

Alcune Simulazioni con Metodo Monte Carlo esplorate grazie a Gemini AI

*Original*

Alcune Simulazioni con Metodo Monte Carlo esplorate grazie a Gemini AI / Sparavigna, Amelia Carolina. -  
ELETTRONICO. - (2025). [10.5281/zenodo.15852874]

*Availability:*

This version is available at: 11583/3001800 since: 2025-07-12T11:20:02Z

*Publisher:*

*Published*

DOI:10.5281/zenodo.15852874

*Terms of use:*

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

*Publisher copyright*

(Article begins on next page)

# Alcune Simulazioni con Metodo Monte Carlo esplorate grazie a Gemini AI

Amelia Carolina Sparavigna<sup>1</sup> e Gemini (Modello Linguistico di Google)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> DISAT, Politecnico di Torino, <sup>2</sup> Gemini AI

DOI: 10.5281/zenodo.15852875

Questo lavoro riassume i concetti chiave e le metodologie di simulazione, e propone alcune esempi relativi al calcolo di Pi Greco tramite Monte Carlo, al Modello di Ising (con focus su condizioni al contorno e rottura di simmetria), al Modello ANNNI e al Modello di Percolazione. In questa esplorazione, l'intelligenza artificiale ha svolto un ruolo cruciale non solo nella generazione del codice Python per i modelli, ma anche nell'interazione conversazionale, fornendo, quando richiesta, approfondimenti sugli argomenti e suggerimenti sui parametri da esplorare nel modello proposto. In tal modo, la persona che conversa con l'AI si trova ad avere un feedback continuo sui risultati computazionali che ottiene.

## Introduzione

Per uno studente che si avvicina ai metodi Monte Carlo e alla fisica computazionale, la possibilità di interagire con un'intelligenza artificiale come Gemini rappresenta un vantaggio significativo e innovativo. Al di là della capacità di generare codice Python per implementare modelli classici, l'AI offre un ambiente di apprendimento dinamico e personalizzato. Grazie alla sua dettagliata conoscenza dei modelli fisici e delle librerie computazionali esistenti, Gemini può arricchire l'interazione conversazionale, fornendo spiegazioni dettagliate, suggerimenti sui parametri da esplorare e approfondimenti sui fenomeni fisici. Questo feedback continuo sui risultati computazionali trasforma il processo di studio in un'esperienza di scoperta interattiva, che colma il divario tra teoria e pratica e apre nuove vie all'esplorazione di varianti di modelli o alla concettualizzazione di approcci analitici inediti.

Perché uno studente dovrebbe conoscere i metodi Monte Carlo? La loro importanza è cresciuta esponenzialmente dalla loro origine, emersa durante la Seconda Guerra Mondiale nel contesto del Progetto Manhattan a Los Alamos (con contributi pionieristici di Stanislaw Ulam, John von Neumann e Nicolas Metropolis) (Thomopoulos, 2012). Sono diventati uno strumento computazionale indispensabile in quasi ogni campo scientifico e ingegneristico. Permettono di risolvere problemi estremamente complessi che sarebbero altrimenti intrattabili con metodi analitici o deterministici, come l'integrazione in spazi ad alta dimensionalità, la simulazione di sistemi con un numero elevatissimo di variabili interagenti o processi intrinsecamente casuali. La loro versatilità, unita alla capacità di fornire intuizioni profonde sul comportamento dei sistemi complessi, li rende una competenza fondamentale nel bagaglio di ogni scienziato o ingegnere moderno, con applicazioni che spaziano dalla fisica delle particelle alla finanza, dalla biologia alla grafica computerizzata, fino al machine learning.

I metodi Monte Carlo devono il loro nome al Casinò di Monte Carlo nel Principato di Monaco, in virtù della loro dipendenza dall'uso del caso e dei numeri casuali, analogamente ai giochi d'azzardo.

Sono una classe di algoritmi computazionali che si basano su campionamenti casuali ripetuti per ottenere risultati numerici. Come detto in precedenza, sono particolarmente efficaci in problemi in cui è difficile o impossibile utilizzare metodi analitici, specialmente in sistemi con un gran numero di gradi di libertà o processi stocastici. Essi permettono di stimare quantità numeriche (come nel caso di Pi Greco) o di simulare l'evoluzione di sistemi complessi (come i modelli di Ising, ANNNI e Percolazione), rivelando proprietà emergenti e transizioni di fase.

## 1. Stima di Pi Greco ( $\pi$ ) tramite Metodo Monte Carlo

- **Concetto di Base:** Questo è l'esempio più semplice e intuitivo dell'uso dei metodi Monte Carlo per una stima numerica. Si sfrutta il principio della probabilità geometrica.
- **Metodologia:** Si genera un gran numero di punti casuali uniformemente distribuiti all'interno di un quadrato che circoscrive un cerchio. Il rapporto tra il numero di punti che cadono all'interno del cerchio e il numero totale di punti nel quadrato approssima il rapporto tra l'area del cerchio e l'area del quadrato.
- **Formola:** Considerando un quadrato di lato 2 (area 4) con un cerchio inscritto di raggio 1 (area  $\pi$ ), la stima di Pi Greco è data da:

$$\pi \approx 4 \times \frac{\text{Numero di punti nel cerchio}}{\text{Numero totale di punti nel quadrato}}$$

- **Risultati e Implicazioni:** Con l'aumentare del numero di campionamenti, la stima di  $\pi$  converge verso il suo valore reale, illustrando la potenza della Legge dei Grandi Numeri e l'efficacia dei metodi Monte Carlo per problemi di stima numerica.

Al link <https://python-fiddle.com/saved/2a03b2cb-cf72-482d-a38a-d1201160b9ba> il programma Python generato da Gemini. Dati in uscita: Esecuzione della simulazione Monte Carlo per la stima di Pi con 500000 punti. Stima finale di Pi: 3.141624, Valore reale di Pi: 3.141593, Errore assoluto: 0.000031. Uscita grafica in Figura 1.

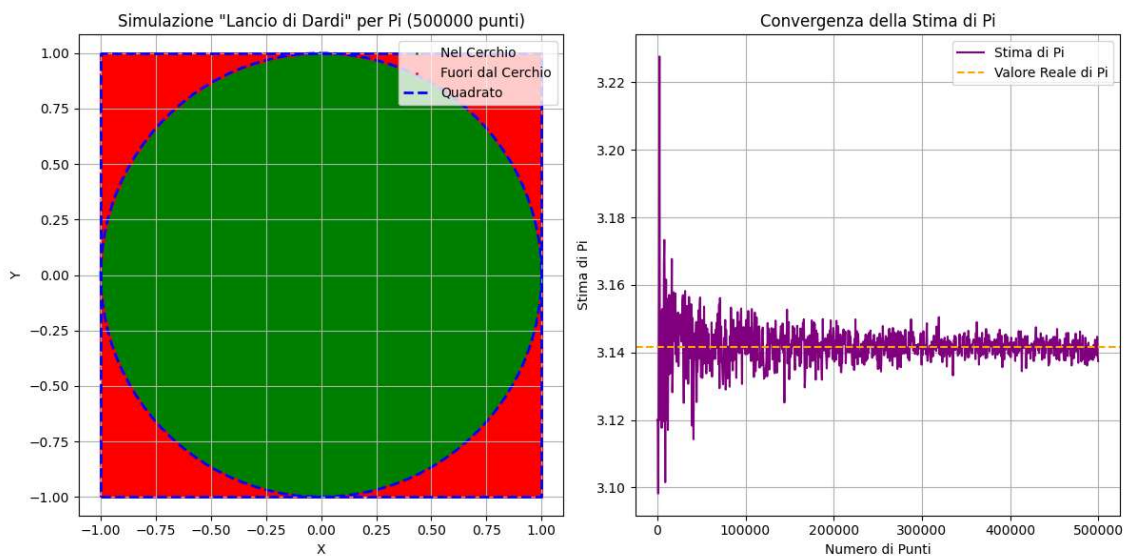


Fig.1

## 2. Modello di Ising

- **Concetto di Base:** Un modello della fisica statistica, utilizzato per comprendere fenomeni come il ferromagnetismo e le transizioni di fase. Il sistema è un reticolo discreto di "spin", dove ogni spin può assumere solo due stati: +1 (ad esempio, "su") o -1 ("giù").
- **Interazioni Fondamentali:**
  - **Interazione tra primi vicini ( $J_1$ ):** Gli spin adiacenti tendono ad allinearsi (se  $J_1 > 0$ , interazione ferromagnetica) per minimizzare l'energia del sistema.
  - **Campo magnetico esterno ( $H$ ):** Tende ad allineare tutti gli spin in una direzione preferenziale (positiva se  $H > 0$ , negativa se  $H < 0$ ). Se  $H = 0$ , il sistema dipende solo dalle interazioni interne e dalla temperatura.
- **Fenomeno Chiave: Transizione di Fase e Magnetizzazione Spontanea:**
  - A temperature basse sotto la **temperatura critica  $T_c$** , che per il 2D Ising con  $H = 0$  è

$$T_c \approx 2.269 J_1 / k_B,$$

il sistema si trova nella **fase ferromagnetica**: gli spin si allineano spontaneamente, portando a una magnetizzazione netta (media degli spin) vicina a  $\pm 1$ . Al di sopra di  $T_c$ , il disordine termico domina (fase paramagnetica) e la magnetizzazione netta è vicina a zero.

- **Rottura di Simmetria Spontanea:**
  - Quando  $H = 0$  e la temperatura è inferiore a  $T_c$ , il sistema presenta una "simmetria" tra lo stato in cui tutti gli spin sono +1 e quello in cui tutti sono -1. Entrambi sono stati di minima energia.
  - Durante la simulazione, il sistema "sceglie" spontaneamente una di queste due direzioni e si magnetizza in quella direzione. Questo processo è chiamato **rottura spontanea di simmetria**. Se la configurazione iniziale è casuale, o il tempo di simulazione è limitato, possono formarsi **domini** di spin opposti che coesistono, separati da "pareti di dominio". La presenza di due domini principali (uno +1 e uno -1) è un risultato comune e sensato in queste condizioni, in quanto il sistema ha comunque raggiunto un ordine significativo, pur non essendo ancora arrivato ad essere un unico grande dominio.
- **Condizioni al Contorno Cicliche (Periodiche - PBC):**
  - **Necessità:** Nelle simulazioni su reticoli finiti, i "bordi" del reticolo avrebbero un comportamento diverso (meno vicini per gli spin al confine) rispetto all'interno, introducendo **effetti di bordo**.
  - **Funzionamento:** Per minimizzare questi effetti e far sì che il sistema finito si comporti più come un sistema infinito, si utilizzano le PBC. Immaginiamo che il reticolo si avvolga su se stesso, formando un toro. Così, uno spin sul bordo destro interagisce con gli spin sul bordo sinistro, e viceversa. Ogni spin ha lo stesso numero di vicini, indipendentemente dalla sua posizione.
  - **Implicazioni sui Risultati ("Influenza del Loop"):** Anche con le PBC, il sistema rimane di dimensione finita e si possono osservare **effetti di dimensione finita**. In particolare, l'influenza della topologia toroidale può portare i domini di spin a formare pattern che si "avvolgono" attorno al reticolo. Questo può dare un'impressione visiva di "periodicità" o di maggiore organizzazione nelle figure 2D, perché i domini tendono a minimizzare le loro pareti su questa superficie continua, creando forme allungate e avvolgenti. Non è una periodicità imposta dalle interazioni come nel modello ANNNI, che vediamo dopo, ma una conseguenza della topologia finita.

**Simulazione Monte Carlo (Metodo Metropolis):** L'evoluzione del sistema è gestita dall'algoritmo di Metropolis, che accetta o rifiuta le proposte di inversione di spin basandosi sul cambiamento di energia e sulla temperatura.

### Step, Passi Monte Carlo e Passi di Equilibrio:

- Un singolo "**step**" (o passo elementare) in una simulazione Monte Carlo di reticoli come Ising o ANNNI si riferisce tipicamente al tentativo di aggiornare lo stato di un singolo spin selezionato casualmente.
- Un "**Passo Monte Carlo**" (**Monte Carlo Step - MCS**) per spin, o "sweep", è un'unità di tempo nella simulazione. Corrisponde a un numero di singoli step pari al numero totale di spin nel sistema. In altre parole, in un MCS, si è tentato di aggiornare (in media) ogni spin del reticolo una volta. Questo assicura che l'intero sistema abbia avuto la possibilità di evolvere.
- I "**Passi di Equilibrio**" (o "thermalization steps") sono i primi MCS eseguiti all'inizio di una simulazione. Durante questa fase, il sistema evolve dalla sua configurazione iniziale (spesso casuale) verso uno stato di equilibrio termodinamico alla data temperatura. Le misurazioni delle proprietà del sistema (come magnetizzazione ed energia) effettuate durante i passi di equilibrio **non vengono utilizzate** per l'analisi finale, in quanto non rappresentano lo stato stazionario del sistema. Il numero di passi di equilibrio necessari dipende dalla dimensione del sistema, dalla temperatura e dalla vicinanza a una transizione di fase (vicino a  $T_c$  l'equilibrio è più lento).
- I "**Passi di Produzione**" (o "measurement steps") sono i MCS eseguiti *dopo* che il sistema ha raggiunto l'equilibrio. Le misurazioni effettuate durante questi passi sono quelle che vengono raccolte e mediate per calcolare le proprietà termodinamiche del sistema.

Durante il nostro lavoro, sono state proposte e discusse con Gemini molte simulazioni col modello di Ising. Ora ne riportiamo solo due a mo' di esempio sul modello di Ising. Dato che lo scopo principale di questo lavoro è evidenziare le capacità dell'AI, una esplorazione dettagliata dello spazio dei parametri è lasciata al lettore

<https://python-fiddle.com/saved/1ba68b5e-64dd-4bd4-8a73-18502c2376ca>

Uscita di testo: Simulazione del Modello di Ising 2D: Dimensione reticolo: 70x70 Temperatura (T): 2.50 Passi Monte Carlo: 15000 Passi di equilibrio: 1000 Costante J: 1 Campo H: 0 Inizio fase di equilibrio (1000 passi)... Equilibrio raggiunto. Inizio simulazione (15000 passi)... Simulazione completata.

--- Spiegazione dei risultati ---

A  $T=2.50$ : Ci aspettiamo un comportamento paramagnetico (magnetizzazione vicina a zero). La configurazione finale dovrebbe mostrare spin disordinati. Osserva i grafici: la magnetizzazione dovrebbe stabilizzarsi verso un valore specifico, e l'energia dovrebbe diminuire con il tempo.

Uscite grafiche in Figure 2 e 3.

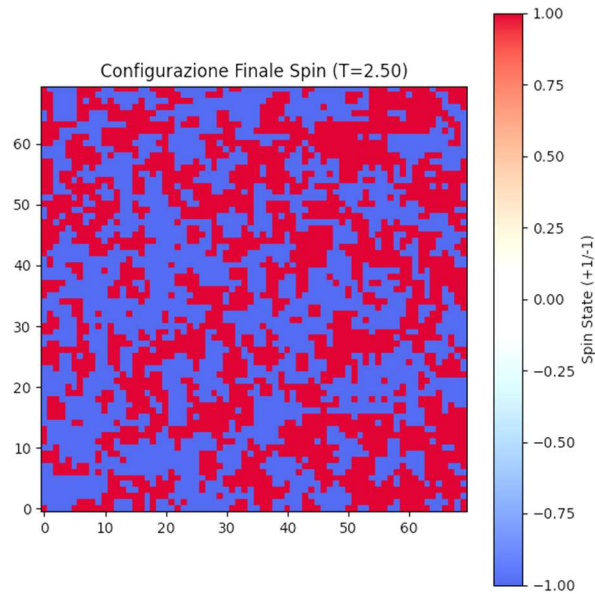


Fig.2

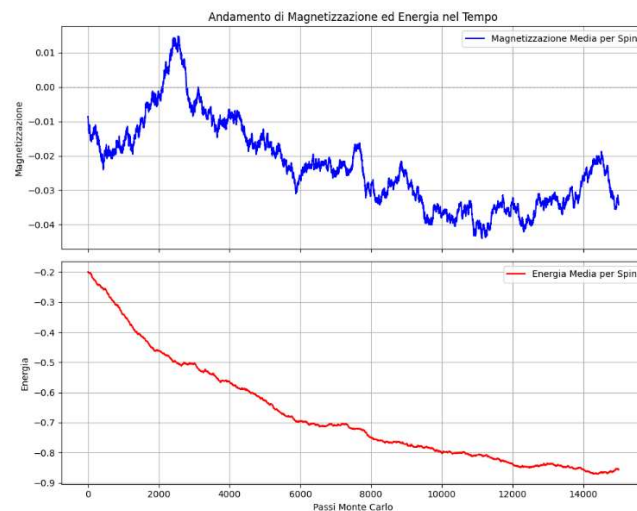


Fig.3

Nel secondo esempio, abbassiamo la temperature sotto la temperatura critica.

<https://python-fiddle.com/saved/29a87784-c917-4466-ab51-0542219c8c3d>

Uscita di testo: Simulazione del Modello di Ising 2D: Dimensione reticolo: 70x70 Temperatura (T): 1.80 Passi Monte Carlo: 85000 Passi di equilibrio: 1000 Costante J: 1 Campo H: 0 Inizio fase di equilibrio (1000 passi)... Equilibrio raggiunto. Inizio simulazione (85000 passi)... Simulazione completata.

--- Spiegazione dei risultati ---A  $T=1.80$ : Ci aspettiamo un comportamento ferromagnetico (magnetizzazione non nulla). La configurazione finale dovrebbe mostrare grandi domini di spin allineati. Osserva i grafici: la magnetizzazione dovrebbe stabilizzarsi verso un valore specifico, e l'energia dovrebbe diminuire con il tempo.

Uscite grafiche in Figure 4 e 5.

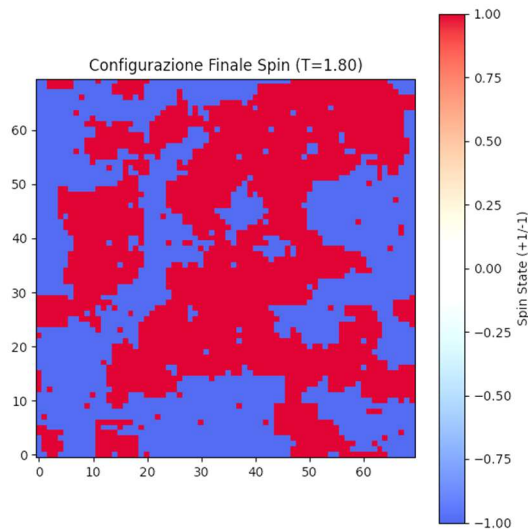


Fig.4

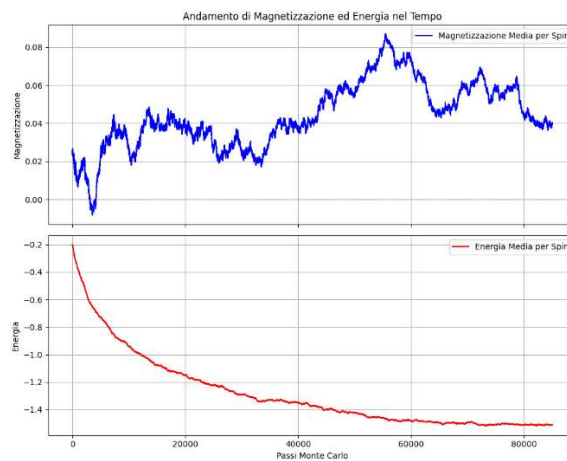


Fig.5

### 3. Modello ANNNI (Axial Next-Nearest-Neighbor Ising)

- **Concetto di Base:** Un'estensione del modello di Ising che introduce un'interazione aggiuntiva ( $J_2$ ) tra i **secondi vicini (o prossimi vicini)** lungo una direzione specifica (l'asse "assiale"). Spesso,  $J_2$  è **antiferromagnetica** ( $J_2 < 0$ ), creando una competizione energetica. Il modello ANNNI è dovuto a R. J. Elliott, 1961.
- **Concorrenza di Interazioni:** La tendenza dei primi vicini ad allinearsi ( $J_1 > 0$ ) compete con la tendenza dei secondi vicini (sull'asse) a disallinearsi ( $J_2 < 0$ ).
- **Fasi Modulate e Diagramma di Fase Complesso:** Questa competizione porta a un comportamento molto più ricco rispetto al modello di Ising standard. Il diagramma di fase del modello ANNNI non è caratterizzato da una singola temperatura critica, ma da **linee di transizione di fase** in uno spazio multidimensionale (es. Temperatura vs. rapporto  $J_2/J_1$ ). Si osservano:
  - **Fasi Ferromagnetiche:** (simili a Ising)
  - **Fasi Paramagnetiche:** (disordinate ad alta T)
  - **Fasi Modulate (a Strisce):** Caratterizzate da pattern periodici di spin (es.  $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$  o  $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$ ) che si formano in direzioni specifiche. La periodicità dipende dal rapporto  $J_2/J_1$  e dalla temperatura.
  - Possono esserci anche transizioni tra diverse fasi modulate o fenomeni di "ri-entrata".

- **Temperature Critiche Multiple:** Per ogni set di parametri ( $J_1, J_2$ ), esisteranno delle temperature critiche che segnano il passaggio tra le varie fasi ordinate (ferromagnetica, diverse fasi modulate) e la fase disordinata (paramagnetica), oltre che tra le diverse fasi ordinate stesse.
- **Simulazione Monte Carlo:** La metodologia è simile a quella di Ising, ma richiede una modifica nel calcolo dell'energia per includere l'interazione  $J_2$  con i secondi vicini. La visualizzazione della configurazione degli spin è essenziale per identificare le complesse fasi modulate.

Un esempio al link: <https://python-fiddle.com/saved/e893371a-dc9d-450d-aab0-c0b78745c6f7>

Uscita di testo: Simulazione del Modello ANNNI 2D: Dimensione reticolo: 50x50 Temperatura (T): 0.80 Passi Monte Carlo: 20000 Passi di equilibrio: 2000 Costante  $J_1$  (primi vicini): 1.0 Costante  $J_2$  (secondi vicini assiali): -0.5 Campo H: 0. Inizio fase di equilibrio (2000 passi)... Equilibrio raggiunto. Inizio simulazione (20000 passi)... Simulazione completata.

--- Spiegazione dei risultati attesi ---

Stai simulando un modello ANNNI con  $J_1=1.0$  (ferromagnetico) e  $J_2=-0.5$  (antiferromagnetico assiale). Questo rapporto  $J_2/J_1$  è fondamentale per il tipo di fase. A  $T=0.80$ : A seconda del valore di  $J_2/J_1$  e della temperatura, potresti osservare:

- Fasi ferromagnetiche (domini grandi, magnetizzazione non nulla).
- Fasi a strisce (pattern periodici, magnetizzazione globale che può essere zero).
- Fasi paramagnetiche (spin casuali, magnetizzazione vicina a zero).

Prova a cambiare la temperatura e/o il valore di  $J_2$  per esplorare le diverse fasi! Ad esempio, con  $J_1=1$  e  $J_2=-0.5$  (rapporto  $J_2/J_1 = -0.5$ ), a bassa temperatura potresti vedere una fase a strisce.

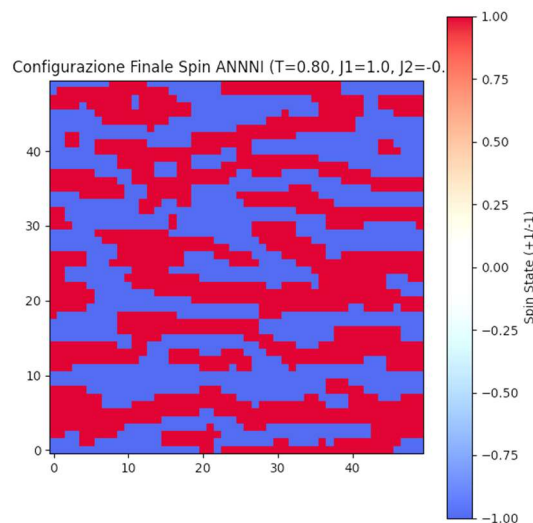


Fig.6

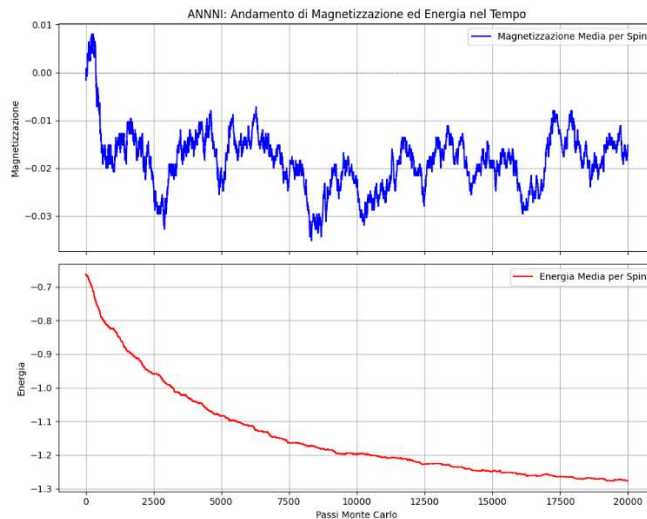


Fig.7

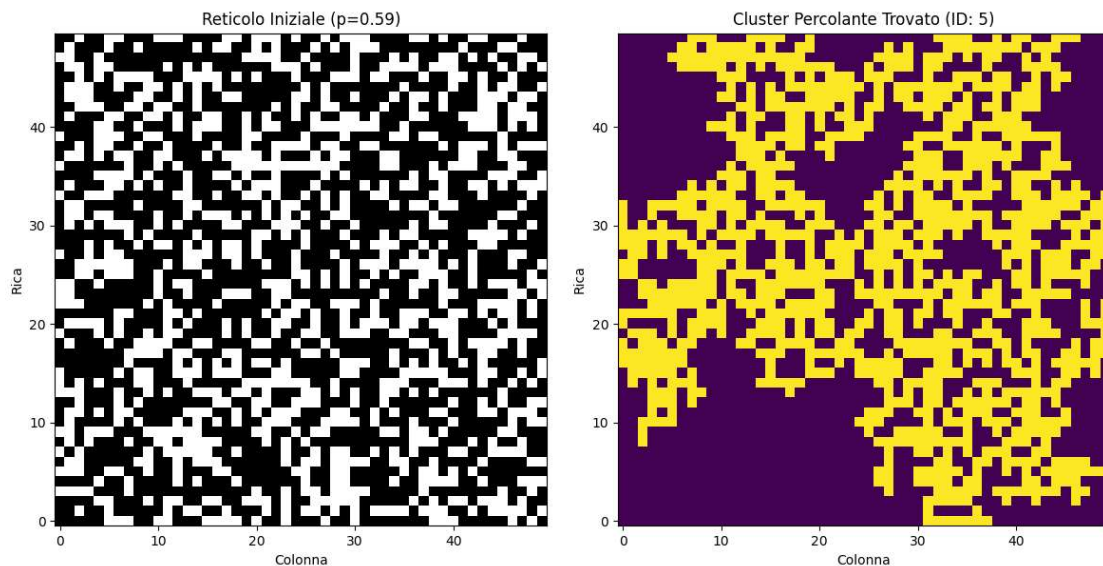


Fig.8

#### 4. Modello di Percolazione

- **Concetto di Base:** Un modello puramente **geometrico** che studia la connettività in reti o reticoli casuali. I siti (o i legami) del reticolo sono "occupati" o "aperti" con una certa **probabilità p**.
- **Fenomeno Chiave: Soglia di Percolazione ( $p_c$ ):**
  - Esiste una **probabilità critica  $p_c$**  al di sotto della quale è estremamente improbabile che si formi un percorso continuo (un "cluster gigante") che attraversi l'intero sistema (es. da un lato all'altro del reticolo).
  - Al di sopra di  $p_c$ , la probabilità di un tale percorso diventa molto alta.
  - Questa è una **transizione di fase geometrica**, non termica come nei modelli di Ising. Per un reticolo quadrato 2D,  $p_c \approx 0.5927$  per la percolazione di siti.
- **Simulazione Monte Carlo:**
  - Generazione casuale del reticolo in base a p.

- Utilizzo di algoritmi di ricerca di grafi come il **Breadth-First Search (BFS)** o Depth-First Search (DFS) per identificare e mappare i cluster di siti connessi.
- Verifica della presenza di cluster che connettono i bordi opposti del sistema.
- **Applicabilità:** Ampiamente usato per modellare fenomeni come la conduttività in materiali compositi, il flusso di fluidi in mezzi porosi, la diffusione di epidemie e la robustezza delle reti complesse.

Modello al link: <https://python-fiddle.com/saved/7a21f100-1cf7-49c2-a8d1-9fa1a75f8c13>

Uscita di testo del programma: Simulazione Percolazione di Siti 2D: Dimensione reticolo: 50x50 Probabilità di occupazione (p): 0.5900 Risultato: Il sistema PERCOLA! Trovato un cluster che connette top e bottom.

--- Spiegazione ---

La soglia critica di percolazione ( $p_c$ ) per un reticolo quadrato 2D è circa 0.5927. La probabilità  $p=0.5900$  è inferiore a  $p_c$ . Ci si aspetta che il sistema non percoli o percoli raramente. Esegui il codice più volte e prova a modificare il valore di 'probability\_p'. Vedrai come un piccolo cambiamento di 'p' intorno a 0.5927 faccia una grande differenza nella connettività.

L'uscita grafica del programma è in Fig.8.

Vediamo ora come appare un caso di non percolazione.

<https://python-fiddle.com/saved/e10c7118-0e30-46e6-b376-256ab100bdb3> Uscita di testo: Simulazione Percolazione di Siti 2D: Dimensione reticolo: 50x50 Probabilità di occupazione (p): 0.5000. Risultato: Il sistema NON percola. Nessun cluster connette top e bottom.

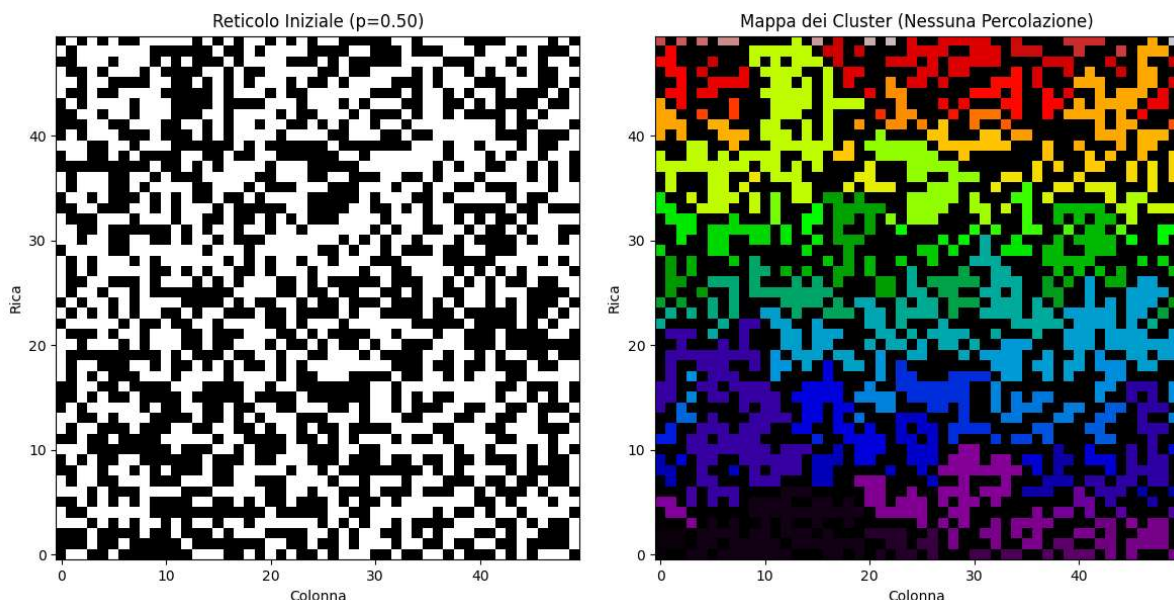


Fig.9

## Conclusioni

Questo lavoro ha delineato un percorso attraverso il mondo delle simulazioni scientifiche basate sui metodi Monte Carlo, esplorando modelli fondamentali come la stima di Pi Greco, il Modello di Ising, il Modello ANNNI e il Modello di Percolazione. Abbiamo approfondito concetti chiave quali le transizioni di fase, la rottura spontanea di simmetria, l'impatto delle condizioni al contorno periodiche

e la gestione dei passi di equilibrio nelle simulazioni. In questa esplorazione, l'elemento distintivo è stato il ruolo svolto dall'intelligenza artificiale Gemini. Essa non si è limitata a facilitare la generazione del codice Python per i modelli, ma ha agito stimolando la discussione, offrendo spiegazioni dettagliate, suggerendo parametri per l'esplorazione e fornendo un feedback continuo sui risultati computazionali. Questo approccio ha permesso di trasformare un apprendimento teorico in un'esperienza pratica e dinamica.

È importante sottolineare che la conoscenza di Gemini dei modelli fisici si estende ben oltre i modelli qui trattati. Durante le nostre interazioni, è emerso che l'AI possiede una comprensione approfondita di numerosi altri modelli statistici (come i modelli di Heisenberg, Potts) e di fisica computazionale, oltre a una vasta familiarità con le librerie di calcolo scientifico esistenti. Ancora più significativamente, la sua capacità di analizzare, concettualizzare e fornire supporto si è dimostrata efficace in campi scientifici molto diversi, dall'analisi letteraria (come visto nell'esplorazione di opere di Shakespeare e Manzoni) all'elaborazione e analisi di immagini in ambito biomedico (ad esempio, nella segmentazione delle cellule rosse e nel rilevamento del plasmodio), fino all'analisi di serie temporali con modelli SARIMA e Random Forest applicati a dati ambientali (come quelli dei laghi).

Questa versatilità sottolinea il potenziale dell'AI come risorsa inestimabile sia per un ricercatore, che necessiti un trattamento specifico dei dati, sia per uno studente, che voglia approfondire autonomamente l'esplorazione di sistemi complessi o di avventurarsi nella concettualizzazione e implementazione di nuovi approcci modellistici in svariate discipline.

## References

- Broadbent, S. R., & Hammersley, J. M. (1957, July). Percolation processes: I. Crystals and mazes. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society* (Vol. 53, No. 3, pp. 629-641). Cambridge University Press.
- McCoy, B. M., & Wu, T. T. (1973). *The two-dimensional Ising model*. Harvard University Press.
- Elliott, R. J. (1961). Phenomenological discussion of magnetic ordering in the heavy rare-earth metals. *Physical Review*, 124(2), 346.
- Holman, J. O., & Hacherl, A. (2023). Teaching Monte Carlo Simulation with Python. *Journal of Statistics and Data Science Education*, 31(1), 33-44.
- Ising, E. (1925). Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31(1), 253-258.
- Newman, M. E. J. (2013). *Computational Physics*. Princeton University Press.
- Nilsen, J. K. (2007). Montepython: Implementing quantum monte carlo using python. *Computer Physics Communications*, 177(10), 799-814.
- Selke, W. (1988). The ANNNI model—theoretical analysis and experimental application. *Physics Reports*, 170(4), 213-264.
- Sparavigna, A. C., & Gemini (Modello Linguistico di Google) (2025). L'AI ed l'Algoritmo di Segmentazione Watershed per i Globuli Rossi del Sangue. Zenodo. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15824463>

Sparavigna, A. C., & Gemini (Modello Linguistico di Google) (2025). Analisi Comparativa di 'Fermo e Lucia' e 'I Promessi Sposi (1840)' tramite AI conversazionale, dal Lessico alle Reti dei Personaggi. Zenodo. DOI : <https://doi.org/10.5281/zenodo.15767554>

Sparavigna, A. C., & Gemini (Modello Linguistico di Google) (2025). La Rete dei Personaggi nei Drammi di William Shakespeare e l'AI Conversazionale. Zenodo. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15760921>

Sparavigna, A. C., & Gemini (Modello Linguistico di Google). (2025). Analisi dei Livelli dei Laghi Tana, Kainji, Victoria, Turkana e Nasser tramite Random Forest Regressor: Una Prospettiva sui Limiti e il Fenomeno dell'Appiattimento, con Implementazione supportata da Gemini AI. Zenodo. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15727599>

Thomopoulos, N. T. (2012). Essentials of Monte Carlo simulation: Statistical methods for building simulation models. Springer Science & Business Media.

Van Rossum, G., & Drake Jr, F. L. (1995). Python tutorial (Vol. 620). Amsterdam, The Netherlands: Centrum voor Wiskunde en Informatica.

Van Rossum, G. (2007, June). Python programming language. In USENIX annual technical conference (Vol. 41, No. 1, pp. 1-36).