3

Possibili approcci per una classificazione dei *pattern*

«*The first notion of weaving, which would be given by the plaiting of straws or strips of bark, instead of using them as a thin sheets, would have equally the same result of gradually forming the mind to an appreciation of a proper disposition of masses: the eye of the savage, accustomed only to look upon Nature's harmonics, would readily enter into the perception of the true balance both of form and colour: in point of fact, we find that it is so, that in savage ornament the true balance of both is always maintained*».

«Il primo concetto di tessitura, ottenuto dall'intrecciare cannucce o strisce di corteccia, anziché usarle come sottili fasce, otterrebbe ugualmente il medesimo risultato di predisporre gradualmente la mente ad apprezzare una corretta disposizione delle masse; l'occhio del selvaggio, abituato solo ad osservare le armonie della natura, potrebbe facilmente addentrarsi nella percezione del reale equilibrio di forme e colori: infatti riscontriamo che è così, che negli ornamenti dei selvaggi è sempre conservato il perfetto equilibrio di entrambi».

OWEN JONES, *The Grammar of Ornament*, London, Bernard Quaritch 1868, p. 15.

Mentre un singolo motivo può essere ideato senza alcun vincolo, nella composizione di un *pattern* si possono riscontrare delle limitazioni dovute alla necessità di combinare le varie forme. Tali restrizioni nell'accostamento degli elementi producono le "simmetrie" descritte nel capitolo precedente e consentono di classificare i *pattern* (mono, bi- e tridimensionali) in "gruppi".

Se la decorazione si sviluppa lungo una sola direzione risultano possibili sette tipologie di *pattern*, distinte nei "*Frieze Groups*" (gruppi "fregio"), mentre salgono a diciassette nel caso di soluzioni bidimensionali classificate come "*Wallpaper Groups*" (gruppi "carta da parati"). Alcune limitazioni si riscontrano anche nei *pattern* tridimensionali[1], suddivisi in 219 gruppi cristallografici[2] (o 230 se le

[1] EDWARD HARRINGTON LOCKWOOD, ROBERT HUGH MACMILLAN, *Geometric Symmetry*, Cambridge, Cambridge University Press 2009, p. 1.

immagini speculari vengono considerate gruppi distinti)[3] che però non verranno trattati nel presente lavoro.

Nel caso di *pattern* bi- e tridimensionali si fa riferimento alle classificazioni proprie della cristallografia[4], una suddivisione che, seppur non condivisa universalmente[5], è quella che finora ha riscosso i maggiori consensi.

La ragione di tale scelta è da ricercare nel passato della disciplina secondo cui, prima dello sviluppo della cristallografia mediante diffrazione dei raggi X, lo studio dei cristalli era fondato sulle caratteristiche geometriche e sulla misurazione degli angoli che le loro facce formano rispetto ad assi di riferimento teorici, detti "assi cristallografici". Questo tipo di impostazione permetteva di ricavare un modello finale con cui identificare le simmetrie del cristallo.

---

[2] Nel 1894 sono stati enumerati indipendentemente da William Barlow (Inghilterra), Yevgraf Stepanovich Fyodorov (Russia) e Arthur Moritz Schoenflies (Germania).

[3] JOHN H. CONWAY, O. DELGADO FRIEDRICHS, D.H. HUSON, W. P. THURSTON, *On three-dimensional space groups*, «Beiträge zur Algebra und Geometrie», n. 2, vol. 42, 2001, pp. 475-476.

[4] Branca della scienza che studia la disposizione geometrica delle varie parti che compongono i cristalli.

NICOLA ZINGARELLI, *Vocabolario della lingua italiana*, Bologna, Zanichelli 2004, *ad vocem*, p. 479.

[5] SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, pp. 114-133.

3.1

Teoria dei Gruppi

«*The whole [...] is therefore more than the sum of its parts*».

«Il tutto [...] è quindi più della somma delle sue parti».

KLAUS MAINZER, *Symmetry and complexity. The spirit and beauty of nonlinear science*, London, World Scientific Publishing 2005, p. 199.

Il concetto di "gruppo" ha un significato particolare in matematica, essendo una struttura algebrica formata da un insieme legato ad un'operazione binaria[1] che soddisfa alcuni assiomi, come l'associatività[2], l'esistenza dell'elemento neutro (detto "unità" o "elemento identità") e dell'inverso. La "teoria dei Gruppi" nasce con gli studi sulle equazioni polinomiali, iniziati da Évariste Galois[3] negli anni '30 dell'Ottocento; ricevette in seguito contributi da altri settori della matematica e si giunse alla sua formulazione intorno al 1880. Verso la fine dello stesso secolo, fu generalizzata e definita nei termini ancora oggi accettati.

È una teoria che viene applicata per lo studio delle simmetrie nelle figure geometriche mentre nelle discipline fisiche permette di cogliere le simmetrie, o gli automorfismi[4], delle strutture. Per una data figura F appartenente ad uno spazio S, l'insieme $\Sigma(F)$ delle simmetrie (rotazioni, riflessioni, traslazioni e antiriflessioni), applicate ad un oggetto che lo lasciano identico a sé stesso, determina un "gruppo

[1] Funzione che richiede due argomenti dello stesso insieme X e restituisce un altro elemento sempre appartenente ad X.

[2] Proprietà matematica secondo la quale l'ordine con cui compare più volte una stessa operazione è indifferente.

[3] Matematico francese, coniò il termine "gruppo" e stabilì una connessione, conosciuta come "teoria di Galois", tra la nascente teoria dei gruppi e la teoria dei campi. I gruppi divennero importanti per la prima volta nella geometria proiettiva e, più tardi, nelle geometrie non euclidee.

[4] Trasformazione che permette di mappare un certo oggetto matematico su sé stesso preservando tutte le sue strutture caratteristiche.

di simmetria"[5] di *F* o *G*(*F*). La teoria dei Gruppi e quella della rappresentazione si dimostrano pertanto strettamente correlate[6], dal momento che i gruppi stessi possono essere efficacemente applicati alla classificazione dei *pattern*.

Una definizione riconducibile a Grünbaum e a Shephard[7] afferma che un *patch* *U*, appartenente ad uno spazio *S*, è una "regione fondamentale" del gruppo di simmetria *G*(*F*) se rispetta le seguenti condizioni:

- *U* è un insieme connesso senza vuoti interni;
- non esistono due punti di *U* che possano essere trasformati l'uno nell'altro da *G*(*F*) (in simboli: dati P_1, $P_2 \in U$, non esiste una trasformazione $\sigma \in G(F) \mid \sigma (P_1) = P_2$)
- *U* è il più grande possibile, ovvero non esiste nessun altro insieme, per il quale siano soddisfatte le condizioni precedenti, che contenga *U* come proprio sottoinsieme.

La prima condizione assicura che la regione fondamentale sia topologicamente semplice mentre le altre due garantiscono che abbia le informazioni sufficienti per ricostruire l'intero *pattern*. La regione fondamentale contiene infatti una singola copia, non ridondante, di tutte le informazioni necessarie per disegnare l'intera figura; sarà quindi sufficiente eseguirne altre, rispettando le trasformazioni del gruppo di simmetria di appartenenza, per completare la tassellazione[8].

I gruppi di simmetria possono anche essere definiti "*full symmetry Groups*" (gruppi di piena simmetria) per enfatizzare il fatto che contengono isometrie

---

[5] Craig S. Kaplan, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 23.

[6] Dorothy Koster Washburn, Donald W. Crowe, *Symmetries of Culture. Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*, Washington, University of Washington Press 1998[3], p. 9.

[7] Branko Grünbaum, Geoffrey C. Shephard, *Tilings and Patterns*, New York, W. H. Freeman and Company 1987.

[8] Craig S. Kaplan, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 24.

invertenti, come riflessioni, antitraslazioni e rotazioni improprie[9] (altrimenti dette antirotazioni). Si indicherà invece come “gruppo di simmetria proprio” il sottogruppo delle isometrie (traslazioni, rotazioni e loro composizioni) che conservano l’orientamento, lasciando la figura uguale a sé stessa.

Secondo Lewis Foreman Day[10], nella creazione di un *pattern* la scelta di un gruppo di simmetria in luogo di un altro è importante per il risultato estetico finale. Il successo di un disegno ripetitivo dipende, in massima parte, dalle regole in base alle quali è costruito, dal momento che la sua bellezza non è principalmente dovuta agli elementi contenuti bensì al loro corretto utilizzo come unità in uno schema ritmico.

[9] Trasformazioni costituite dalla combinazione di una rotazione attorno ad un asse con una riflessione rispetto ad un piano perpendicolare all'asse stesso.

[10] LEWIS FOREMAN DAY, *Pattern Design*, London, B. T. Batsford 1903, p. 6.

3.2

Frieze Groups

«*It is easier, as William Morris confessed, to design a big hand-made carpet, in which the artist is free to do very much as he likes, than to plan a small repeating pattern to the width of Wilton pile or common Kidderminster. The art of pattern design consists not in spreading yourself over a wide field, but in expressing yourself within given bounds*».

«È più facile, come afferma William Morris, disegnare un grande tappeto prodotto a mano, nel quale l'artista è libero di fare tutto ciò che vuole, che creare un piccolo *pattern* periodico per la lunghezza di una moquette Wilton o di un banale Kidderminster[1]. L'arte del disegno dei *pattern* non consiste nell'esprimersi con libertà, ma nel farlo entro limiti definiti».

LEWIS FOREMAN DAY, *Pattern Design*, London, B. T. Batsford 1903, p. 2.

La tipologia più semplice dei *pattern* è quella in cui i motivi si susseguono all'infinito lungo un'unica direzione, come nel caso delle modanature e dei fregi. Questi elementi, lungamente studiati e classificati nei gruppi isometrici[2], sono chiamati "*Frieze Groups*" (gruppi fregio). Il nome non è casuale dal momento che in matematica il termine "fregio" indica una figura piana, illimitata, il cui gruppo di simmetria contiene traslazioni in un'unica direzione secondo multipli di un vettore-base. Si tratta di decorazioni riscontrabili fin dall'antichità e caratterizzate da un andamento che si sviluppa con frequenza regolare.

Dall'associazione delle quattro trasformazioni isometriche fondamentali[3] si ottengono i sette *Frieze Groups*[4] che prevedono rispettivamente: traslazione, traslazione e rotazione rispetto al centro, riflessione orizzontale, riflessione

---

[1] Manifattura di tappeti attiva nel Regno Unito sin dal 1735.

[2] Gruppi di simmetria contraddistinti da trasformazioni lineari del piano o dello spazio che mantengono invariata la distanza tra punti.

[3] Paragrafi 2.1 e 2.2.

[4] MARK ANTHONY ARMSTRONG, *Groups and Symmetry,* New York, Springer-Verlag 1988, pp. 164-165.

orizzontale e traslazione, riflessione verticale, riflessione verticale e rotazione rispetto al centro, rotazione rispetto ad un vertice[5] (fig. 82).

(p111) (pmm2) (p1m1) (p1a1)

(pm11) (p112) (pma2)

Fig. 82 – I sette *Frieze groups*.

Il modo con cui vengono annotati[6] proviene dalla cristallografia e utlilizza quattro simboli (numeri e lettere) così composti:

- il primo simbolo è sempre una *p*;
- il secondo può essere *m* o *1*, dove *m* (*mirror*) indica che la figura contiene riflessioni rispetto a rette verticali;

---

[5] Victor Ostromoukhov, *Mathematical Tools for Computer-Generated Ornamental Patterns*, in: *Electronic Publishing, Artistic Imaging and Digital Typography* , «Lectures Notes in Computer Science», vol. 1375, 1998, p. 195.

[6] Maria Linda Falcidieno (a cura di), *Le scienze per l'architettura. Frammenti di sapere*, Firenze, Alinea Editrice 2010, pp. 22-25.

http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=16 (consultato 04-10-2011).

- il terzo può essere *m*, *a* o *1*; in questo caso *m* individua una riflessione rispetto a una retta orizzontale e *a* indica un'antiriflessione rispetto alla stessa retta orizzontale;
- il quarto carattere è *2* se il gruppo di simmetria contiene rotazioni di 180°, altrimenti è *1*.

3.3

Wallpaper Groups

> «*The daisies make a pattern on the lawn, the pebble on the path, thee death leaves in the lane; the branches of the trees above; the naked twigs against the sky, the clouds that mottle the blue heavens by day, the stars that diaper their depths by night, all make perpetual pattern*».
>
> «Tutto produce un eterno *pattern*: le margherite in un prato, la ghiaia in un sentiero, le foglie morte in un vicolo, i rami degli alberi tesi verso l'alto, i rami nudi contro il cielo, le nuvole che screziano il cielo azzurro di giorno, le stelle che ne tappezzano la profondità di notte».
>
> LEWIS FOREMAN DAY, *Pattern Design*, London, B. T. Batsford 1903, p. 3.

I *Wallpaper Groups*[1] (letteralmente "gruppi carta da parati"), conosciuti anche come "gruppi piani di simmetria" o "gruppi cristallografici piani", sono diciassette e si riferiscono ai *pattern* bidimensionali[2] (fig. 83); essi rappresentano una classificazione intermedia tra i più semplici *Frieze Groups*[3], che riguardano i *pattern* monodimensionali, e i gruppi cristallografici tridimensionali. Nel piano euclideo sono i più usati[4] anche se non esiste un'unica classificazione universalmente condivisa[5]. Questo tipo di notazione prevede una distinzione dei *pattern* in base alle simmetrie

---

[1] BRANKO GRÜNBAUM, GEOFFREY C. SHEPHARD, *Interlace Patterns in Islamic and Moorish Art*, «Leonardo», n. 3-4, vol. 25, 1992, pp. 331-339.

[2] CLARE E. HORNE, *Geometric symmetry in patterns and tilings*, Cambridge, The Textile Institute, Woodhead Publishing 2000, p. 14.

[3] Paragrafo 3.2.

[4] A. V. SHUBNIKOV, V. A. KOPTSIK, *Symmetry in Science and Art*, New York, Plenum Publishing Corporation 1974.

BRANKO GRÜNBAUM, GEOFFREY C. SHEPHARD, *Tilings and Patterns*, New York, W. H. Freeman and Company 1987.

[5] SYED JAN ABAS, AMER SHAKER SALAMAN, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, London, World Scientific Publishing 1995, pp. 114-133.

contenute (traslazioni, rotazioni, riflessioni e antiriflessioni[6]) e al reticolo di base[7], che può essere quadrato, rettangolare, a parallelogramma, romboidale ed esagonale (o triangolare). Ogni *pattern* periodico può infatti essere associato ad un reticolo di punti a cui sono collegati due vettori V_1 e V_2, che lo lasciano invariato dopo la traslazione secondo la combinazione lineare nV_1+mV_2 (con n e m numeri interi)[8]. Il reticolo è una delle caratteristiche di ogni gruppo di simmetria e il *patch* minore, che non muta dopo la traslazione nV_1+mV_2, prende il nome di "unità del reticolo" o "unità di traslazione".

La classificazione dei *Wallpapers Groups*, che risale alla fine del XIX secolo e fu introdotta da Evgraf Stepanovič Fedorov[9], Arthur Moritz Schönflies[10] e William Barlow[11], consente di identificare i *pattern* mediante differenti convenzioni di nomenclatura.

Tra le numerose annotazioni proposte nel corso dei secoli quella qui riportata fa riferimento ai gruppi di simmetria ed è stata adottata dall'*International Union of*

---

[6] MARTIN VON GAGERN, JÜRGEN RICHTER-GEBERT, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*, «The Electronic Journal of Combinatorics», n. 2, vol. 16, 2009, pp. 5-7.

[7] http://radicalart.info/PDF/Rotator%20Engine.pdf (consultato 28-09-2011).

[8] VICTOR OSTROMOUKHOV, *Mathematical Tools for Computer-Generated Ornamental Patterns*, in: *Electronic Publishing, Artistic Imaging and Digital Typography*, «Lectures Notes in Computer Science», vol. 1375, 1998, pp. 195-196.

[9] Matematico e mineralogista russo, il cui principale interesse fu lo studio dei politopi.

EVGRAF STEPANOVIČ FEDOROV, *Symmetry of Crystals*, New York, American Crystallographic Association 1971.

[10] Matematico tedesco, noto per I suoi contributi all'applicazione della teoria dei Gruppi nella cristallografia.

ARTHUR MORITZ SCHÖNFLIES, *Krystallsysteme und Krystallstructur*, Leipzig, B. G. Teubner 1891.

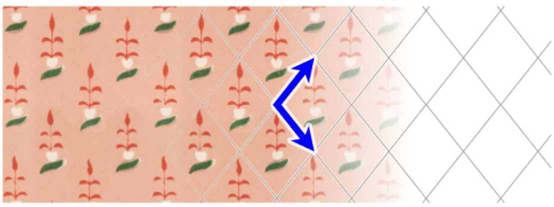
[11] Scienziato inglese, considerato uno dei fondatori delle moderne teorie cristallografiche. Nel 1894, indipendentemente da Fedorov, stabilì i 230 gruppi spaziali così importanti per determinare la struttura cristallina con i raggi X.

http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/history.html (consultato 28-09-2011).

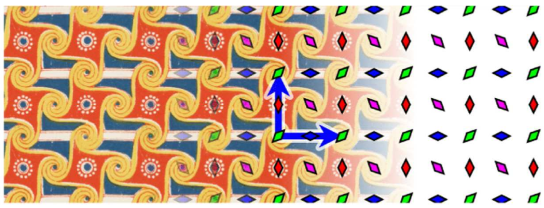
Crystallography nel 1952[12]. Le diciassette simmetrie incluse nella nomenclatura cristallografica[13] sono così denominate: *p1*, *p2*, *pm*/*p1m*, *pg*/*p1g*, *pmm*/*p2mm*, *pmg*/*p2mg*, *pgg*/*p2gg*, *cm*/*c1m*, *cmm*/*c2mm*, *p4*, *p4m*/*p4mm*, *p4g*/*p4gm*, *p3*, *p3m1*, *p31m*, *p6*, *p6m*/*p6mm*.

Si tratta di una classificazione che usa lettere e numeri per identificare la cella scelta, il più alto numero di rotazioni presenti e le simmetrie fondamentali. Con *p* viene indicato che si tratta di una "cella primitiva" (*primitive cell*) con i vertici nei centri di rotazione del grado più alto, mentre *c* individua una "cella centrata" (*centered cell*) nella quale gli assi di riflessione sono perpendicolari a uno o ad entrambi i lati della cella.

Il numero n>1 (*n-fold rotation*), posto dopo la prima lettera, indica l'ordine più alto di rotazione, cioè il numero di immagini ruotate che si ripetono attorno ad ogni singola cella o unità; se il più alto ordine di rotazione è α=180° allora n=1 o 2, se α=45° allora n=4, se α=60° allora n=3 o 6. Infine *m* (*mirror*) rappresenta la presenza di una simmetria di specularità e *g* (*glide reflection*) di un'antitraslazione, mentre *1* indica l'assenza di un asse di simmetria per la riflessione o l'antiriflessione per la lettera precedente. La mancanza di simboli nella terza o quarta posizione significa che il gruppo non contiene riflessioni o antiriflessioni[14] (fig. 84).



p1



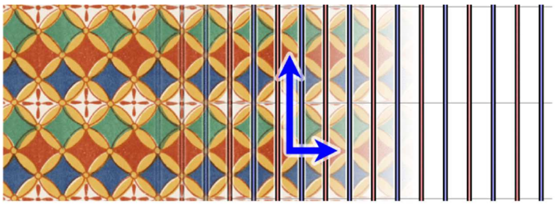
p2

[12] N. F. M. Henry, K. Lonsdale, *International Tables for X-Ray Crystallography*, Birmingham, Kynoch Press 1952, vol. 1.

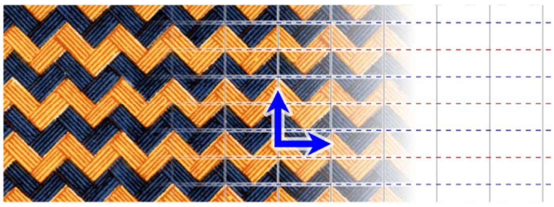
http://www.mx.iucr.org/iucr-top/comm/cteach/pamphlets/13/node5.html (consultato 28-09-2011).

[13] Doris Schattschneider, *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*, «American Mathematical Monthly», n. 6, vol. 85, 1978, pp. 439-450.

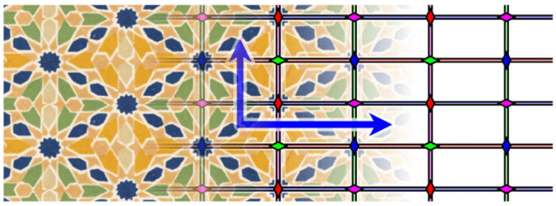
[14] Martin von Gagern, Jürgen Richter-Gebert, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*, «The Electronic Journal of Combinatorics», n. 2, vol. 16, 2009, p. 5.



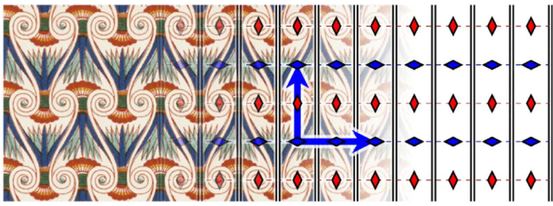
pm



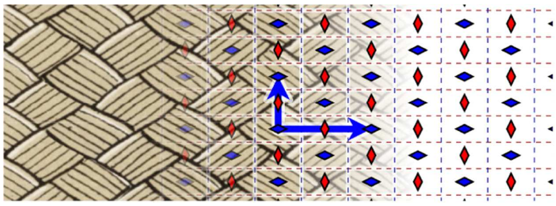
pg



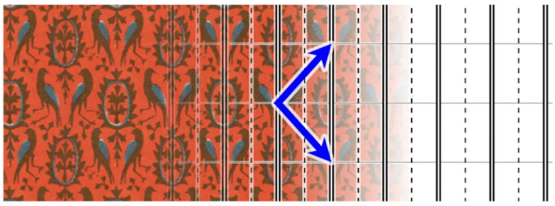
pmm



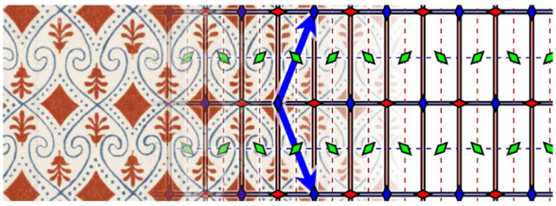
pmg



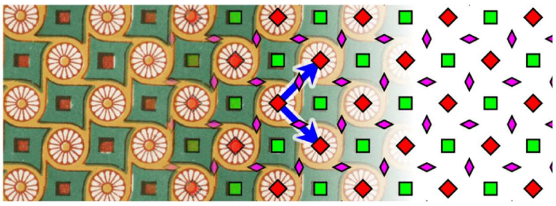
pgg



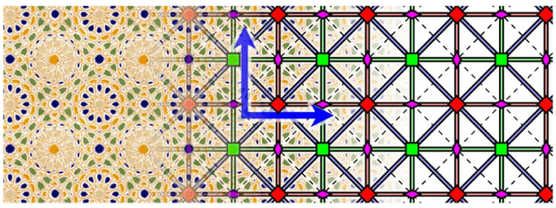
cm



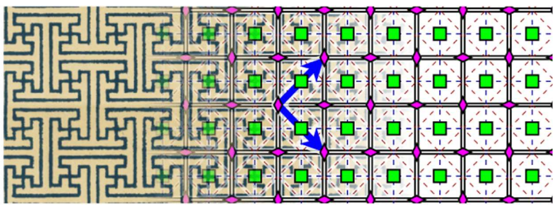
cmm



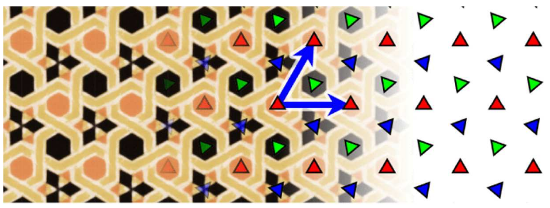
p4



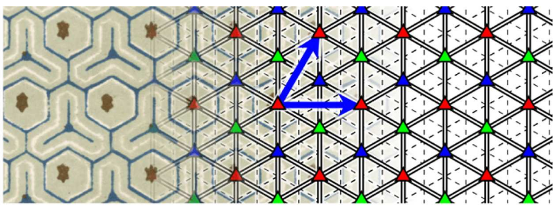
p4m



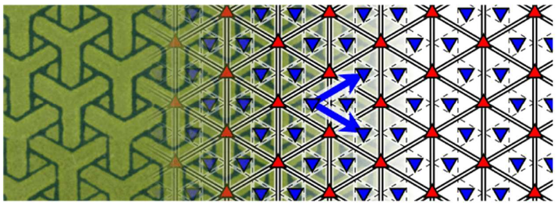
p4g



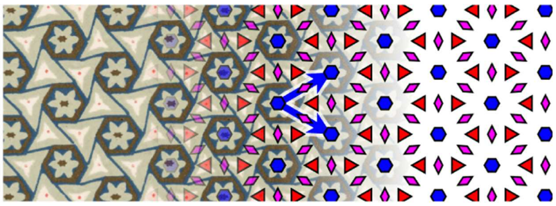
p3



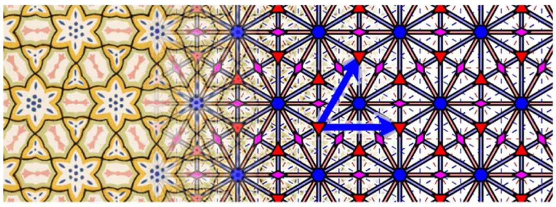
p3m1



p31m



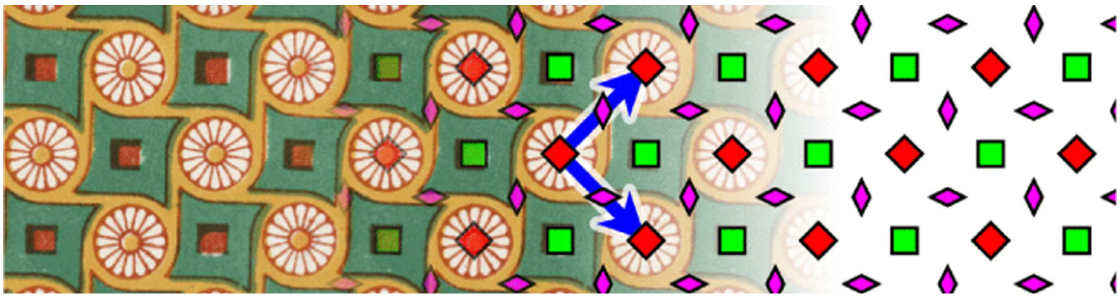
p6



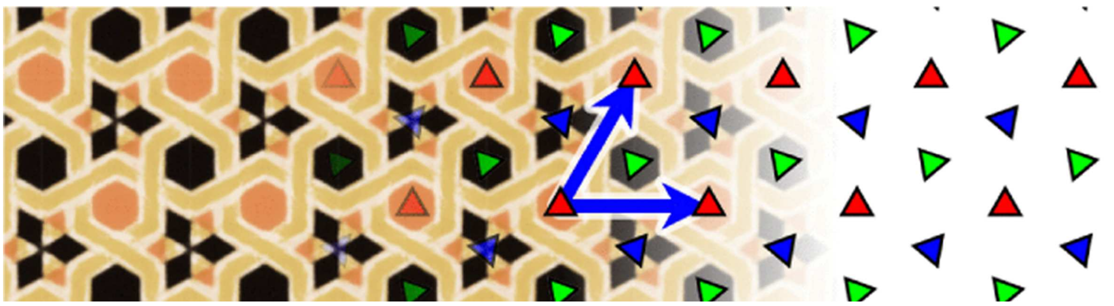
p6m

Fig. 83 – Tavola in cui si descrivono i *Wallpaper Groups* portando come esempio alcuni *pattern* pubblicati da Owen Jones nel 1910[15]. Il rombo individua un centro di simmetria a due raggi, il triangolo equilatero uno a tre raggi, il quadrato e gli esagoni rispettivamente quelli a quattro e a sei; le doppie linee rappresentano le riflessioni, i poligoni i centri di rotazione e le linee tratteggiate le antitraslazioni.

MARTIN VON GAGERN, JÜRGEN RICHTER-GEBERT, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*, «The Electronic Journal of Combinatorics », n. 2, vol. 16, 2009, pp. 5-7.

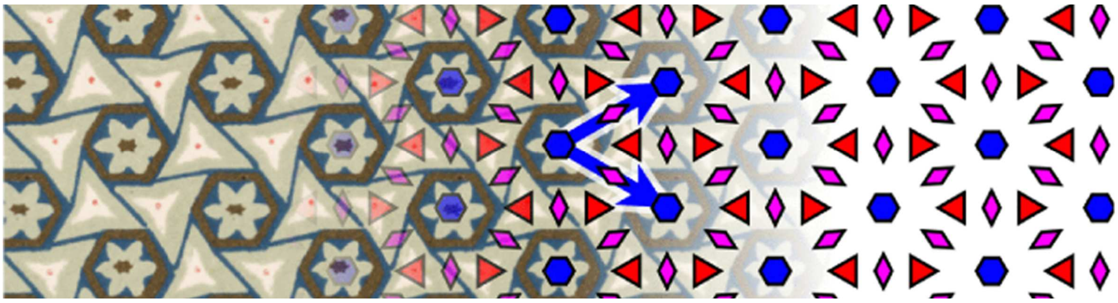


p4

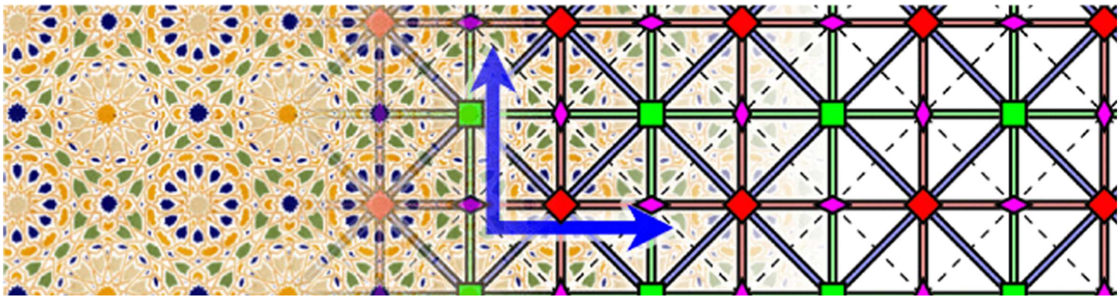


p3

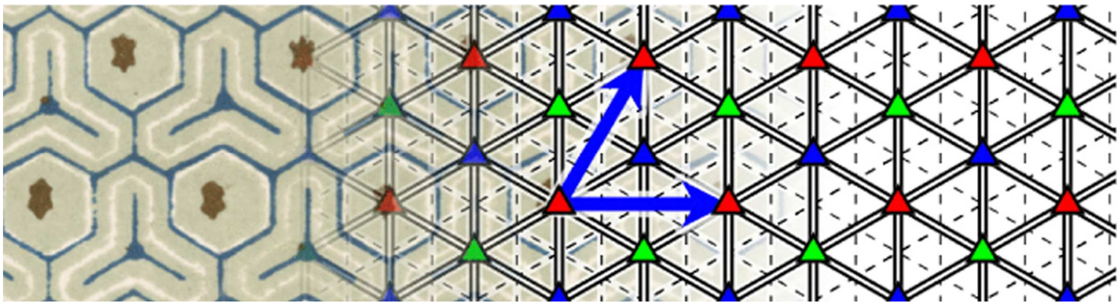
[15] OWEN JONES, *The Grammar of Ornament*, London, Bernard Quaritch 1868.



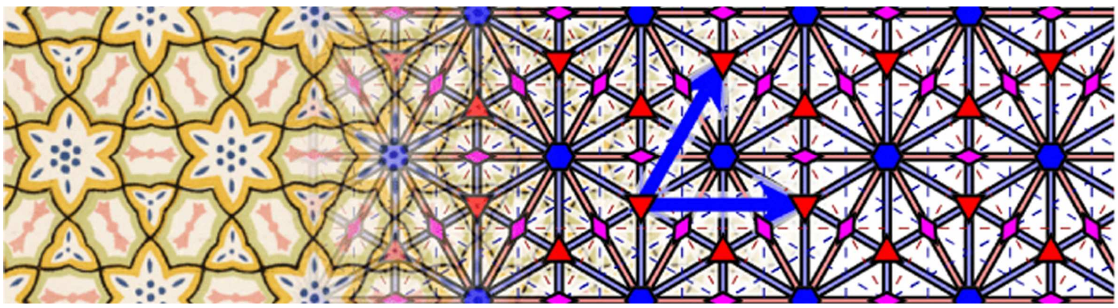
p6



p4m



p3m1



p6m

Fig. 84 – I gruppi *p4*, *p3* e *p6* sono i sottogruppi corrispondenti a *p4m*, *p3m1*, *p6m* privi di riflessione.

Un sistema alternativo di notazione, detto *orbifold*, messo a punto da John H. Conway[16], si compone di simboli che rappresentano i generatori del gruppo: un numero intero *n* indica la presenza di rotazioni *n*-assiali, il segno * l'esistenza di riflessioni, la lettera *x* la presenza di un'antitraslazione. Se il numero compare dopo l'asterisco significa che i centri delle rotazioni coincidono con l'intersezione delle linee di specularità. Secondo Conway la notazione *orbifold* permette una comprensione più geometrica dei gruppi rispetto a quella cristallografica[17].

È possibile riscontrare un corrispondenza diretta tra i *Wallpapers Groups* (*p1*, *p2*, *pm/p1m*, *pg/p1g*, *pmm/p2mm*, *pmg/p2mg*, *pgg/p2gg*, *cm/c1m*, *cmm/c2mm*, *p4*, *p4m/p4mm*, *p4g/p4gm*, *p3*, *p3m1*, *p31m*, *p6*, *p6m/p6mm*) e i gruppi *orbifold* (*o, 2222, **, xx, *2222, 22*, 22x, x*, 2*22, 442, *442, 4*2, 333, *333, 3*3, 632, *632*).

[16] JOHN H. CONWAY, D. H. HUSON, *The Orbifold Notation for Two-Dimensional Groups*, «Structural Chemistry», n. 3-4, vol. 13, 2002, pp. 247-257.

[17] DORIS SCHATTSCHNEIDER, *The Plane Symmetry Groups. Their Recognition and Notation*, «American Mathematical Monthly», n. 6, vol. 85, 1978, pp. 439-450.