

## **Pattern iperbolici**

«Ma ecco, tuttavia, che cosa occorre rivelare: posto che Dio esista, e che abbia realmente creato la terra, questa, come tutti sappiamo, è stata creata secondo la geometria euclidea, e l'intelletto umano è stato creato idoneo a concepire soltanto uno spazio a tre dimensioni. Vi sono stati, invece, e vi sono anche ora, geometri e filosofi, e anzi i più grandi, i quali dubitano che tutta la natura, o più ampiamente, tutto l'universo, sia stato creato secondo la geometria euclidea, e s'avventurano persino a supporre che due linee parallele, che secondo Euclide non possono a nessun patto incontrarsi sulla terra, potrebbero anche incontrarsi prima o dopo nell'infinito. E così cuore mio, io ho tratta la conclusione che, se nemmeno questo mi riesce intellegibile, come potrei mai innalzarmi al concetto di Dio?».

FÉDOR MICHAÏLOVIC DOSTOEVSKIÏ, *I Fratelli Karamazov*, Milano, Einaudi 1993, p. 314.

Il V postulato di Euclide, noto come “postulato delle parallele”, è stato fonte di grandi controversie nella storia della matematica e ha portato ad una delle maggiori rivoluzioni in campo geometrico.

In qualsiasi sistema logico gli assiomi sono considerati verità indimostrabili; il postulato delle parallele però, se confrontato con i precedenti, risulta alquanto macchinoso al punto che Euclide stesso rimandò a lungo la sua stesura e lo introdusse solo per dimostrare la ventinovesima proposizione<sup>1</sup>. Per secoli i matematici si sono scontrati con il suo enunciato e hanno cercato di sostituirlo con un assioma più semplice o di farlo derivare dai quattro precedenti, ma nessuno dei due approcci ha avuto successo in quanto erano richiesti presupposti equivalenti al

---

<sup>1</sup> Una retta che interseca due rette parallele determina angoli alterni interni e angoli corrispondenti congruenti mentre gli angoli coniugati interni risultano supplementari, la loro somma è cioè pari a due angoli retti.

postulato stesso<sup>2</sup>. Tutti gli sforzi portarono a ritenere la geometria euclidea l'unica possibile, perché era impensabile che potesse esistere una geometria che risultasse perfettamente valida e coerente senza il postulato delle parallele.

Nel XIX secolo la matematica attraversò una crisi fondamentale per il suo riassetto, ma un importante passo avanti venne compiuto grazie all'opera dell'ungherese János Bolyai, del tedesco Johann Carl Friedrich Gauss e del russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky<sup>3</sup> i quali si accorsero, separatamente, che il V postulato era in realtà indipendente dal resto della geometria euclidea e non poteva essere né verificato né confutato dagli altri assiomi.

La geometria non euclidea di Bolyai, Gauss e Lobachevsky si fonda sui primi quattro postulati euclidei e su un quinto postulato secondo cui per un punto al di fuori di una retta si possono tracciare più parallele ad una retta assegnata. Questo nuovo assioma apre il primo dei due possibili rami della geometria non euclidea, nota come "geometria iperbolica", a cui fanno riferimento i *pattern* descritti in questo capitolo.

Se invece si sostituisce al V postulato un nuovo assioma<sup>4</sup> secondo cui tutte le rette passanti per un punto non appartenente alla retta data la incontrano sempre, cioè non esistono rette parallele, si giunge a due diversi tipi di "geometria ellittica": la "geometria sferica" o "geometria ellittica doppia" (*double elliptic geometry*) e la "geometria ellittica semplice" (*single elliptic geometry*)<sup>5</sup>.

---

<sup>2</sup> CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, pp. 14-15.

<sup>3</sup> NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin, G. Fincke 1840.

<sup>4</sup> Detto "assioma ellittico" o di Riemann.

<sup>5</sup> [http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria\\_sulla\\_sfera/geo03.htm](http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo03.htm) (consultato 05-10-2011).

Per analogia con le tassellazioni regolari del piano euclideo, quelle relative alla sfera vengono numerate e realizzate a partire dai cinque solidi platonici<sup>6</sup> e dai tredici solidi archimedei<sup>7</sup>.

Nei *pattern* euclidei il parallelismo delle linee è una proprietà importante per il risultato estetico: sebbene non rappresenti la caratteristica che determina lo spessore di una linea, nella geometria euclidea è un comodo modo per rappresentarlo. Se si vuole, ad esempio, ispessire una linea  $l$  di un valore costante  $v$  occorre semplicemente prendere la regione del piano delimitata dalle due parallele ad  $l$  con distanza  $v/2$  dalla retta stessa.

Un simile artificio non potrà ovviamente essere applicato alla geometria iperbolica, dove i parallelismi non sono più definiti in modo univoco<sup>8</sup>; in tal caso si cercherà il luogo dei punti di distanza  $v/2$  da  $l$ , ossia le “curve equidistanti” (*equidistant curves*) o “ipercicli” (*hypercycles*), cioè i percorsi curvi che seguono una determinata linea<sup>9</sup>.

Il piano iperbolico non può essere interamente contenuto in quello euclideo; per rappresentare la geometria iperbolica in quest’ultimo<sup>10</sup> si utilizzano quindi modelli

---

<sup>6</sup> Tetraedro, cubo o esaedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro sono poliedri regolari, ossia solidi convessi delimitati da poligoni regolari in cui anche gli angoli solidi risultano congruenti.

<http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/ferrarese/sito%20mostra/4-poliedri/Solidi%20platonici.pdf>  
(consultato 05-10-2011).

<sup>7</sup> MAGNUS J. WENNINGER, *Polyhedron Models*, Cambridge, Cambridge University Press 1971.

<http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/ferrarese/sito%20mostra/4-poliedri/poliedri%20archimedei/pol%20archimedei.pdf>  
(consultato 05-10-2011).

<sup>8</sup> CRAIG S. KAPLAN, *Computer Graphics and Geometric Ornamental Design*, University of Washington, Doctor of Philosophy of Computer Science & Engineering 2002, p. 15.

<sup>9</sup> *Ivi*, p. 16.

<sup>10</sup> *Ibidem*.

utili in contesti differenti, secondo cui è possibile passare da un piano all'altro attraverso apposite formule<sup>11</sup>.

Nel “modello di Poincaré”<sup>12</sup>, che risulta il più diffuso e viene usato in questo capitolo, i punti descrivono un disco unitario (circonferenza esclusa) e le linee sono archi interni che intersecano il contorno del disco ad angolo retto (fig. 108). In tale modello, definito “conforme”, l'angolo compreso tra due linee iperboliche corrisponde all'angolo del piano euclideo individuato dalle tangenti alle rette iperboliche nel punto di intersezione. Questo modello è utile nella raffigurazione euclidea di *pattern* iperbolici perché, più di ogni altro, conserva le forme delle figure; risulta inoltre adatto per disegnare le curve equidistanti, individuate da un arco di circonferenza che non incide sul disco unitario ad angolo retto. Le distanze iperboliche uguali sono rappresentate da distanze euclidee sempre più piccole, per cui il cerchio unitario si trova ad una distanza iperbolica infinita dal proprio centro; occorre inoltre ricordare che per il modello di Poincaré il centro non è un punto notevole, ma ci appare tale solo nel piano euclideo.

Il “modello di Klein”<sup>13</sup> è tra i più semplici della geometria iperbolica; utilizza, come il precedente, una porzione finita del piano euclideo e fu introdotto da Eugenio Beltrami per dimostrare l'indipendenza del V postulato di Euclide dai primi quattro. Se  $k$  è il cerchio unitario euclideo, l'insieme  $P$  dei punti iperbolici viene definito come l'insieme di tutti i punti euclidei interni a  $k$ , cioè  $P = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ , mentre l'insieme  $L$  delle linee iperboliche è composto da tutte le corde di  $k$ . I punti non

---

<sup>11</sup> BARBARA HAUSMANN, BRITTA SLOPIANKA, HANS-PETER SEIDEL, *Exploring Plane Hyperbolic Geometry*, in: HANS-CHRISTIAN HEGE, KONRAD POLTHIER, *Visualization and Mathematics*, New York, Springer-Verlag 1997, pp. 21-36.

<sup>12</sup> Ivi, pp. 24-25.

RICHARD COURANT, HERBERT ROBBINS, IAN STEWART, *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford, Oxford University Press 1996<sup>2</sup>, pp. 119-120.

<sup>13</sup> BARBARA HAUSMANN, BRITTA SLOPIANKA, HANS-PETER SEIDEL, *Exploring Plane Hyperbolic Geometry*, in: HANS-CHRISTIAN HEGE, KONRAD POLTHIER, *Visualization and Mathematics*, New York, Springer-Verlag 1997, p. 24.

appartenenti a  $k$  sono detti “punti ideali”, in quanto non individuano punti iperbolici ma sono utili per descrivere linee parallele asintotiche (fig. 108). Si tratta di una rappresentazione “proiettiva” dove le rette iperboliche sono raffigurate come linee rette euclidee che rendono il modello di Klein idoneo per particolari computazioni, come la definizione dell’appartenenza o meno di un punto ad un poligono iperbolico.

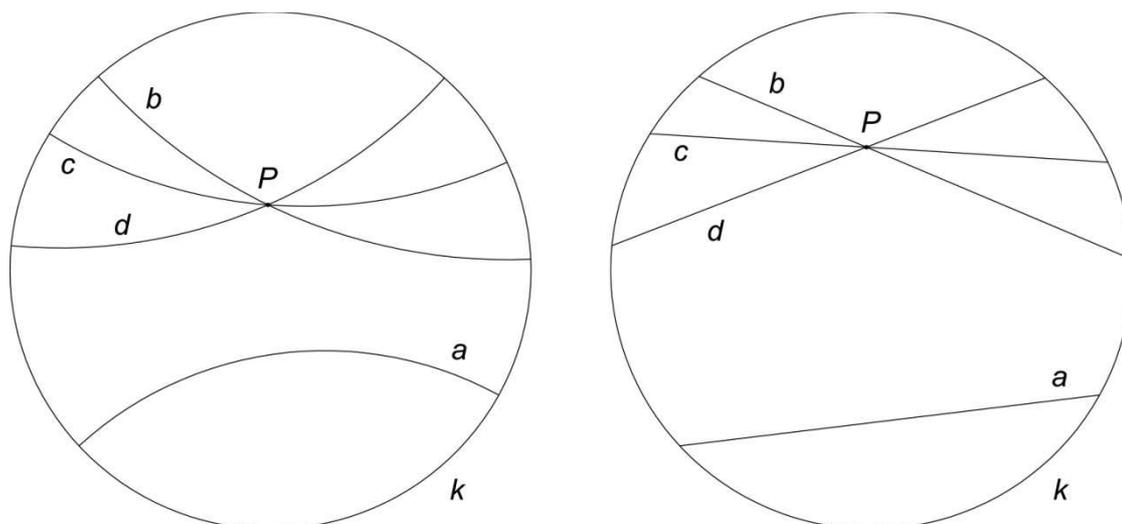


Fig. 108 – Il V postulato della geometria iperbolica nel modello di Poincaré e in quello di Klein.

Il “modello di Minkowski”<sup>14</sup>, a differenza dei precedenti, è tridimensionale; in esso i punti del piano iperbolico sono rappresentati da una superficie di iperboloide con funzione  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  e le linee sono le intersezioni dei piani euclidei passanti per la sua l’origine. Il vantaggio di questo modello è che i movimenti rigidi possono essere individuati da tre trasformazioni lineari. Nonostante esistano ulteriori modelli per la geometria iperbolica quelli citati sono i più diffusi in quanto “isomorfi”<sup>15</sup>.

<sup>14</sup> Ivi, pp. 29-30.

MICHAEL FIELD, MARTIN GOLUBITSKY, *Symmetry in Chaos*, Oxford, Oxford University Press 1992.

<sup>15</sup> MARVIN J. GREENBERG, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*, New York, W. H. Freeman and Company 1993<sup>3</sup>, p. 236.

Per ognuna delle precedenti geometrie l'annotazione Schläfli<sup>16</sup>  $\{p,q\}$  indica una tassellazione regolare ottenuta mediante poligoni regolari con  $p$ -lati che si incontrano in gruppi di  $q$  in uno stesso vertice (fig. 109). Nel caso che  $(p-2)(q-2) > 4$  si è in presenza di una tassellazione iperbolica, altrimenti se  $(p-2)(q-2) = 4$  o  $(p-2)(q-2) < 4$  si tratta rispettivamente di una tassellazione euclidea e di una sferica.

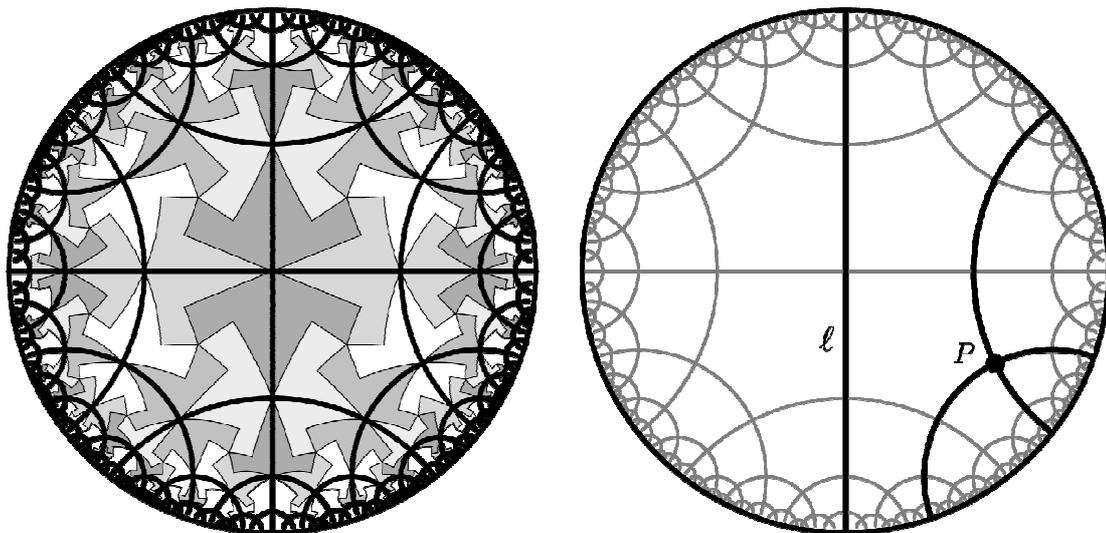


Fig. 109 – In base all'annotazione Schläfli la tassellazione della figura di destra sarà indicata con  $\{5,4\}$ .

Dal momento che infinite sono le soluzioni della diseuguaglianza iperbolica  $(p-2)(q-2) > 4$ , infinite saranno anche le tassellazioni iperboliche.

I gruppi di simmetria nel piano iperbolico sono infiniti perché, a differenza di quello euclideo, consente numerosi centri di rotazione di grado arbitrario; tuttavia gli esempi di *pattern* iperbolici sono numericamente limitati. Il maggior contributo nel settore, soprattutto dal punto di vista artistico, si deve a Maurits Cornelis Escher<sup>17</sup>.

<sup>16</sup> Da Ludwig Schläfli, matematico svizzero che contribuì allo sviluppo della geometria multidimensionale.

<sup>17</sup> Capitolo 6.

Le ragioni della ridotta esplorazione di un campo così vasto sono evidenti dal momento che, per creare un *pattern* iperbolico, occorre confrontarsi con svariati problemi e far riferimento a molteplici competenze: è necessario disporre di capacità artistiche e conoscere i fondamenti matematici delle tassellazioni iperboliche, compresi i non semplici principi delle costruzioni geometriche. Va inoltre considerata la difficoltà di dover tracciare infinite copie, sempre più piccole, dell'oggetto che si deve ripetere all'interno della "regione fondamentale".

Per ovviare ai limiti citati e dare spazio alla sperimentazione, sono stati messi a punto alcuni algoritmi di calcolo con lo scopo di generare, automaticamente, una regione fondamentale che si adatti ad una geometria assegnata<sup>18</sup> e, successivamente, creare disegni specifici per un determinato gruppo iperbolico di simmetria. La maggior parte di questi software presenta tuttavia alcune difficoltà nel riprodurre infiniti oggetti in un tempo finito.

Il metodo messo a punto da Martin von Gagern e Jürgen Richter-Gebert<sup>19</sup> ha invece un approccio diverso che consente di prendere un modello ornamentale qualsiasi, di implementarlo e convertirlo nel corrispondente *pattern* iperbolico, mantenendone il contenuto artistico.

Il processo si articola attraverso fasi successive che comprendono il riconoscimento automatico del *pattern*, l'identificazione dei corrispondenti gruppi iperbolici di simmetria, la creazione di una deformazione conforme che adatti la regione fondamentale originale alla corrispondente regione iperbolica, per approdare infine

---

<sup>18</sup> CRAIG S. KAPLAN, DAVID H. SALESIN, *Escherization*, in: *Proceedings of the 27<sup>th</sup> annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH 2000, New Orleans, 25-27 July 2000)*, New York/Boston, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co 2000, pp. 499-510.

[http://www.josleys.com/show\\_gallery.php?galid=325](http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=325) (consultato 12-10-2011).

<sup>19</sup> MARTIN VON GAGERN, JÜRGEN RICHTER-GEBERT, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*, «The Electronic Journal of Combinatorics», n. 2, vol. 16, 2009.

alla creazione dell'immagine utilizzando il modello di Poincaré<sup>20</sup>. Gli autori, per i loro esempi attingono dal ricco apparato iconografico di Owen Jones<sup>21</sup> (fig. 110).



Fig. 110 – Applicazione del metodo messo a punto da Martin von Gagern e Jürgen Richter-Gebert per trasformare un *pattern* euclideo in iperbolico.

MARTIN VON GAGERN, JÜRGEN RICHTER-GEBERT, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*, «The Electronic Journal of Combinatorics», n. 2, vol. 16, 2009, p. 4.

La regione fondamentale di un *pattern* euclideo è delimitata da linee rette mentre, nel modello di Poincaré, la sua versione iperbolica è racchiusa tra archi circolari che corrispondono alle linee rette iperboliche. Copie multiple di questo *patch* permettono di tassellare il piano iperbolico, a condizione che la regione fondamentale venga deformata.

Nella figura portata ad esempio, uno degli angoli retti della regione fondamentale quadrata risulta modificato in un angolo di 60° e il suo opposto diventa di 72°. Si tratta di un processo che influisce sulla geometria stessa della figura<sup>22</sup> (fig. 111).

<sup>20</sup> Ivi, p. 5.

<sup>21</sup> OWEN JONES, *The Grammar of Ornament: All 100 Color Plates from the Folio Edition of the Great Victorian Sourcebook of Historic Design*, New York, Dover Publications 1987.

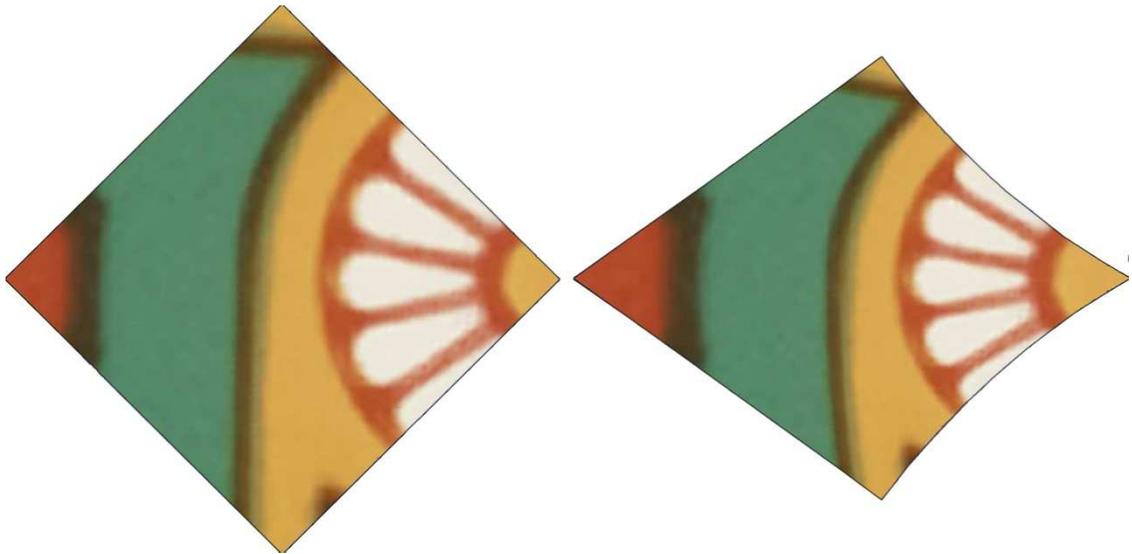


Fig. 111 – Deformazione della regione fondamentale di un pattern da euclideo a iperbolico.

MARTIN VON GAGERN, JÜRGEN RICHTER-GEBERT, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*, «The Electronic Journal of Combinatorics», n. 2, vol. 16, 2009, p. 13.

Il medesimo procedimento, estendibile a tutti i *pattern*, diventa sempre più complesso per gruppi con un minor numero di simmetrie.

Gli esempi prodotti da von Gagern e Richter-Gebert, qui riportati, sono stati realizzati partendo da *pattern* euclidei che vengono resi iperbolici variando gli indici dei centri di rotazione; in tal modo si dimostra come da un solo modello euclideo ne possano derivare molti iperbolici, ognuno con una propria connotazione estetica (fig. 112).

Il rinnovato interesse per le decorazioni iperboliche ha coinvolto altre tassellazioni notevoli, come ad esempio lo spidrone<sup>23</sup>. Se infatti lo spidrone viene costruito con angoli appropriati, un certo numero di sue copie potranno essere disposte attorno ad un poligono regolare o venire composte all'interno dello stesso poligono, disegnando una successione decrescente di stelle e poligoni regolari iscritti. La costruzione si

---

<sup>22</sup> OWEN JONES, *The Grammar of Ornament: All 100 Color Plates from the Folio Edition of the Great Victorian Sourcebook of Historic Design*, New York, Dover Publications 1987, p. 9.

<sup>23</sup> Paragrafo 1.1.10.

adatta naturalmente a spazi diversi dal piano cartesiano, in particolare a quello iperbolico, dove è consentita una maggiore quantità di tassellature regolari<sup>24</sup>.

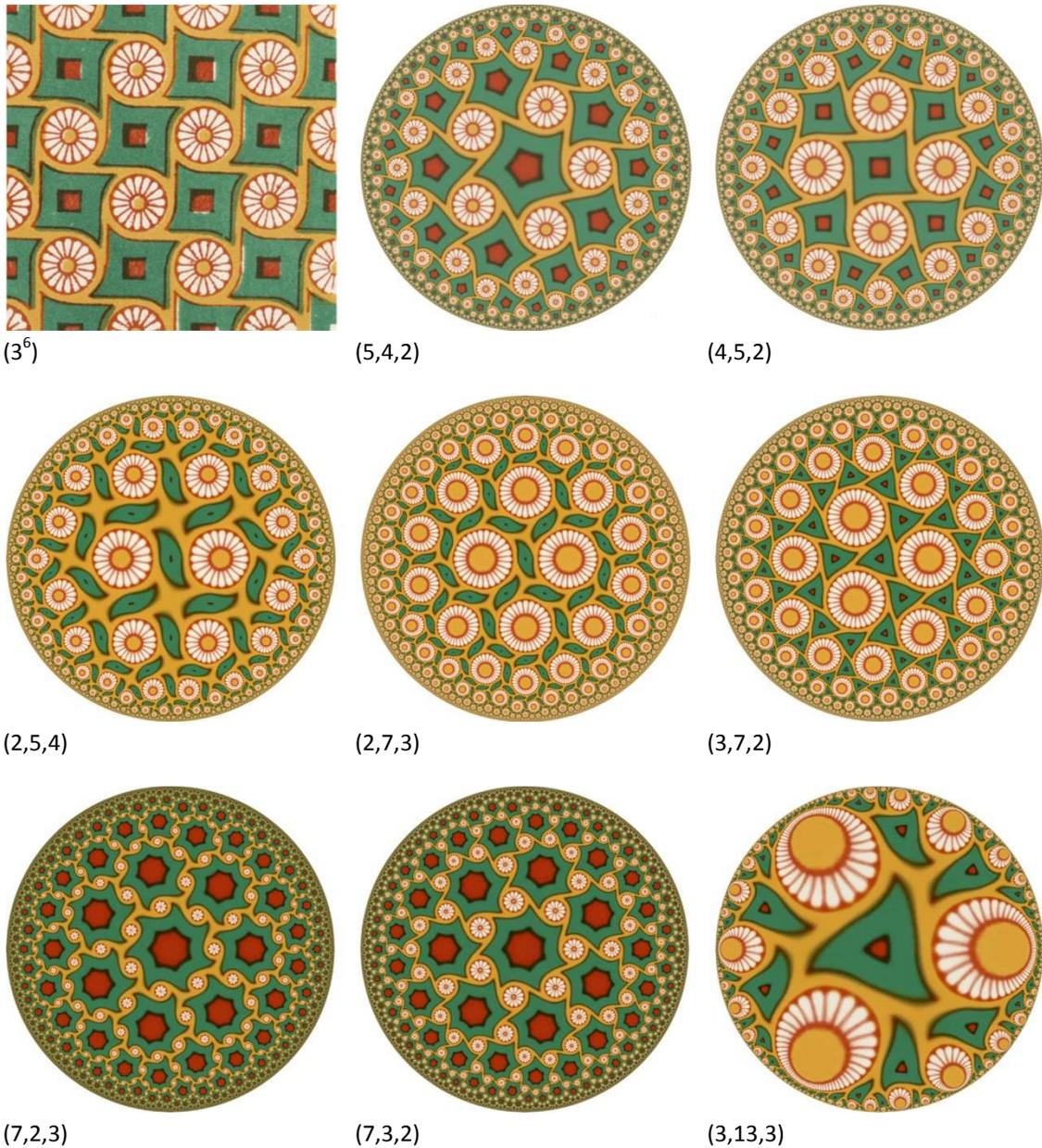


Fig. 112 – Esempi di iperbolizzazione di un pattern euclideo; il numero di bracci delle rotazioni attorno ai vertici sono riportati tra parentesi.

MARTIN VON GAGERN, JÜRGEN RICHTER-GEBERT, *Hyperbolization of Euclidean Ornaments*, «The Electronic Journal of Combinatorics», n. 2, vol. 16, 2009, p. 23.

<sup>24</sup> <http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/spidron/> (consultato 04-10-2010).

Seguendo il modello di Poincaré per realizzare dei *pattern* iperbolici si può approfittare delle impostazioni di renderizzazione proprie dei programmi di modellazione che utilizzano superfici *mesh*. Questi sono infatti capaci di adattare una mappa quadrata o rettangolare assegnata a superfici limitate da quattro lati curvilinei. Per svolgere tale operazione occorre ridisegnare lo schema del modello di Poincaré utilizzando superfici *mesh* e tenendo conto che il loro orientamento non è indifferente, in quanto individua un preciso gruppo iperbolico di simmetria (fig. 113).

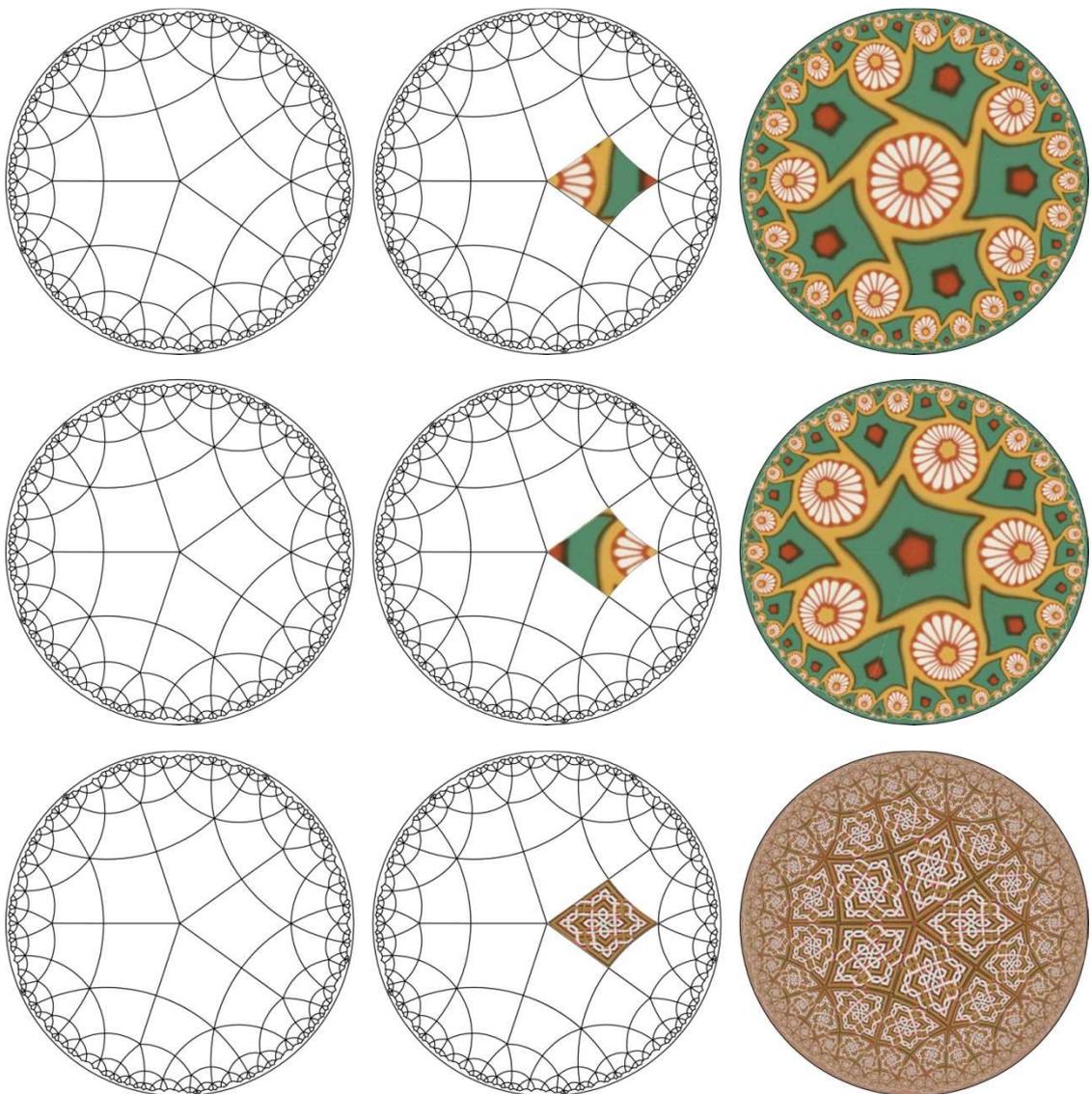


Fig. 113 – Esempi in cui si utilizza la renderizzazione delle *mesh* per trasformare un *pattern* euclideo in iperbolico.

Le tassellature iperboliche realizzate con gli spidroni e rappresentate con il modello di Poincaré danno esteticamente una doppia impressione di infinitezza, sia per il decremento della dimensione degli spidroni dal centro della tassellatura verso il limite del cerchio, sia per la consueta sequenza infinita di triangoli decrescenti che compongono ogni spidrone. In questo caso la tassellatura risulterà un insieme infinito di infiniti oggetti (fig. 114).



Fig. 114 – Spidrone iperbolico.

<http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/spidron/> (consultato 04-05-2011).