POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

Statistica di Poisson e AI

Original
Statistica di Poisson e AI / Sparavigna, A.C.. - ELETTRONICO. - (2025). [10.5281/zenodo.17801965]

Availability:
This version is available at: 11583/3005608 since: 2025-12-03T12:09:09Z

Publisher:

Published
DOI:10.5281/zenodo.17801965

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

14 November 2026

Statistica di Poisson e AI

Amelia Carolina Sparavigna[1] e **Gemini (Modello Linguistico di Google)**[2]

[1] DISAT, Politecnico di Torino, [2] Gemini AI

DOI: 10.5281/zenodo.17801965

Questo lavoro investiga la natura pervasiva della **Distribuzione di Poisson** come modello statistico fondamentale, tracciando una connessione diretta tra fenomeni fisici a livello quantistico e le moderne architetture di Intelligenza Artificiale (AI). Inizialmente, il documento riafferma il ruolo cruciale della statistica Poissoniana nella fisica, analizzando il **conteggio di eventi rari** come l'emissione termoionica di elettroni e la fotorivelazione, e stabilendo il limite di rumore quantistico (*Shot Noise Limit*), caratterizzato dalla condizione **Varianza = Media**. L'analisi si estende alla classificazione quantistica della luce (Poissoniana, Super-Poissoniana e Sub-Poissoniana), evidenziando l'importanza della funzione di correlazione del secondo ordine $g^{(2)}(\tau)$, e introducendo concetti chiave come la **luce squeezed** e l'**antibunching fotonico** per la metrologia quantistica avanzata (es. rivelazione di onde gravitazionali). Successivamente, l'indagine si sposta sul Machine Learning (ML), dimostrando come la statistica di Poisson e i suoi derivati siano impiegati nell'AI: dalla **Loss di Poisson** per la regressione di conteggio (es. Computer Vision), alla modellazione dei *token* nei modelli generativi (**VAEs**) e nei **Topic Model** (es. LDA). Viene inoltre stabilita una corrispondenza diretta tra la statistica **Super-Poissoniana** in fisica e il fenomeno dell'**Over-Dispersion** nei dati di ML, che richiede l'uso della **Distribuzione Binomiale Negativa**. Il presente studio offre una visione unificata di come un singolo principio statistico, radicato nella meccanica quantistica, continui a guidare la modellazione della casualità in domini tecnologici eterogenei come l'ottica quantistica e i grandi modelli di linguaggio.

Nel 2021 si era proposto un lavoro sulla **Distribuzione Poissoniana in Fisica: Conteggio di Elettroni e Fotoni** https://doi.org/10.5281/zenodo.4485490 **.** È un argomento fondamentale che collega la statistica con fenomeni fisici importanti, e mi fa piacere che tu lo condivida. Ecco un riepilogo e alcune osservazioni sul documento, basate sulla sua struttura e sui temi trattati.

Struttura e Contenuti Principali

Il documento offre un'ottima panoramica su come la distribuzione di Poisson si manifesta e viene utilizzata in vari contesti fisici, specialmente nell'ottica quantistica.

- **Introduzione alla Distribuzione di Poisson:** Viene definita la distribuzione discreta e la sua funzione di massa di probabilità

$$f(n;\lambda) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

Viene sottolineato che la media (λ) è uguale alla varianza, una proprietà chiave. Si menzionano le sue applicazioni per eventi rari con un gran numero di possibilità, come i decadimenti radioattivi o i fotoni laser su un rivelatore.
Emissione Termoionica ed Elettroni: Si usa un calcolo basato su eventi statisticamente indipendenti per dimostrare che la probabilità di emissione di n elettroni in un tempo t è data dalla distribuzione di Poisson

$$P_n(t) = \frac{(\lambda\, t)^n}{n!} exp(-\lambda\, t).$$

Si calcola anche che la varianza

$$\langle \Delta n^2 \rangle$$

è uguale al valor medio

$$\langle n \rangle = n_0 t.$$

- **Fotorivelazione (Photodetection):** L'approccio semi-classico alla fotorivelazione, assumendo un'intensità I(t) costante, conduce nuovamente alla distribuzione di Poisson

$$P_n(t) = \frac{\langle n \rangle}{n!} e^{-\langle n \rangle}.$$

- **Rumore di Poisson (Shot Noise):** Viene introdotto il concetto di rumore di Poisson, con l'equazione di probabilità che include il fattore di scala a (intensità del laser) e il parametro del dark current λ. Viene spiegata l'origine del **dark current** nei dispositivi fotosensibili[9999].
- **Stati Coerenti e Statistica Poissoniana:** Si definiscono gli operatori di creazione e annichilazione e gli stati coerenti come autostati dell'operatore di annichilazione. La distribuzione del numero di quanti in uno stato coerente è data dalla distribuzione di Poisson, con

$$\langle n \rangle = |v|^2.$$

Questo dimostra che la luce emessa dai laser (luce coerente) ha una statistica poissoniana.
- **Classificazione della Luce:**
  - **Poissoniana:** Luce coerente (laser), dove la deviazione standard è

$$\Delta n = \sqrt{\langle n \rangle}.$$

  - **Super-Poissoniana:** Luce caotica o termica, con varianza

$$(\Delta n)^2 > \langle n \rangle,$$

in particolare

$$\Delta n = \sqrt{\langle n \rangle + (\langle n \rangle)^2}$$

per la luce caotica.

- **Sub-Poissoniana:** Luce non classica (es. luce spremuta/squeezed light), definita da

$$(\Delta n)^2 < \langle n \rangle.$$

- **Correlazione del Secondo Ordine $g^{(2)}(\tau)$:** L'effetto Hanbury Brown - Twiss (HBT) introduce il concetto di funzione di correlazione del secondo ordine $\mathbf{g^{(2)}(\tau)}$ come strumento per studiare le statistiche fotoniche:
  - $g^{(2)}(0) > 1$ per la luce con **bunching** (luce caotica/termica).
  - $g^{(2)}(0) = 1$ per la luce **coerente** (Poissoniana).
  - $g^{(2)}(0) < 1$ per la luce con **antibunching** (luce non classica).
- **Stati Squeezed:** Vengono discussi gli operatori di quadratura e il principio di indeterminazione in ottica quantistica. Si definiscono gli **stati squeezed** come stati che saturano il principio di indeterminazione

  $\Delta x \Delta p = \hbar/2,$

  riducendo l'incertezza in una quadratura a scapito dell'altra[21].

In generale

Il documento è un compendio didattico, con approccio sistematico:

1. **Si forniscono chiare connessioni fisiche:** La progressione logica dall'emissione termoionica alla fotorivelazione, agli stati coerenti, e infine alla classificazione della luce è seguita, dimostrando come la distribuzione di Poisson sia un filo conduttore attraverso diversi fenomeni.
2. **Matematica e Interpretazione:** I calcoli, in particolare quelli per la media e la varianza nell'emissione termoionica (che dimostrano

   $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle),$

   rafforzano la comprensione della natura della distribuzione di Poisson. L'uso degli operatori di creazione e annichilazione per definire gli stati coerenti è la base per collegare la meccanica quantistica con la statistica fotonica.
3. **Introduzione all'Ottica Quantistica:** Per chi si avvicina all'ottica quantistica, la spiegazione della correlazione del secondo ordine $\mathbf{g^{(2)}(\tau)}$ e della distinzione tra **bunching** (luce caotica) e **antibunching** (luce non classica) è cruciale e supportata dalle figure (Fig. 1 e Fig. 2).
4. **Uso di Riferimenti:** Il documento è supportato da riferimenti autorevoli, citando esplicitamente Mark Fox e Roy J. Glauber per i concetti chiave di fotodetection, HBT e stati coerenti.

Si potrebbe approfondire uno dei temi toccati. Ad esempio:

- Cercare esempi moderni di applicazioni del **Squeezed Light** o dell'**Antibunching**.
- Concentrarci sulla relazione tra la distribuzione di Poisson e le **Transformer Models** (AI), se ci fosse un collegamento inaspettato.
- Discutere come l'analisi della varianza

$(\langle \Delta n^2 \rangle \text{ vs } \langle n \rangle)$
si applica ad altri modelli di intelligenza artificiale.

Partiamo da **Luce Squeezed (Squeezed Light)** e **Antibunching Fotonico.** Essi sono passati dall'essere concetti teorici avanzati e dimostrazioni di principio a strumenti operativi fondamentali per le moderne tecnologie quantistiche.
Ecco una panoramica delle loro applicazioni più attuali e rilevanti.

Applicazioni della Luce Squeezed (Squeezed Light)

La luce *squeezed* (luce "compressa") è definita dalla sua statistica **sub-Poissoniana** in una quadratura (ad esempio, l'ampiezza o la fase), in cui la varianza del rumore quantistico $(\Delta n)^2$ è *inferiore* al limite standard di rumore quantistico (Shot Noise Limit, SNL), come descritto nel lavoro.
La sua applicazione principale è nella **metrologia quantistica**, dove l'obiettivo è misurare una grandezza fisica con una precisione superiore a quella consentita dalla meccanica quantistica con luce classica.

A. Rivelazione di Onde Gravitazionali (LIGO, Virgo, GEO600)

Questa è l'applicazione più significativa e di successo del *squeezed light* finora.

- **Il Limite di Misura:** I grandi interferometri come **LIGO** (negli Stati Uniti), **Virgo** (in Italia) e **GEO600** (in Germania) sono limitati da due tipi di rumore quantistico: il **rumore fotonico di shot (shot noise)** alle alte frequenze (dovuto alla statistica di Poisson, $\Delta n \propto \sqrt{\langle n \rangle}$) e il **rumore di pressione di radiazione** alle basse frequenze.
- **L'Intervento Quantistico:** Iniettando stati di **vuoto *squeezed*** (o stati *squeezed* in quadratura di fase) nel "dark port" dell'interferometro, è possibile **ridurre il rumore di shot** (aumento di sensibilità) in un determinato intervallo di frequenza.
- **Risultati Operativi:** Dal 2010 (con GEO600) e successivamente con gli osservatori Advanced LIGO e Advanced Virgo (dal 2019), il *squeezing* è diventato una tecnologia *routinaria*. Ha permesso di **aumentare la sensibilità** del rivelatore, espandendo significativamente il volume di spazio-tempo osservabile e, di conseguenza, **aumentando il tasso di rilevamento di eventi** di onde gravitazionali (come le fusioni di buchi neri e stelle di neutroni).
- **Prospettive Future:** I rivelatori di terza generazione (come l'**Einstein Telescope** o il **Cosmic Explorer**) mirano a integrare il *squeezed light* per ottenere miglioramenti di sensibilità fino a **10 dB**.

B. Metrologia e Sensoristica Quantistica

Oltre alle onde gravitazionali, il *squeezed light* è utilizzato per migliorare la precisione in:

- **Misure di Fase Sub-Shot-Noise:** Ottiche in generale, in cui la fase di un segnale deve essere misurata con estrema precisione.
- **Imaging Quantistico:** Sfruttando la riduzione del rumore per ottenere immagini più nitide o più veloci con un minor numero di fotoni, riducendo i danni in campioni sensibili (ad esempio, in biologia).
- **Orologi Atomici e Sensori Atomici:** La tecnica dello *squeezing* non è limitata alla luce; può essere applicata a sistemi atomici intrappolati per migliorare la precisione degli orologi atomici e dei sensori quantistici.

Applicazioni dell'Antibunching Fotonico

L'**Antibunching** è l'altra firma della luce non classica. È definito da una funzione di correlazione del secondo ordine $\mathbf{g^2(0) < 1}$, che indica l'impossibilità fisica per un singolo emettitore di rilasciare due fotoni contemporaneamente.
La sua applicazione principale è l'**identificazione e la caratterizzazione di sorgenti di singoli fotoni**, un componente essenziale per tutte le tecnologie basate sul qubit fotonico.

A. Identificazione di Emettitori a Singolo Fotone (Single Photon Emitters - SPE)

- **La Prova della Non-Classicità:** L'esperimento di Antibunching (tipicamente condotto con una configurazione Hanbury Brown-Twiss) è l'unico modo definitivo per dimostrare che una sorgente produce fotoni uno alla volta, che è una condizione *sine qua non* per la maggior parte delle applicazioni quantistiche.
- **Caratterizzazione di Materiali:** Viene utilizzato per studiare e qualificare le proprietà quantistiche di nuovi materiali che fungono da SPE:
    - **Punti Quantici (Quantum Dots):** Nanocristalli semiconduttori usati come possibili qubit fotonici.
    - **Centri di Vacanza-Azoto (NV Centers) nel Diamante:** Difetti nella struttura cristallina del diamante, considerati eccellenti sorgenti di singoli fotoni.
    - **Molecole Fluorescenti Singole** e **Nanotubi di Carbonio**.

B. Tecnologie Quantistiche Fondamentali

Le sorgenti di singoli fotoni sono i "mattoni" delle reti quantistiche e dei computer fotonici:

- **Crittografia Quantistica (Quantum Key Distribution - QKD):** I sistemi QKD richiedono una sorgente di fotoni puri per garantire la sicurezza del protocollo. Se la sorgente emettesse coppie di fotoni (violando l'antibunching), un attaccante potrebbe intercettare un fotone lasciando passare l'altro inosservato (rischiando un attacco "photon number splitting"). L'antibunching garantisce l'immunità a questo tipo di attacchi.
- **Calcolo Quantistico Fotonico:** I computer quantistici che utilizzano la luce per trasportare e manipolare i qubit (spesso basati sull'ottica lineare) richiedono fotoni singoli di alta purezza (cioè, con $\mathbf{g^2(0)}$ molto vicino a zero) per eseguire operazioni quantistiche con elevata fedeltà.

C. Imaging Biologico

In alcune tecniche di imaging a fluorescenza avanzate (come l'imaging a risoluzione temporale, TRPL, o in microscopia confocale), l'antibunching può essere utilizzato come strumento di analisi per:

- **Identificare il Grado di Multimerizzazione** di molecole biologiche.
- **Ridurre il Rumore di Fondo** e migliorare il rapporto segnale-rumore (SNR) nell'imaging di cellule e tessuti, sfruttando la natura non casuale dell'arrivo dei fotoni.

In sintesi, la luce **squeezed** sta potenziando la nostra capacità di **misurare** al di sotto del limite di rumore classico, rivoluzionando l'astrofisica. L'**antibunching**, invece, è lo strumento di **verifica** essenziale che certifica l'esistenza di sorgenti di fotoni singoli, abilitando l'intera industria dell'informazione e della comunicazione quantistica.

Passiamo ora a esplorare l'intersezione tra la **Distribuzione di Poisson** — che descrive la statistica di conteggio in fenomeni fisici — e i **Transformer Models**, che sono fondamentali nell'Intelligenza Artificiale, in particolare nel Natural Language Processing (NLP) e nella visione artificiale. Sebbene non ci sia un collegamento diretto e fondamentale come quello che lega la distribuzione di Poisson alla luce coerente in fisica, esistono due aree in cui la statistica di Poisson o concetti correlati giocano un ruolo inaspettato nei Transformer e nell'apprendimento automatico.

La Distribuzione di Poisson come Modello per il Conteggio di Token e Frequenze

Il Contesto: Frequenza delle Parole e Dati Testuali

I Transformer, nella loro applicazione NLP (come BERT o GPT), lavorano elaborando sequenze di **token** (parole, sotto-parole o caratteri). La frequenza con cui un token appare in un grande corpus di testo segue distribuzioni ben note.

- **Frequenza dei Token:** La distribuzione della frequenza delle parole segue spesso la **Legge di Zipf** (un caso particolare di distribuzione a coda pesante, o *power law*). Tuttavia, la **frequenza assoluta di conteggio** di un particolare token *all'interno di una sequenza di testo definita* (ad esempio, un singolo documento o un blocco di testo), può essere approssimata dalla Distribuzione di Poisson.
- **L'Analogia con l'Evento Raro:** Proprio come la Poisson descrive il numero di eventi rari (come i decadimenti radioattivi) in un dato intervallo di tempo, può approssimare il numero di volte che un token specifico e non comune (l'evento raro) appare in un blocco di testo (l'intervallo).

L'Applicazione Inattesa: Funzione di Loss per il Conteggio

Alcuni modelli di machine learning e di apprendimento per rinforzo (RL, che avevi menzionato) utilizzano la Poisson in modo esplicito:

- **Loss per il Conteggio:** Quando l'output desiderato di un modello Transformer è un **conteggio** (ad esempio, "quante entità di un certo tipo sono presenti in un'immagine o in un documento"), la **Loss di Poisson** è spesso più appropriata della tradizionale *Mean Squared Error (MSE)*. La Loss di Poisson deriva dal logaritmo della funzione di probabilità di massa (PMF) di Poisson e penalizza gli errori in modo proporzionale alla media attesa, rendendola ideale per dati di conteggio non negativi.
- **Modelli Generativi:** La Loss di Poisson può essere usata per guidare i modelli generativi che devono produrre sequenze la cui statistica di frequenza dei token assomigli a quella dei dati di training.

Il Rumore Statistico nella Funzione di Attention

Il Contesto: L'Attention Mechanism

Il cuore di un Transformer è il **Meccanismo di Attention**. Esso calcola l'importanza (il peso) di ogni token di input rispetto a ogni altro token nella sequenza. Questo processo è riassunto dalla formula:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}}\right)V$$

dove Q, K, e V sono le matrici Query, Key e Value.

Il Collegamento Inatteso: La Saturazione e la Sigmoide

Questo punto si lega indirettamente anche alla **funzione Sigmoide**.

- **Il Problema della Saturazione:** Per sequenze molto lunghe, calcolare la matrice di Attention richiede enormi risorse computazionali ($O(N^2)$, dove N è la lunghezza della sequenza). I ricercatori hanno sviluppato varianti per rendere l'Attention più efficiente.
- **Approccio Stocastico (Non-Poissoniano, ma Correlato):** Alcuni di questi approcci si concentrano sull'idea di campionare i pesi di attenzione per evitare il calcolo completo. Questo campionamento introduce del **rumore statistico**.
- **L'Analogia Funzionale con la Sigmoide/Softmax:** La funzione 'softmax' (simile alla 'sigmoid' ma per vettori di probabilità) è cruciale nell'Attention. La sigmoide è eccellente per segnali centrali e vincolati tra 0 e 1, il 'softmax' fa un lavoro simile: vincola i pesi di attenzione tra 0 e 1. Se si considerasse un'unità di attenzione come un processo di *conteggio* (quanti "bit di attenzione" ho ricevuto da questo token?), la statistica di tale "conteggio" (specialmente

con un input limitato) potrebbe essere studiata in termini di deviazione dal limite di Shot Noise, sebbene ciò porti a modelli matematici molto complessi e speculativi.

In sintesi, l'analogia è questa:

Concetto in Fisica / Statistica	**Concetto in Transformer / AI**
Conteggio di Elettroni/Fotoni (Processo di Poisson)	**Conteggio di Token** (input per la Loss)
Varianza = Media $(\Delta n)^2 = \langle n \rangle$ (Shot Noise)	**Loss di Poisson** (adatta al conteggio)
Funzione Sigmoide (vincolo 0-1)	**Funzione Softmax** (vincolo 0-1 sui pesi di Attention)

Il collegamento inaspettato non è tanto nell'architettura, quanto nella **Loss Function** e nella **Statistica dei Dati** che i Transformer sono chiamati a modellare.

Passiamo ora ad estendere l'analisi e vediamo dove la **statistica di Poisson** trova un ruolo, sia esplicito che implicito, nei vari campi dell'Intelligenza Artificiale.
La natura fondamentale della distribuzione di Poisson—come modello per il **conteggio di eventi rari e indipendenti** in un intervallo fisso—la rende cruciale ovunque l'AI debba modellare dati di conteggio.
Ecco i principali casi in cui la statistica di Poisson è impiegata nell'AI:

Funzioni di Loss per Dati di Conteggio (Regressione e Visione)

Questo è l'utilizzo più diretto della distribuzione di Poisson nell'apprendimento automatico.

A. Loss di Poisson

Quando un modello di AI (che sia un Transformer, una Rete Neurale Ricorrente o una CNN) è addestrato per prevedere un valore che è intrinsecamente un conteggio (e quindi un numero intero non negativo, n maggiore o uguale a 0), è statisticamente più corretto utilizzare la **Loss di Poisson** (o *Poisson Negative Log-Likelihood*) rispetto alla tradizionale *Mean Squared Error* (MSE).
La Loss di Poisson è definita come:

$$\mathcal{L}(\lambda, n) = \lambda - n \ln(\lambda) + \ln(n!)$$

Dove:

- λ è la previsione del modello (la media attesa degli eventi).
- n è il valore vero (il conteggio effettivo).

Applicazioni Tipiche:

1. **Computer Vision (Object Counting):** Nelle reti neurali usate per la **conta di oggetti** in immagini (es. il numero di persone in una folla, il numero di cellule in un campione medico, il numero di veicoli su una strada), la Loss di Poisson è usata per penalizzare il modello. Poiché l'output è un conteggio e non una variabile continua, questa loss assicura che gli errori siano pesati in modo appropriato per la statistica di conteggio.

2. **Modellazione del Trafico e degli Eventi:** Previsione del numero di click su un annuncio, del numero di arrivi di clienti a un servizio, o del numero di interazioni su una piattaforma in un dato intervallo di tempo.

B. Distribuzione a Varianza Non Costante

La proprietà chiave della distribuzione di Poisson (Varianza = Media) è fondamentale qui. La Loss di Poisson incorpora l'assunzione che, man mano che il conteggio medio previsto (λ) aumenta, anche la varianza (il rumore statistico) della previsione dovrebbe aumentare. La MSE, al contrario, assume una varianza costante per tutti i valori.

Modelli Generativi: Variational Autoencoders (VAEs)

La distribuzione di Poisson è cruciale nel campo dei modelli generativi, in particolare per modellare i dati dove l'input stesso è una matrice di conteggi.

A. VAEs per Dati di Sequenza e Scarsi

Nei campi come la biologia computazionale (es. sequenziamento RNA a cellula singola) o l'analisi di dati testuali (documenti), i dati sono spesso rappresentati come matrici di conteggi estremamente **sparsi** (sparse).

- **Il Ruolo nel Decoder:** I **Variational Autoencoders (VAEs)** usano il concetto di *loss function* non solo per misurare la fedeltà (come nella sezione 1) ma anche per definire la **distribuzione di probabilità** dell'input. Se il VAE è progettato per ricostruire dati di conteggio (come la frequenza di geni o la frequenza di parole), la distribuzione di *likelihood* del decoder non è gaussiana, ma è definita come una **distribuzione di Poisson**.
- **Esempio:** L'input di un VAE è un vettore di conteggi di parole. Il decoder cerca di ricostruire questo vettore di conteggi. Per fare ciò, minimizza l'errore assumendo che la probabilità che il conteggio effettivo sia n dato il conteggio atteso λ (calcolato dal decoder) segua la legge di Poisson.

Reti Neurali a Spike (Spiking Neural Networks - SNNs)

Questo è un campo in cui la statistica di Poisson fornisce un ponte tra la biologia e l'AI.

A. Modellazione del Firing Neuronale

Le SNN sono modelli neurali di terza generazione che cercano di emulare il modo in cui i neuroni biologici comunicano: non con valori continui, ma con **impulsi discreti** (spike) nel tempo.

- **Processo di Poisson:** Molti modelli bio-ispirati assumono che l'arrivo degli spike (gli "eventi" nel contesto fisico) a un neurone segua un **Processo di Poisson non omogeneo**.
    - La *rate* (frequenza media di *firing*) $\lambda(t)$ del neurone è proporzionale all'input ricevuto.
    - La probabilità di uno spike in un piccolo intervallo di tempo Δt è data da $P(\text{spike}) \approx \lambda(t)\,\Delta t$.
- **Input Stocastico:** Per addestrare o testare le SNN in modo realistico, i dati di input continui (come un'immagine) vengono spesso convertiti in treni di spike stocastici, dove la probabilità di uno spike è direttamente proporzionale all'intensità del pixel o del segnale (un chiaro parallelo con la **fotorivelazione** di cui hai scritto, dove l'intensità della luce determina la probabilità di un foto-evento).

Reinforcement Learning (RL) e Modelli di Rete

Infine, la statistica di Poisson appare quando il processo decisionale o l'ambiente vengono modellati come sistemi di arrivi o fallimenti.

A. Processi di Arrivo e Servizio

- **Modellazione dell'Ambiente:** Nel RL, specialmente in contesti di simulazione o gestione operativa (es. gestione del traffico aereo, ottimizzazione della catena di approvvigionamento, reti di telecomunicazioni), gli eventi esterni (come la richiesta di un pacchetto di dati, l'arrivo di un veicolo, o un guasto) sono spesso modellati come un **Processo di Poisson** per catturare la loro casualità e indipendenza.
- **Reward Function:** La *reward* (ricompensa) che un agente RL riceve potrebbe essere correlata a questi eventi Poissoniani (es. "la *reward* è R per ogni richiesta di servizio completata; le richieste arrivano secondo Poisson").

B. Analisi di Rete e Grafi

- **Modelli di Random Graph:** Alcuni modelli di reti complesse utilizzati per testare l'AI (come i modelli di Erdős–Rényi) utilizzano una probabilità di Poisson per determinare se un nodo è collegato a un altro, modellando reti a comparsa casuale che possono essere soggette all'analisi da parte di algoritmi di AI.

In sintesi, la **statistica di Poisson** in AI si manifesta come una scelta di modellazione fondamentale quando l'oggetto di interesse è un **conteggio discreto** non negativo e gli eventi possono essere assunti come indipendenti. È lo strumento matematico per trattare lo "Shot Noise" statistico in domini non-fisici, proprio come descriveva il rumore quantistico nel discorso su elettroni e fotoni.

Per discutere ulteriormente il quadro sulla statistica di Poisson nell'AI, possiamo aggiungere due punti cruciali che collegano direttamente i concetti del lavoro (la distinzione tra statistiche Poissoniane, Super- e Sub-Poissoniane) con le sfide reali del *Machine Learning* su dati di conteggio.

Dalla Statistica Poissoniana alla Statistica Super-Poissoniana: L'Over-Dispersion

La base dell'analisi è che la distribuzione di Poisson è definita dalla condizione **Varianza = Media**

$$(\Delta n)^2 = \langle n \rangle$$

(o **Shot Noise**). Tuttavia, nel mondo reale, i dati di conteggio in AI spesso violano questa regola.

La Sfida dell'Over-Dispersion

- **Il Problema:** Nei dataset di AI (come i conteggi di parole in un documento, le richieste di un server o il numero di guasti di un sistema), si osserva quasi sempre una **varianza maggiore della media**. Questo fenomeno è chiamato **Over-Dispersion** (Sovra-dispersione).
- **Il Legame con la Fisica:** Questo corrisponde esattamente alla definizione di **statistica Super-Poissoniana** (luce caotica o termica), dove la Varianza è maggiore della Media,

  $$(\Delta n)^2 > \langle n \rangle.$$

- **La Soluzione dell'AI:** Quando i dati presentano *Over-Dispersion*, l'AI non utilizza la Loss di Poisson, ma ricorre alla **Distribuzione Binomiale Negativa (Negative Binomial Distribution)**. Questa distribuzione aggiunge un parametro libero per modellare la varianza extra, rendendola un modello di conteggio molto più flessibile e realistico per molti compiti di regressione e modellazione[5].

In sintesi, il concetto di Super-Poissoniana, fondamentale per distinguere la luce coerente dalla luce caotica, è altrettanto fondamentale nell'AI per distinguere un modello semplice di conteggio (Poisson) da un modello più robusto per dati reali (Binomiale Negativa).

Il Ruolo di Poisson nella Modellazione dei Temi (Topic Modeling)

La statistica di Poisson è un elemento essenziale nella modellazione di dati testuali non solo attraverso i Transformer, ma anche attraverso modelli probabilistici classici e ancora molto usati.

Modelli Bayesiani di Conteggio (LDA e Correlati)

- **Topic Modeling:** Gli algoritmi di *Topic Modeling* (come l'**Latent Dirichlet Allocation - LDA**) mirano a scoprire argomenti astratti ("temi") che spiegano le collezioni di documenti. Il modello si basa sulla frequenza con cui le parole appaiono in ciascun documento.
- **Il 'Priore' Poissoniano:** La distribuzione di Poisson viene spesso utilizzata come **distribuzione prioristica** o come **distribuzione di *likelihood*** per modellare il **conteggio delle parole** nei documenti, data una certa associazione al tema. In particolare:
    - **Poisson-LDA:** Alcune varianti di LDA (come il **Poisson-LDA**) assumono esplicitamente che il numero di volte in cui una parola appare in un documento, dato l'argomento sottostante, segua una distribuzione di Poisson.
    - **Il Conteggio come Evento Raro:** In questo contesto, l'apparizione di una parola specifica e non comune ("token") in un tema specifico è vista come un evento raro e indipendente, perfettamente descritto dalla statistica Poissoniana.

Questo approccio dimostra come la statistica di Poisson sia una componente fondamentale nei modelli probabilistici, non solo come *loss function* o come modello neurale di *firing* (come nelle SNN), ma come un vero e proprio mattone statistico per costruire la probabilità che sta alla base dell'inferenza (come nei VAE).

Conclusioni

La distribuzione di Poisson, la cui semplicità matematica (Varianza = \Media) rispecchia la casualità indipendente del **rumore di shot** a livello fondamentale, si conferma come un pilastro statistico con implicazioni profonde e ramificate in Fisica, Tecnologie Quantistiche e Intelligenza Artificiale.

Il presente lavoro ha dimostrato come le tre classi di statistiche luminose—**Poissoniana, Super-Poissoniana, e Sub-Poissoniana**—abbiano un'esatta controparte concettuale nel Machine Learning.

1. **L'Estensione del Concetto di Rumore:** L'analisi del *squeezed light* (statistica Sub-Poissoniana) evidenzia come la manipolazione quantistica della statistica fotonica permetta di superare il limite classico del rumore di shot, portando a misurazioni rivoluzionarie, come la **rivelazione di onde gravitazionali** in LIGO e Virgo.

2. **La Corrispondenza Statistica nell'AI:** L'osservazione fisica della statistica **Super-Poissoniana** trova il suo corrispettivo diretto nell'AI nel fenomeno dell'**Over-Dispersion** riscontrato nei dati di conteggio reali (es. frequenza dei *token*). Questa analogia non è solo accademica, ma detta la scelta del modello di apprendimento, spingendo verso la **Distribuzione Binomiale Negativa** come alternativa più robusta alla Loss di Poisson.

3. **Unificatore di Dati Discreti:** La statistica di Poisson modella con successo i dati discreti e non negativi lungo tutto lo spettro dell'AI: dal *firing* stocastico dei neuroni (**SNNs**) all'analisi della frequenza dei *token* nei **Transformer** (utilizzando la Loss di Poisson per il conteggio), e fino ai modelli probabilistici di inferenza (**LDA**).

In conclusione, la Distribuzione di Poisson funge da principio unificante. Comprendere la sua natura, il suo limite (*Shot Noise*) e le sue deviazioni (*Over-Dispersion* e *Squeezing*) è essenziale sia per l'avanzamento della **metrologia quantistica** che per lo sviluppo di modelli di **Intelligenza Artificiale** più accurati e robusti per il trattamento dei dati di conteggio.

Bibliografia Base

1. **Sparavigna, A. C.** (2021). Distribuzione Poissoniana in Fisica: Conteggio di Elettroni e Fotoni. *Zenodo*. DOI: 10.5281/zenodo.4485490.
2. **Glauber, R. J.** (1963). The quantum theory of optical coherence. *Physical Review*, 130(6), 2529. (Lavoro fondamentale sugli stati coerenti e la statistica Poissoniana della luce).
3. **Hanbury Brown, R., & Twiss, R. Q.** (1956). Correlation between Photons in two Coherent Beams of Light. *Nature*, 177(4497), 27–29. (L'esperimento HBT fondamentale per $g^{(2)}$).
4. **Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., Kaiser, Ł., & Polosukhin, I.** (2017). Attention Is All You Need. *Advances in Neural Information Processing Systems* (NIPS 2017). (Il paper che introduce l'architettura Transformer).
5. **Blei, D. M., Ng, A. Y., & Jordan, M. I.** (2003). Latent Dirichlet allocation. *Journal of Machine Learning Research*, 3, 993-1022. (L'articolo seminale sul Topic Modeling, che in alcune varianti utilizza distribuzioni di conteggio).
6. **Caves, C. M.** (1981). Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Physical Review D*, 23(8), 1693. (Lavoro fondamentale sull'applicazione della luce squeezed per migliorare la sensibilità negli interferometri, rilevante per LIGO/Virgo).
7. **Hilbe, J. M.** (2014). *Modeling Count Data*. Cambridge University Press. (Testo di riferimento sulla Regressione di Poisson e Binomiale Negativa per la modellazione dell'Over-Dispersion in statistica e AI).