source Book of Gestalt Psychology*, Oxon (U.K.), Routledge 1999, p. 50.

KURT KOFFKA, *Principles of Gestalt Psychology*, San Diego, Harcourt 1935.

² WILLIAM LIDWELL, KRITINA HOLDEN, JILL BUTLER, *Universal Principles of Design*, Gloucester (U.S.A.), Rockport Publishers 2003, p. 184.

di sé stessa³. Le molte forme auto-similari presenti in natura tendono a mostrare questa caratteristica a scale differenti, come normalmente non avviene nelle figure create autonomamente dall'uomo. Una zona costiera, ad esempio, evidenzia lo stesso *pattern* compositivo di base sia che venga osservata a livello del mare o dallo spazio; quello che cambia è ovviamente il grado di dettaglio.

Le piante costituiscono esempi per eccellenza di auto-similarità⁴: si pensi alle felci o al cavolo broccolo (fig. 76).



Fig. 76 – Felce e cavolo broccolo.

<http://luirig.altervista.org/cpm/albums/bot-018/oreopteris-limbosperma13537.jpg> (consultato 28-11-2011).

<http://www.qualitativelife.com/mydailyveggie/files/2010/11/cavolobroccolo2.jpg> (consultato 28-11-2011).

Alla base di questa proprietà esiste un processo algoritmico, la “ricorsione” che ha luogo quando un sistema, ricevendo uno stimolo o un *input*, si modifica lievemente per poi alimentare con l'*output* un nuovo *input*. Questo circolo ricorsivo ammette come risultato sottili variazioni nella forma, in scala sempre più piccola, capaci di mantenere la riconoscibilità della figura originale.

³ BENOIT B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W. H. Freeman and Company 1983, pp. 19-23.

⁴ WILLIAM LIDWELL, KRITINA HOLDEN, JILL BUTLER, *Universal Principles of Design*, Gloucester (U.S.A.), Rockport Publishers 2003, p. 176.

L'auto-similarità ha trovato importanti impieghi nel campo delle scienze, dove un fenomeno viene definito "auto-similare" se le sue proprietà, in un dato istante, possono essere ricavate da quelle verificate in un momento diverso mediante trasformazioni di similarità. In termini matematici il concetto si esprime dicendo che una soluzione rispetto ad un'incognita x in un certo istante t_1 , in simboli $T(x, t_1)$, è simile alla soluzione $T(x, t_0)$ in un determinato attimo precedente t_0 ⁵.

Si tratta di una caratteristica che, se riscontrata, costituisce un progresso per la ricerca stessa, in quanto semplifica sia le procedure di calcolo sia la rappresentazione delle proprietà dei fenomeni analizzati; nella gestione dei dati sperimentali trasforma in un'unica curva o superficie ciò che altrimenti sarebbe una nuvola casuale di punti empirici⁶.

L'invarianza di scala è una forma perfetta di auto-similarità, dove ad ogni ingrandimento corrisponde una parte dell'oggetto simile al tutto, come avviene nei frattali.

⁵ G. I. BARENBLATT, *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*, Cambridge, Cambridge University Press 1996, p. XVIII.

⁶ *Ibidem*, p. 15.

2.4

Metamorfosi

«Life and metamorphosis do not merely have a historical dimension; they characterize forms in all circumstances, and the immediately perceived form takes on movement, is already movement».

«La vita e la metamorfosi non solo hanno una dimensione storica ma caratterizzano le forme in ogni circostanza e la forma appena percepita assume movimento, è già in movimento».

HENRI FOCILLON, *The Life of Forms in Art*, New York, Zone Books 1996³, p. 11.

Nei paragrafi precedenti sono state esaminate tutte le simmetrie (riflessione, traslazione, rotazione e antitraslazione) tipiche dei *pattern* periodici; spesso però alcune forme naturali, come conchiglie e piante, mostrano una struttura nella quale le singole parti sono simili, cioè differiscono solo per dimensione¹. Questo fenomeno, noto come autosimilarità², è abbastanza comune pur non essendo l'unico in cui le proprietà della simmetria non sono previste: le tassellature possono infatti subire delle "metamorfosi" nel corso del loro sviluppo spaziale o temporale.

La deformazione è un aspetto particolarmente apprezzato nei *pattern* contemporanei³ per le elevate possibilità estetiche che offre. La sua applicazione alle tassellazioni può avvenire in modo soggettivo o attraverso un processo geometrico-matematico⁴, che prende il nome di "interpolazione", un procedimento secondo cui, partendo da due tassellazioni T_1 e T_2 , è possibile ottenere una fluida transizione

¹ EDWARD HARRINGTON LOCKWOOD, ROBERT HUGH MACMILLAN, *Geometric Symmetry*, Cambridge, Cambridge University Press 2009, p. 1.

² Capitolo 2.3.

³ In questo caso l'accezione di "*pattern* contemporanei" indica quelli attualmente utilizzati in architettura e nell'*interior design*, anche in virtù delle nuove potenzialità offerte dalla modellazione parametrica.

⁴ CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, pp. 190-192.

geometrica da una all'altra. Occorre dunque stabilire una corrispondenza tra T_1 e T_2 mediante un parametro t , che si muove nell'intervallo da 0 a 1, al cui variare si ottiene una graduale deformazione delle tessere che consente il passaggio da T_1 a T_2 .

Questo ambito di analisi, denominato *parquet deformations*⁵, è stato affrontato in più occasioni da William Huff⁶ che si è ispirato direttamente alle *Metamorphosis* di Escher⁷, concentrandosi sul caso in cui T_1 e T_2 sono entrambi monoedrali (cioè ogni tassello è congruente a tutti gli altri attraverso traslazioni e rotazioni) e periodici (fig. 77). Si tratta di un particolare disegno ornamentale diffuso in seguito da Douglas Hofstadter⁸.

Negli esempi prodotti da Huff anche i passaggi intermedi tra i due *pattern* di origine sono tassellazioni monoedrali, con alcuni adattamenti delle tessere dovuti alla necessità di ricoprire il piano senza lacune. Ci troviamo però in presenza di una situazione che non è l'unica possibile, in quanto un'interpolazione tra due tassellazioni qualsiasi T_1 e T_2 prevede quattro differenti casistiche. I *pattern* geometrici infatti possono:

- essere della stessa tipologia isoedrale e avere sistemazioni congruenti dei vertici;
- appartenere a differenti tipologie isoedrali ma avere sistemazioni congruenti dei vertici;
- essere della stessa tipologia isoedrale;
- essere solamente isoedrali.

⁵ Branchia di *graphic design* in cui ogni disegno è una sorta di "animazione spaziale" nel piano, che evolve gradualmente lungo una o più dimensioni.

⁶ WILLIAM S. HUFF, *The Landscape Handscroll and the Parquet Deformation*, in: TOHRU OGAWA, KORYO MIURA, TAKASHI MASUNARI, DÉNES NAGY, *Katachi U Symmetry*, Tokyo, Springer-Verlag Tokyo 1996, pp. 307-314.

⁷ Capitolo 4.

⁸ DOUGLAS HOFSTADTER, *Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern*, New York, BasicBooks 1985, pp. 191-212.

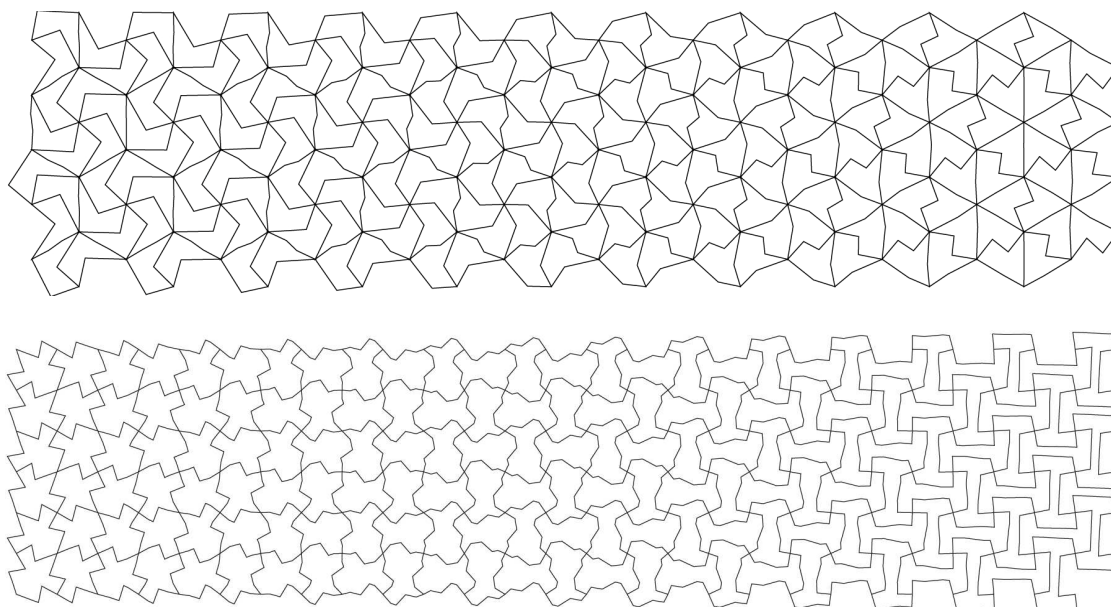


Fig. 77 – Esempi di *parquet deformations*: nel primo caso i *pattern* appartengono alla stessa tipologia isoedrale, nel secondo a tipologie differenti.

CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 190.

I primi due casi sono relativamente semplici da risolvere dal momento che esisterà sempre un movimento rigido capace di mappare i vertici di T_2 su quelli di T_1 . La presenza dei medesimi punti fissi in entrambe le tassellazioni permette di ridurre la casualità nella loro interpolazione, ma quando i *pattern* geometrici fanno parte di tipologie isoedrali differenti si rendono necessarie numerose posizioni intermedie.

Nel terzo caso l'appartenenza delle tassellature al medesimo tipo isoedrale consente una corrispondenza puntuale delle loro caratteristiche (tasselli, vertici e lati) ed è quindi possibile un'interpolazione lineare tra questi elementi. Occorre tuttavia stabilire in precedenza una relazione tra i vertici delle due tassellature per determinarne una variazione graduale. L'unico limite è rappresentato dal fatto che la metamorfosi di una tassellazione nell'altra possa risultare troppo repentina.

Il caso generale si presenta come il più complesso poiché l'interpolazione deve consentire di relazionare due tipologie distinte di tassellazioni, in mancanza di una corrispondenza diretta tra i vertici delle piastrelle. La tassellazione subisce così una

transizione topologicamente discontinua da un tipo isoedrale all'altro ma, come dimostrano gli esempi prodotti da Huff⁹, la trasformazione si mantiene fluida. Dove non è chiaro come scomporre il passaggio tra due tassellazioni può essere utile frazionare il problema per ricondurlo ad una delle casistiche di cui si conosce la soluzione. Non è comunque certo che risolvendo la transizione in modo lineare si giunga ad un risultato finale esteticamente piacevole.

Il concetto di *parquet deformations*, pur derivando da quello di tassellazione, è spesso sconosciuto per la scarsa attenzione attribuitagli dopo un inizio promettente. Gli esempi prodotti sono stati spesso rappresentati, per ragioni di comodità, sotto forma di una lunga striscia in cui si susseguono impercettibili variazioni dallo stadio iniziale a quello finale. A differenza dei *pattern* tradizionali che sono di tipo *space filling*, quindi non hanno un verso, questi disegni sono predisposti per essere "letti" da sinistra a destra o viceversa, anziché essere osservati nella loro interezza. In tal modo la trasformazione nel tempo di una tassellazione nell'altra viene resa secondo una prospettiva spaziale¹⁰.

I precursori delle *parquet deformations* si possono ritrovare in alcuni esempi prodotti da Lewis Day¹¹ (fig. 78) e nelle incisioni *Metamorphosis* di Mauritius Cornelis Escher¹² (figg. 79, 80 e 81), dove i primi risultano certamente meno approfonditi e sistematici rispetto all'opera di Escher.

⁹ WILLIAM S. HUFF, *The Landscape Handscroll and the Parquet Deformation*, in TOHRU OGAWA, KORYO MIURA, TAKASHI MASUNARI, DÉNES NAGY, *Katachi U Symmetry*, Tokyo, Springer-Verlag Tokyo 1996, pp. 307-314.

¹⁰ http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/papers/kaplan_gi2005.pdf (consultato 09-06-2010).

¹¹ LEWIS FOREMAN DAY, *Pattern Design*, London, B. T. Batsford 1903, pp. 26-28.

¹² F. H. BOOL, J. R. KIST, J. L. LOCHER, F. WIERDA, M. C. Escher: *His Life and Complete Graphic Work*, New York, Harry N. Abrams 1992, p. 280.

DOUGLAS HOFSTADTER, *Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern*, New York, BasicBooks 1985, p. 199.

<http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/papers/bridges2008.html> (consultato 09-06-2010).

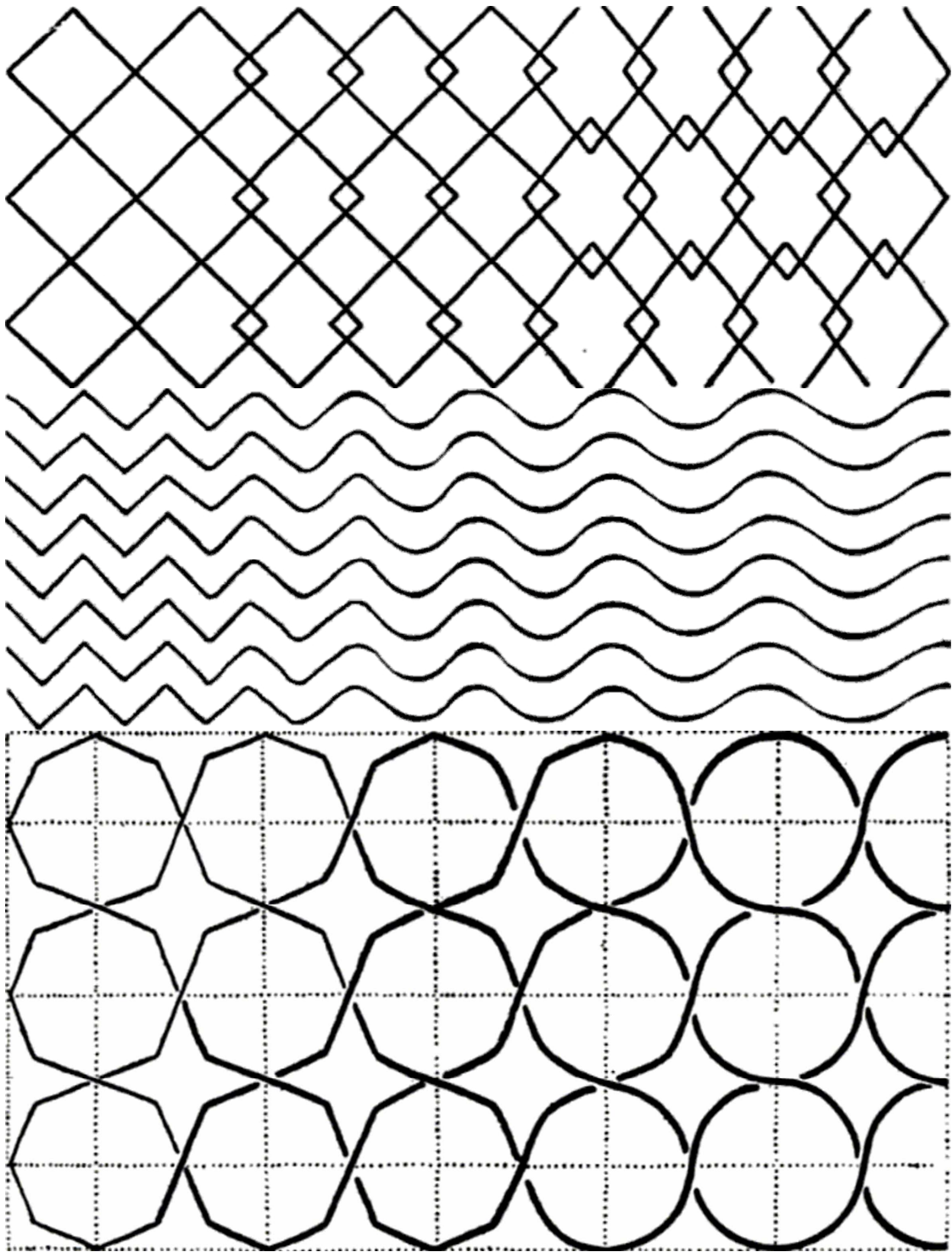


Fig. 78 – Soluzioni grafiche di Lewis Foreman Day che sembrano precedere le *parquet deformations*.

LEWIS FOREMAN DAY, *Pattern Design*, London, London, B. T. Batsford Ltd 1903, p. 28.

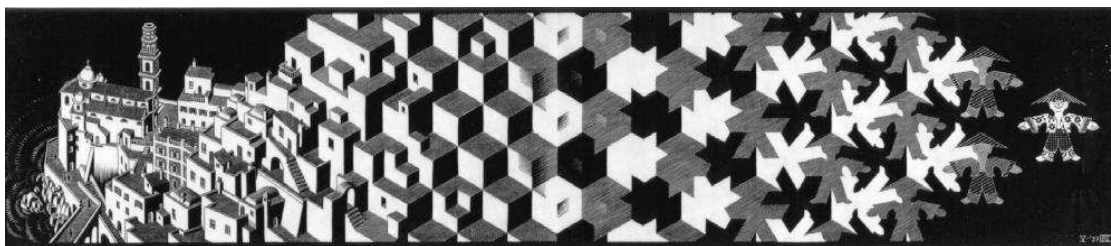


Fig. 79 – MAURITIUS CORNELIS ESCHER, *Metamorphosis I*, xilografia, 19,5 × 90,8 cm, 1937.

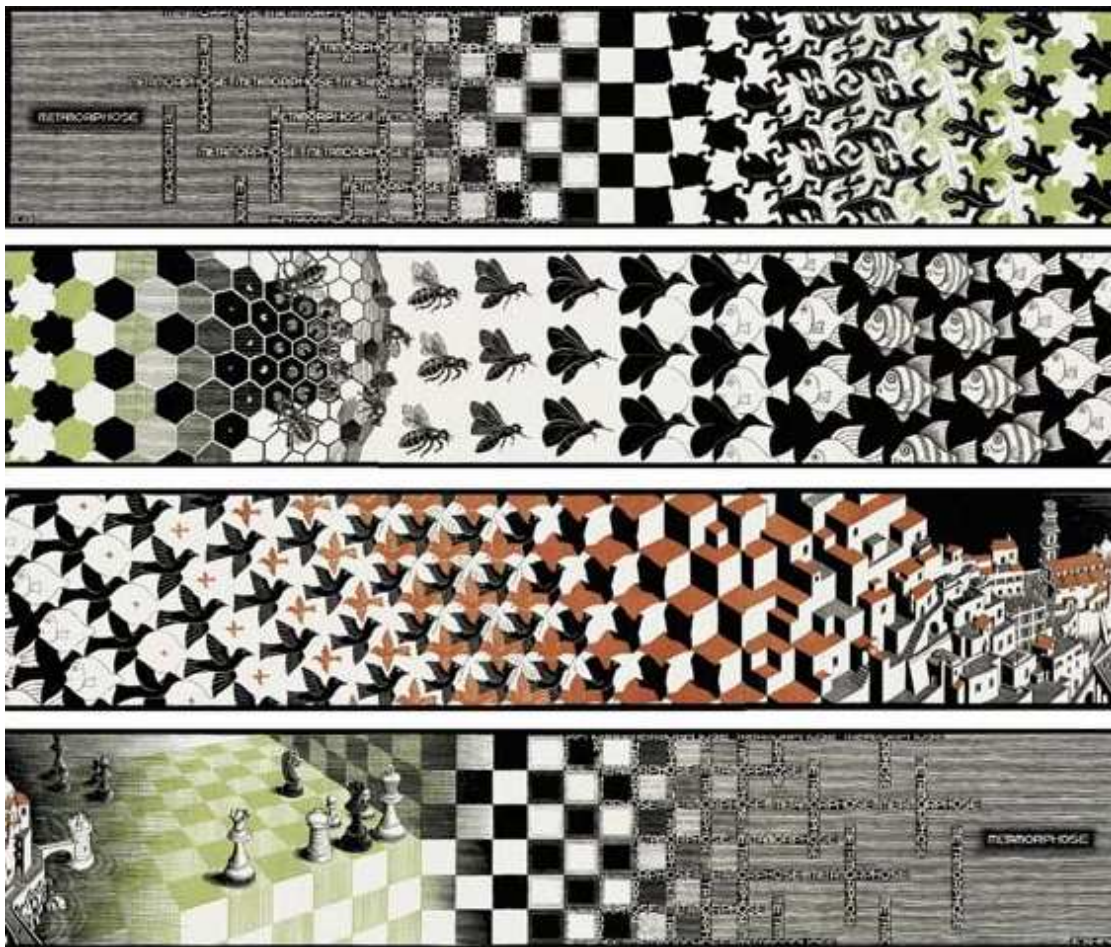


Fig. 80 – MAURITIUS CORNELIS ESCHER, *Metamorphosis II*, xilografia, 19,2 × 389,5 cm, 1939-1940.

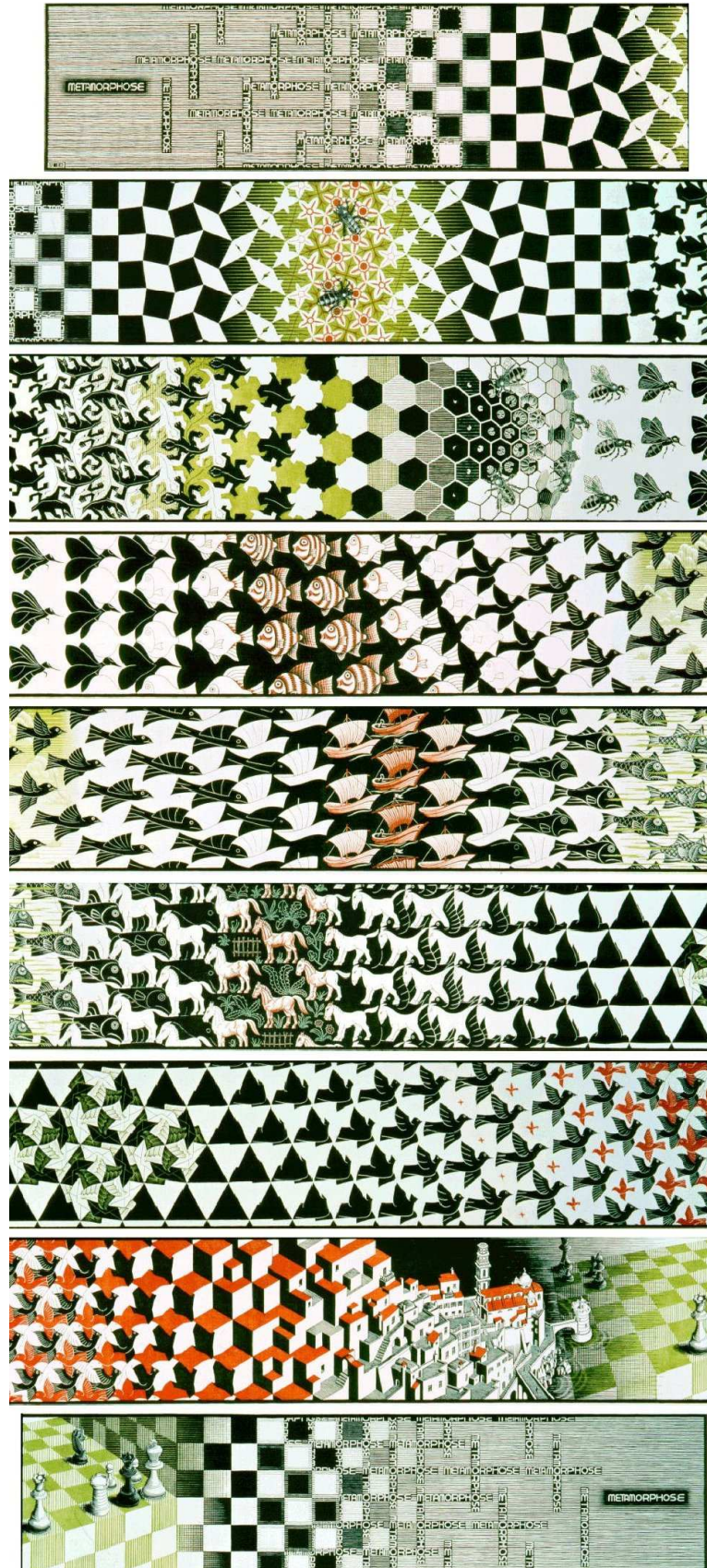


Fig. 81 – MAURITIUS CORNELIS ESCHER, *Metamorphosis III*, xilografia, 19 × 680 cm, 1967-1968.