POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Smorzatori sotto-pala per turbomacchine: un nuovo metodo basato sul calcolo simultaneo delle forze statiche e dinamiche di contatto.

Original
Smorzatori sotto-pala per turbomacchine: un nuovo metodo basato sul calcolo simultaneo delle forze statiche e dinamiche di contatto / Zucca, Stefano; Firrone, CHRISTIAN MARIA; Gola, Muzio. - ELETTRONICO. - (2011). (Intervento presentato al convegno 40° Convegno Nazionale AIAS tenutosi a Palermo nel 7-10 settembre 2011).

Availability:
This version is available at: 11583/2489292 since:

Publisher:

Published
DOI:

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

19 April 2024

AIAS – ASSOCIAZIONE ITALIANA PER L'ANALISI DELLE SOLLECITAZIONI
40° CONVEGNO NAZIONALE, 7-10 SETTEMBRE 2011, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO

AIAS 2011 – 132

SMORZATORI SOTTO-PALA PER TURBOMACCHINE: UN NUOVO METODO BASATO SUL CALCOLO SIMULTANEO DELLE FORZE STATICHE E DINAMICHE DI CONTATTO

S. Zucca[a], C.M. Firrone[a], M. Gola[a]

a Politecnico di Torino – Dipartimento di Meccanica,
Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino, email: stefano.zucca@polito.it

Sommario
Gli smorzatori sotto-pala sono largamente impiegati per ridurre l'ampiezza di vibrazione dei dischi palettati di turbina. Si tratta di elementi prismatici posizionati sotto le piattaforme delle pale che dissipano energia per attrito durante la vibrazione.
La procedura comunemente utilizzata per calcolare le forze agenti al contatto tra pale e smorzatori è basata su due passi successivi: un'analisi statica preliminare e quindi un'analisi dinamica imponendo come forze statiche di contatto quelle calcolate al primo step.
In questo lavoro si propone un approccio originale per il calcolo accoppiato delle equazioni di equilibrio statico e dinamico del sistema. Sono presentate applicazioni numeriche a dimostrazione delle capacità del metodo proposto e delle differenze rispetto allo stato dell'arte.

Abstract
Underplatform dampers are widely used to reduce vibration amplitude of turbine bladed disks by friction. They are metal devices placed under the blade platforms and held in contact with them by the centrifugal force acting during rotation.
The common procedure used to calculate the static loads acting on underplatform dampers consists in decoupling the static and the dynamic balance of the damper. A preliminary static analysis of the contact is performed in order to compute the static pressure distribution over the damper/blade interfaces, assuming that it does not change when vibration occurs.
In this paper a coupled approach is proposed to solve the static and the dynamic balance equations of the system. Numerical case studies are presented in order to show the capabilities of the method and the improvements with respect to the state of the art.

Parole chiave: attrito, progettazione, dinamica strutturale, metodi numerici, turbomacchine.

1. INTRODUZIONE

Il cedimento per fatica ad alto numero di cicli (HCF) di pale di turbine di motori per aeromobili può verificarsi in presenza di ampiezze di vibrazioni troppo elevate delle pale. Tale condizione può verificarsi quando all'interno dell'inviluppo operativo del motore si verifica la vibrazione in risonanza delle pale. Non essendo sempre possibile desintonizzare il sistema rispetto alle forzanti, si ricorre in progetto ad una strategia alternativa: l'aumento dello smorzamento.
Una delle tipologie di smorzamento più diffuse nel campo dei dischi palettati di turbina per impiego aeronautico è rappresentata dagli smorzatori sotto-pala. Si tratta di componenti, tipicamente prismatici o cilindrici alloggiati all'interno di cave realizzate sotto le piattaforme delle pale (Figura 1). Per effetto della forza centrifuga, gli smorzatori vengono premuti contro le pareti della cava e a causa del moto relativo tra pale e smorzatore viene dissipata energia per attrito.

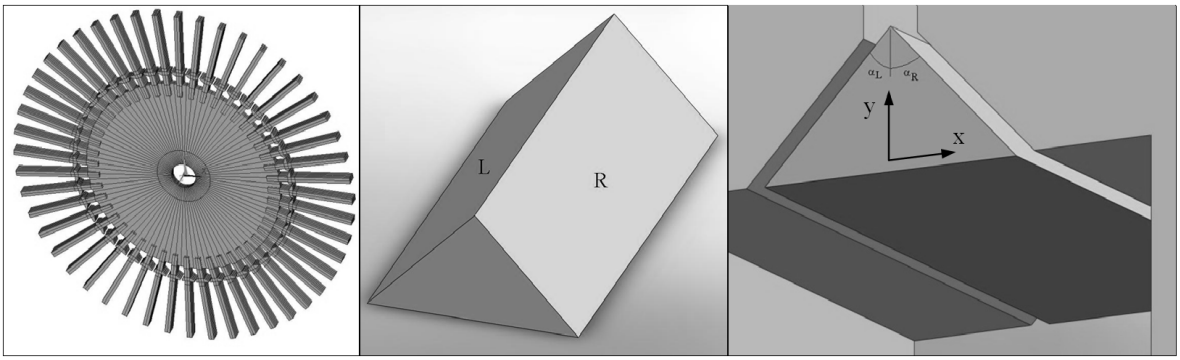


Figura 1: simulacri di disco di turbina, smorzatore sotto-pala e collocazione dello smorzatore nella cavità sotto il profilo della pala

La progettazione degli smorzatori sotto-pala richiede la capacità di prevedere a calcolo il loro effetto sulla risposta forzata del sistema nell'intorno delle risonanze ritenute potenzialmente critiche dal progettista. Negli ultimi quindici anni, i codici di calcolo sviluppati in tutto il mondo a tale scopo si sono basati sul metodo del bilanciamento armonico ([1]), secondo il quale la risposta periodica del sistema e le forze di attrito periodiche sono espresse mediante combinazione lineare di termini armonici e le equazioni differenziali di equilibrio del sistema sono trasformate in equazioni algebriche a coefficienti complessi.
Nei primi studi relativi agli smorzatori sotto-pala ([2]-[4]) la cinematica dello smorzatore era calcolata assumendo condizioni di contatto continuo tra tutte e due le facce dello smorzatore e le piattaforme delle pale. Successivamente ([5]-[8]) gli smorzatori sono stati modellati come corpi rigidi in grado di ruotare e di separarsi parzialmente dalle pale durante la vibrazione.
Gli smorzatori e le piattaforme delle pale sono collegati tra loro mediante elementi di contatto ([9]-[12]), utilizzati per modellare la deformabilità locale del contatto, non inclusa nel modello ad elementi finiti del sistema, e per tenere in conto i possibili stati del contatto (adesione, scorrimento e distacco) e il loro alternarsi nel tempo.
Questi modelli sono stati successivamente raffinati ([13]-[16]), modellando lo smorzatore con gli elementi finiti, in modo da includere nel modello anche l'elasticità globale dello smorzatore e non solo la deformabilità locale dell'interfaccia pale/smorzatore.
Uno dei fattori da cui dipende l'efficienza dello smorzatore e quindi la sua capacità di dissipare energia per attrito è il valore della forza statica normale di contatto, proporzionale alla forza centrifuga e quindi alla massa dello smorzatore; una massa troppo elevata impedisce lo scorrimento dello smorzatore e quindi la dissipazione di energia, mentre una massa troppo piccola può favorire il distacco dello smorzatore dalle piattaforme delle pale.
In tutti i modelli presenti in letteratura, il calcolo degli effetti degli smorzatori sotto-pala sulla risposta forzata di dischi palettati di turbine si basa su una procedura composta di due fasi:
- analisi statica del sistema per il calcolo delle forze statiche di contatto all'interfaccia smorzatore/pale.
- analisi dinamica del sistema mediante Metodo del Bilanciamento Armonico, usando le forze statiche di contatto calcolate al punto 1 come parametri del contatto.
In questo modo le equazioni di equilibrio statiche e dinamiche del contatto sono disaccoppiate e si assume che le forze statiche di contatto non siano influenzate dalla vibrazione e quindi dal moto relativo smorzatore/pala.
In questo lavoro, si propone un metodo innovativo per il calcolo accoppiato dell'equilibrio statico e dinamico del sistema mediante il Metodo del Bilanciamento Armonico. Grazie a questo metodo, il calcolo delle componenti statiche e dinamiche delle forze di contatto avviene simultaneamente. Il punto chiave del metodo è rappresentato dall'evoluzione del modello di contatto che attualmente definisce lo stato dell'arte ([9]) in questo campo. Il modello aggiornato consente, infatti, di accoppiare le equazioni di equilibrio statico e dinamico del sistema eliminando ogni necessità di un calcolo statico preliminare e le relative assunzioni.
Al fine di mostrare l'opportunità e le potenzialità del metodo, due applicazioni vengono nel seguito descritte. Nella prima un modello semplificato viene usato per dimostrare le differenze tra approccio

classico e nuovo metodo, mentre nella seconda viene descritta un'applicazione più realistica del metodo ad un sistema composto da un disco palettato in condizioni al contorno di simmetria ciclica, eccitato da una forza armonica rotante e dotato di smorzatori sotto-pala di forma prismatica.

2. IL MODELLO DINAMICO DEL SISTEMA.

Il sistema è composto di due strutture:

- struttura primaria (generalmente il disco palettato)
- struttura secondaria (lo smorzatore)

Entrambe le strutture vengono modellate agli elementi finiti mediante pre-processori commerciali quali ANSYS® o MSC.Patran®.

1.1 Struttura primaria.
L'equazione non-lineare di equilibrio della struttura è

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{Q}}(t)+\mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{Q}}(t)+\mathbf{K}\cdot\mathbf{Q}(t)=\mathbf{F}(t)+\mathbf{F_{nl}}(t), \tag{1}$$

dove **M**, **C** e **K** sono le matrici di massa, smorzamento e rigidezza, **Q** il vettore di spostamenti nodali del sistema, **F** il vettore di forzanti armoniche di pulsazione ω e $\mathbf{F_{nl}}$ il vettore di forze di contatto non-lineari generate sulla struttura primaria dallo smorzatore.
Se gli spostamenti e le forze di contatto periodiche sono approssimati con una serie di Fourier troncata al primo ordine,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\mathrm{t})&=\mathbf{Q}^{(0)}+\Re\left(\mathbf{Q}^{(1)}\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right)\\ \mathbf{F}_{\mathrm{nl}}(\mathrm{t})&=\mathbf{F}_{\mathrm{nl}}^{(0)}+\Re\left(\mathbf{F}_{\mathrm{nl}}^{(1)}\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right)\end{aligned}, \tag{2}$$

dove la quantità generica $\mathbf{X}^{(n)}$ è il coefficiente n-esimo della serie di Fourier (in forma complessa per n=1), è possibile scrivere le equazioni di equilibrio (1) del sistema, applicando il Metodo del Bilanciamento Armonico, sotto forma di equazioni algebriche a coefficienti complessi

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\cdot\mathbf{Q}^{(0)}&=\mathbf{F_{nl}}^{(0)}\\ \mathbf{D}(\omega)\cdot\mathbf{Q}^{(1)}&=\mathbf{F}+\mathbf{F_{nl}}^{(1)}\end{aligned}, \tag{3}$$

dove $\mathbf{D}(\omega)=\mathbf{K}+i\omega\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M}$ è la matrice di rigidezza dinamica della struttura. La prima equazione (3) rappresenta l'equilibrio statico del sistema, mentre la seconda equazione rappresenta il termine fondamentale dell'equilibrio dinamico della struttura.

1.2 Struttura secondaria (smorzatore)
Analogamente a quanto scritto per la struttura primaria, le equazioni differenziali di equilibrio dello smorzatore sono:

$$\mathbf{M_D}\cdot\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{D}}(t)+\mathbf{C_D}\cdot\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{D}}(t)+\mathbf{K_D}\cdot\mathbf{Q_D}(t)=\mathbf{F_C}-\mathbf{F_{nl}}(t), \tag{4}$$

dove $\mathbf{M_D}$, $\mathbf{C_D}$ e $\mathbf{K_D}$ sono le matrici di massa, smorzamento e rigidezza dello smorzatore, $\mathbf{Q_D}$ il suo vettore di spostamenti nodali e $\mathbf{F_C}$ le forze centrifughe agenti sullo smorzatore. Affinché i modelli ad elementi finiti delle due strutture (primaria e secondaria) siano tra loro compatibili, è necessario che le mesh sulle superfici di contatto tra smorzatore e piattaforme siano tra loro congruenti, in modo che vi siano coppie di nodi omologhi collegabili a due a due mediante elementi di contatto (Figura 2).
Introducendo nuovamente lo sviluppo in serie di Fourier delle grandezze periodiche del sistema, si può scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{Q_D}(t) &= \mathbf{Q_D}^{(0)} + \Re\left(\mathbf{Q_D}^{(1)} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right) \\ \mathbf{F}_{nl}(t) &= \mathbf{F}_{nl}^{(0)} + \Re\left(\mathbf{F}_{nl}^{(1)} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right) \end{aligned} , \tag{5}$$

ottenendo un nuovo sistema di equazioni di equilibrio algebriche a coefficienti complessi:

$$\begin{aligned} \mathbf{K_D} \cdot \mathbf{Q_D}^{(0)} &= \mathbf{F_C} - \mathbf{F}_{nl}^{(0)} \\ \mathbf{D_D}(\omega) \cdot \mathbf{Q_D}^{(1)} &= -\mathbf{F}_{nl}^{(1)} \end{aligned} , \tag{6}$$

dove $\mathbf{D_D}(\omega) = \mathbf{K_D} + i\omega\mathbf{C_D} - \omega^2\mathbf{M_D}$ è la matrice di rigidezza dinamica dello smorzatore.
Per poter utilizzare i set di equazioni (3) e (6) per calcolare la risposta forzata del sistema completo è necessario accoppiare le due strutture mediante elementi di contatto, simulare le forze non-lineari periodiche di contatto $\mathbf{F_{nl}}(t)$ e estrarne i coefficienti di Fourier di ordine 0 e 1.

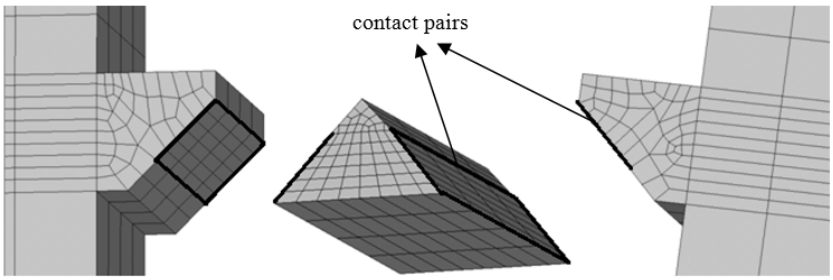


Figura 2: corrispondenza tra le superfici di contatto damper/piattaforma sotto-pala

3. IL MODELLO DI CONTATTO.

Nella letteratura degli ultimi trenta anni, il problema della modellazione di forze periodiche di contatto in strutture vibranti è stato affrontato da molti autori, i quali hanno sviluppato modelli di contatto a complessità crescente, per la successiva implementazione in codici numerici.
Il modello che attualmente rappresenta lo stato dell'arte in questo campo, consente di modellare la cinematica relativa 1D del contatto e la presenza di carico normale variabile ([9],[10],[17]). In caso di cinematica relativa 2D del contatto, il moto tangenziale viene scomposto in due moti 1D lungo due direzioni mutuamente ortogonali, associando ciascuno di essi ad un elemento di contatto ([10],[17]).
In dettaglio, tale elemento di contatto (Figura 3a) è composto di due molle, di rigidezza k_n e k_t, che modellano la rigidezza di contatto normale e tangenziale rispettivamente e che collegano un cursore Coulombiano ad uno dei corpi in contatto. Le forze periodiche tangenziali e normali delle forze di contatto possono essere calcolate in funzione degli spostamenti periodici relativi tangenziali u(t) e normale v(t) dei nodi di contatto.
Durante un periodo, tre diversi stati del contatto possono alternarsi tra di loro:

- adesione: il modulo della forza tangenziale T è minore del limite di Coulomb μN, essendo μ il coefficiente di attrito e N la forza normale,
- scorrimento: il modulo della forza tangenziale T è uguale al limite di Coulomb μN,
- distacco: le forze di contatto T e N sono nulle.

Le transizioni tra i diversi stati possono essere calcolate, ma essendo la loro descrizione al di là degli scopi di questo lavoro, si rimanda il lettore interessato alla descrizione completa contenuta in [9] e [10]. In generale, per piccole ampiezze di vibrazione il contatto è in adesione completa, all'aumentare della componente tangenziale u(t) il contatto può alternare adesione e scorrimento, mentre all'aumentare della componente normale v(t) si può verificare il parziale distacco delle superfici.

3.1 Forze normali di contatto.

Secondo l'approccio classico utilizzato in letteratura, le forze normali di contatto sono calcolate come

$$N(t) = \max\left[N_0 + k_n \cdot \delta v(t), 0\right], \tag{7}$$

dove il termine N_0 rappresenta la forza normale statica di contatto, calcolata mediante l'analisi statica preliminare, dovuta alle forze di inerzia che premono lo smorzatore contro le piattaforme delle pale, e $\delta v(t)$ è la componente dinamica dello spostamento relativo normale al contatto, definita come

$$\delta v(t) = v(t) - \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt \tag{8}$$

Dal momento che le equazioni di equilibrio (3) e (6) contengono anche la componente di ordine 0 degli spostamenti $\mathbf{Q}(t)$ e $\mathbf{Q_D}(t)$, le forze normali di contatto sono qui definite come:

$$N(t) = \max\left[k_n \cdot v(t), 0\right], \tag{9}$$

ovvero, introducendo lo sviluppo in serie di Fourier, troncato al primo ordine, dello spostamento relativo v(t) come

$$N(t) = \max\left[\ k_n \cdot v^{(0)} + k_n \cdot \Re\left(v^{(1)} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}\right),\ 0\ \right] \tag{10}$$

grazie all'equazione (10) le forze periodiche normali di contatto sono estratte dalla componente statica e dinamica degli spostamenti senza richiedere alcuna analisi statica preliminare per il calcolo di N_0. Il termine $v^{(0)}$ rappresenta lo spostamento relativo statico in direzione normale al contatto. Se $v^{(0)}>0$ i due corpi sono in contatto, se $v^{(0)}<0$ è presente gioco tra i due corpi.

3.2 Forze tangenziali di contatto.

Il valore della forza di contatto dipende dallo stato del contatto secondo la seguente casistica:

$$\begin{cases} T(t) = k_t \cdot \left(u(t) - w(t)\right) & \text{adesione} \\ T(t) = \mathrm{sgn}\left(\dot{w}(t)\right) \cdot \mu \cdot N(t) & \text{scorrimento} \\ T(t) = 0 & \text{distacco} \end{cases} \tag{11}$$

dove w rappresenta lo scorrimento, mentre la funzione sgn(x) è pari ad 1 quando la variabile x è positiva mentre è uguale a -1 quando x è negativa. La modifica introdotta al calcolo della forza normale N(t) dall'equazione (10) non influisce sul metodo di calcolo della storia temporale di T(t), per il quale vale la procedura descritta in [9]. Tuttavia, se da un lato tale calcolo porta a definire un unico ciclo di isteresi di T(t) quando si verificano scorrimento e/o distacco durante il ciclo, dall'altro in condizioni di completa adesione non si può calcolare un unico andamento periodico di T(t). In particolare, esistono infinite soluzioni, che si differenziano tra di loro per il valore della componente statica $T^{(0)}$. Si consideri a titolo di esempio il caso mostrato in Figura 3b, dove le linee spesse rappresentano i limiti di Coulomb $\pm\mu N$ e le linee sottili due delle possibili storie temporali di T(t). Dal momento che lo spostamento relativo tangenziale u(t) non è abbastanza elevato da indurre scorrimento, tutte le curve T(t) il cui valor medio $T^{(0)}$ sia incluso nel range

$$T^{(0)}_{min} \le T^{(0)} \le T^{(0)}_{max}, \tag{12}$$

sono validi, essendo $T^{(0)}_{min}$ il valore corrispondente alla curva tangente al limite inferiore di Coulomb $-\mu N$ e $T^{(0)}_{max}$ il valore corrispondente alla curva tangente al limite superiore di Coulomb $+\mu N$.
Se le equazioni di equilibrio statico (cioè le armoniche di ordine 0 delle equazioni (3) e (6) non sono utilizzate il problema non si pone, perché il termine $T^{(0)}$ non viene utilizzato. Al contrario, se le

equazioni di equilibrio statico sono risolte simultaneamente a quelle di equilibrio dinamico, la non unicità di $T^{(0)}$ ha come conseguenza la non-unicità della risposta forzata del sistema ([7]).

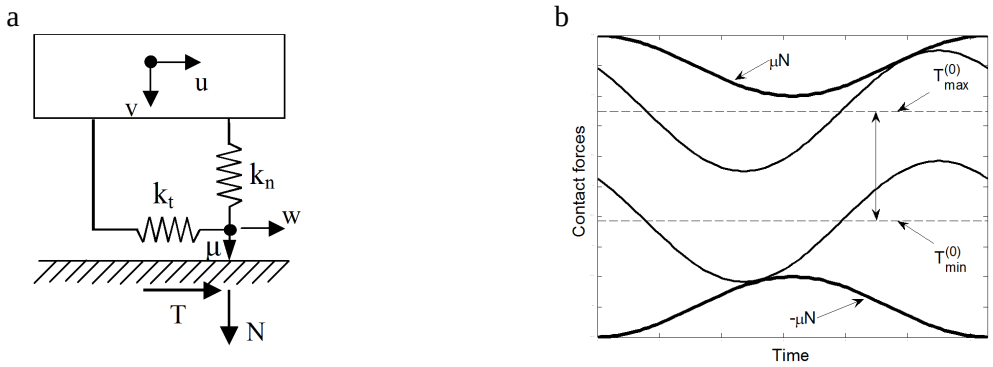


Figura 3: a) modello di contatto, b) non unicità della forza di contatto in caso di completa adesione del contatto.

Per ovviare a tale problema, viene qui proposta la seguente procedura per la selezione del valore di $T^{(0)}$ in caso di adesione completa la forza tangenziale T(t) è definita inizialmente come

$$T(t) = k_t \cdot u^{(0)} + k_t \cdot \Re\left(u^{(1)} \cdot e^{i\omega t}\right). \tag{13}$$

Se si ha

$$T^{(0)}_{min} \le k_t \cdot u^{(0)} \le T^{(0)}_{max}, \tag{14}$$

Allora nessuna correzione viene eseguita. Dal punto di vista fisico, è il caso in cui il valore di $u^{(0)}$ è tale da non indurre scorrimento né durante la fase di carico, né durante la fase di scarico.
Al contrario, se durante il periodo si verifica la condizione

$$k_t \cdot u^{(0)} > T^{(0)}_{max}, \tag{15}$$

il valore dell'equazione (13) viene corretto come

$$T(t) = T^{(0)}_{max} + k_t \cdot \Re\left(u^{(1)} \cdot e^{i\omega t}\right), \tag{16}$$

essendo T^0_{max} il massimo valore possibile di forza statica tangenziale. Dal punto di vista fisico, è il caso in cui $u^{(0)}$ è così elevato da indurre scorrimento durante la prima fase di carico portando però ad un ciclo di isteresi stabilizzato perfettamente elastico con valore massimo della forza tangenziale uguale al limite superiore di Coulomb +μN.
Allo stesso modo, se

$$k_t \cdot u^{(0)} < T^{(0)}_{min}, \tag{17}$$

il valore dell'equazione (13) viene corretto come

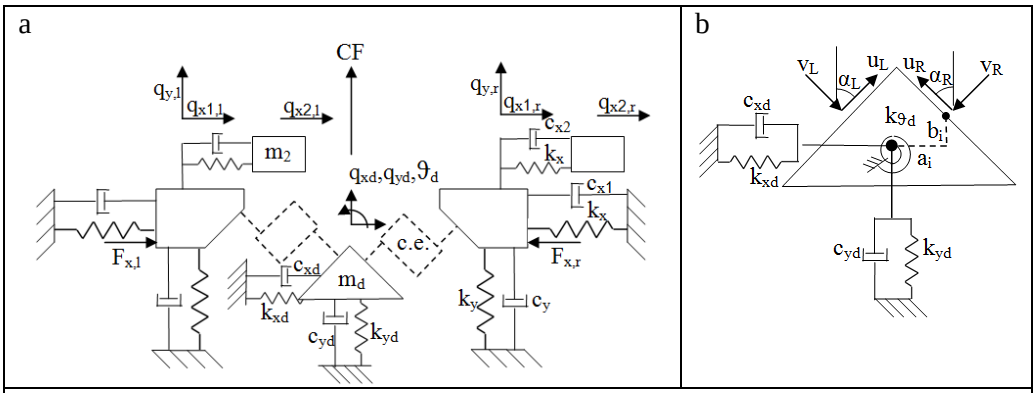
$$T(t) = T^0_{min} + k_t \cdot \Re\left(u^{(1)} \cdot e^{i\omega t}\right), \tag{18}$$

essendo T^0_{min} il minimo valore possibile di forza statica tangenziale. Dal punto di vista fisico, è il caso in cui $u^{(0)}$ è abbastanza basso da indurre scorrimento negativo (T = -μN) durante la prima fase di scarico, ma il ciclo di isteresi stabilizzato è perfettamente elastico con valore minimo di forza tangenziale T(t) uguale al limite inferiore di Coulomb -μN.

Grazie alle modifiche descritte in questo paragrafo, il modello di contatto può essere usato per calcolare le forze periodiche di contatto e successivamente le loro componenti armoniche di ordine 0 e 1, definendo così i vettori $\mathbf{F}_{nl}^{(0)}$ e $\mathbf{F}_{nl}^{(1)}$ nelle equazioni di equilibrio (3) e (6). Grazie a codeste modifiche, è possibile la soluzione simultanea delle equazioni di equilibrio statico e dinamico della struttura primaria e secondaria, rendendo non più necessaria l'analisi statica preliminare attualmente eseguita per calcolare la distribuzione delle forze statiche di contatto all'interfaccia pale/smorzatore.

4. APPLICAZIONE AD UN MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI.

Al fine di dimostrare l'opportunità di un calcolo accoppiato statico-dinamico, si considera ora il sistema a parametri concentrati, mostrato in Figura 4a, che rappresenta due travi con interposto uno smorzatore sotto-pala di forma prismatica a base triangolare. Si vuole dimostrare che le componenti statiche delle forze di contatto dovute all'azione delle sole forze statiche sono diverse da quelle calcolate tenendo in conto anche l'azione delle componenti dinamiche.
L'accoppiamento tra le due strutture vibranti e lo smorzatore è realizzato mediante due elementi di contatto (uno per lato) descritti nella sezione 2 e rappresentati graficamente in figura dai due rettangoli tratteggiati. Ad ogni istante t le forze normali e tangenziali di contatto sono calcolate mediante le equazioni (9) e (11).
Sul sistema agisce una forza statica verticale CF, che preme lo smorzatore contro le piattaforme e da due forze armoniche $F_{x,l}$ e $F_{x,r}$, in fase tra loro, che agiscono sulle due strutture vibranti. Per semplicità di implementazione numerica, lo smorzatore sotto-pala è vincolato a terra mediante le rigidezze k_{xd}, k_{yd} e $k_{\theta d}$ e i relativi smorzatori di tipo viscoso. I gradi di libertà dello smorzatore sono tre: spostamento orizzontale q_{xd}, spostamento verticale q_{yd} e rotazione θ_d.



$k_x = k_y = 3.95e5$ $c_{x1}=56.2$; $c_{x2}=28.1$; $c_y=62.8$ $m_1=m_2=m_d=1$	$k_{xd}=k_{yd}=k_{\vartheta d}=3.95e3$ $c_{xd}=c_{yd}=c_{\vartheta d}=62.8$	$k_t = 1e5$ $k_n = 1e5$ $\mu = 0.5$	$F_{x,r}=F_{x,l}=15$ CF=30

Figura 4: sistema dinamico a parametri concentrati.

Le equazioni di equilibrio del sistema sono:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{q}_{x1,l} + c_{x1}\dot{q}_{x1,l} + k_{x1}q_{x1,l} + c_{x2}\left(\dot{q}_{x2,l} - \dot{q}_{x1,l}\right) + k_{x2}\left(q_{x2,l} - q_{x1,l}\right) = F_{x,l} - F_{Cx,l}\\
&m_1\ddot{q}_{y,l} + c_y\dot{q}_{y,l} + k_y q_{y,l} = -F_{Cy,l}\\
&m_2\ddot{q}_{x2,l} - c_{x2}\left(\dot{q}_{x2,l} - \dot{q}_{x1,l}\right) - k_{x2}\left(q_{x2,l} - q_{x1,l}\right) = 0\\
&m_1\ddot{q}_{x1,r} + c_{x1}\dot{q}_{x1,r} + k_{x1}q_{x1,r} + c_{x2}\left(\dot{q}_{x2,r} - \dot{q}_{x1,r}\right) + k_{x2}\left(q_{x2,r} - q_{x1,r}\right) = F_{x,r} - F_{Cx,r}\\
&m_1\ddot{q}_{y,r} + c_y\dot{q}_{y,r} + k_y q_{y,r} = -F_{Cy,r}\\
&m_2\ddot{q}_{x2,r} - c_{x2}\left(\dot{q}_{x2,r} - \dot{q}_{x1,r}\right) - k_{x2}\left(q_{x2,r} - q_{x1,r}\right) = 0\\
&m_d\ddot{q}_{xd} + c_{xd}\dot{q}_{xd} + k_{xd}q_{xd} = F_{Cx,l} + F_{Cx,r}\\
&m_d\ddot{q}_{yd} + c_{yd}\dot{q}_{yd} + k_{yd}q_{yd} = F_{Cy,l} + F_{Cy,r} + CF\\
&I_d\ddot{\vartheta}_d + c_{\vartheta d}\dot{\vartheta}_{yd} + k_{\vartheta d}\vartheta_d = -F_{Cx,l}b_l + F_{Cy,l}a_l - F_{Cx,r}b_r + F_{Cy,r}a_l
\end{aligned}
\tag{19}
$$

dove $F_{C\,x,l}$, $F_{C\,y,l}$, $F_{C\,x,r}$, $F_{C\,y,r}$ sono le forze di contatto agenti sui due lati dello smorzatore, in direzione orizzontale (*x*) e verticale (*y*) calcolate in funzione delle forze tangenziali e normali di contatto come:

$$\begin{aligned} &F_{Cx,l} = T_l \sin(\alpha_L) + N_l \cos(\alpha_L); \quad F_{Cy,l} = T_l \cos(\alpha_L) - N_l \sin(\alpha_L) \\ &F_{Cx,r} = -T_r \sin(\alpha_R) - N_r \cos(\alpha_R); \quad F_{Cy,r} = T_r \cos(\alpha_R) - N_r \sin(\alpha_R) \end{aligned} \quad . \tag{20}$$

Gli spostamenti relativi dei punti di contatto sono altresì calcolati come:

$$\begin{aligned} &u_L = (q_{x1,l} - q_{xd,l}) \cdot \sin\alpha_L + (q_{y,l} - q_{yd,l}) \cdot \cos\alpha_L; \quad u_R = -(q_{x1,r} - q_{xd,r}) \cdot \sin\alpha_R + (q_{y,r} - q_{yd,r}) \cdot \cos\alpha_R \\ &v_L = (q_{x1,l} - q_{xd,l}) \cdot \cos\alpha_L - (q_{y,l} - q_{yd,l}) \cdot \sin\alpha_L; \quad v_R = -(q_{x1,r} - q_{xd,r}) \cdot \cos\alpha_R - (q_{y,r} - q_{yd,r}) \cdot \sin\alpha_R \end{aligned} \tag{21}$$

dove $q_{xd,l}$, $q_{yd,l}$, $q_{xd,r}$, $q_{yd,r}$ sono gli spostamenti assoluti dei punti di contatto dello smorzatore (vedi Figura 4b), calcolati a partire dai suoi gradi di libertà mediante l'equazione:

$$\begin{Bmatrix} q_{xd,i} \\ q_{yd,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b_i \\ 0 & 1 & a_i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{x,d} \\ q_{y,d} \\ \vartheta_d \end{Bmatrix} \quad i = l, r \tag{23}$$

essendo a_i e b_i le coordinate orizzontali e verticali dei punti di contatto rispetto al baricentro dello smorzatore sotto-pala.

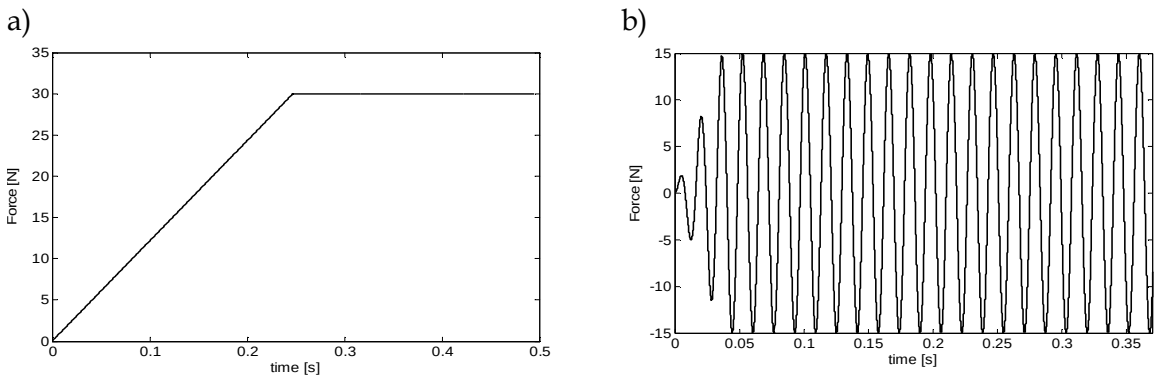


Figura 5: Rampa di forza statica (a) e storia temporale di forze armoniche (b)

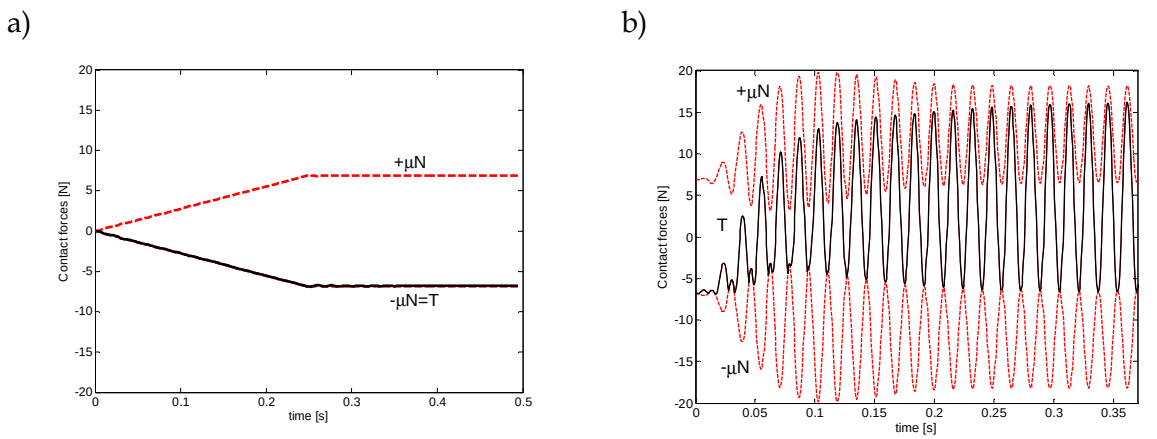


Figura 6: Storia temporale delle forze di contatto durante la fase 1 (a) e durante la fase 2 (b)

Il sistema viene innanzitutto caricato dalla forza statica CF agente sullo smorzatore (fase 1), applicata secondo la rampa di carico mostrata in Figura 5a e introducendo successivamente le forze armoniche $F_{x,l}$ e $F_{x,r}$ alla struttura primaria (fase 2), come mostrato in Figura 5b.

Al termine della fase 1, il sistema ha assunto una configurazione di equilibrio statico e le forze di contatto tra piattaforme e smorzatore sono rappresentate in Figura 6a. Si tratta di forze statiche il cui valore è $N = N^{(0)} = 14N$ e $T = T^{(0)} = -7N$.
Al termine della fase 2, il sistema ha assunto una configurazione di equilibrio dinamico e le forze di contatto tra piattaforme e smorzatore sono rappresentate in Figura 6b. La componente statica delle forze di contatto ha i seguenti valori $N^{(0)} = 25$ N e $T^{(0)} = 4$ N.
Dal confronto tra equilibrio della fase 1 e equilibrio della fase 2 risulta evidente che i valori delle componenti statiche delle forze di contatto sono significativamente diversi in modulo e, nel caso della forza tangenziale, anche in verso.

5. APPLICAZIONE AD UN MODELLO DI DISCO DI TURBINA.

5.1 Descrizione

In questa sezione il metodo viene applicato ad un simulacro di disco integrale composto da N_s=48 settori identici (Figura 1 e 7). Il calcolo della risposta forzata è eseguito nell'intorno del primo modo flessionale delle pale.
Lo smorzatore sotto-pala di forma prismatica ha angoli $\alpha_L = \alpha_R = 45°$ e una massa nominale $m_{nom} = 44 \cdot 10^{-3}$ kg. La forza centrifuga agente sullo smorzatore è modellata come un carico distribuito di volume. Le rigidezze di contatto su ciascuna faccia dello smorzatore sono state calcolate assumendo un contatto piano-piano ([19]) distribuendole uniformemente tra i nodi di contatto. Su ogni interfaccia pala/smorzatore sono posizionati 66 elementi di contatto.

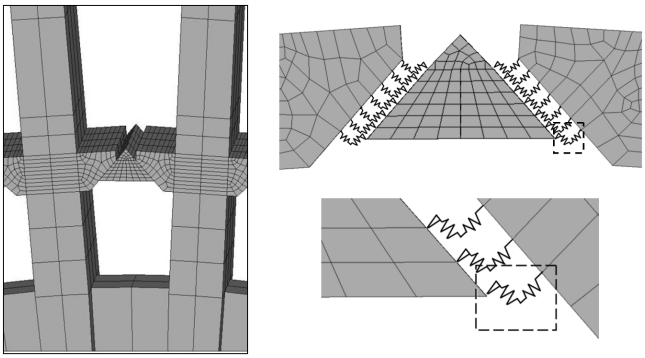


Figura 7: disposizione degli elementi di contatto tra nodi omologhi all'interfaccia damper/piattaforma sotto-pala

Il coefficiente di attrito è imposto pari a $\mu = 0.5$, compatibile con i dati sperimentali presenti in letteratura ([20]) relativi a materiali tipicamente impiegati per i dischi palettati di turbo-motori aeronautici. Il calcolo sarà eseguito nel dominio delle frequenze mediante le equazioni di equilibrio dedotte mediante il metodo del bilanciamento armonico.

5.2 Riduzione del modello

Prima di eseguire il calcolo però, è necessario procedere con la riduzione delle dimensioni del modello, la cui soluzione, altrimenti richiederebbe tempi di calcolo troppo elevati. In primo luogo, essendo un disco palettato composto da N_S settori identici, si limita il modello ad un solo settore, detto settore fondamentale, applicando quindi ai nodi di interfaccia con i settori adiacenti le condizioni al contorno di simmetria ciclica ([17],[21]). I gradi di libertà del settore possono essere divisi in gradi di libertà interni Q_I, di interfaccia sinistra Q_L e di interfaccia destra Q_R. Il primo set include tutti i nodi che si trovano all'interno del settore fondamentale, mentre il secondo e il terzo includono i gradi di libertà che si trovano sulle interfacce di contatto con i settori adiacenti. Dal momento che in strutture a simmetria ciclica, come i dischi di turbina, tutti i settori vibrano con la stessa ampiezza ma con una differenza di fase dipendente dalla velocità di rotazione del sistema e dall'indice armonico

dell'eccitante, la seguente relazione vale tra i gdl di interfaccia di sinistra e di destra per l'armonica di indice n:

$$\mathbf{Q}_L^{(m)} = \mathbf{Q}_R^{(m)} \cdot e^{im\phi} \tag{22}$$

Dove m è il generico indice armonico dell'eccitante e della risposta e $\phi=2\pi/N_S$ è l'angolo fisico compreso tra due settori adiacenti. L'uso della simmetria ciclica reduce le dimensioni del problema di N_S volte rispetto al sistema completo.
La soluzione delle equazioni del moto del settore fondamentale e dello smorzatore ad esso associato, richiederebbe ancora tempi di calcolo troppo elevate per un personal computer. Si ricorre pertanto ad una seconda riduzione, mediante la quale sia gli spostamenti fisici **q** dei nodi del settore fondamentale del disco palettato e gli spostamenti fisici $\mathbf{q_D}$ dello smorzatore sono espressi mediante una combinazione lineare di forme modali M-normalizzate calcolate indipendentemente per ciascuna delle due strutture ([15]).

5.3 Risultati

Il primo set di simulazioni eseguite sul sistema consiste nel calcolo della risposta forzata del settore fondamentale per diversi valori di massa dello smorzatore in caso di eccitante corrispondente all'engine order 12. I risultati, riportati nel grafico di Figura 8, mostrano che la massa dello smorzatore (Figura 8a, i valori associati alle curve moltiplicano la massa nominale dello smorzatore utilizzato) ha un effetto irrigidente sulla struttura in quanto all'aumentare di essa la frequenza di risonanza del settore aumenta progressivamente fino a raggiungere un valore limite. Tale comportamento è dovuto al fatto che all'aumentare della massa dello smorzatore aumenta la forza statica normale di contatto e di conseguenza aumenta il numero di coppie di nodi di contatto in adesione completa fino a quando l'adesione è estesa a tutta la superficie di contatto.

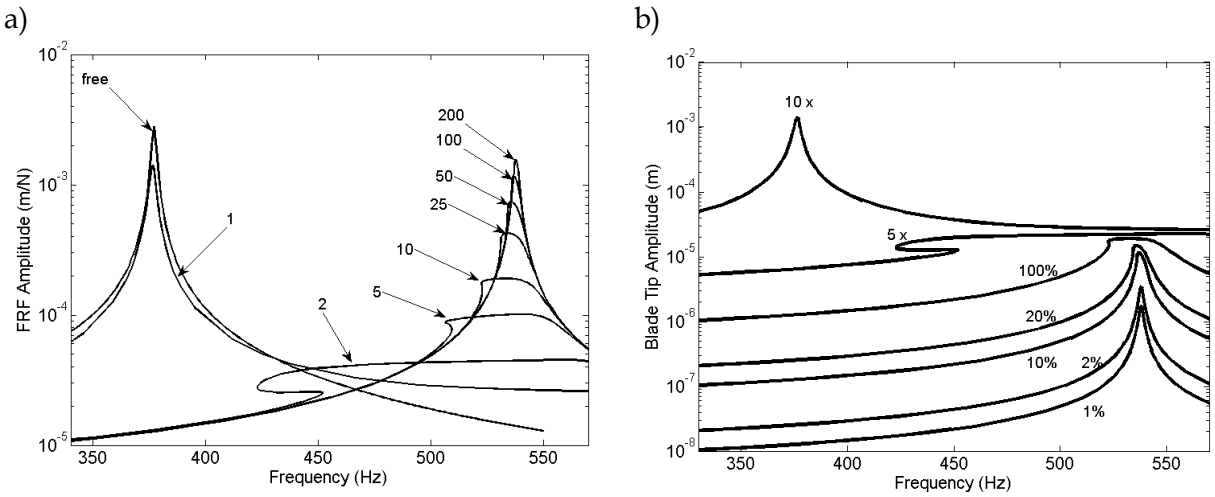


Figura 8: Funzione di Risposta in Frequenza del disco di turbina al variare della massa dello smorzatore (a) e risposta forzata al variare dell'ampiezza dell'eccitazione esterna (b)

Tuttavia l'effetto più importante dello smorzatore è appunto la sua capacità di ridurre l'ampiezza di vibrazione del settore. In particolare, in questo caso si osserva che esiste un valore di massa ottima dello smorzatore in corrispondenza del quale la risposta del sistema è minima. Un ulteriore aumento della massa dal valore ottimo produce un aumento dell'ampiezza della risposta che si stabilizza quando tutta la superficie di contatto è in adesione completa.
In alcune delle curve di risposta è visibile la presenza di soluzioni multiple che produce il cosiddetto fenomeno di 'jump', dovuto in questo caso al parziale distacco delle superfici di contatto durante la vibrazione. In questi casi, il calcolo di tutta la curva di risposta è stato possibile grazie all'uso del

Continuation Method ([18]) al posto della strategia classica di soluzione basata sul metodo di Newton-Raphson.
In Figura 8b, invece, l'ampiezza di vibrazione del settore è diagrammata per diverse ampiezze di eccitante. La non linearità introdotta dallo smorzatore è evidente anche in questo caso: per ampiezze piccole, lo smorzatore è in adesione con le piattaforme delle pale mentre all'aumentare dell'ampiezza si osservano due fenomeni distinti: il picco di risonanza si sposta verso destra tendendo verso la condizione di pala libera senza smorzatore, inoltre per un ampio tratto di valori di eccitante l'ampiezza di vibrazione aumenta molto più lentamente della forzante stessa, confermando la capacità dello smorzatore di dissipare energia.
Si consideri ora la curva FRF di Figura 9a, corrispondente a $m=5m_{nom}$ e si concentri l'attenzione sulla frequenza 509.5 Hz, inclusa nell'intervallo di frequenze dove si ha la presenza di soluzioni multiple dovute all'intermittenza del contatto, sono disponibili due soluzioni stabili lungo il ramo superiore ed inferiore della curva.

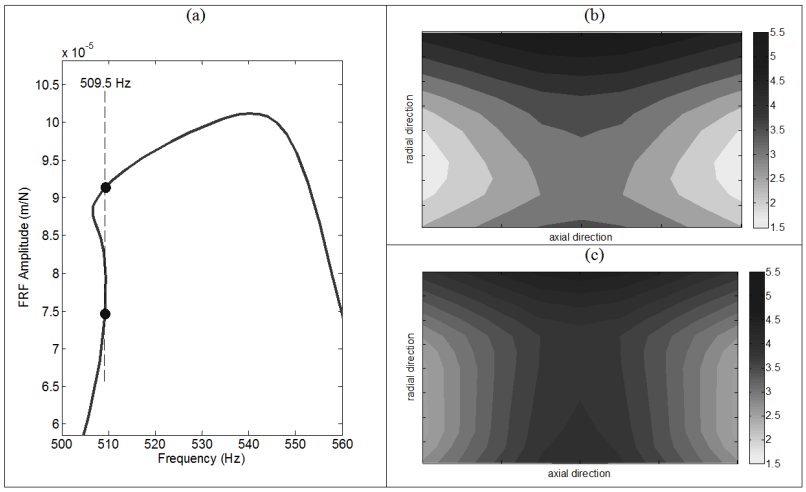


Figura 9: distribuzione delle forze di contatto [N] statiche normali alla superficie sinistra dello smorzatore sotto-pala in caso di soluzioni multiple.

Se osserviamo la distribuzione di forze normali statiche agenti sulla faccia sinistra dello smorzatore per le due soluzioni stabili (Figura 9b e 9c), si notano significative differenze, benché il valore della forza centrifuga agente sullo smorzatore nei due casi sia uguale. Questo risultato dimostra, ancora una volta, che la statica e la dinamica del contatto sono tra loro accoppiate e che quindi per evidenziare tale accoppiamento occorre un metodo di calcolo accoppiato come quello proposto in questo lavoro.

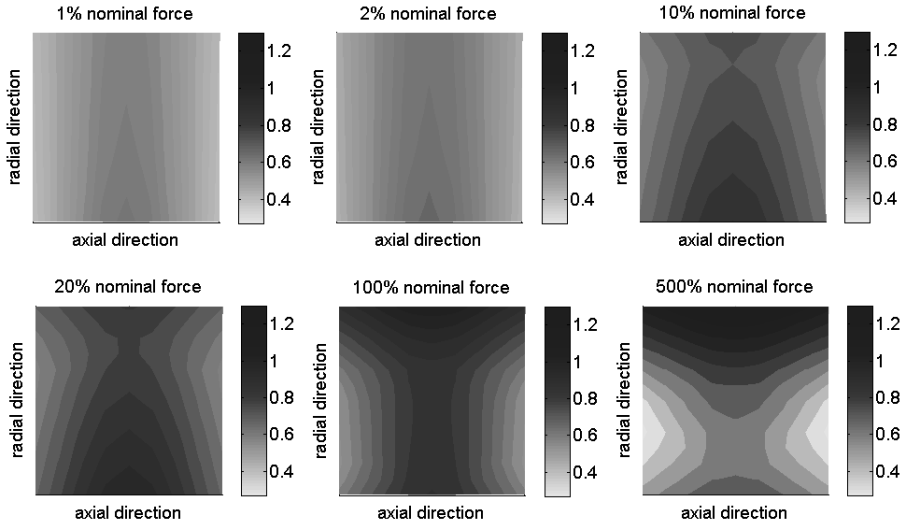


Figura 10: distribuzione delle forze di contatto [N] statiche normali alla superficie sinistra dello smorzatore sotto-pala per diverse ampiezze dell'eccitante dinamica.

Si consideri inoltre il set di curve di risposta di Figura 8b, corrispondenti a diversi valori di eccitante armonica e si selezioni la frequenza di 538 Hz, corrispondente alle condizioni di risonanza quando il sistema è in completa adesione, e si estragga la distribuzione di forze normali statiche di contatto per diversi livelli di eccitante, come mostrato in Figura 10.
Anche in questo caso si nota come a parità di valore della forza centrifuga, e quindi del set di forze statiche agenti sul sistema, la distribuzione di forze statiche sulla faccia sinistra dello smorzatore dipenda dall'ampiezza dell'eccitante dinamica.
Un'ultima prova è fornita grazie all'analisi del sistema per due diverse condizioni:

- armonica $n^*=12$ dell'eccitante e massa dello smorzatore $m = 2.5\ m_{nom}$
- armonica $n^*=24$ dell'eccitante e massa $m = 10\ m_{nom}$.

Le due analisi sono eseguite nel medesimo range di frequenze e per lo stesso valore di eccitante e la risposta forzata dell'estremità della pala in direzione circonferenziale è rappresentata in Figura 11.

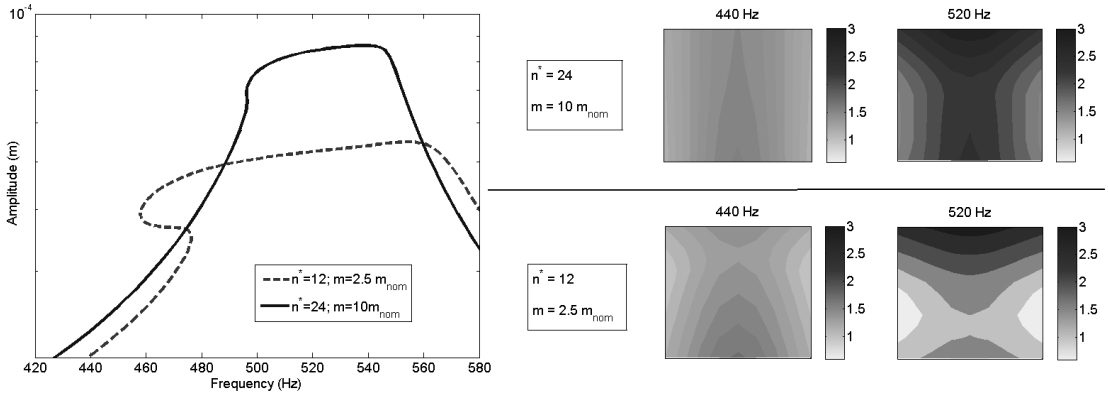


Figura 11: Risposta forzata del disco di turbina per due diverse eccitazioni armoniche (engine order 12 e 24) e corrispondente distribuzione delle forze di contatto statiche [N].

Ad una qualsiasi pulsazione ω della forzante, il valore di forza centrifuga agente sullo smorzatore nei due casi è lo stesso, ma le due distribuzioni di forze statiche normali di contatto, mostrate sempre in Figura 11 sono tra loro diverse, confermando che la cinematica di contatto, che dipende dall'interblade phase angle mϕ, influenza la distribuzioni di forze statiche di contatto. In particolare, le differenze sono in questo caso trascurabili a 440 Hz, quando la maggior parte dell'area di contatto è in condizioni di adesione, ma diventano rilevanti a 520 Hz dove l'alternarsi tra adesione/scorrimento/distacco è più marcato.
Al fine di verificare la coerenza fisica del metodo proposto è stata eseguita una verifica consistente nel confronto della soluzione calcolata con il presente metodo con la soluzione statica di un cuneo simmetrico (Figura 12, sinistra) premuto tra due pareti inclinate, per il quale, è noto dalla letteratura ([22]), che la seguente relazione esiste tra la forza statica tangenziale T e normale N è $T = \mu N$, se si verifica che $\tan(\alpha)>\mu$.

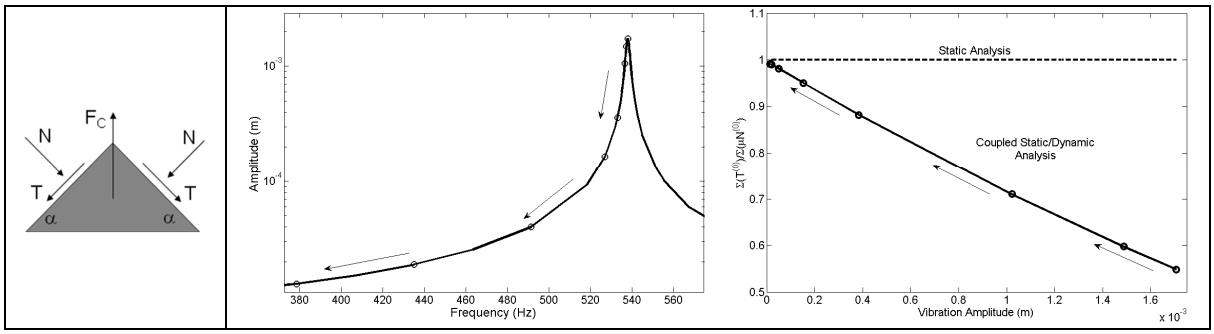


Figura 12: Risposta forzata del disco di turbina in condizioni di completa adesione a diverse frequenze di eccitazione e corrispondente rapporto delle forze di contatto tangenziale e normale.

Il confronto è operato attraverso la curve di Figura 12 (centro) corrispondente ad un caso di completa adesione dello smorzatore contro le piattaforme delle pale. Partendo dalla condizione di risonanza (Figura 12 - centro) e percorrendo il tratto decrescente sinistro della curva si calcola la risultante statica tangenziale T e quella normale N, diagrammando poi il rapporto T/μN in funzione dell'ampiezza di vibrazione (Figura 12, destra). Come previsto dalla teoria, tale rapporto tende verso l'unità, coerentemente con la soluzione statica attesa.

CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato descritto un nuovo metodo per il calcolo accoppiato delle forze di contatto statiche e dinamiche tra pale e smorzatori sotto-pala. Il metodo consente il calcolo della risposta forzata del sistema composto da disco palettato e smorzatore in un solo passo, al posto della procedura attuale basata su due passi successivi.
Il metodo è stato applicato a due modelli numerici, consentendo di trarre le seguenti conclusioni:

- l'attuale procedura di calcolo disaccoppiato delle forze di contatto può portare a errori significativi nella valutazione delle forze statiche di contatto;
- il metodo proposto è in grado di modellare gli effetti smorzanti e irrigidenti prodotti dagli smorzatori sotto-pala, coerentemente con la letteratura scientifica a disposizione;
- esiste una mutua influenza tra le forze statiche e dinamiche di contatto dato che:
    - in presenza di soluzioni multiple ad una data frequenza, diverse distribuzioni di forze statiche sono calcolate al contatto;
    - le forze statiche di contatto dipendono dall'ampiezza dell'eccitante dinamica agente sul sistema;
    - a parità di forza centrifuga agente sullo smorzatore e di forza eccitante agente sul sistema, la cinematica del contatto influenza la distribuzione di forze statiche di contatto.
- Il metodo proposto fornisce risultati coerenti con la soluzione statica relativa al cuneo premuto contro pareti inclinate, presente in letteratura.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cardona, A., Lerusse, A., Geradin, M.; Fast Fourier Nonlinear Vibration Analysis, Computational Mechanics, 1998, Vol. 22, pp. 128-142.

[2] Yang B.D., Menq C.H., Characterization of Contact Kinematics and Application to the design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading: part 1 - Stick-slip Contact Kinematics, ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 1998, vol. 120, pp. 410-417.

[3] Yang B.D., Menq C.H., Characterization of Contact Kinematics and Application to the design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading: part 2 – Prediction of Forced Response and Experimental Verification, ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 1998, vol. 120, pp. 418-423.

[4] Sanliturk K.Y., Ewins D.J., Stanbridge A.B., Underplatform Dampers for Turbine Blades: Theoretical Modelling, Analysis and Comparison with Experimental Data, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, October 2001, Vol. 123 (4), pp. 919-929.

[5] Panning L., Sextro W, Popp K., Spatial Dynamics of Tuned and Mistuned Bladed Disks with Cylindrical and Wedge-Shaped Friction Dampers, International Journal of Rotating Machinery, 2003, vol. 9(3), pp. 219–228.

[6] Panning L., Popp K., Sextro W., Goetting F., Kayser A., and Wolter I., Asymmetrical underplatform dampers in gas turbine bladings: theory and application. Proceedings of ASME Turbo Expo 2004, GT2004-53316.

[7] Zucca S., Botto D., Gola M.M., Range of Variability in the Dynamics of Semi-cylindrical friction dampers for turbine blades, Proceedings of ASME Turbo Expo, 2008, Berlin, Germany, GT2008-51058

[8] Petrov E.P., Ewins D.J., Advanced Modeling of Underplatform Friction Dampers for Analysis of Bladed Disk Vibration, Journal of Turbomachinery, 2007, vol. 129 (1), pp. 143-150.
[9] Yang B.D., Chu M.L., Menq C.H., Stick–Slip– Separation Analysis and Non-Linear Stiffness and Damping Characterization of Friction Contacts Having Variable Normal Load, Journal of Sound and Vibrations, 1998, vol. 210 (4), pp. 461-481.
[10] Petrov E.P., Ewins D.J., Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed discs. Trans. ASME, J. Turbomachinery, 2003, vol. 125, 364-371.
[11] Yang B.D.; Menq C.H., Characterization of 3D contact kinematics and prediction of resonant response of structures having 3D frictional constraint, Journal of Sound and Vibration, 1998, Vol. 217 (5), pp. 909-925.
[12] Cigeroglu, E., An, N., Menq, C. H.: A Microslip Friction Model with Normal Load Variation induced by Normal Motion, Nonlinear Dynamics, 2007, Vol. 50(3), pp. 609-626.
[13] Firrone C.M., Botto D., Gola M.M., Modelling A Friction Damper: Analysis Of The Experimental Data And Comparison With Numerical Results, Proceedings of ESDA2006 July 4-7, 2006, Torino, Italy, ESDA2006- 95605.
[14] Petrov E.P., Explicit Finite Element Models of Friction Dampers in Forced Response Analysis of Bladed Discs, ASME Turbo Expo 2007, May 14-17, 2007, Montreal, Canada, GT2007-27980.
[15] Cigeroglu E., An N., Menq C.H., Forced Response Prediction of Constrained and Unconstrained Structures Coupled Through Frictional Contacts, J. Eng. Gas Turbines Power, 2009, vol. 131(2).
[16] Szwedowicz J., Gibert C., Sommer T.P., Kellerer R., 2008, Numerical and Experimental Damping Assessment of a Thin-Walled Friction Damper in the Rotating Setup with High Pressure Turbine Blades, J. Eng. Gas Turbines Power, 130(1).
[17] Siewert C., Panning L., Wallaschek J., Richter C., MultiHarmonic Forced Response Analysis of a Turbine Blading Coupled by NonLinear Contact Forces, Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air June 8-12, 2009, Orlando, Florida, USA, Paper # GT2009-59201
[18] Chan T.F.C., Keller H.B., Arc-Length Continuation and Multi-Grid Techniques for Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1982, 3(2), pp. 173-194.
[19] Allara M., A model for the characterization of friction contacts in turbine blades, Journal of Sound & Vibration, 2009, Vol. 320(3), pp. 527-544.
[20] Filippi S., Akay A., Gola M.M., Measurement of tangential contact hysteresis during microslip, ASME J. Tribology, 2004, Vol. 126, pp. 482 – 489.
[21] Petrov E. P., A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks, Journal of Turbomachinery, 2004, vol. 126(1), pp. 175-183
[22] Sinclair, G.B., Cormier, N.G., 2002, Contact Stresses in Dovetail Attachments: Physical Modelling , Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 124, pp.325-331.