

Fig. 26 - JOHANNES KEPLER, *Harmonices Mundi*, 1619. Nell'immagine di destra si può vedere il *pattern* Aa scoperto da Kepler.

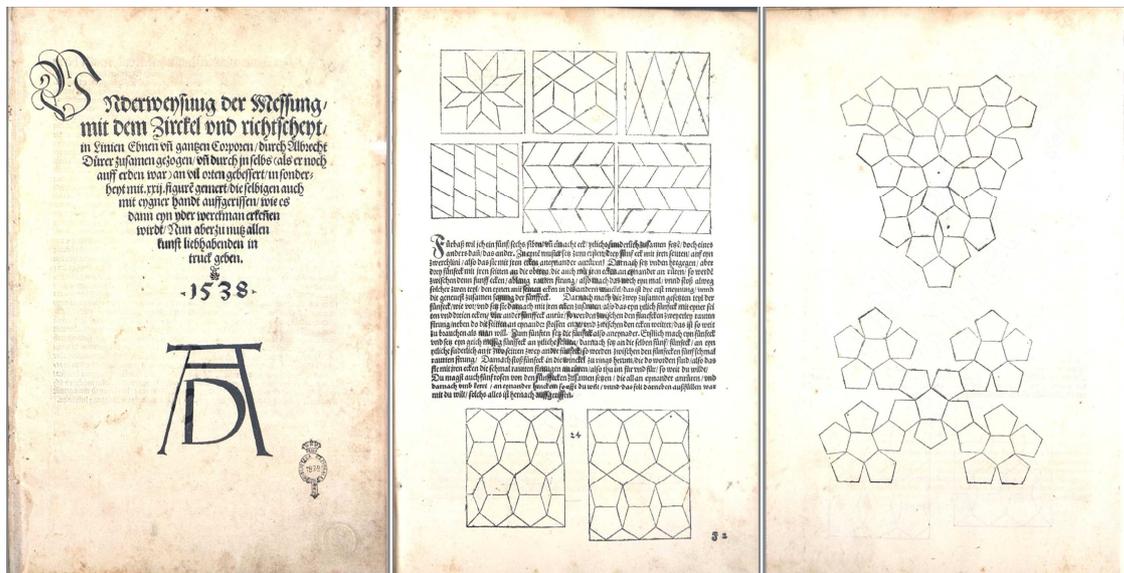


Fig. 27 - ALBRECHT DÜRER, *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheit*, 1525, frontespizio, f. 32 rv. Nella seconda e terza pagina si possono riscontrare alcune tassellazioni del piano con forme pentagonali.

Dovevano tuttavia trascorrere più di 350 anni dalla pubblicazione dell'opera di Kepler affinché Roger Penrose³ giungesse a scoprire la prima delle sue tassellazioni aperiodiche (da quel momento in poi denominata *P1*), che si può considerare un completamento del *pattern Aa* (fig. 28).

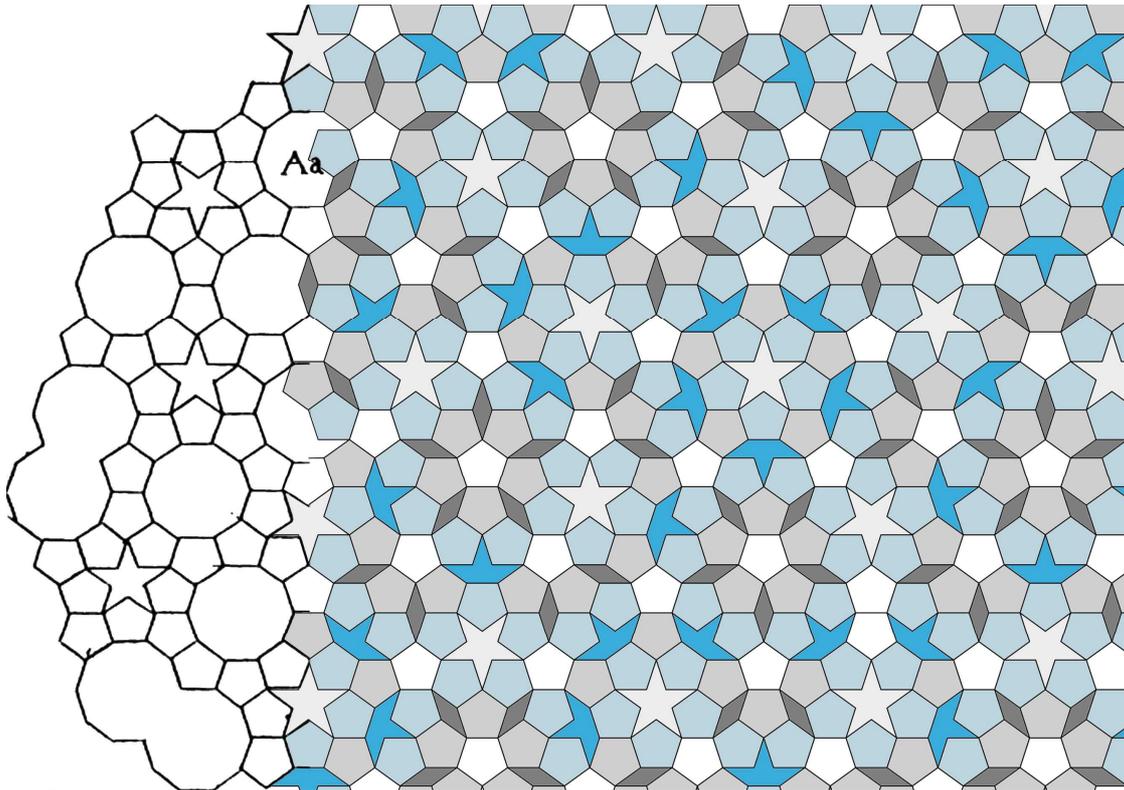


Fig. 28 – Tassellazione *Aa* di Kepler messa a confronto con la *P1* di Penrose.

Pur non essendo “integralmente” originale rappresentò comunque un enorme passo in avanti perché, mentre Kepler si era fermato ad una regione finita del piano, Penrose produsse una tassellazione capace di estendersi all’infinito. Egli notò inoltre che la propria tassellazione poteva essere generata per “sostituzione” di parti, in altre parole era autosimilare⁴, caratteristica che Kepler non aveva intuito⁵.

³ ROGER PENROSE, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, «Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications», vol. 10, 1974, pp. 266-271.

⁴ Paragrafo 2.6.

Penrose descrisse il *pattern P1* nel 1974: si trattava di un gruppo composto da sei tasselli⁶, basati su un modulo pentagonale anziché quadrato. In questa particolare scelta risiedono le proprietà già riscontrate da Kepler: qualsiasi tentativo di tassellare il piano solo con l'ausilio di pentagoni regolari lascerebbe inevitabilmente degli spazi vuoti, lacune che però possono essere colmate con pentagrammi (stelle pentagonali), decagoni e forme simili⁷.

La prima tassellatura di Penrose utilizza pentagoni regolari e altri tre tipi di tessere: una stella a cinque punte (pentagramma), una "barca", che è una porzione di pentagramma, e un "diamante", ovvero una sorta di rombo affusolato⁸ (fig. 29).

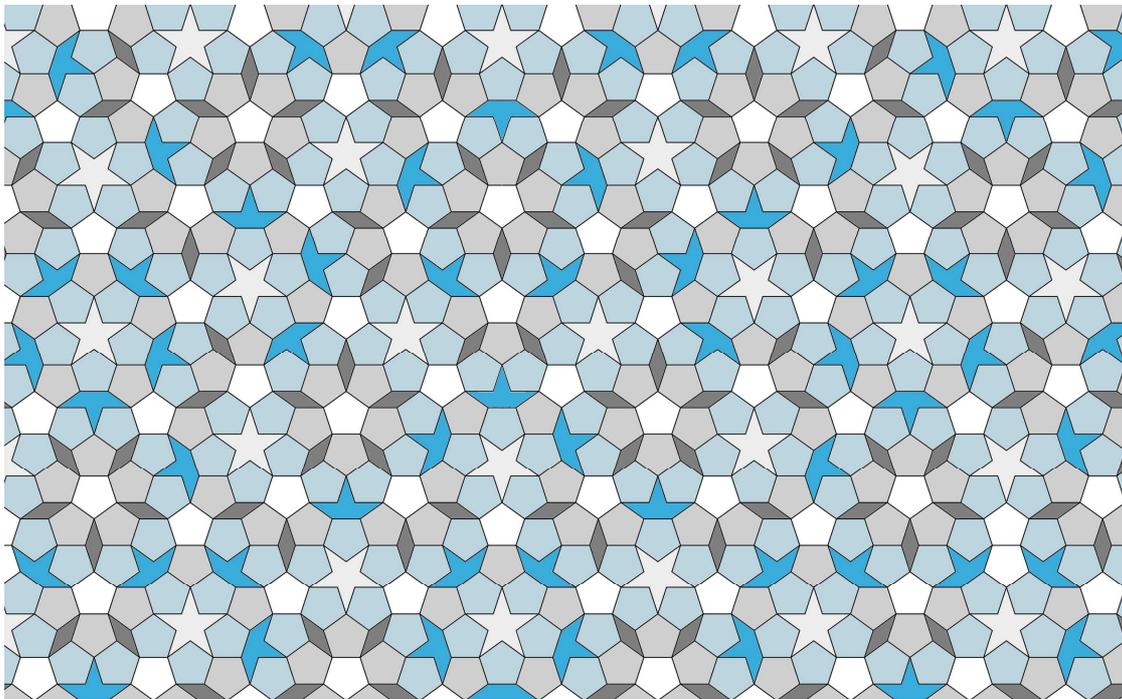


Fig. 29 – Tassellazione *P1* di Penrose.

⁵ MARJORIE SENECHAL, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge, Cambridge University Press 1995, pp. 171-172.

⁶ ROGER PENROSE, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, «Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications», vol. 10, 1974, pp. 266-271.

⁷ ERIC J. AITON, ALISTAIR MATHESON DUNCAN, JUDITH VERONICA FIELD (tradotto da), *The Harmony of the World by Johannes Kepler*, Philadelphia, The American Philosophical Society 1997, p. 106.

⁸ ROGER PENROSE, *Pentaplexity: a class of non-periodic tilings of the plane*, «Eureka», vol. 39, 1978, pp. 16-22.

La tassellatura $P1$ presenta numerose proprietà tra cui la non periodicità, dal momento che è priva di simmetrie di traslazione, e l'autosimilarità in quanto vi sono punti che rimangono fissi se si osserva il *pattern* a scale differenti.

Prendendo $P1$ come punto di partenza, Penrose riuscì successivamente a ridurre il numero di tasselli da quattro a due, giungendo a definire ulteriori due tassellazioni dette "*kite and dart*" (aquilone e dardo) e "dei rombi", che saranno chiamate rispettivamente $P2$ e $P3$. Una tassellatura a rombi con proprietà simili a $P3$ fu scoperta contemporaneamente da Robert Ammann⁹ nel 1976.

Nella tassellazione $P2$ (fig. 30) l'aquilone e il dardo sono forme composte ciascuna da due triangoli detti "triangoli di Robinson", dal nome del loro scopritore¹⁰, che presentano particolari rapporti tra gli angoli interni. L'aquilone è un quadrilatero convesso con tre angoli interni consecutivi di 72° e il quarto di 144° , che può essere suddiviso lungo il proprio asse di simmetria in una coppia di triangoli di Robinson acutangoli isosceli (36° , 72° , 72°). Il dardo è invece un quadrilatero concavo, con gli angoli di 36° , 72° , 36° e 216° , composto da una coppia di triangoli di Robinson ottusangoli isosceli (108° , 36° , 36°), aventi area minore rispetto ai precedenti.

La tassellatura $P3$ (fig. 31) utilizza una coppia di rombi isoperimetrici, ma con angoli diversi, perché una comune tassellatura romboidale del piano risulterebbe periodica. Le due tipologie di tasselli possono essere scomposte in triangoli di Robinson: il rombo più affusolato (con gli angoli opposti di 36° e 144°) risulta composto da due triangoli di Robinson acutangoli, mentre l'altro (con gli angoli opposti di 72° e 108°) è formato da due triangoli di Robinson ottusangoli. Diversamente da quanto accade per $P2$, sono questi ultimi ad avere l'area maggiore.

⁹ MARTIN GARDNER, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers...and the return of Dr. Matrix*, Washington, The Mathematical Association of America 1989, p. 19.

¹⁰ http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution_rules/robinson_triangle (consultato 19-09-2011).

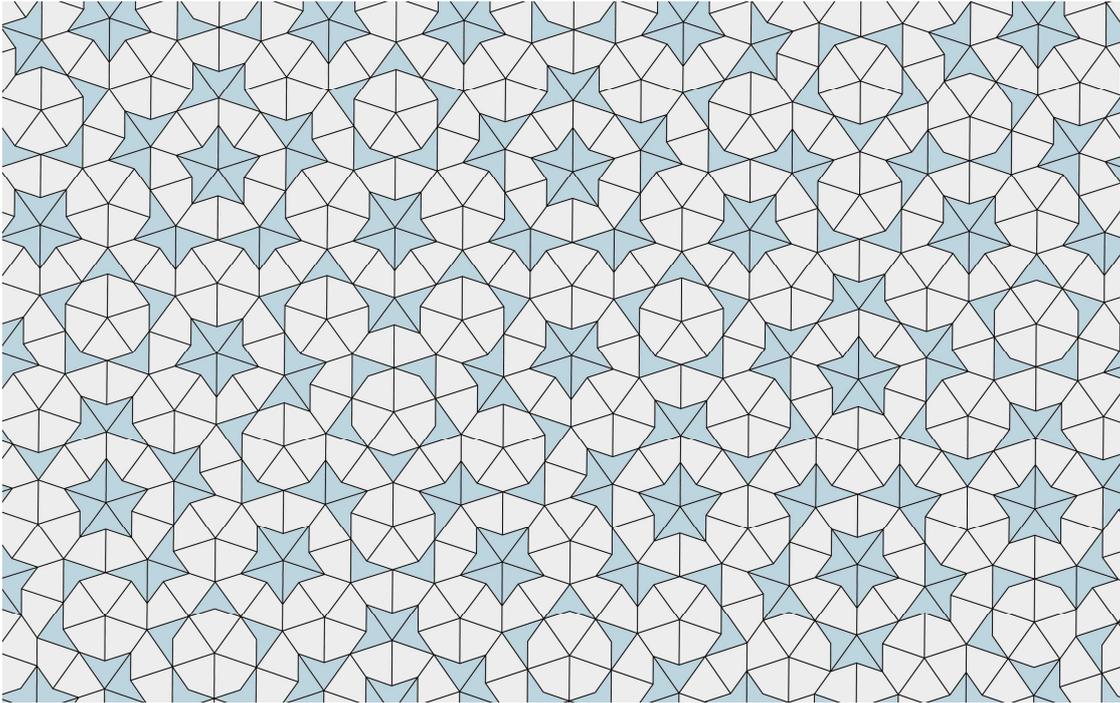


Fig. 30 – Tassellazione $P2$ di Penrose.

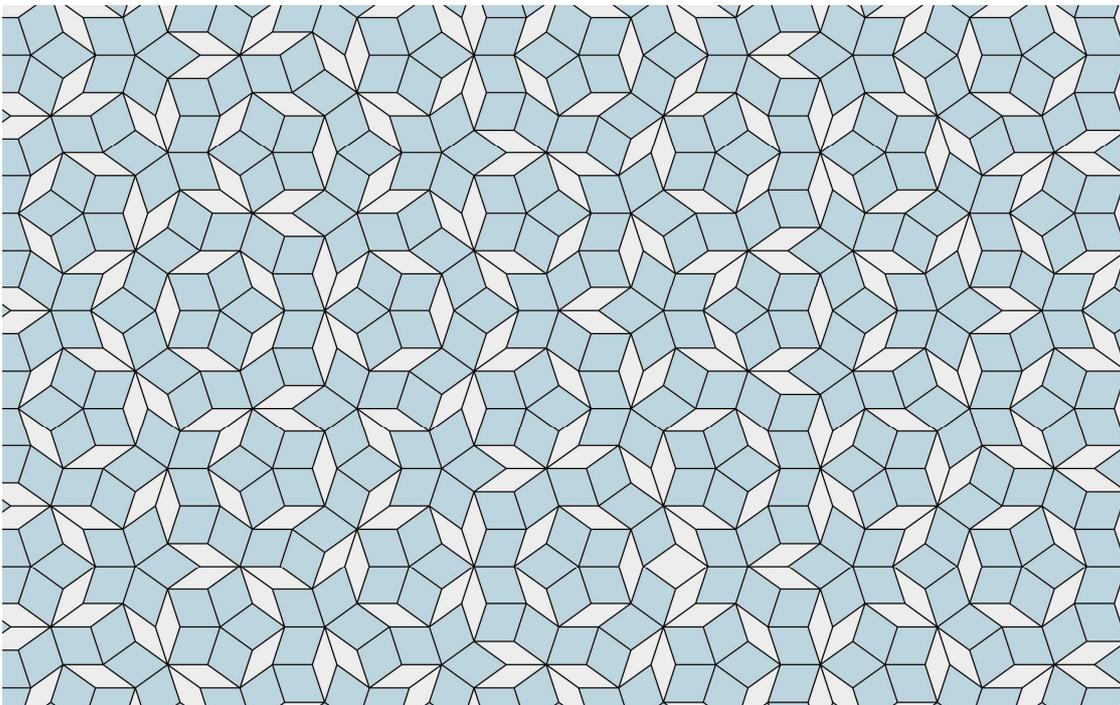


Fig. 31 – Tassellazione $P3$ di Penrose.

I triangoli di Robinson presenti nella tassellatura $P2$ vengono denominati “ A -tile”, mentre quelli della tassellatura $P3$ prendono il nome di “ B -tile”. Con AS si indica il minore dei due A -tile (triangolo ottusangolo) e con AL il maggiore (triangolo acutangolo); la stessa annotazione BS (triangolo minore acutangolo) e BL (triangolo maggiore ottusangolo) è utilizzata per i B -tile. Ne deriva che $P2$ e $P3$ possono essere mutualmente derivati e la scomposizione di B -tiles in A -tiles trascritta $BL = AL + AS$, supponendo $BS = AL$ (fig. 32).

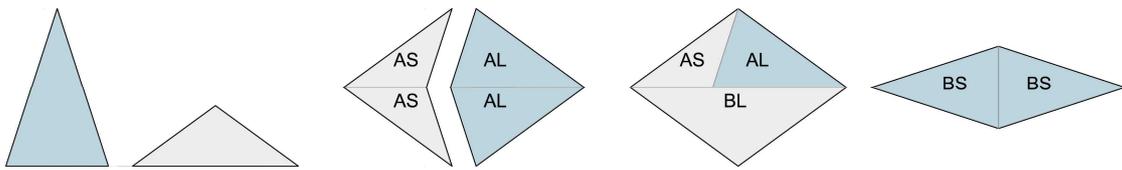


Fig. 32 – In figura i triangoli di Robinson simili hanno lo stesso colore: si possono così notare le relazioni tra questi e i tasselli di $P2$ e di $P3$.

Le tessere dei *pattern* $P2$ e $P3$ potrebbero produrre loro stesse delle tassellature periodiche; per evitare che ciò avvenga i tasselli devono essere affiancati rispettando le “regole di corrispondenza” (*matching rules*)¹¹. Si tratta di norme applicabili in vari modi, ma le più diffuse consistono nel marcare gli angoli con galloni o archi di due colori differenti (fig. 33), generando così un ulteriore *pattern*, e imponendo che nell’affiancare i tasselli non vi siano discontinuità nell’andamento di questi segni¹². In ragione di tali vincoli l’accostamento dei tasselli *kite* e *dart* non può dare origine ad un rombo perché genererebbe un *pattern* periodico. Sono quindi permesse solo sette configurazioni, benché con questi due tasselli ne siano possibili 54 ciclicamente ordinate, che consentirebbero la tassellazione del piano. Le medesime considerazioni si possono fare per la tassellazione $P3$.

¹¹ <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/penrose.html> (consultato 30-08-2011).

¹² MARTIN GARDNER, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers...and the return of Dr. Matrix*, Washington, The Mathematical Association of America 1989, p. 6, p. 17.

Sistemi diversi di esplicitare le regole di corrispondenza prevedono di marcare i lati dei tasselli con dentelli e incavi (fig. 33) che limitano le possibilità di affiancamento, oppure segnandoli con vettori e imponendo che per affiancare i lati debbano coincidere sia i versi che le intensità.

Esiste infine un ulteriore metodo per rappresentare le regole di affiancamento, basato su una scoperta di Robert Ammann¹³, secondo il quale questi *pattern* a maglia pentagonale sottesa vengono individuati da cinque famiglie di linee parallele che attraversano il piano in altrettante differenti direzioni, intersecandosi con angoli di 72°. In base a questa nozione i tasselli adiacenti, segnati con le cosiddette “barre di Ammann” (*Ammann bars*) (fig. 33), devono essere disposti in modo tale da riformare i cinque gruppi iniziali di linee parallele (fig. 34).

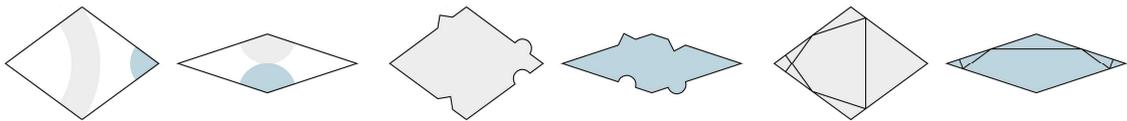


Fig. 33 – Esempificazione dei differenti modi di indicare sui tasselli i vincoli imposti dalle *matching rules*.

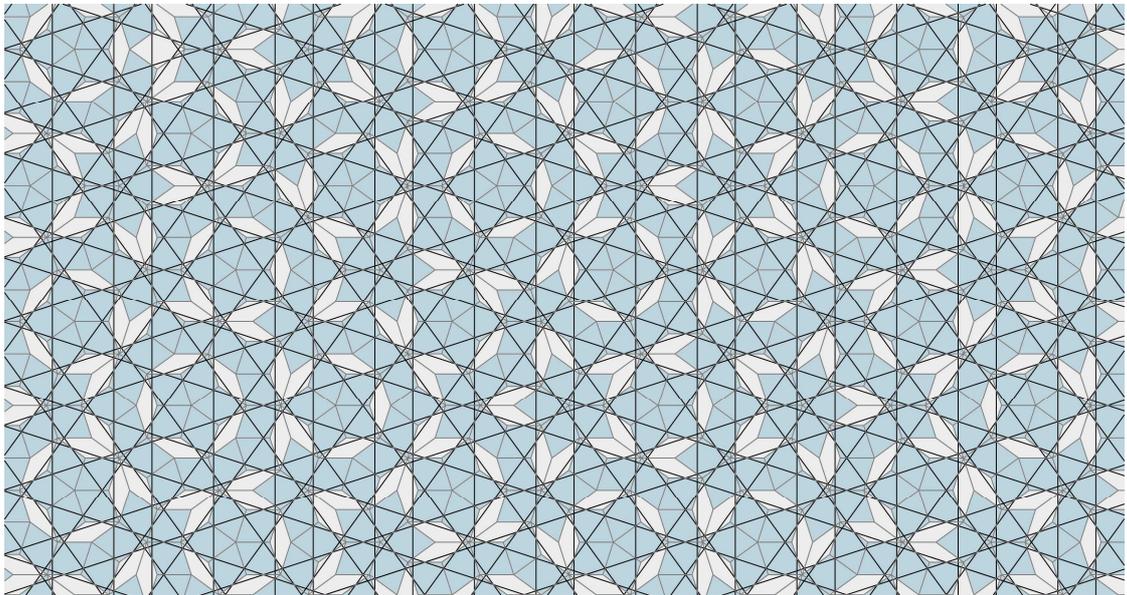


Fig. 34 – Barre di Ammann sovrapposte alla tassellatura *P3*.

¹³ MARTIN GARDNER, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers...and the return of Dr. Matrix*, Washington, The Mathematical Association of America 1989, p. 19.

Le sole regole di corrispondenza potrebbero tuttavia non essere sufficienti per tassellare il piano, data la possibilità di comporre dei *patch* che non risultino estendibili. Per ovviare a questo inconveniente si ricorre all'autosimilarità, propria di questo genere di tassellazioni, che garantisce la permanenza di alcuni punti fissi del reticolo pur osservando il medesimo *pattern* a scale differenti. Ciò significa che la tassellatura può essere ottenuta mediante "inflation" o "deflation", ovvero infittendo o diradando il reticolo.

Un risultato fondamentale nella teoria delle tassellazioni non periodiche è stata la scoperta di alcune tassellature che si possono ottenere proiettando dei punti da un reticolo di dimensioni maggiori, una sorta di autosimilarità della tassellazione a scale differenti. Questo metodo, denominato "cut and project", fu sperimentato per la prima volta da Nicolaas Govert de Bruijn per le tassellazioni di Penrose e permette di ottenere tassellature non periodiche inserendo *patch* in scala all'interno di un *pattern*¹⁴ (fig. 35).

Anche un altro sistema, detto di "inflazione", approfitta della caratteristica di autosimilarità e consiste nel dividere i tasselli per ottenere dei triangoli di Robinson¹⁵, i quali possono essere ulteriormente suddivisi per generare copie di sé stessi. In tal modo, all'interno del *pattern* di origine, verrà generata una nuova tassellatura definita inflazionata (*inflated*) (fig. 36), capace di soddisfare alle regole di corrispondenza. Si tratta di una suddivisione che può essere ripetuta all'infinito, ottenendo tasselli di dimensione sempre minore in grado di creare una gerarchia infinita di tassellature, in cui ognuna è l'inflazionata della precedente. Una struttura di questo genere può ricordare per alcuni versi quella dei frattali¹⁶.

¹⁴ NICOLAAS GOVERT DE BRUIJN, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tiling of the plane I*, «Indagationes Mathematicae», n. 1, vol. 43, 1981, pp. 39-52.

NICOLAAS GOVERT DE BRUIJN, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tiling of the plane II*, «Indagationes Mathematicae», n. 1, vol. 43, 1981, pp. 53-66.

¹⁵ ROGER PENROSE, *Aperiodicity and Order*, New York, Academic Press 1989, vol. 2, pp. 69-110.

¹⁶ P. RAMACHANDRARAO, ARVIND SINHA, D. SANYAL, *On the fractal nature of Penrose tiling*, «Current Science», n. 3, vol. 79, 2000, p. 364.

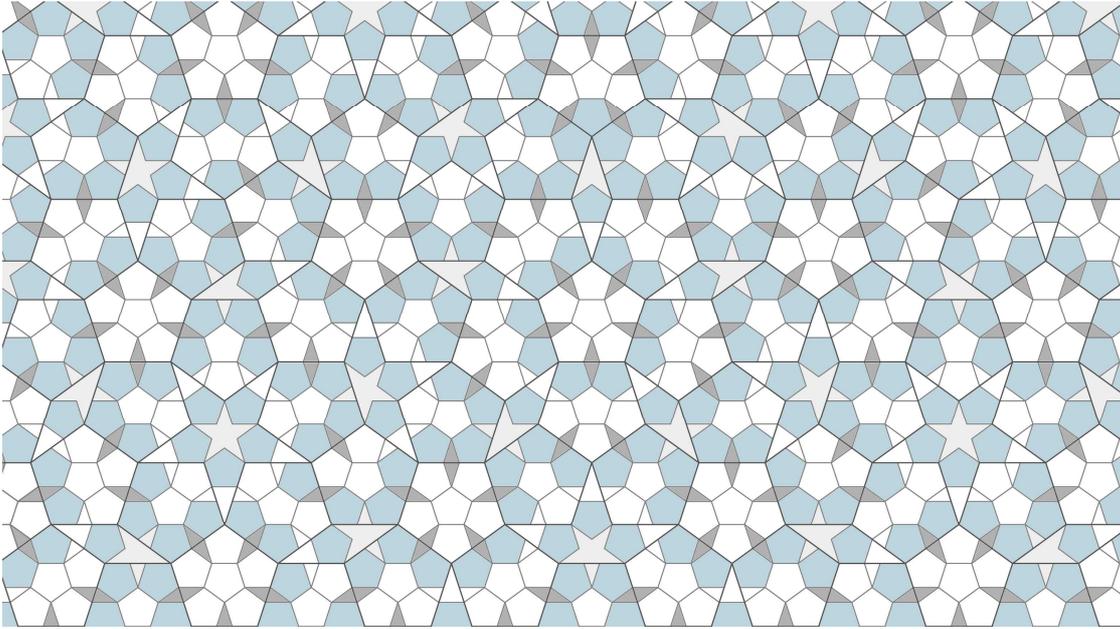


Fig. 35 – Metodo “cut and project” applicato alla tassellazione P1.

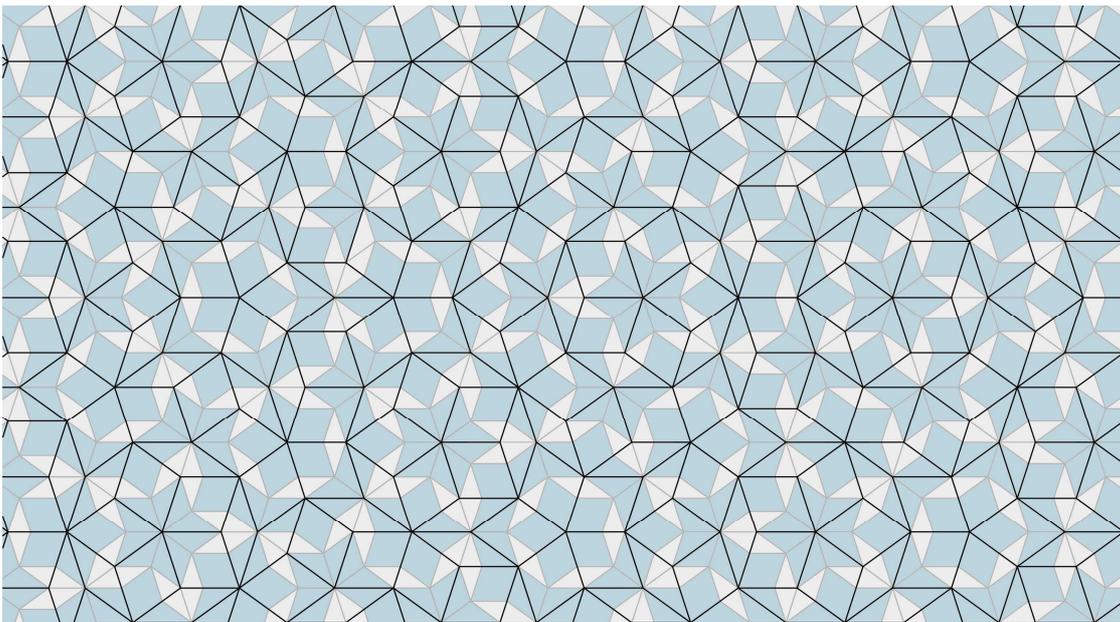


Fig. 36 – Tassellazione P3 con la sua “inflazionata”.

Partendo dai tasselli iniziali, il processo di deflazione procede attraverso fasi successive definite “generazioni”, all’interno delle quali ogni tassello viene sostituito

MARTIN GARDNER, *Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles*, «Scientific American», n. 236, 1977, pp. 110-121.

da uno o più tasselli che ne rappresentano una versione in scala (fig. 37). Questa regola assicura che le nuove forme vengano sistemate in accordo con le regole di accostamento.

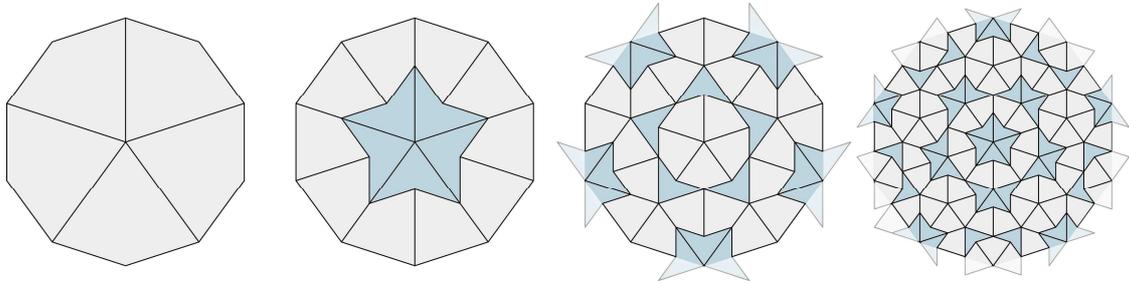


Fig. 37 – Esempio di “generazioni” ottenute a partire da un insieme di tasselli con il processo di deflazione.

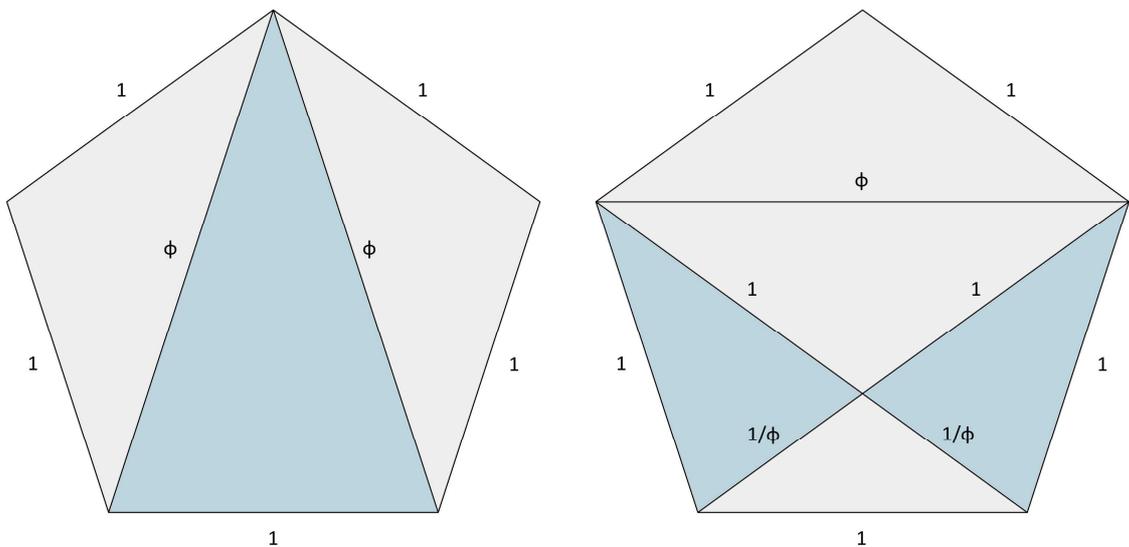


Fig. 38 – Costruzione geometrica dei triangoli di Robinson all'interno di un pentagono di lato unitario. In azzurro sono rappresentati i triangoli acutangoli, in grigio quelli ottusangoli.

I tre tipi di tassellature attribuite a Penrose mostrano un'unità di fondo che, mediante opportune trasformazioni, consente il passaggio da una tassellazione all'altra in quanto risultano tutte costruite partendo da forme pentagonali. Molte proprietà e caratteristiche delle tassellazioni di Penrose coinvolgono anche la sezione

aurea¹⁷ $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, che rappresenta il rapporto tra i lati dei triangoli di Robinson e la corda tra due vertici di un pentagono regolare (fig. 38).

Le tassellazioni di Penrose, nel loro complesso, non presentano gruppi di simmetria in quanto aperiodiche. Esaminando *patch* di dimensioni ridotte è tuttavia possibile notare la presenza di una simmetria rotazionale a cinque assi e cinque simmetrie assiali rispetto ai medesimi assi. Le simmetrie si conservano solamente per una porzione della tassellatura attorno al punto centrale.

Inoltre uno stesso *patch*, per quanto grande, si ripeterà un numero infinito di volte nella tassellatura, pur non esistendo una simmetria di traslazione¹⁸ (fig. 39).

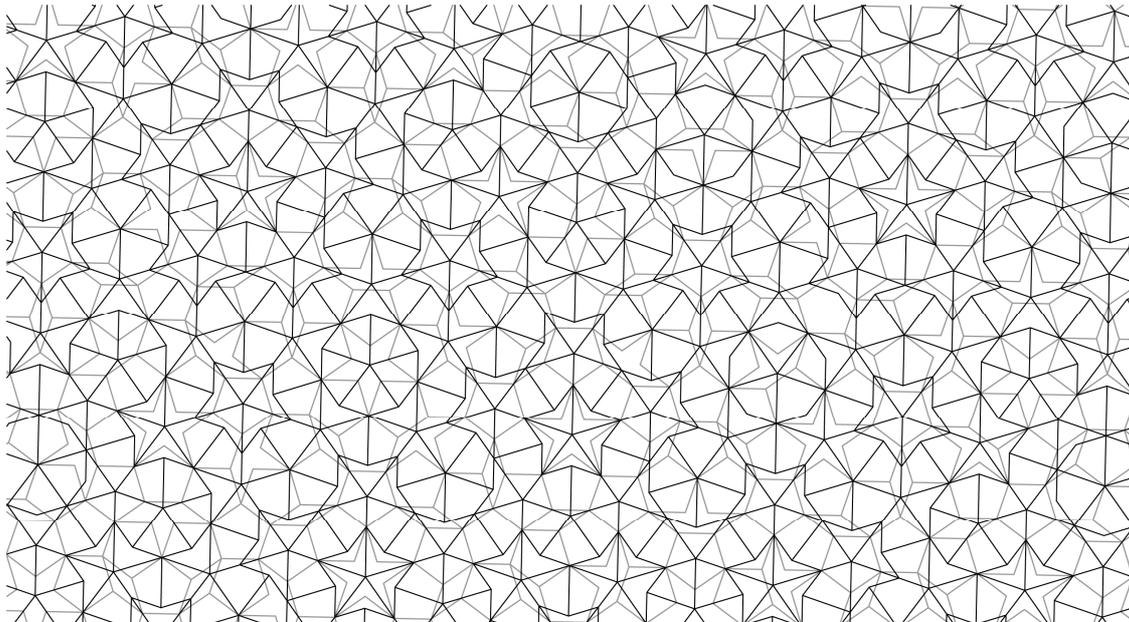


Fig. 39 – Dalla sovrapposizione delle tassellazioni P1 e P2 si può notare come alcuni punti notevoli rimangano fissi.

Nel 1977 Robert Ammann¹⁹ scoprì numerose tassellazioni aperiodiche: la più nota, denominata A5 o “tassellazione di Ammann-Beenker”²⁰, presenta

¹⁷ MARJORIE SENECHAL, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge, Cambridge University Press 1995, pp. 110-111.

¹⁸ <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/penrose.html> (consultato 30-08-2011).

proprietà simili alla $P3^{21}$. Entrambe le tassellature sono infatti non periodiche, cioè prive di simmetria di traslazione, e i singoli *patch* si ripetono infinite volte ma, a differenza della tassellatura di Penrose che presenta una simmetria rotazionale a cinque assi, in $A5$ i *patch* mostrano una simmetria rotazionale a otto bracci (fig. 40). Essa si compone mediante due tessere²², un quadrato e un rombo sottile o “diamante”, e può essere ricavata sia per deflazione sia con le regole di corrispondenza (fig. 41).

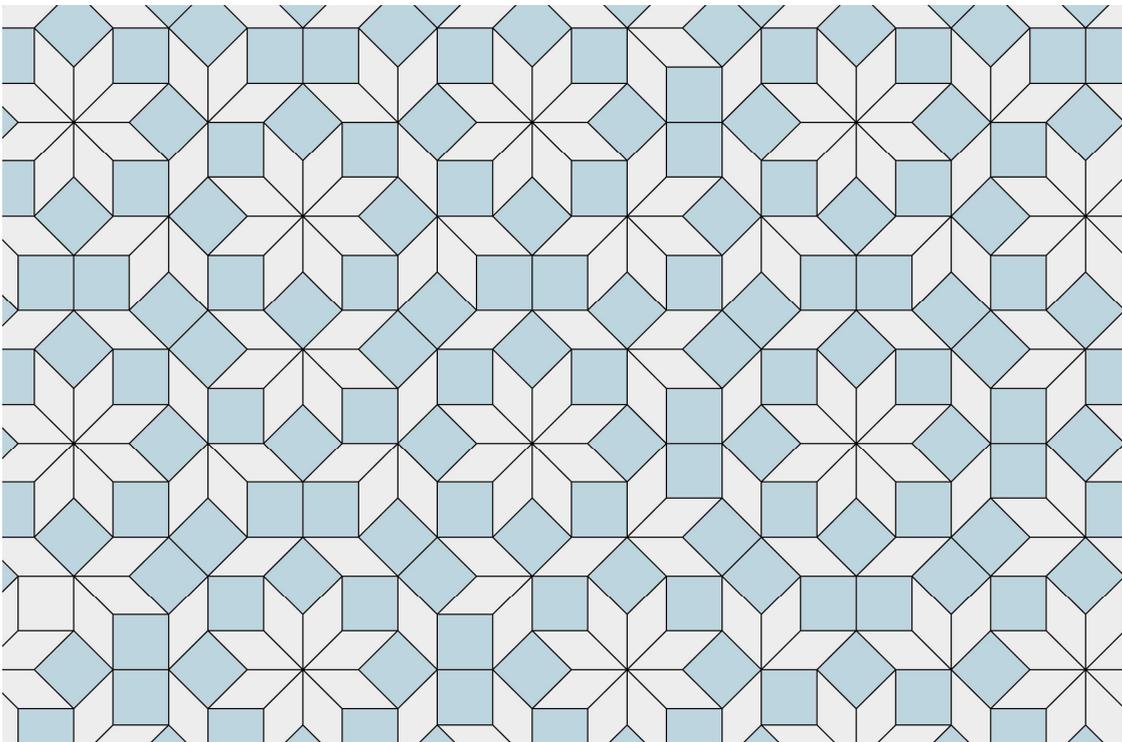


Fig. 40 – Tassellazione di Ammann.

¹⁹ http://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution_rules/ammann_beenker (consultato 30-08-2011).

²⁰ Tassellazione scoperta prima da Robert Ammann e poi, in modo indipendente, da F. P. M. Beenker.

F. P. M. BEENKER, *Algebraic theory of non-periodic tilings of the plane by two simple building blocks: a square and a rhombus*, Eindhoven (Nederland), Eindhoven University of Technology 1982.

²¹ MARJORIE SENECHAL, *Quasicrystals and geometry*, Cambridge, Cambridge University Press 1995, p. 170.

²² <http://www.quadibloc.com/math/oct01.htm> (consultato 18-04-2011).

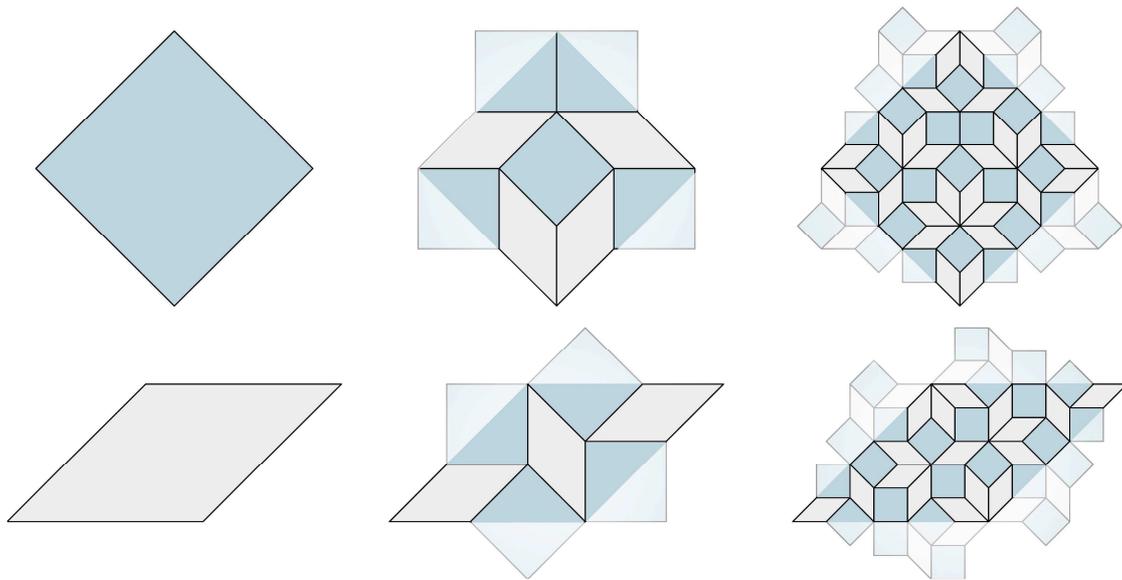


Fig. 41 – Deflazione dei tasselli nella tassellazione di Ammann.

Occorre infine sottolineare che le tassellazioni di Penrose rivelano notevoli affinità con i quasicristalli la cui struttura, in contrasto con le leggi classiche della cristallografia, mostra simmetrie di rotazione a cinque assi mentre si ritenevano possibili solamente simmetrie a due, tre, quattro e sei raggi, in grado di portare la struttura del cristallo a coincidere con sé stessa.

Le tassellature non periodiche di Penrose rappresentano il modello di riferimento per i semicristalli²³, sostanze che hanno una simmetria “quasi” a cinque bracci.

Nel 1982, Daniel Schechtman²⁴ e i suoi collaboratori, durante il raffreddamento rapido di un provino di alluminio-manganese, osservarono che la lega produceva una figura di diffrazione ai raggi X con simmetria rotazionale a cinque assi, un *pattern* che chiaramente non poteva essere costituito da un cristallo periodico: fu infatti il primo

²³ Materiali che risultano più duri dei cristalli e con una maggiore resistività elettrica alle basse temperature.

²⁴ Fisico israeliano.

DANIEL SCHECHTMAN, ILAN BLECH, DENIS GRATIAS, JOHN W. CAHN, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, «Physical Review Letters», n. 20, vol. 53, 1984, pp. 1951-1954.

quasicristallo ad essere riconosciuto come tale. Nello stesso periodo Paul Steinhardt²⁵ ipotizzava che gli atomi potessero formare strutture aperiodiche simili alle tassellature di Penrose, che prevedevano l'esistenza dei quasicristalli.

In seguito alla scoperta di Schechtman vennero trovati molti altri casi assimilabili al medesimo fenomeno.

²⁵ Docente di matematica alla Princeton University nel New Jersey.

1.1.6

Tassellatura di Voderberg

«Se non ci fossero cose non computabili, il concetto di computabilità non avrebbe molto interesse in matematica: i matematici, dopo tutto, amano i rompicapo».

ROGER PENROSE, *La mente nuova dell'imperatore*, Milano, Rizzoli 1992, p. 102.

Il “numero di bordatura” (*surround number*) indica quante sono le copie minime necessarie per circondare un tassello.

In una tassellazione con quadrati, per esempio, ogni tessera è normalmente racchiusa tra altre otto, mentre con una distribuzione che ignori la condizione di non scorrimento ne sono necessarie solo sei. Allo stesso modo un triangolo equilatero può essere circondato impiegandone altri sei e un rettangolo con quattro copie di sé stesso¹ (fig. 42).

Erich Friedman² realizzò una serie di figure che potevano essere racchiuse mediante tre o quattro loro copie. Fu allora che sorse spontaneo l'interrogativo se esistesse un tassello capace di circondare sé stesso utilizzando solo due copie.

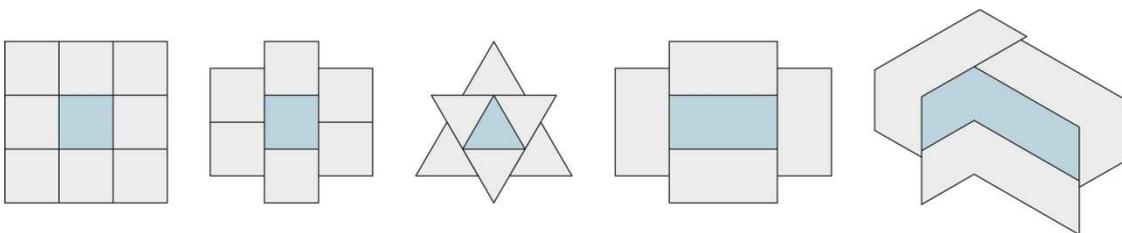


Fig. 42 – Esempi di tessere circondate da loro copie.

¹ CASEY MANN, *A Tile with Surround Number 2*, «The American Mathematical Monthly», n. 4, vol. 109, 2002, pp. 383-384.

² ERICH FRIEDMAN, *Heesch tiles with surround numbers 3 and 4*, «Geombinatorics», n. 4, vol. VIII, 1999, pp. 101-103.

La tassellatura scoperta da Hans Voderberg nel 1936 è molto vicina a questa condizione. Si tratta di una tassellazione monoedrale *edge-to-edge* composta da tessere concave a forma di ennagono piegato che, come nel caso di molti tasselli radiali, può essere ottenuta dalla deformazione di un triangolo, nella fattispecie un triangolo isoscele con un angolo al vertice di 12° (fig. 43). I lati delle tessere sono di lunghezze differenti in modo da consentire ai tasselli di adattarsi perfettamente l'uno sull'altro.

Sono sufficienti due di queste tessere per racchiuderne quasi completamente un'altra o per contenerne una coppia (fig. 44). Il tassello di Voderberg è in grado di produrre tassellazioni radiali e spiraliformi particolarmente attraenti a cui si può ricondurre una varietà infinita di tassellature, conosciute come “tassellature di Voderberg generalizzate” (*generalized Voderberg tiles*), che il metodo di Michael Goldberg³ consente di costruire (figg. 45 e 46).

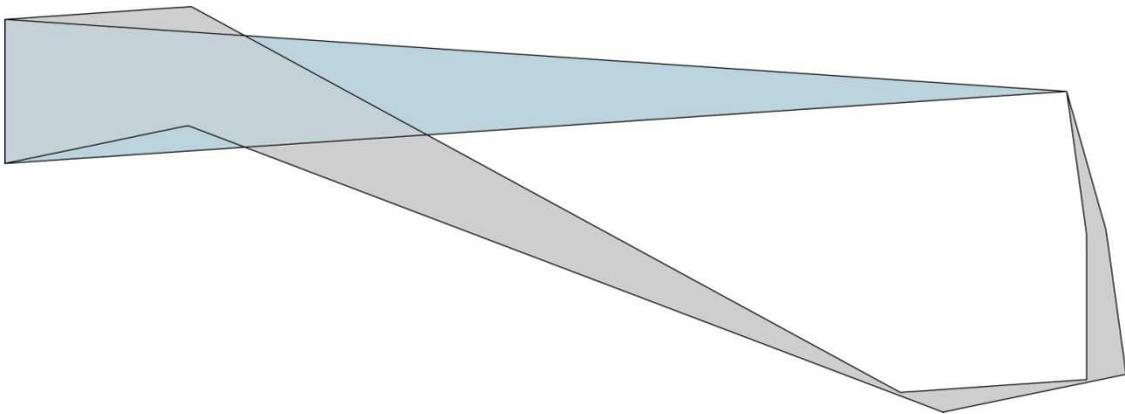


Fig. 43 – Deformazione del triangolo isoscele che permette di ottenere il generico tassello di Voderberg.

³ MICHAEL GOLDBERG, *Central Tessellations*, «Scripta Mathematica», vol. 21, 1955, pp. 253-260.

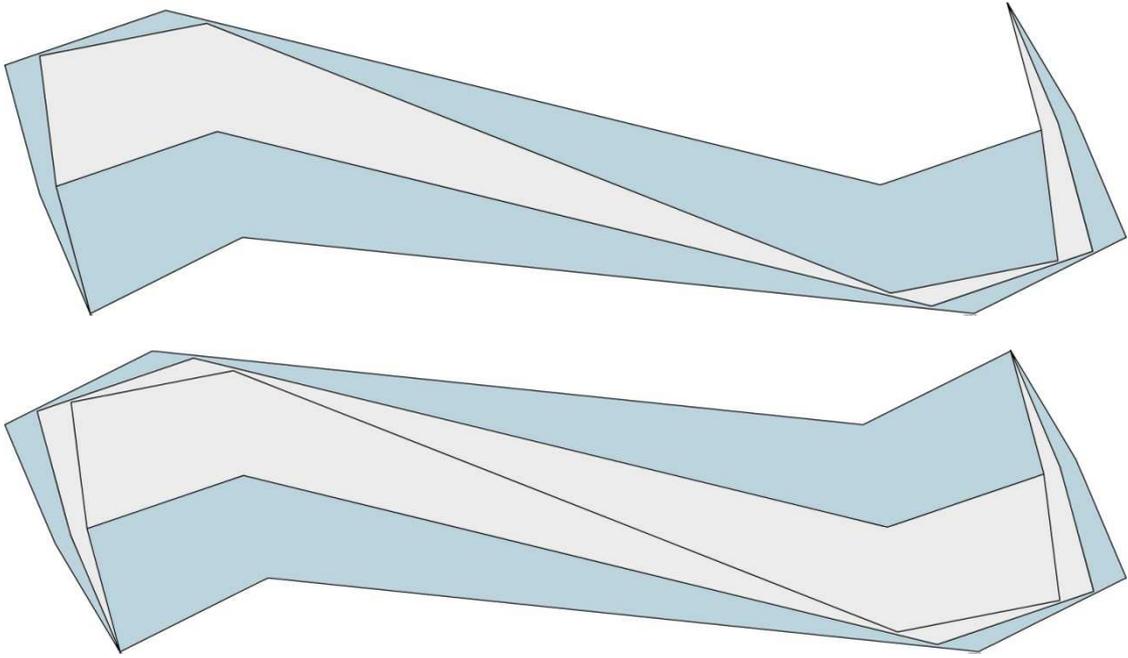


Fig. 44 – Due tasselli di Voderberg in grado di racchiuderne quasi completamente un altro o di contenerne una coppia.

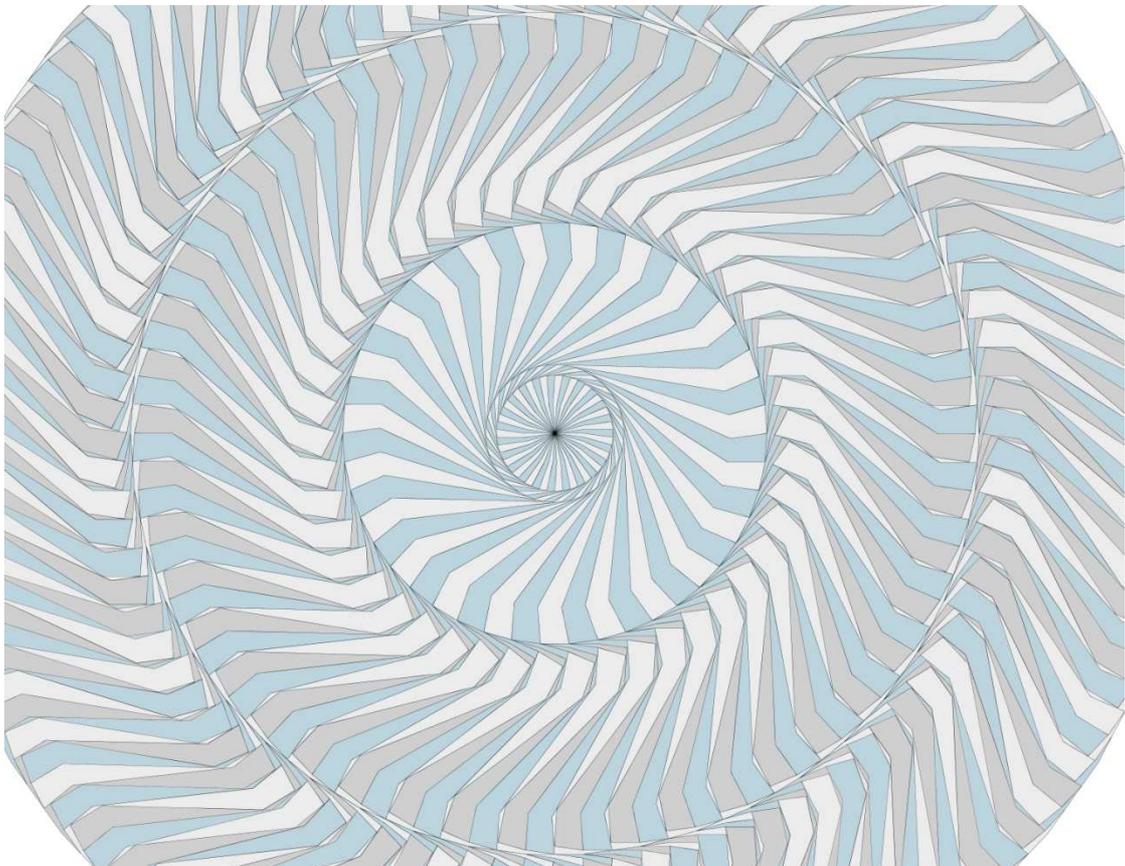


Fig. 45 – Tassellatura di Voderberg radiale.

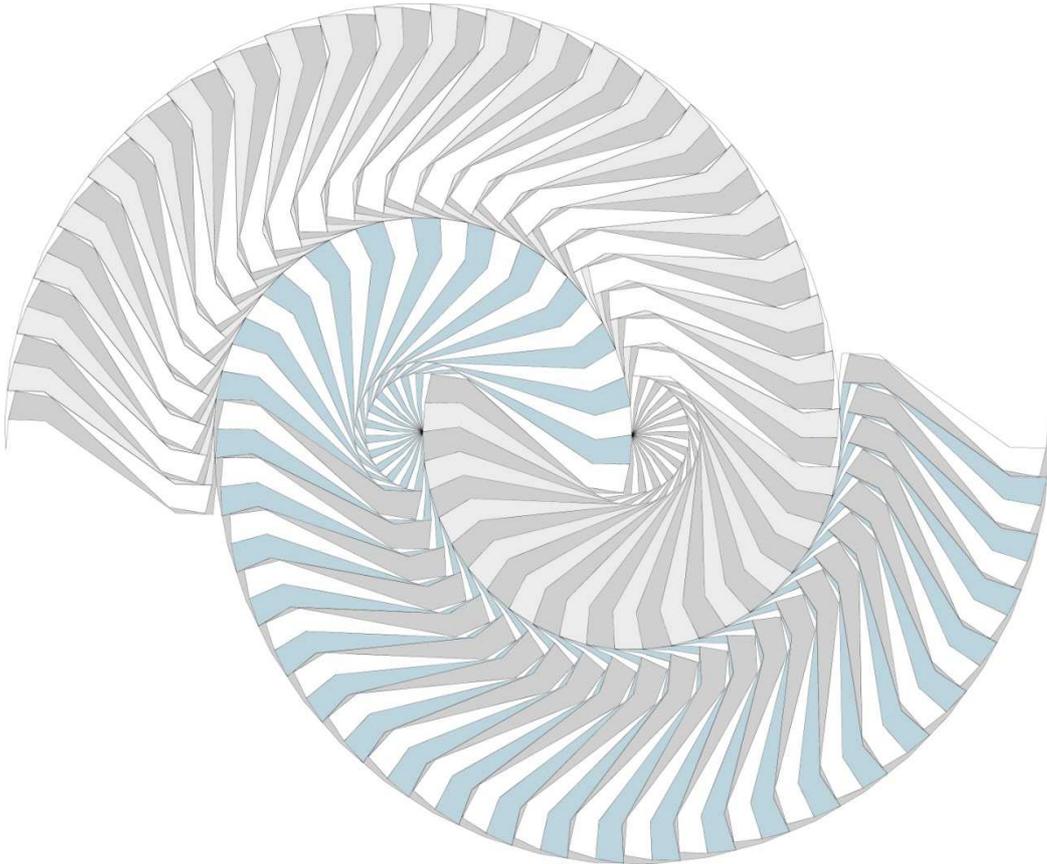


Fig. 46 – Tassellatura di Voderberg spiraliforme.

Il metodo citato (fig. 47) prevede di utilizzare quattro linee parallele equidistanti su cui tracciare i segmenti \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , avendo l'accortezza che gli angoli in B e C siano retti. Scelto un numero n pari (nell'esempio $n=2$) si costruiscono n segmenti uguali sugli archi ED e AF , tracciati puntando rispettivamente in A e D sempre con lo stesso raggio \overline{AD} .

Dopo aver indicato con D' il punto più vicino a D tra quelli individuati sull'arco DE e con A' il più prossimo a A tra quelli appartenenti all'arco AF , sia S la spezzata $AA'FBCE$ e σ la rotazione rispetto ad A che porta E a coincidere con D' : la figura individuata da S , $\sigma(S)$ e $\overline{ED'}$ rappresenta il tassello generalizzato di Voderberg. Due tessere così conformate possono circondarne $2n$ o $2n+1$ copie.

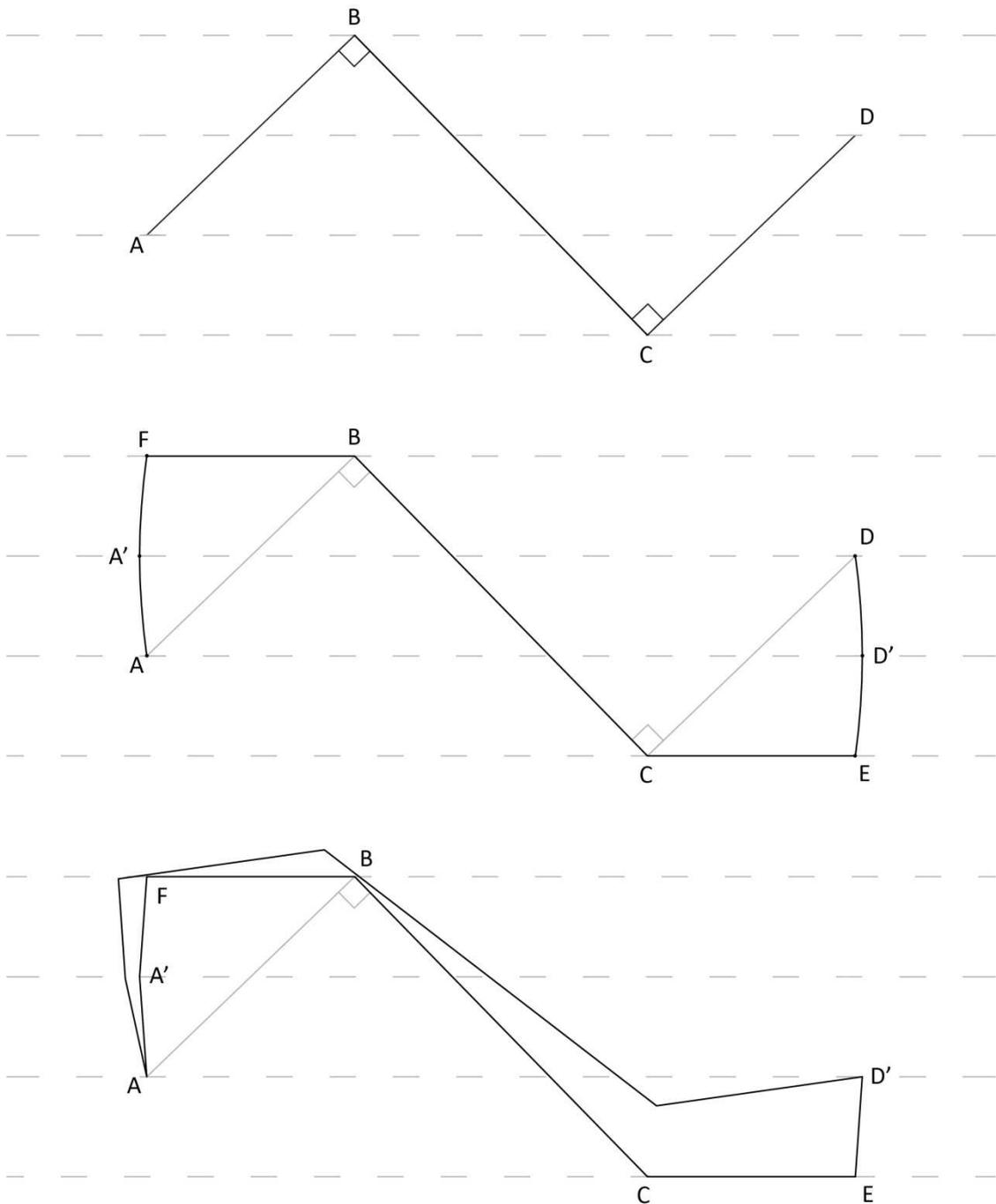


Fig. 47 – Descrizione del processo geometrico per ottenere il generico tassello di Voderberg.

La costruzione del modello parametrico segue il procedimento descritto per ottenere la tessera base con cui ho formato un settore radiale del *pattern*, che è stato poi copiato più volte rispetto al proprio centro di rotazione. In tal modo è così

possibile osservare come varia la tassellatura di Voderberg in funzione del tassello base (fig. 48).

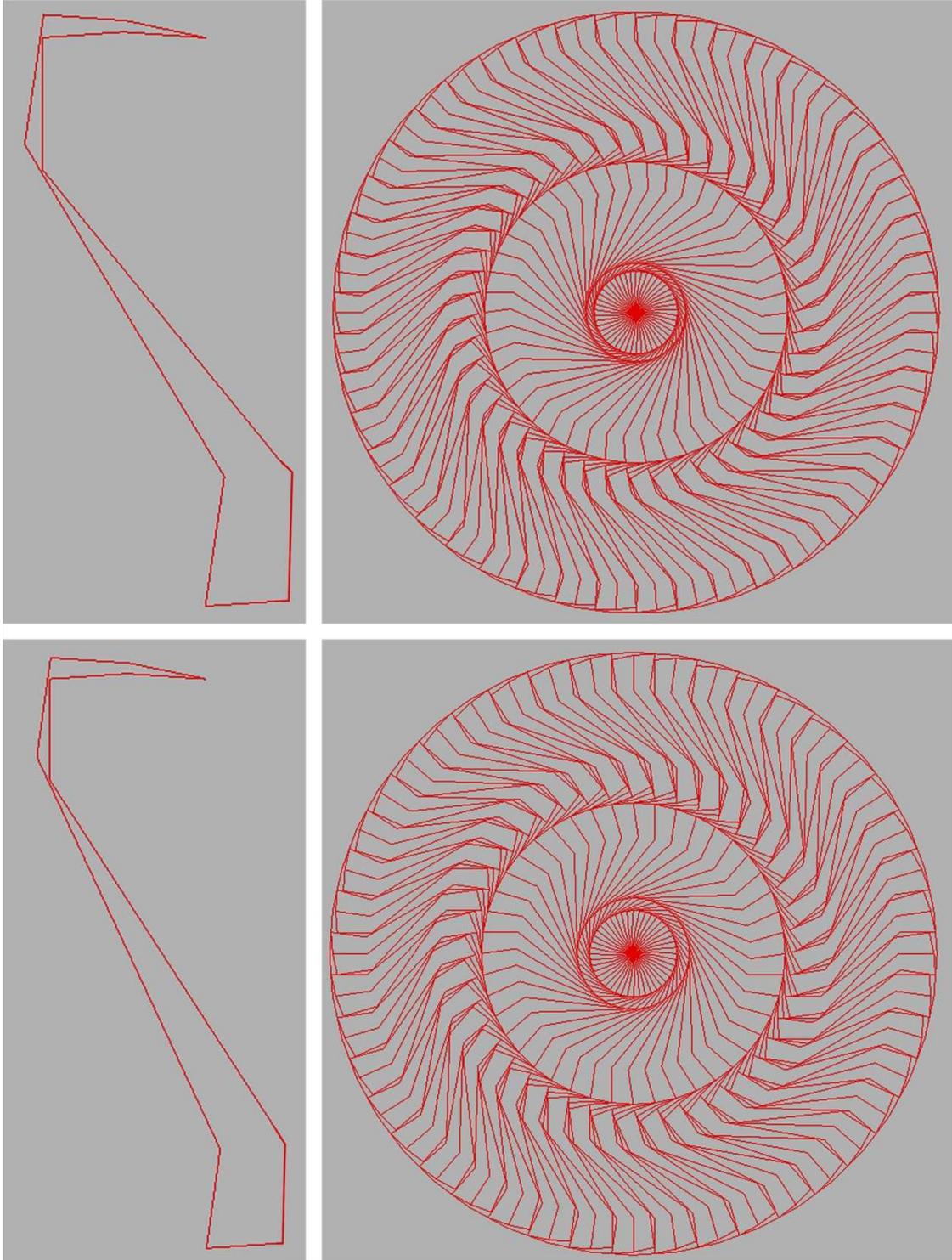


Fig. 48 – Variazioni dell'aspetto della tassellazione al variare della forma del tassello.

Si può quindi affermare che esiste sempre un generico tassello di Voderberg capace di circondare $2n$ o $2n+1$ sue copie, lasciando solo due punti esposti (fig. 49).

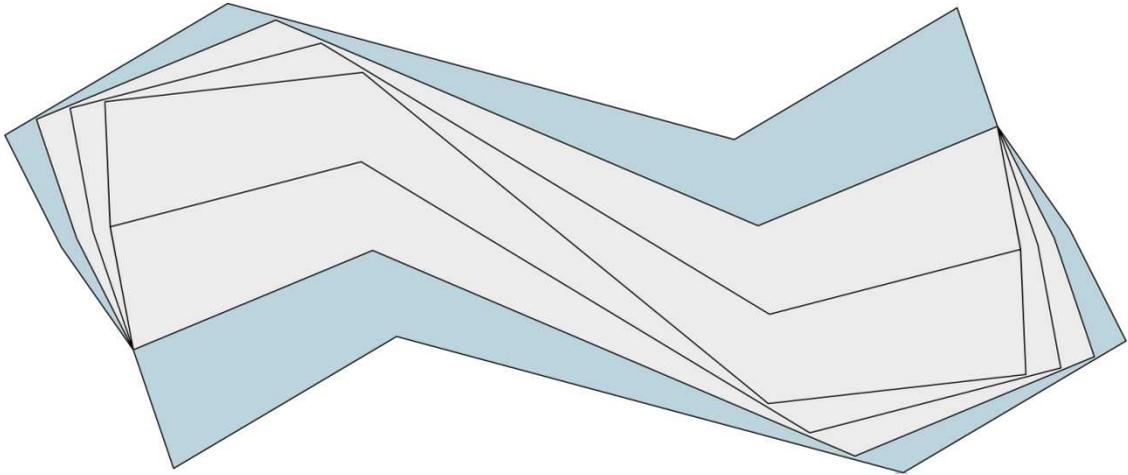


Fig. 49 – Tessere nella tassellatura di Voderberg in grado di circondare $2n$ copie di sé stesse (in questo caso $n=2$).

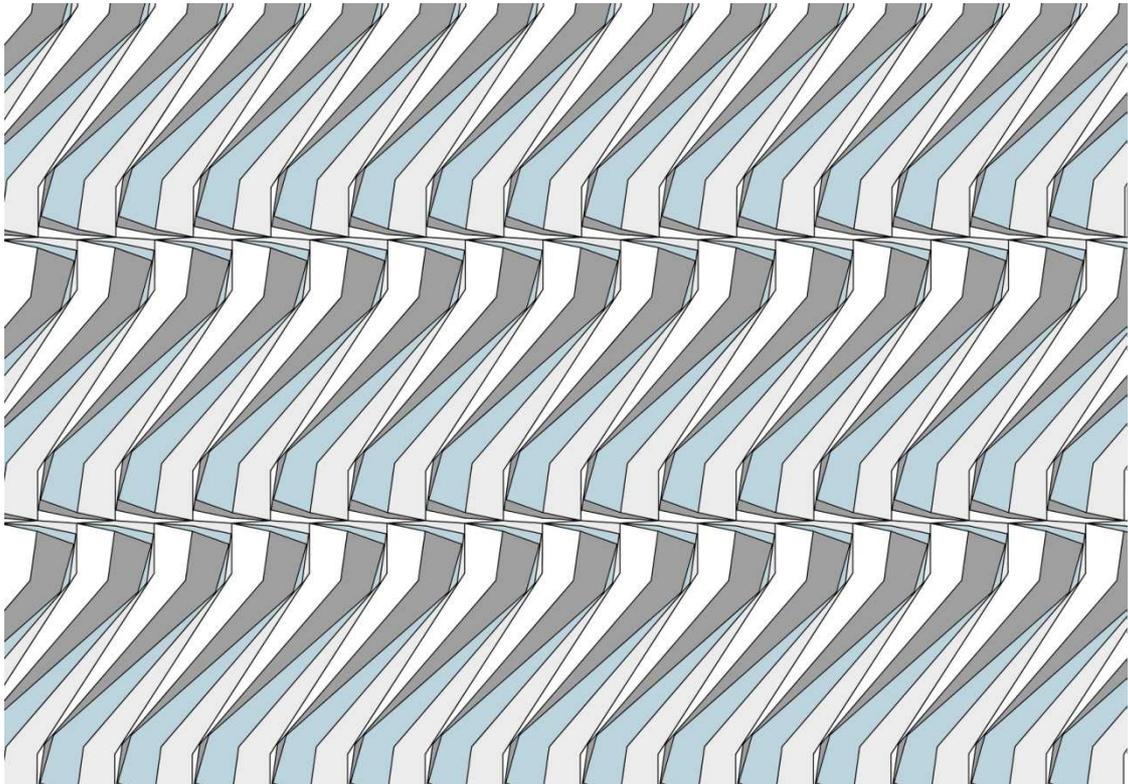


Fig. 50 – Esempio di *pattern* periodico ottenuto con le tessere di Voderberg.