

Questa tipologia di tasselli può anche essere utilizzata per produrre tassellazioni periodiche (fig. 50)⁴.

Nonostante il primo esempio di tassellazione spiraliforme risalga a più di settant'anni fa, la letteratura sull'argomento è ancora relativamente scarsa⁵. Molte sono le varianti possibili dal momento che, sovrapponendo due copie di un qualsiasi poligono regolare di n lati dopo aver fatto coincidere due suoi vertici, si otterrà sempre una forma capace di tassellare il piano con soluzioni diverse, tra cui una spirale ad un solo braccio e vari esempi spiraliformi a due bracci⁶.

Se il numero dei lati del poligono è dispari sarà difficile trovare altre combinazioni, ma se è pari la tessera potrà essere divisa in una serie di rombi (fig. 51 in alto a sinistra), tenendo presente che per ogni taglio si dovrà mantenere la stessa lunghezza dei lati del poligono regolare che ha dato origine alla forma stessa. Si avranno così due entità in grado di tassellare il piano con risultati diversi e di generare, in determinati casi *pattern* spiraliformi⁷ (fig. 51).

Scegliendo invece una tessera con $\alpha=360^\circ/m$, è possibile ottenere una tassellazione spiraliforme a m bracci. Ne consegue che le tassellazioni di questo tipo cambieranno in base a come viene frazionato il tassello; in particolare, dividendolo a metà, si avrà la forma scoperta da Grünbaum e Shephard nel 1979⁸ e definita "*versatile*". Come la tessera di Voderberg anche il *versatile*⁹ è in grado di tassellare il piano sia in modo periodico che non periodico, producendo spirali a uno, due, tre o sei bracci (fig. 51).

⁴ MARJORIE SENECHAL, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge, Cambridge University Press 1995, p. 151.

⁵ BRANKO GRÜNBAUM, GEOFFREY C. SHEPHARD, *Tilings and Patterns*, New York, W. H. Freeman and Company 1987.

⁶ GILIAN HATCH, *Tessellations with Equilateral Reflex Polygons*, «Mathematics Teaching», n. 84, 1978, p. 32.

⁷ <http://vismath4.tripod.com/gal/> (consultato 01-09-2011).

⁸ BRANKO GRÜNBAUM, GEOFFREY C. SHEPHARD, *Spiral Tilings and Versatiles*, «Mathematics Teaching», n. 88, 1979, pp. 50-51.

⁹ Gioco di parole dal momento che "*versatile*" in inglese ha il medesimo significato dell'italiano, ma *tile* significa per l'appunto tessera, da cui "*tessera multiforme*".

Nel caso di un dodecaedro regolare ($n=12$) si potranno ottenere ulteriori soluzioni perché, come ogni *versatile*, il tassello produrrà esempi di *pattern* spiraliformi a due e tre bracci, nonché casi a sei bracci e altri ancora a quattro e otto bracci¹⁰.

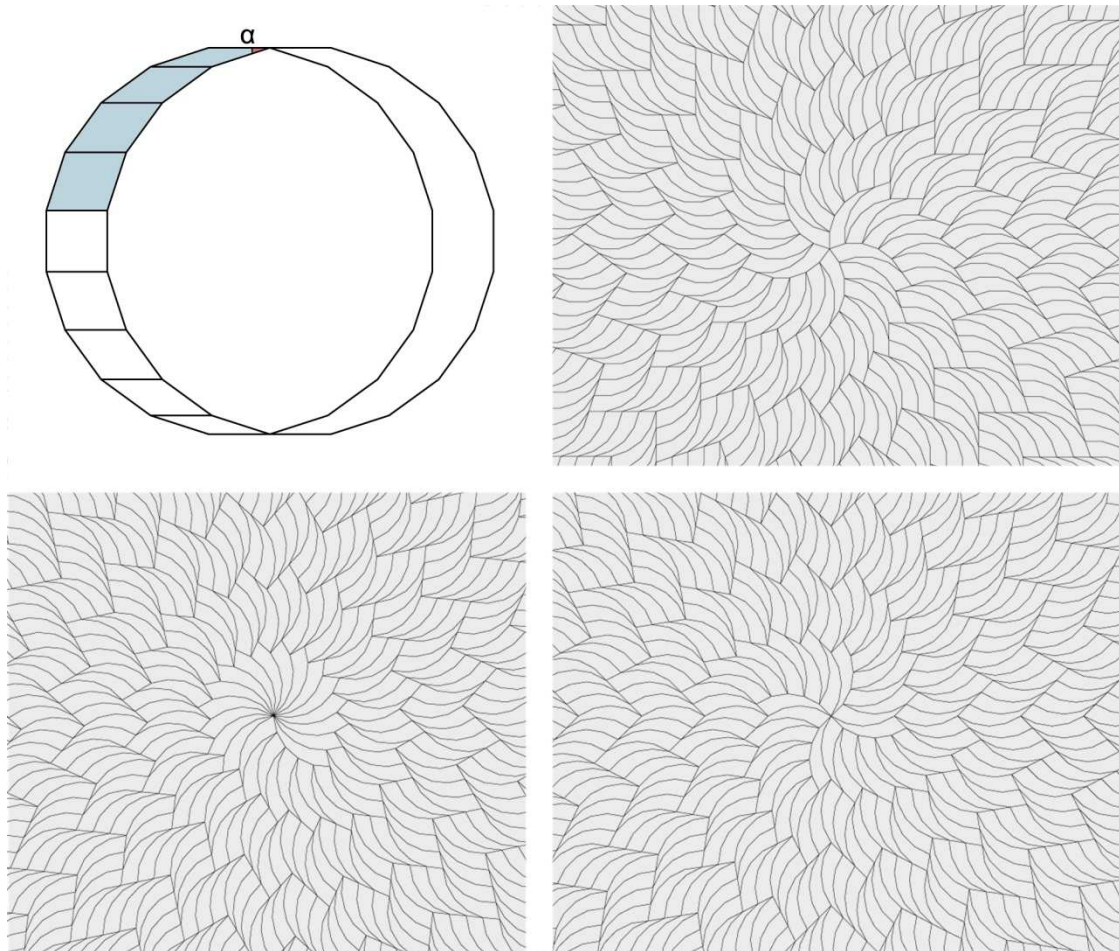


Fig. 51 – Diverse tipologie di *pattern* spiraliformi ottenuti a partire da un medesimo tassello (parte colorata).

¹⁰ MARJORIE RICE, DORIS SCHATTSCHNEIDER, *The Incredible Pentagonal Versatile*, «Mathematics Teaching», n. 93, 1980, pp. 52-53.

1.1.7

Tassellature pentagonali

«An extremely simple unit may by its repetition give an elaborate effect of pattern».

«Un'unità estremamente semplice può con la sua ripetizione produrre un effetto elaborato di *pattern*».

AMOR FENN, *Abstract Design: a Practical Manual on the Making of Patterns for Use of Students, Teachers, Designers and Craftsmen*, London, B. T. Batsford Ltd. 1930, p. 1.

Tra le tassellature degne di nota occupano un posto di rilievo quelle pentagonali. Allo stato attuale delle conoscenze sulle tassellazioni con poligoni congruenti è comunemente accettato che tutti i quadrilateri, compresi quelli concavi e ogni triangolo, possano tassellare il piano, mentre ciò non è sempre possibile con gli altri poligoni convessi (fig. 52). Nel caso degli esagoni le tipologie realizzabili sono tre¹; quando invece si utilizzano poligoni convessi con sette o più lati questi non sono in grado di tassellare il piano da soli.

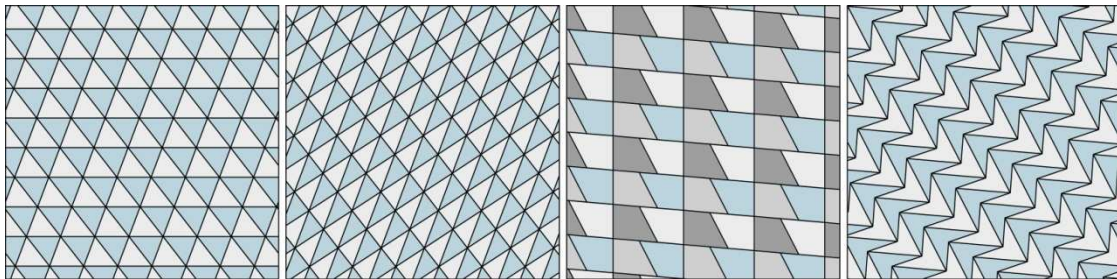
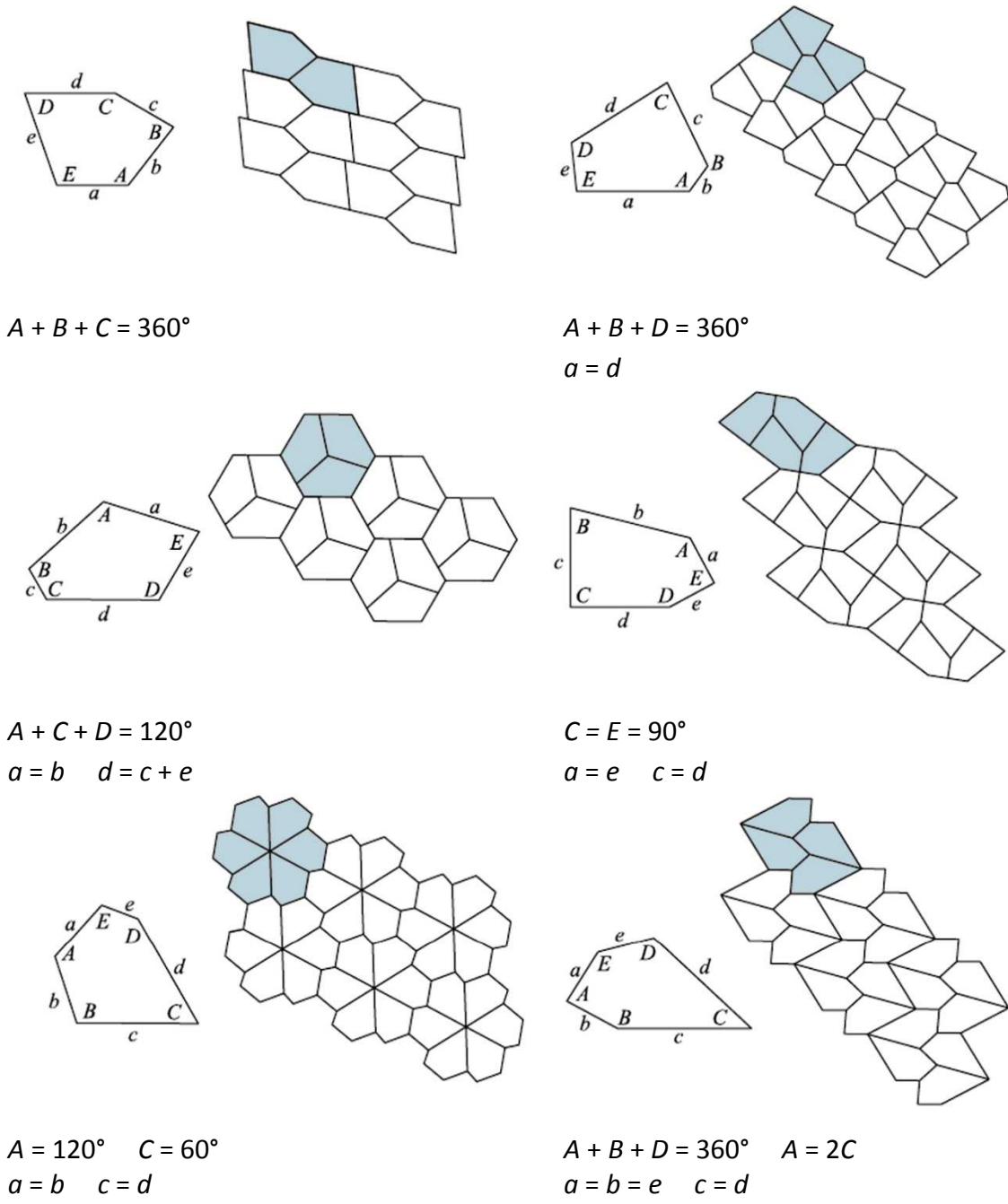


Fig. 52 – Tutti i triangoli e i quadrilateri possono tassellare il piano.

¹ BRANKO GRÜNBAUM, GEOFFREY C. SHEPHARD, *Tilings and Patterns*, New York, W. H. Freeman and Company 1987.

BÉLA BOLLOBÁS, *Filling the plane with congruent convex hexagons without overlapping*, «Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis», 1963, pp. 117-123.

Anche se un pentagono regolare non potrà mai produrre una tassellazione isoedrale, la ricerca sulle capacità dei pentagoni di tassellare il piano non si è arrestata². Attualmente sono state identificate 14 tipi di tassellazioni monoedrali³ (fig. 53), ma non è comprovato che tale lista sia completa.



² RICHARD B. KERSHNER, *On Paving the Plane*, «American Mathematical Monthly», n. 74, 1968, pp. 839-844.

³ TERUHISA SUGIMOTO, TOHRU OGAWA, *Tiling Problem of Convex Pentagon*, «Forma», vol. 15, 2000, pp. 75-79.

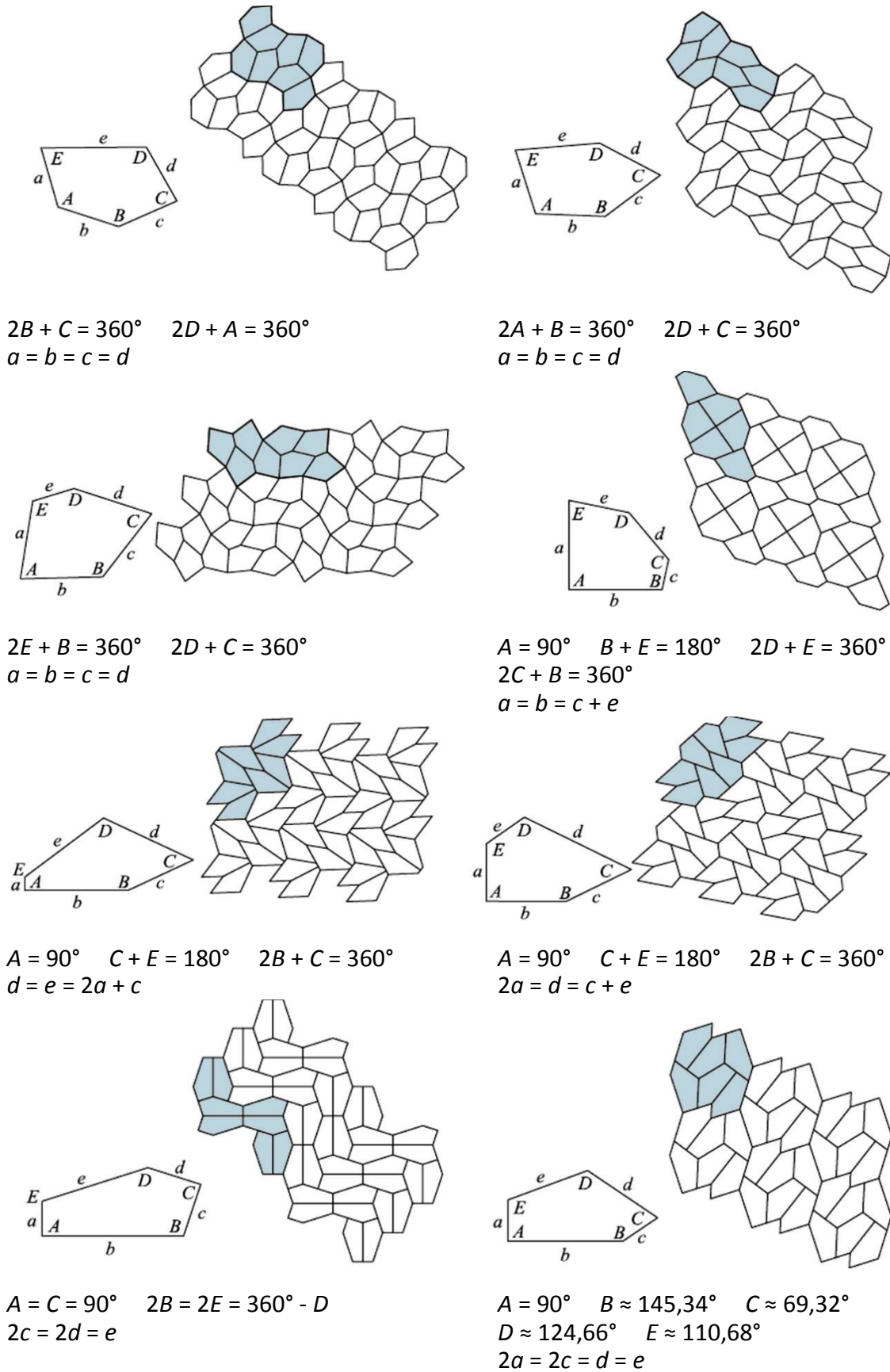


Fig. 53 – Le 14 tassellazioni pentagonali periodiche attualmente conosciute.

Nello studio delle tassellazioni del piano con poligoni convessi, come il pentagono, si possono distinguere due tipologie, a seconda che il metodo di connessione sia o meno *edge-to-edge*. Una tassellazione pentagonale rimane tuttavia tale anche dal punto di vista topologico solo se appartiene a questa categoria.

Le tassellazioni pentagonali convesse (fig. 53) sono definite da determinati rapporti tra lunghezza dei lati e ampiezza degli angoli, pur presentando alcuni gradi di libertà che nel quattordicesimo caso si riducono unicamente alla dimensione della tessera.

Ogni tassellazione pentagonale convessa deriva pertanto da una o più tra le categorie descritte: la tassellazione ottenuta utilizzando il “pentagono del Cairo”, ad esempio, si deduce dalla quarta in quanto il tassello che la forma presenta due angoli retti, due di 108° e uno di 144° (fig. 54).

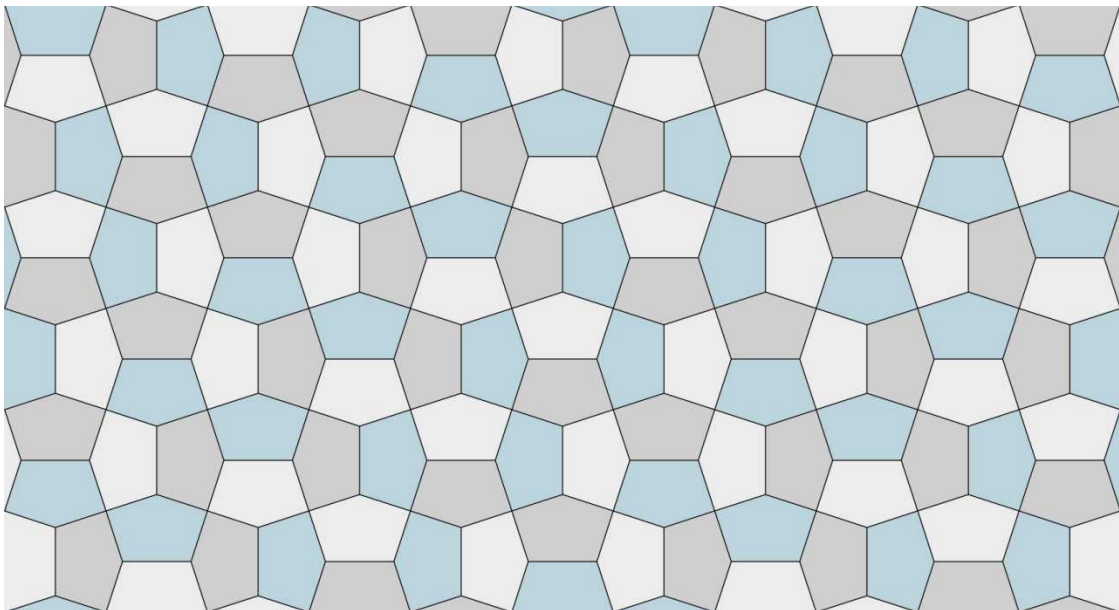


Fig. 54 – Tassellazione del Cairo.

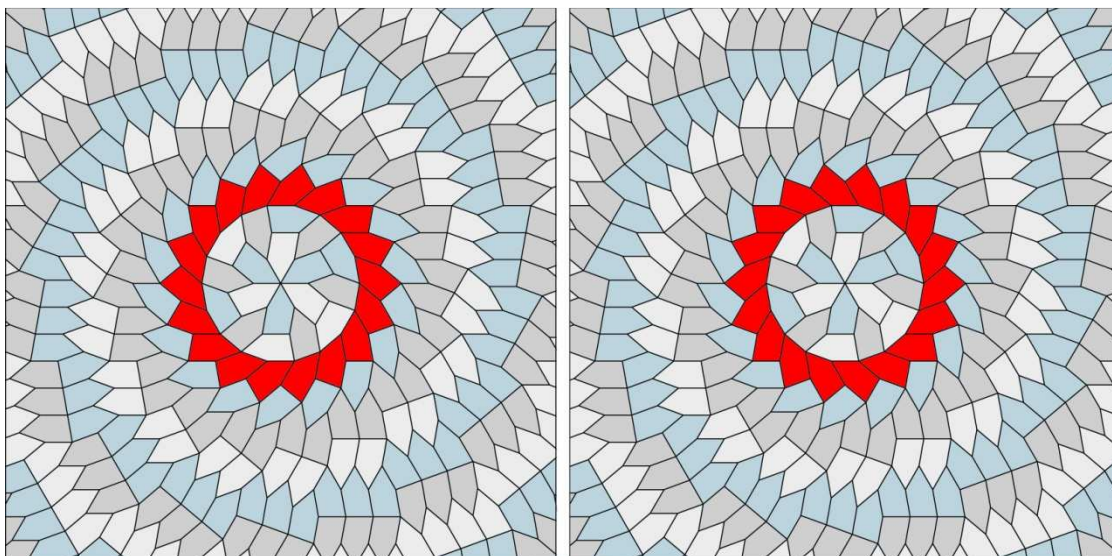


Fig. 55 – Le due possibili configurazioni della tassellazione di Hirschhorn.

Un'altra tassellatura pentagonale celebre è quella di Michael Hirschhorn⁴, messa a punto negli anni '70 del secolo scorso. Si tratta di una tassellazione monoedrale e spiraliforme composta da una rosetta centrale e da settori radiali, formati da pentagoni equilateri con angoli interni di 60° , 160° , 80° , 100° e 140° , che sono il risultato dell'unione di un triangolo equilatero e di un rombo con gli angoli acuti di 80° (fig. 55).

⁴ MICHAEL D. HIRSCHHORN, DAVID C. HUNT, *Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane*, «Journal of Combinatorial Theory», n. 39, Series A, 1985, pp. 1-18.

1.1.8

Tassellatura di Socolar

«Dove il mondo cessa di essere il palcoscenico delle nostre speranze e dei nostri desideri per divenire l'oggetto della libera curiosità e della contemplazione, lì iniziano l'arte e la scienza. Se cerchiamo di descrivere la nostra esperienza all'interno degli schemi della logica, entriamo nel mondo della scienza; se, invece, le relazioni che intercorrono tra le forme della nostra rappresentazione sfuggono alla comprensione razionale e pur tuttavia manifestano intuitivamente il loro significato, entriamo nel mondo della creazione artistica. Ciò che accomuna i due mondi è l'aspirazione a qualcosa di non arbitrario, di universale».

ALBERT EINSTEIN, in: HEINZ-OTTO PEITGEN, PETER H. RICHTER, *La bellezza dei frattali*, Torino, Bollati Boringhieri 1991, p. 1.

Anche questa tassellatura deve il nome al suo scopritore, Joshua E. S. Socolar¹. Si tratta di una tassellazione aperiodica che può essere ottenuta in diversi modi: mediante sostituzione (fig. 56), con le regole di corrispondenza, con il metodo *cut and project* o, come avviene per la tassellazione P3 di Penrose, tramite le *Ammann bars*. Da essa ne derivano altre che risultano strettamente correlate².

La tassellatura di Socolar originale, altrimenti conosciuta come "*butterfly tiling*" (tassellatura a farfalla), ha per tessere quadrati, esagoni e rombi sottili (fig. 57). Le regole di corrispondenza vengono visualizzate con tacche sulle piastrelle che indicano quali bordi possono incontrarsi e in quali direzioni; in tal modo si impedisce che una coppia di figure uguali possa avere un lato in comune.

¹ JOSHUA E. S. SOCOLAR, *Simple octagonal and dodecagonal quasicrystals*, «Physical Review B», n. 15, vol. 39, 1989, pp. 10519-10551.

http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution_rules/socolar (consultato 04-09-2011).

² <http://www.quadibloc.com/math/dode01.htm> (consultato 18-04-2011).

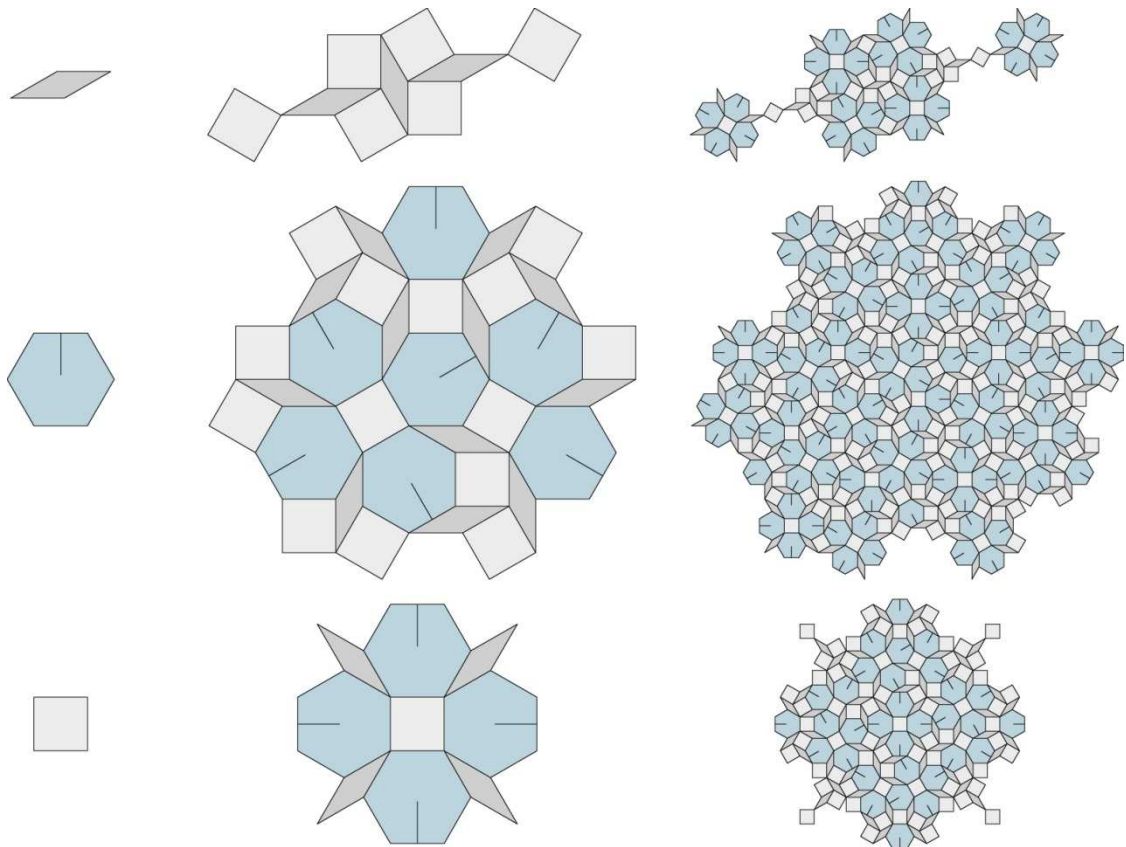


Fig. 56 – Composizione della tassellatura di Socolar mediante il metodo di sostituzione.

Una sua variante, nella quale vengono modificate le sagome dei tasselli, prende il nome di *“plate tiling”* (tassellatura piastra) ed è particolarmente interessante perché evidenzia alcune simmetrie della tassellatura (fig. 57). Esistono poi due forme isomorfe della tassellazione: la *“shield tiling”* (tassellatura scudo³), studiata da Franz Gähler⁴, e la *“wheel tiling”* (tassellatura tornio⁵) (fig. 58).

Il legame tra le ultime due tassellazioni risulta particolarmente evidente in quanto la *wheel tiling*, scoperta da H. U. Nissen⁶, può essere trasformata nella sua omologa *shield*, o da questa derivata, sostituendo ogni lato della tassellazione con un segmento ad esso perpendicolare, di uguale lunghezza e passante per il suo punto medio (fig. 59).

³ http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution_rules/shield (consultato 18-04-2011).

⁴ <http://www.math.uni-bielefeld.de/~gaehler/papers/grenoble88.pdf> (consultato 18-04-2011).

⁵ <http://www.quadibloc.com/math/dode01.htm> (consultato 18-04-2011).

⁶ http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution_rules/wheel_tiling (consultato 18-04-2011).

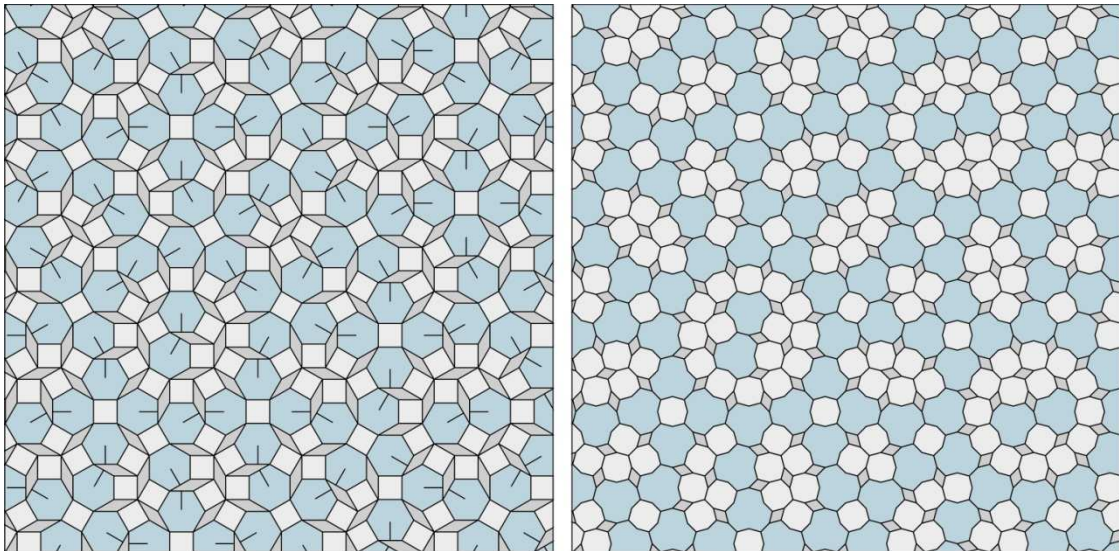


Fig. 57 – Tassellatura di Socolar “*butterfly tiling*” a sinistra; la “*plate tiling*” a destra.

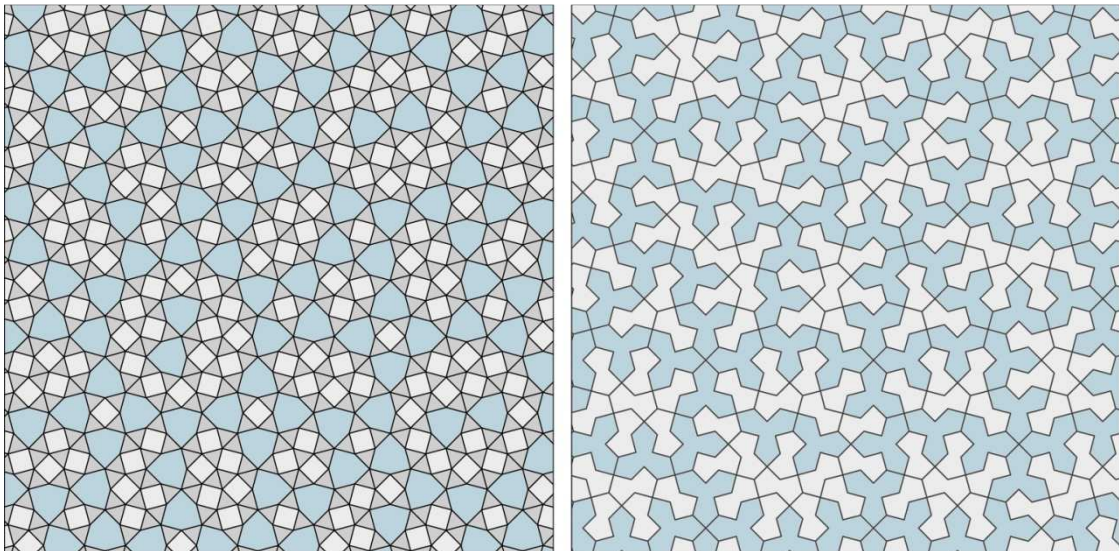


Fig. 58 – *Shield tiling* a sinistra; *wheel tiling* a destra.

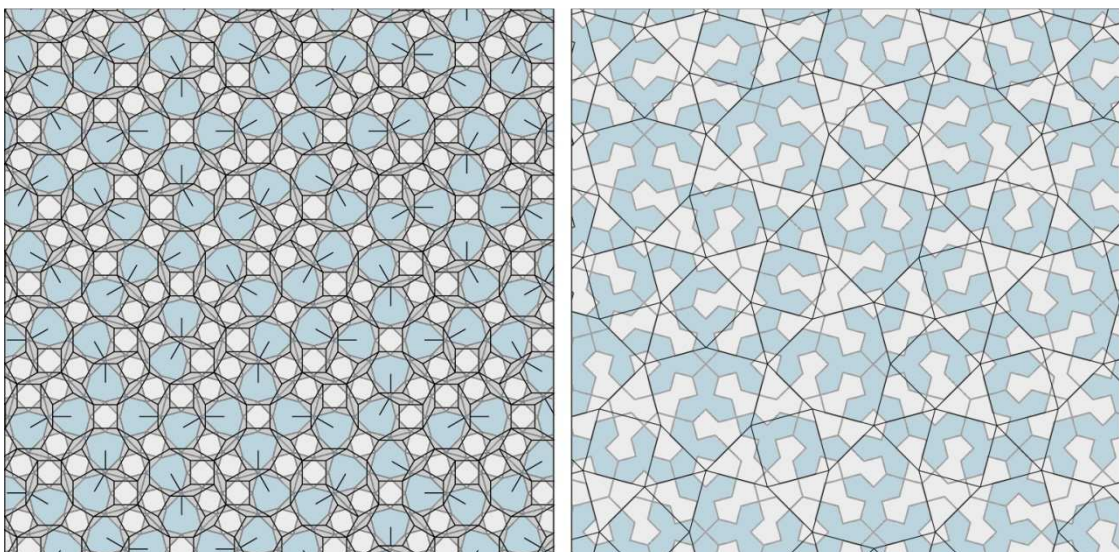


Fig. 59 – Dalla tassellatura di Socolar, per sostituzione di *patch*, è possibile ricavare la *shield tiling* e da quest’ultima la *wheel tiling*.

1.1.9

Diagramma di Voronoj

«È degno di nota che tutte le teorie superbe della natura si siano rivelate straordinariamente feconde come fonti di idee matematiche. C'è un mistero bello e profondo nel fatto che queste teorie superbamente esatte siano anche straordinariamente feconde semplicemente dal punto di vista matematico».

ROGER PENROSE, *La mente nuova dell'imperatore*, Milano, Rizzoli 1992, p. 229.

Il diagramma di Voronoj, detto anche tassellatura o decomposizione di Voronoj o ancora tassellatura di Dirichlet¹, deve il nome a Georgij Feodosjevič Voronoj², che ne definì e studiò il caso generale, n -dimensionale, nel 1908.

È possibile che l'idea del diagramma sia antecedente agli stessi scopritori; dal momento che molte strutture naturali gli somigliano sembra improbabile che queste non fossero già state osservate e studiate in precedenza.

¹ Dal nome del matematico Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET, *Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen*, «Journal für die Reine und Angewandte Mathematik», n. 40, 1850, pp. 209-227.

² GEORGY VORONOJ, *Nouvelles applications des parameters continus a la theorie des formes quadratiques, Premier Memoire, Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives parfaites*, «Journal für die Reine und Angewandte Mathematik», n. 133, 1907, pp. 97-178.

GEORGY VORONOJ, *Nouvelles applications des parameters continus a la theorie des formes quadratiques, Deuxieme Memoire, Recherches sur les paralleloedres primitifs*, «Journal für die Reine und Angewandte Mathematik», n. 134, 1908, pp. 198-287.

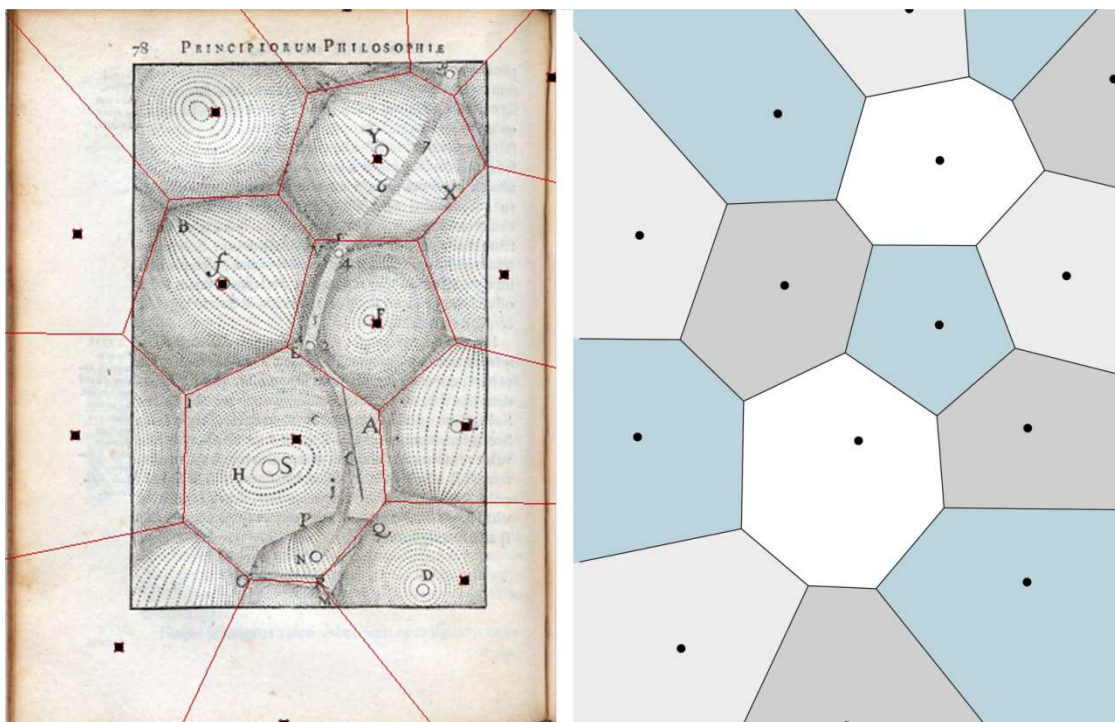
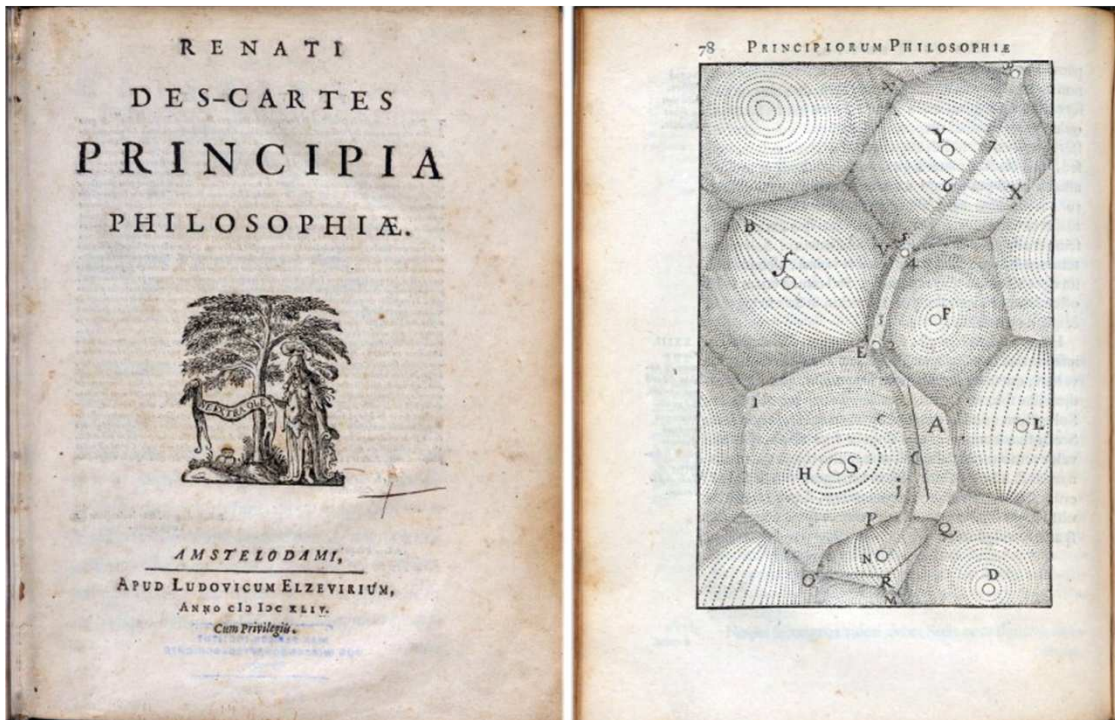


Fig. 60 – RENÉ DESCARTES, *Principia Philosophiae*, Amsterdam 1644.

La tavola contenuta nel testo di Descartes mostra chiaramente un diagramma di Voronj. Nell'immagine in basso a sinistra, alla pagina del trattato è stato sovrapposto il diagramma con esplicitati i punti generatori.

Lo stesso Descartes, nei suoi trattati *Le Monde de M. Descartes, ou Le Trait de la Lumière* e *Principia Philosophiae*, entrambi pubblicati nel 1644, utilizzò i diagrammi di Voronoj per descrivere la disposizione delle stelle e, poiché questi disegni non sono accompagnati da alcun commento particolare relativo alla loro costruzione, è lecito supporre che tali figure non fossero inusuali a quel tempo³ (fig. 60).

La tassellatura può essere considerata come un particolare caso di scomposizione dello spazio, basato sulle distanze rispetto ad un raggruppamento discreto di elementi, spesso un insieme finito di punti (fig. 61).

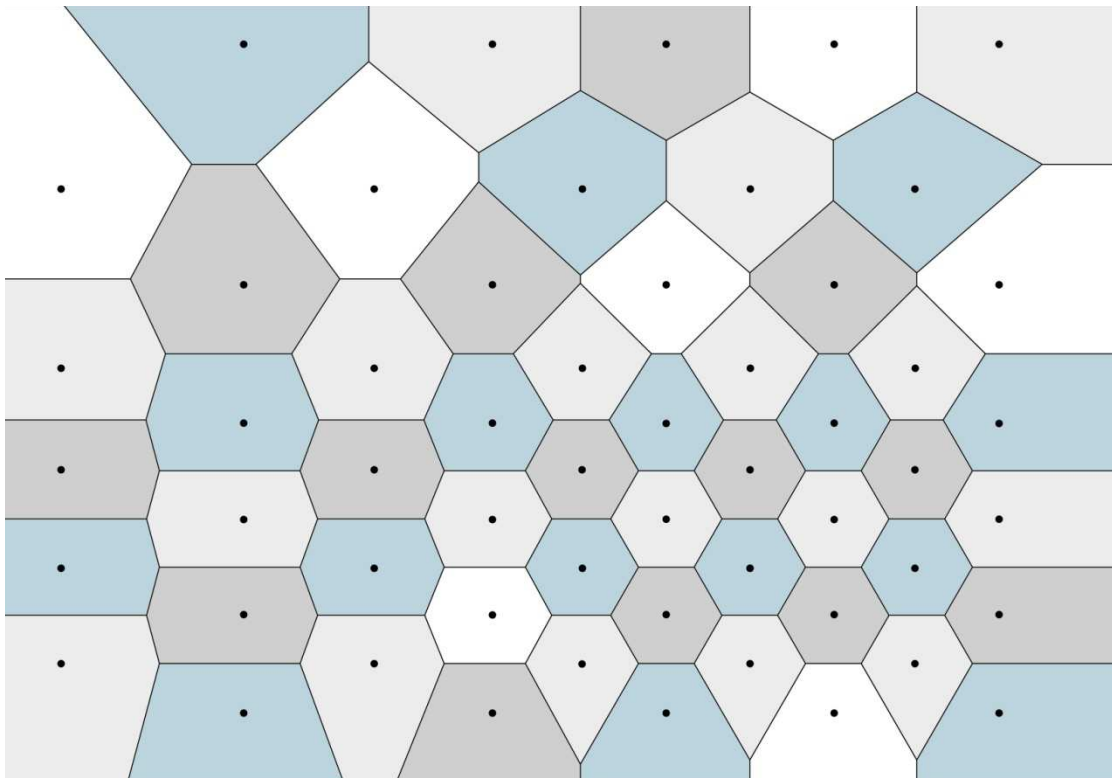


Fig. 61 – Diagramma di Voronoj con indicati i punti generatori.

³ ATSUYUKI OKABE, BARRY BOOTS, KOKICHI SUGIHARA, SUNG NOK CHIU, *Spatial Tesselations: Concepts and Applications of Voronoj Diagrams*, Chichester, John Wiley & Sons 2000², p. 6.

KALEEM SIDDIQI, STEPHEN M. PIZER, *Medial Representations. Mathematics, Algorithms and Applications*, Heidelberg, Springer 2008, pp. 328-329.

Nell'esempio più comune⁴, cioè il piano, designato un insieme $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ di punti detti "generatori", si definisce "diagramma di Voronoj" di P un insieme $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ di sottoinsiemi del piano, chiamati "regioni" o "celle di Voronoj" o ancora "domini" o "celle di Dirichlet", tali che ogni V_i sia la regione del piano che contiene tutti i punti più vicini a p_i rispetto ad ogni altro elemento di P .

Si indicherà con $V(P)$ la "trasformata di Voronoj" di P , ossia la funzione che trasforma un insieme di generatori in un diagramma di Voronoj. Alcuni punti nel piano hanno più di un generatore prossimo e svolgono quindi una funzione di confine tra regioni di Voronoj adiacenti. L'insieme di tutti questi punti forma una rete di linee chiamata "scheletro di Voronoj" di P . Ne consegue che i segmenti del diagramma sono tutti quei punti del piano equidistanti da due generatori prossimi, mentre i nodi sono i punti equidistanti da tre generatori prossimi. Nel caso notevole che P contenga solo due punti, a e b , il luogo geometrico dei punti equidistanti da a e b sarà un piano che genera due semispazi. Tale piano, perpendicolare al segmento \overline{AB} , rappresenterà il confine tra i punti più vicini ad a che a b e viceversa⁵.

Nello spazio la tassellatura sarà sempre composta da poliedri convessi, nel piano da poligoni convessi.

I diagrammi di Voronoj formati da insiemi regolari di punti producono tassellazioni familiari. Nel piano, se i punti della griglia sono vertici di un reticolo di triangoli equilateri, una griglia triangolare produrrà una tassellazione esagonale regolare; un *array* svilupperà invece un diagramma che sarà una tassellazione di rettangoli, oppure di quadrati se i punti sono disposti secondo una griglia a maglia quadrata (fig. 62).

⁴ http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/papers/kaplan_isama1999.pdf (consultato 07-09-2011).

⁵ ATSUYUKI OKABE, BARRY BOOTS, KOKICHI SUGIHARA, SUNG NOK CHIU, *Spatial Tesselations: Concepts and Applications of Voronoj Diagrams*, Chichester, John Wiley & Sons 2000².

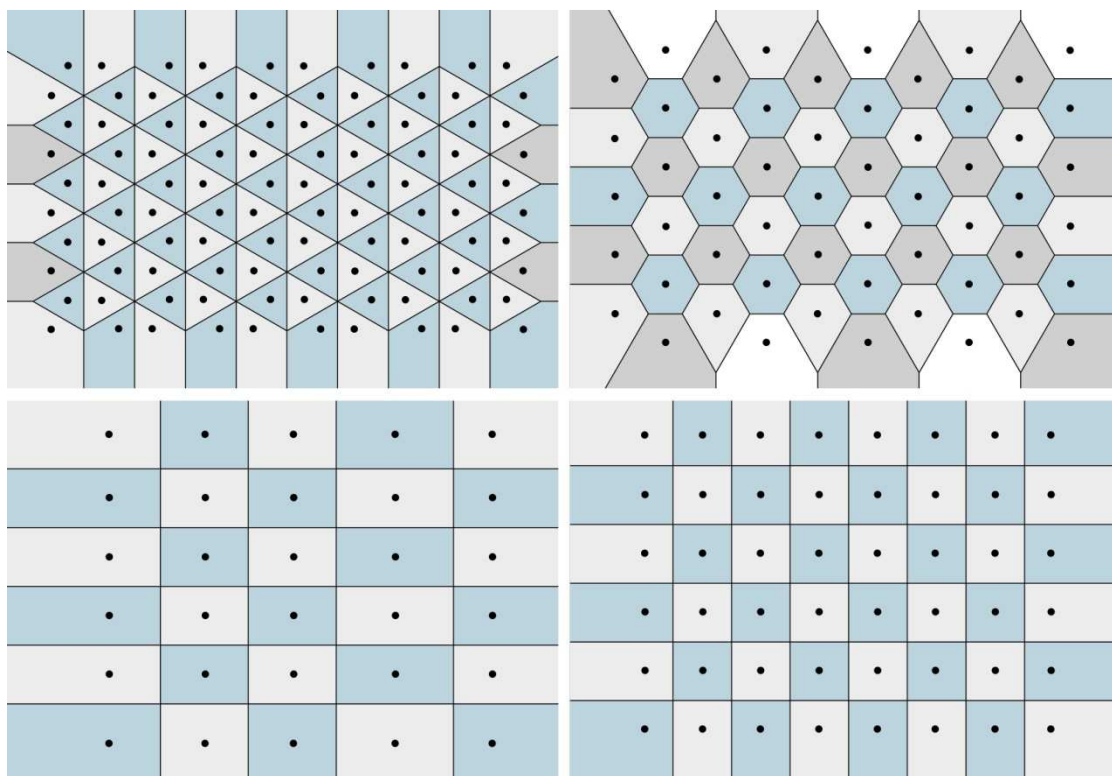


Fig. 62 – Diagrammi di Voronoj ottenuti partendo da disposizioni regolari dei generatori.

Nello spazio un reticolo tridimensionale produrrà una tassellazione a nido d'ape formata da prismi esagonali con rombi alle estremità. Qualora il diagramma sia generato da punti centrati sulle facce di una maglia cubica si avrà una tassellatura di dodecaedri rombici, mentre se i punti sono i baricentri dei cubi si otterranno degli ottaedri tronchi.

Il diagramma di Voronoj può anche essere definito partendo non da punti ma da segmenti; in tale circostanza le celle non avranno più lati rettilinei. La tassellazione generata da un punto e una retta si compone di due regioni separate da un arco parabolico; non a caso la parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto (il fuoco) e da una linea (la direttrice)⁶.

⁶ http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csg/papers/kaplan_isama1999.pdf (consultato 07-09-2011).

Queste tassellature sono state ampiamente utilizzate nelle discipline ingegneristiche e scientifiche. La cella di Wigner-Seitz⁷ è un tipico esempio di cella di Voronj utilizzata nello studio dei materiali cristallini.

⁷ Dal nome di Eugene Wigner, fisico e matematico ungherese naturalizzato statunitense, e di Frederick Seitz, fisico statunitense.

1.1.10

Spidrone

«I keep asking myself questions. [...] Is it possible that I have discovered something that can lead to new theoretical models, geometric formulas and perhaps also a range of hitherto unheard of applications? Or am I blowing it out of proportion? Have I been at those sequences of triangles so long that I am beginning to see all sorts of things in them? Even things they have nothing to do with?».

«Continuo a pormi domande. [...] È possibile che io abbia scoperto qualcosa che può portare a nuovi modelli teorici, formule geometriche e forse anche a una serie di applicazioni fino a quel momento inedite? Oppure ne esagero la portata? Mi sono dedicato così a lungo a quelle sequenze di triangoli da iniziare a vedere in loro ogni sorta di cose? Anche cose con cui non hanno nulla a che fare?».

DÁNIEL ERDÉLY

http://matserv.pmmf.hu/hajtas/docs/2/Spidron_EN.pdf (consultato 07-09-2011).

Lo spidrone¹ è una figura piana composta da una sequenza alternata di triangoli equilateri e isosceli, questi ultimi con gli angoli interni di 30° , 30° e 120° . Ogni triangolo equilatero condivide due suoi lati con un lato e con la base dei due triangoli isosceli adiacenti². La sequenza può essere ripetuta per qualsiasi numero di volte in una direzione, ottenendo triangoli sempre più piccoli. Tutta la figura è poi oggetto di una simmetria rotazionale, centrata nel punto medio della base del triangolo isoscele maggiore, che dà allo spidrone la tipica forma di una “S” doppiamente spiralizzata³ (fig. 63).

¹ <http://edan.szin haz.org/SpidroNew/> (consultato 04-05-2011).

² http://edan.szin haz.org//SpidroNew/general_concept.htm (consultato 04-05-2011).

³ <http://www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/projects/spidron/> (consultato 04-05-2011).

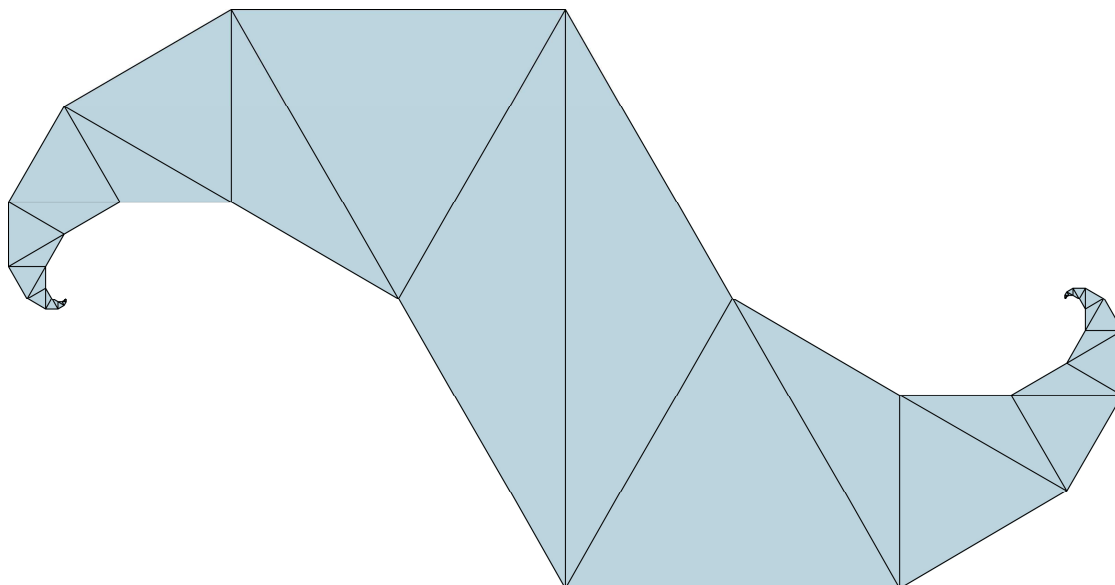


Fig. 63 – Spidrone dalla tipica forma a “S” doppiamente spiralizzata.

Si tratta di una figura creata per la prima volta nel 1979 da Dániel Erdély⁴ e presentata a Ernő Rubik⁵, suo professore presso la Moholy-Nagy University of Art and Design di Budapest. Fu lo stesso Erdély a coniarne il nome.

Dallo spidrone derivano altri elementi funzionali alla tassellazione del piano e dello spazio, come il “semispidrone”, lo “*spidron belt*”, lo “*spidron arm*”, lo “*spidron nest*” e lo “*spidron relief*”.

Il semispidrone è la metà di uno spidrone; si costruisce allo stesso modo utilizzando triangoli di dimensioni sempre minori, o sempre maggiori, a seconda della direzione in cui si opera.

Lo *spidron belt* (cintura-spidrone) è una figura piana composta da un esagono regolare all’interno del quale si sviluppano sei spidroni che ne ricoprono completamente lo spazio interno. Questa tassellazione può essere ottenuta anche

⁴ http://matserv.pmmf.hu/hajtas/docs/2/Spidron_EN.pdf (consultato 07-09-2011).

⁵ Scultore, architetto e designer ungherese famoso per aver inventato l’omonimo cubo.

iscrivendo nell'esagono una stella a sei punte e ripetendo all'infinito l'operazione nell'esagono interno ad ogni stella (fig. 64).

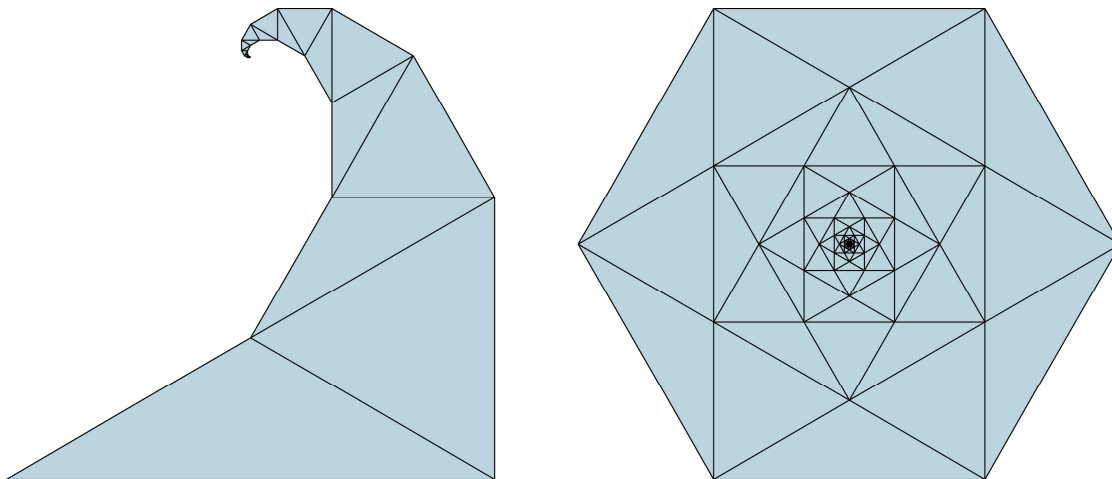


Fig. 64 – *Spidron arm* e *spidron nest* esagonale.

Lo *spidron arm* (braccio-spidrone) è la versione spaziale del semispidrone, ottenuto piegando i lati dei triangoli che compongono la figura bidimensionale; da questi spidroni sono sviluppabili tassellazioni dette *spidron nest* (nido-spidroni) (fig. 64). Uno *spidron nest* esagonale può, ad esempio, essere visto come uno *spidron belt* in cui gli spidroni piani sono stati deformati in *spidron arm*. Variando l'angolo tra un triangolo e l'altro è poi possibile pervenire a conformazioni differenti. La stessa proprietà non vale invece per altre formazioni come lo *spidron nest* a quattro bracci, che non può essere deformato. Si tratta di figure dalle caratteristiche straordinarie che risultano utili nella costruzione di poliedri per tassellature spaziali (*space-filling tiling*)⁶.

Se più *spidron nest* sono connessi tra loro si ottiene una forma a fisarmonica, organizzata secondo una griglia esagonale: lo *spidron relief*⁷, (fig. 65) dove i bordi

⁶ <http://edan.szin haz.org/SpidroNew/spacefilling.htm> (consultato 04-05-2011).

http://spidron.hu/spidronised_spacefillers/ (consultato 04-05-2011).

⁷ <http://edan.szin haz.org/SpidroNew/reliefs.htm> (consultato 04-05-2011).

esterni degli assembramenti di spidroni tendono ad allontanarsi dal piano di riferimento, creando terminazioni che combaciano l'una con l'altra. In tal modo si riescono ad ottenere tasselli spaziali capaci di generare *pattern* tridimensionali uniformi senza incorrere in sovrapposizioni o lacune (fig. 66).



Fig. 65 – Esempio di *spidron relief*.

http://edan.szin haz.org/Spidron_megjelenesek/pict/relief.jpg (consultato 04-05-2011).



Fig. 66 – Esempi di *space-filling tiling* ottenuti utilizzando degli *spidron arm*.

<http://edan.szin haz.org/SpidroNew/spacefilling.htm> (consultato 04-05-2011).

Va infine ricordato che lo spidrone, con le sue proprietà, costituisce un campo di ricerca ancora da esplorare; ne consegue che anche la terminologia usata e la classificazione delle forme create sono passibili di ulteriori future variazioni.