

Metriche, curvature, operatori di Laplace-Beltrami e potenziali indotti dalla curvatura

Original

Metriche, curvature, operatori di Laplace-Beltrami e potenziali indotti dalla curvatura / Sparavigna, Amelia Carolina. -
ELETTRONICO. - (2025). [10.5281/zenodo.15443108]

Availability:

This version is available at: 11583/3000236 since: 2025-05-18T12:18:32Z

Publisher:

Published

DOI:10.5281/zenodo.15443108

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

Metriche, curvatures, operatori di Laplace-Beltrami e potenziali indotti dalla curvatura

Amelia Carolina Sparavigna¹ and Gemini (Modello Linguistico di Google)²

¹ DISAT, Politecnico di Torino, ² Gemini AI

Questo lavoro è strutturato in modo da evidenziare come Gemini possa svolgere un problema quale quello di discutere la metrica e la curvatura delle superfici. Gemini può anche fornire gli operatori di Laplace-Beltrami ad esse relative. Per la fisica quantistica, ovvero per lo studio dell'equazione di Schrödinger relativa alla funzione d'onda di una particella libera ma vincolata ad una superficie, è bene riferirsi alle pubblicazioni che verranno menzionate, in particolare gli articoli di Da Silva et al., 2017, e Da Costa (1981). Da tali riferimenti si vede che la superficie, oltre ad introdurre l'operatore di Laplace-Beltrami, induce la presenza di un potenziale proporzionale alla differenza tra il quadrato della curvatura media e la curvatura di Gauss. Tale potenziale richiede superfici con curvature costanti, pertanto un altro riferimento da considerare è quello relativo al potenziale adiabatico di Wachsmuth e Teufel, 2010, che discute il problema con l'analogia dell'approssimazione di Born-Oppenheimer. La conversazione con Gemini su metriche, curvatures, operatori di Laplace-Beltrami e potenziali indotti dal confinamento su una superficie è proposta in modo che appaia come il testo di un articolo.

DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15443108>

1. Metrica del Cilindro

Un cilindro di raggio R può essere parametrizzato usando le coordinate (θ, z) , dove $\theta \in [0, 2\pi)$ è l'angolo attorno all'asse e $z \in (-\infty, \infty)$ è la coordinata lungo l'asse. La parametrizzazione è:

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z).$$

I vettori tangenti sono: $\partial \mathbf{r} / \partial \theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$ $\partial \mathbf{r} / \partial z = (0, 0, 1)$

I coefficienti del tensore metrico g_{ij} sono i prodotti scalari di questi vettori:

- $g_{\theta\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2 + 0^2 = R^2$
- $g_{\theta z} = g_{z\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 0$
- $g_{zz} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = 1$

Il tensore metrico del cilindro è:

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'elemento di distanza ds^2 è: $ds^2 = R^2 d\theta^2 + dz^2$

2. Metrica della Sfera

Una sfera di raggio R può essere parametrizzata usando le coordinate sferiche (θ, ϕ) , dove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo polare e $\phi \in [0, 2\pi)$ è l'angolo azimutale. La parametrizzazione è:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$$

I vettori tangenti sono:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-R \sin \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \phi, 0)$$

I coefficienti del tensore metrico sono:

- $g_{\theta\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = R^2$
- $g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = 0$
- $g_{\phi\phi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = R^2 \sin^2 \theta$

Il tensore metrico della sfera è:

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

L'elemento di distanza ds^2 è: $ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$

3. Metrica del Cono

Consideriamo un cono retto con raggio di base R e altezza H , e lunghezza della generatrice

$$L = \sqrt{R^2 + H^2}.$$

Parametrizzazione 1: Usando la distanza lungo la superficie dal vertice $\rho \in [0, L]$ e l'angolo attorno all'asse $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = \left(\frac{R}{L} \rho \cos \phi, \frac{R}{L} \rho \sin \phi, \frac{H}{L} \rho \right)$$

I vettori tangenti sono:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \left(\frac{R}{L} \cos \phi, \frac{R}{L} \sin \phi, \frac{H}{L} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \left(-\frac{R}{L} \rho \sin \phi, \frac{R}{L} \rho \cos \phi, 0 \right)$$

I coefficienti del tensore metrico sono i prodotti scalari dei vettori:

- $g_{\rho\rho} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \left(\frac{R}{L} \cos \phi \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \sin \phi \right)^2 + \left(\frac{H}{L} \right)^2 = \frac{R^2}{L^2} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \frac{H^2}{L^2} = \frac{R^2 + H^2}{L^2} = \frac{L^2}{L^2} = 1$
- $g_{\rho\phi} = g_{\phi\rho} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \left(\frac{R}{L} \cos \phi \right) \left(-\frac{R}{L} \rho \sin \phi \right) + \left(\frac{R}{L} \sin \phi \right) \left(\frac{R}{L} \rho \cos \phi \right) + \left(\frac{H}{L} \right) (0) = 0$
- $g_{\phi\phi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \left(-\frac{R}{L} \rho \sin \phi \right)^2 + \left(\frac{R}{L} \rho \cos \phi \right)^2 + 0^2 = \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2$

Il tensore metrico del cono è:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2 \end{pmatrix}$$

L'elemento di distanza $ds^2 = d\rho^2 + (R\rho/L)^2 d\phi^2$. Infatti:

$$ds^2 = g_{\rho\rho} d\rho^2 + 2g_{\rho\phi} d\rho d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 = 1 \cdot d\rho^2 + 0 \cdot d\rho d\phi + \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2 d\phi^2$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2 d\phi^2$$

In "Metrica e Curvature di Gauss e Riemann", si è utilizzata un'altra parametrizzazione. <https://zenodo.org/records/4724602>. Si fornisce a Gemini il seguente screenshot

$$X: (u, v) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (kv \cos u, kv \sin u, v)$$

e si chiede di riparametrizzare e confrontare.

Parametrizzazione 2: Usando le coordinate (u, v) dove v è una distanza radiale dal vertice e u è l'angolo azimutale, con la relazione $k=R/H$:

$$X(u, v) = \left(\frac{R}{H} v \cos u, \frac{R}{H} v \sin u, v \right)$$

I vettori tangenti sono:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(-\frac{R}{H}v \sin u, \frac{R}{H}v \cos u, 0\right) \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \left(\frac{R}{H} \cos u, \frac{R}{H} \sin u, 1\right)$$

I coefficienti del tensore metrico sono:

- $g_{uu} = \left(\frac{R}{H}\right)^2 v^2$
- $g_{uv} = g_{vu} = 0$
- $g_{vv} = \frac{L^2}{H^2}$

Il tensore metrico del cono è:

$$g = \begin{pmatrix} \left(\frac{R}{H}\right)^2 v^2 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{H^2} \end{pmatrix}$$

L'elemento di distanza ds^2 è:

$$ds^2 = \left(\frac{R}{H}\right)^2 v^2 du^2 + \frac{L^2}{H^2} dv^2$$

Confronto tra le due Parametrazioni del Cono:

Per confrontare le due metriche, dobbiamo trovare le relazioni tra le coordinate (ρ, ϕ) e (u, v) . Abbiamo identificato che:

- L'angolo azimutale è lo stesso: $\phi = u$.
- La distanza lungo la generatrice dal vertice è ρ nella prima parametrizzazione. Nella seconda, la coordinata v è legata alla distanza lungo la generatrice. Un punto sulla generatrice ha distanza ρ dal vertice, e le sue coordinate nella seconda parametrizzazione soddisfano

$$\sqrt{\left(\frac{R}{H}v\right)^2 + v^2} = \rho \frac{L}{L} = \rho.$$

- In realtà, la coordinata v nella seconda parametrizzazione

rappresenta la coordinata z scalata. La distanza lungo la generatrice è $l = v\sqrt{\left(\frac{R}{H}\right)^2 + 1} = v\frac{L}{H}$. Quindi, $\rho = l = v\frac{L}{H}$, il che implica $v = \rho\frac{H}{L}$.

Sostituiamo queste relazioni nella metrica della seconda parametrizzazione:

$$ds^2 = \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left(\rho \frac{H}{L}\right)^2 (d\phi)^2 + \frac{L^2}{H^2} \left(d\left(\rho \frac{H}{L}\right)\right)^2 = \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{\rho^2 H^2}{L^2} d\phi^2 + \frac{L^2}{H^2} \left(\frac{H}{L} d\rho\right)^2$$

$$ds^2 = \frac{R^2 \rho^2}{L^2} d\phi^2 + \frac{L^2}{H^2} \frac{H^2}{L^2} d\rho^2 = \left(\frac{R}{L}\rho\right)^2 d\phi^2 + d\rho^2 = d\rho^2 + \left(\frac{R}{L}\rho\right)^2 d\phi^2$$

Questa è esattamente la metrica ottenuta con la prima parametrizzazione. Questo dimostra che, sebbene le forme del tensore metrico dipendano dalla scelta delle coordinate e dalla parametrizzazione, l'elemento di distanza ds^2 (e quindi la geometria intrinseca della superficie) rimane lo stesso.

Il risultato coincide perfettamente con la metrica ottenuta dalla prima parametrizzazione (con la coordinata ρ). Il confronto dimostra che, nonostante le diverse forme delle parametrizzazioni e dei tensori metrici, entrambe descrivono la stessa geometria intrinseca del cono. La scelta della parametrizzazione influisce sulla forma matematica della metrica, ma le proprietà geometriche della superficie rimangono invarianti.

Curvature Gaussiane

Le curvature gaussiane per cilindro, sfera e cono, usando le notazioni che abbiamo impiegato:

1. Cilindro (raggio R) - La metrica del cilindro è:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + dz^2$$

La curvatura Gaussiana K di un cilindro è: $K=0$. Questo risultato è dovuto al fatto che il cilindro è una superficie sviluppabile, cioè può essere "appiattita" su un piano senza distorsioni.

2. Sfera (raggio R) - La metrica della sfera è:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

La curvatura Gaussiana K di una sfera è: $K=1/R^2$. La curvatura è positiva e costante su tutta la superficie della sfera.

3. Cono (generatrice L, raggio base R) - Abbiamo usato la metrica in coordinate (ρ, ϕ) , dove ρ è la distanza lungo la superficie dal vertice:

$$ds^2 = d\rho^2 + \left(\frac{R}{L}\rho\right)^2 d\phi^2$$

La curvatura Gaussiana K di un cono è: $K=0$ ovunque sulla superficie del cono, **tranne che nel vertice**, dove la curvatura non è definita (c'è una singolarità). Come il cilindro, anche il cono è una superficie sviluppabile (può essere "aperto" e steso su un settore circolare piatto).

In sintesi:

- **Cilindro:** $K=0$
- **Sfera:** $K=1/R^2$

- **Cono:** $K=0$ (ovunque tranne nel vertice)

Si chiede a Gemini di spiegare in dettaglio come si calcola la curvatura Gaussiana K di una superficie regolare, fornendo le formule principali.

Approccio 1: Utilizzando le curvature principali

La curvatura Gaussiana K in un punto di una superficie è definita come il prodotto delle due curvature principali κ_1 e κ_2 in quel punto:

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

Le curvature principali rappresentano la massima e la minima curvatura normale della superficie nel punto considerato. Per calcolarle, si procede nel seguente modo:

1. **Parametrizzazione della superficie:** Si descrive la superficie tramite una parametrizzazione

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

dove u e v sono coordinate sulla superficie.

2. **Derivate parziali:** Si calcolano le prime e le seconde derivate parziali di \mathbf{r} rispetto a u e v :

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{r}_u &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \bullet \mathbf{r}_{uu} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} \\ \bullet \mathbf{r}_v &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} & \bullet \mathbf{r}_{uv} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} \\ & & \bullet \mathbf{r}_{vv} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} \end{aligned}$$

3. **Coefficienti della prima forma fondamentale (tensore metrico):** Questi coefficienti descrivono la metrica indotta sulla superficie e sono dati dai prodotti scalari dei vettori tangenti:

$$\begin{aligned} \bullet E &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \\ \bullet F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u \\ \bullet G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{aligned}$$

4. **Vettore normale unitario:** Si calcola il vettore normale unitario \mathbf{n} alla superficie:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

5. **Curvature principali:** Le curvature principali κ_1 e κ_2 sono gli autovalori della matrice di Weingarten (o operatore di forma) S , che può essere espressa in termini dei coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale:

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

6. Gli autovalori κ soddisfano l'equazione caratteristica:

$$\det(S - \kappa I) = \begin{vmatrix} S_{11} - \kappa & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - (S_{11} + S_{22})\kappa + (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) = 0$$

Le due radici di questa equazione quadratica sono κ_1 e κ_2 .

7. **Curvatura Gaussiana:** Infine, la curvatura Gaussiana è il prodotto delle curvatures principali:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det(S) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

La formula diretta per la curvatura Gaussiana in termini delle forme fondamentali è quella determinata sopra. La curvatura Gaussiana può essere calcolata direttamente dai coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale tramite la formula:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Dove

$$\begin{array}{ll} \bullet L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n} & \bullet E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \\ \bullet M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n} & \bullet F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ \bullet N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n} & \bullet G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{array} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Approccio 2: Utilizzando il determinante della metrica e le sue derivate (Formula di Gauss-Codazzi)

Esiste anche un modo per calcolare la curvatura Gaussiana direttamente dal determinante della metrica e dalle sue derivate, noto come Theorema Egregium di Gauss. Se la metrica è espressa come

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \text{ e poniamo } g = EG - F^2$$

(il determinante della matrice metrica), allora la curvatura Gaussiana K può essere espressa in termini di E, F, G e le loro derivate parziali prime e seconde. La formula generale è piuttosto complessa, ma si semplifica notevolmente in sistemi di coordinate ortogonali ($F=0$), dove la metrica diventa

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

. In questo caso:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right]$$

dove $E_u = \frac{\partial E}{\partial u}$, $G_u = \frac{\partial G}{\partial u}$, $E_v = \frac{\partial E}{\partial v}$, $G_v = \frac{\partial G}{\partial v}$.

Si chiede a Gemini l'applicazione a cilindro, sfera, e cono con tutti i passaggi.

Certamente, applichiamo la formula diretta $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ per calcolare la curvatura Gaussiana di cilindro, sfera e cono, mostrando tutti i passaggi.

CILINDRO

1. Cilindro (raggio R)

Parametrizzazione: $\mathbf{r}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$

1. Derivate parziali:

- $\mathbf{r}_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$
- $\mathbf{r}_z = (0, 0, 1)$
- $\mathbf{r}_{\theta\theta} = (-R \cos \theta, -R \sin \theta, 0)$
- $\mathbf{r}_{\theta z} = (0, 0, 0)$
- $\mathbf{r}_{zz} = (0, 0, 0)$

2. Coefficienti della prima forma fondamentale:

- $E = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta = R^2$
- $F = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_z = 0$
- $G = \mathbf{r}_z \cdot \mathbf{r}_z = 1$ $EG - F^2 = R^2 \cdot 1 - 0^2 = R^2$

3. Vettore normale unitario:

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$$

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{(R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 + 0^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\mathbf{n} = \frac{(R \cos \theta, R \sin \theta, 0)}{R} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

4. Coefficienti della seconda forma fondamentale:

- $L = \mathbf{r}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{n} = (-R \cos \theta)(\cos \theta) + (-R \sin \theta)(\sin \theta) + (0)(0) = -R(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -R$
- $M = \mathbf{r}_{\theta z} \cdot \mathbf{n} = (0)(\cos \theta) + (0)(\sin \theta) + (0)(0) = 0$
- $N = \mathbf{r}_{zz} \cdot \mathbf{n} = (0)(\cos \theta) + (0)(\sin \theta) + (0)(0) = 0$

5. Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(-R)(0) - (0)^2}{R^2} = \frac{0}{R^2} = 0$$

SFERA

2. Sfera (raggio R)

Parametrizzazione: $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$

1. Derivate parziali:

- $\mathbf{r}_\theta = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta)$
- $\mathbf{r}_\phi = (-R \sin \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \phi, 0)$
- $\mathbf{r}_{\theta\theta} = (-R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \theta \sin \phi, -R \cos \theta) = -\mathbf{r}$
- $\mathbf{r}_{\theta\phi} = (-R \cos \theta \sin \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0)$
- $\mathbf{r}_{\phi\phi} = (-R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \theta \sin \phi, 0)$

2. Coefficienti della prima forma fondamentale:

- $E = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta = R^2$
- $F = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi = 0$
- $G = \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi = R^2 \sin^2 \theta$

$$EG - F^2 = R^2 \cdot R^2 \sin^2 \theta - 0^2 = R^4 \sin^2 \theta$$

3. Vettore normale unitario:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi &= (R^2 \sin^2 \theta \cos \phi, R^2 \sin^2 \theta \sin \phi, R^2 \sin \theta \cos \theta) = \\ &R \sin \theta (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) = R \sin \theta \mathbf{r} \\ |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi| &= R \sin \theta |\mathbf{r}| = R \sin \theta \cdot R = R^2 \sin \theta \\ \mathbf{n} &= \frac{R^2 \sin \theta \mathbf{r}}{R^2 \sin \theta} = \mathbf{r}/R = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \end{aligned}$$

4. Coefficienti della seconda forma fondamentale:

- $L = \mathbf{r}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{n} = (-\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}/R) = -|\mathbf{r}|^2/R = -R^2/R = -R$
- $M = \mathbf{r}_{\theta\phi} \cdot \mathbf{n} = (-R \cos \theta \sin \phi)(\sin \theta \cos \phi) + (R \cos \theta \cos \phi)(\sin \theta \sin \phi) + (0)(\cos \theta) = -R \cos \theta \sin \theta \sin \phi \cos \phi + R \cos \theta \sin \theta \sin \phi \cos \phi + 0 = 0$
- $N = \mathbf{r}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{n} = (-R \sin \theta \cos \phi)(\sin \theta \cos \phi) + (-R \sin \theta \sin \phi)(\sin \theta \sin \phi) + (0)(\cos \theta) = -R \sin^2 \theta \cos^2 \phi - R \sin^2 \theta \sin^2 \phi = -R \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -R \sin^2 \theta$

5. Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(-R)(-R \sin^2 \theta) - (0)^2}{R^4 \sin^2 \theta} = \frac{R^2 \sin^2 \theta}{R^4 \sin^2 \theta} = \frac{1}{R^2}$$

CONO

3. Cono (Parametrizzazione con ρ)

$$\text{Parametrizzazione: } \mathbf{r}(\rho, \phi) = \left(\frac{R}{L} \rho \cos \phi, \frac{R}{L} \rho \sin \phi, \frac{H}{L} \rho \right)$$

1. Derivate parziali:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\rho\rho} &= (0, 0, 0) \\ \bullet \mathbf{r}_\rho &= \left(\frac{R}{L} \cos \phi, \frac{R}{L} \sin \phi, \frac{H}{L} \right) & \mathbf{r}_{\rho\phi} &= \left(-\frac{R}{L} \sin \phi, \frac{R}{L} \cos \phi, 0 \right) \\ \bullet \mathbf{r}_\phi &= \left(-\frac{R}{L} \rho \sin \phi, \frac{R}{L} \rho \cos \phi, 0 \right) & \mathbf{r}_{\phi\phi} &= \left(-\frac{R}{L} \rho \cos \phi, -\frac{R}{L} \rho \sin \phi, 0 \right) \end{aligned}$$

2. Coefficienti della prima forma fondamentale:

$$\begin{aligned} \bullet E &= \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{r}_\rho = 1 \\ \bullet F &= \mathbf{r}_\rho \cdot \mathbf{r}_\phi = 0 \\ \bullet G &= \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi = \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2 & EG - F^2 &= 1 \cdot \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2 - 0^2 = \left(\frac{R}{L} \rho \right)^2 \end{aligned}$$

3. Vettore normale unitario:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{R}{L} \cos \phi & \frac{R}{L} \sin \phi & \frac{H}{L} \\ -\frac{R}{L} \rho \sin \phi & \frac{R}{L} \rho \cos \phi & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{HR}{L^2} \rho \cos \phi, -\frac{HR}{L^2} \rho \sin \phi, \frac{R^2}{L^2} \rho (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \right) \\ &= \left(-\frac{HR}{L^2} \rho \cos \phi, -\frac{HR}{L^2} \rho \sin \phi, \frac{R^2}{L^2} \rho \right) \\ |\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\phi| &= \sqrt{\left(\frac{HR}{L^2} \rho \right)^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \left(\frac{R^2}{L^2} \rho \right)^2} = \sqrt{\frac{H^2 R^2 \rho^2}{L^4} + \frac{R^4 \rho^2}{L^4}} = \\ &= \frac{R\rho}{L^2} \sqrt{H^2 + R^2} = \frac{R\rho}{L^2} L = \frac{R\rho}{L} \\ \mathbf{n} &= \frac{\left(-\frac{HR}{L^2} \rho \cos \phi, -\frac{HR}{L^2} \rho \sin \phi, \frac{R^2}{L^2} \rho \right)}{\frac{R\rho}{L}} = \left(-\frac{H}{L} \cos \phi, -\frac{H}{L} \sin \phi, \frac{R}{L} \right) \end{aligned}$$

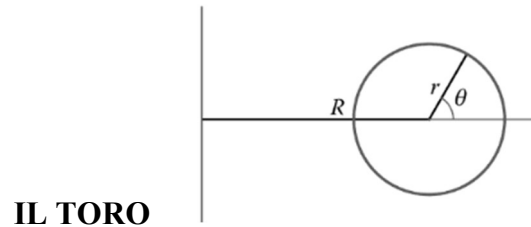
4. Coefficienti della seconda forma fondamentale:

- $L = \mathbf{r}_{\rho\rho} \cdot \mathbf{n} = (0)\left(-\frac{H}{L} \cos \phi\right) + (0)\left(-\frac{H}{L} \sin \phi\right) + (0)\left(\frac{R}{L}\right) = 0$
- $M = \mathbf{r}_{\rho\phi} \cdot \mathbf{n} = \left(-\frac{R}{L} \sin \phi\right)\left(-\frac{H}{L} \cos \phi\right) + \left(\frac{R}{L} \cos \phi\right)\left(-\frac{H}{L} \sin \phi\right) + (0)\left(\frac{R}{L}\right) = \frac{RH}{L^2} \sin \phi \cos \phi - \frac{RH}{L^2} \cos \phi \sin \phi + 0 = 0$
- $N = \mathbf{r}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{n} = \left(-\frac{R}{L} \rho \cos \phi\right)\left(-\frac{H}{L} \cos \phi\right) + \left(-\frac{R}{L} \rho \sin \phi\right)\left(-\frac{H}{L} \sin \phi\right) + (0)\left(\frac{R}{L}\right) = \frac{RH}{L^2} \rho \cos^2 \phi + \frac{RH}{L^2} \rho \sin^2 \phi + 0 = \frac{RH}{L^2} \rho (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \frac{RH}{L^2} \rho$

5. Curvatura Gaussiana:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(0)\left(\frac{RH}{L^2} \rho\right) - (0)^2}{\left(\frac{R}{L} \rho\right)^2} = \frac{0}{\left(\frac{R}{L} \rho\right)^2} = 0 \text{ (per } \rho \neq 0 \text{)}$$

Dopo l'analisi della metrica e della curvatura gaussiana di cilindro, sfera e cono, si passa al toro.



IL TORO

Un toro può essere parametrizzato usando due angoli:

- $\theta \in [0, 2\pi)$, l'angolo che determina la posizione attorno al "tubo" del toro (l'angolo di sezione).
- $\phi \in [0, 2\pi)$, l'angolo che determina la posizione attorno all'asse di simmetria del toro (l'angolo di rivoluzione).

Siano R il raggio maggiore del toro (la distanza dal centro del foro al centro del tubo) e r il raggio minore del toro (il raggio del tubo). La parametrizzazione del toro in coordinate cartesiane (x, y, z) è data da:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta)$$

Gemini propone una parametrizzazione come in *Differential Forms and the Geometry of General Relativity*, Tevian Dray, CRC Press, 20 Oct 2014

Ora, per trovare la metrica, dobbiamo calcolare i vettori tangenti alla superficie rispetto a θ e ϕ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta \cos \phi, -r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-(R + r \cos \theta) \sin \phi, (R + r \cos \theta) \cos \phi, 0)$$

Ora calcoliamo i coefficienti del tensore metrico g_{ij} usando i prodotti scalari di questi vettori tangenti:

- $g_{\theta\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta \cos \phi)^2 + (-r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \cos \theta)^2$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta$$

Da cui:

$$g_{\theta\theta} = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2$$

- $g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-r \sin \theta \cos \phi)(-(R + r \cos \theta) \sin \phi) + (-r \sin \theta \sin \phi)((R + r \cos \theta) \cos \phi) + (r \cos \theta)(0)$

$$g_{\theta\phi} = r \sin \theta \cos \phi (R + r \cos \theta) \sin \phi - r \sin \theta \sin \phi (R + r \cos \theta) \cos \phi + 0$$

$$g_{\theta\phi} = r \sin \theta (R + r \cos \theta) \cos \phi \sin \phi - r \sin \theta (R + r \cos \theta) \sin \phi \cos \phi = 0$$

- $g_{\phi\phi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (-(R + r \cos \theta) \sin \phi)^2 + ((R + r \cos \theta) \cos \phi)^2 + 0^2$

$$g_{\phi\phi} = (R + r \cos \theta)^2 \sin^2 \phi + (R + r \cos \theta)^2 \cos^2 \phi$$

$$g_{\phi\phi} = (R + r \cos \theta)^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = (R + r \cos \theta)^2$$

Quindi, il tensore metrico del toro nelle coordinate (θ, ϕ) è:

$$g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos \theta)^2 \end{pmatrix}$$

L'elemento di distanza ds^2 sulla superficie del toro è dato da:

$$ds^2 = g_{\theta\theta} d\theta^2 + 2g_{\theta\phi} d\theta d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2$$

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + (R + r \cos \theta)^2 d\phi^2$$

Osservazioni sul Toro:

Non è uniformemente curvo: La metrica del toro dipende dalla coordinata θ , il che indica che la curvatura varia sulla sua superficie.

Curvatura Gaussiana: La curvatura Gaussiana del toro è interessante:

È positiva sulla parte esterna del toro (dove $\cos \theta > 0$). È negativa sulla parte interna del toro (dove $\cos \theta < 0$). È zero sui cerchi dove $\cos \theta = 0$ (la circonferenza più interna e quella più esterna).

Non è globalmente euclideo: Non è possibile "appiattare" un toro su un piano senza distorsioni.

La metrica che abbiamo derivato è fondamentale per studiare la geometria intrinseca del toro, come le distanze tra punti sulla sua superficie, gli angoli e la sua curvatura.

La curvatura del toro

Coefficienti della prima forma fondamentale:

$$E = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta = (-r \sin \theta \cos \phi)^2 + (-r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \cos \theta)^2 = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \cos^2 \theta$$

$$F = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi = (-r \sin \theta \cos \phi)(-(R + r \cos \theta) \sin \phi) + (-r \sin \theta \sin \phi)((R + r \cos \theta) \cos \phi) + (r \cos \theta)(0)$$

$$G = \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi = (-(R + r \cos \theta) \sin \phi)^2 + ((R + r \cos \theta) \cos \phi)^2 + 0^2 = (R + r \cos \theta)^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$$

La metrica del toro è quindi:

$$ds^2 = E d\theta^2 + 2F d\theta d\phi + G d\phi^2 = r^2 d\theta^2 + (R + r \cos \theta)^2 d\phi^2$$

Calcolo della Curvatura Gaussiana (Utilizzando la formula $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$):

Seconde derivate parziali:

$$\mathbf{r}_{\theta\theta} = (-r \cos \theta \cos \phi, -r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta)$$

$$\mathbf{r}_{\theta\phi} = (r \sin \theta \sin \phi, -r \sin \theta \cos \phi, 0)$$

$$\mathbf{r}_{\phi\phi} = (-(R + r \cos \theta) \cos \phi, -(R + r \cos \theta) \sin \phi, 0)$$

Vettore normale unitario:

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \\ -(R + r \cos \theta) \sin \phi & (R + r \cos \theta) \cos \phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-r(R + r \cos \theta) \cos \theta \cos \phi, -r(R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta (R + r \cos \theta) (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi))$$

$$= -r(R + r \cos \theta) (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi| = r(R + r \cos \theta) \sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi}{|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi|} = -(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$$

(Il segno dipende dall'orientamento scelto, ma non influisce sulla curvatura Gaussiana). Usiamo $\mathbf{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$ per coerenza con la curvatura positiva esterna.

Coefficienti della seconda forma fondamentale:

$$L = \mathbf{r}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{n} = (-r \cos \theta \cos \phi)(\cos \theta \cos \phi) + (-r \cos \theta \sin \phi)(\cos \theta \sin \phi) + (-r \sin \theta)(\sin \theta)$$

$$M = \mathbf{r}_{\theta\phi} \cdot \mathbf{n} = (r \sin \theta \sin \phi)(\cos \theta \cos \phi) + (-r \sin \theta \cos \phi)(\cos \theta \sin \phi) + (0)(\sin \theta)$$

$$N = \mathbf{r}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{n} = -(R + r \cos \theta) \cos \phi (\cos \theta \cos \phi) + -(R + r \cos \theta) \sin \phi (\cos \theta \sin \phi) + (0)(\sin \theta)$$

Curvatura Gaussiana

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(-r)(-(R + r \cos \theta) \cos \theta) - (0)^2}{(r^2)((R + r \cos \theta)^2) - (0)^2}$$

$$K = \frac{r(R + r \cos \theta) \cos \theta}{r^2(R + r \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta}{r(R + r \cos \theta)}$$

Come avevamo osservato in precedenza:

- $K > 0$ quando $\cos \theta > 0$ (parte esterna del toro, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$).
- $K < 0$ quando $\cos \theta < 0$ (parte interna del toro, $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$).
- $K = 0$ quando $\cos \theta = 0$ ($\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, le circonferenze più interna ed esterna).

Questo calcolo dettagliato mostra tutti i passaggi per ottenere la metrica e la curvatura Gaussiana del toro a partire dalla sua parametrizzazione.

Per quanto riguarda E, F, G, L, M, N, se non si può leggere tutta la stringa di passaggi su una sola riga, si può chiedere a Gemini di riscrivere. Gemini riscriverà ogni passaggio in una riga, di modo da non aver problemi di lettura.

Ora riportiamo solo i risultati:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{E = r^2} & \boxed{F = 0} & \boxed{G = (R + r \cos \theta)^2} \\ \boxed{L = -r} & \boxed{M = 0} & \boxed{N = -(R + r \cos \theta) \cos \theta} \end{array}$$

Adesso, confrontiamo il risultato ottenuto da Gemini della curvatura gaussiana con il risultato in *Differential Forms and the Geometry of General Relativity*, Tevian Dray. CRC Press, 20 Oct 2014

the Gaussian curvature of the torus is given by

$$K = \frac{\cos \theta}{r(R + r \cos \theta)}. \quad (18.88)$$

This result makes sense: The curvature in the θ direction is clearly just $1/r$, and the curvature in the ϕ direction should go like the inverse radius, or $1/(R + r \cos \theta)$. But why is there a factor of $\cos \theta$?

Si veda la discussione della (18.88) nel testo di Tevian Dray.

Operatore di Weingarter

In <https://zenodo.org/records/4724602> si è accennato all'operatore di Weingarten. Discutiamolo.

Noto anche come tensore di curvatura, tale operatore è uno strumento fondamentale nella geometria differenziale delle superfici. Esso descrive come la normale unitaria a una superficie cambia quando ci muoviamo sulla superficie stessa.

Definizione e Significato Geometrico: Immagina una superficie S immersa nello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 . In ogni punto p di S , possiamo definire un vettore normale unitario $\mathbf{n}(p)$. Quando ci spostiamo da p lungo una curva sulla superficie, il vettore normale \mathbf{n} cambia direzione. L'operatore di Weingarten S_p misura questa variazione.

Formalmente, S_p è una trasformazione lineare dallo spazio tangente $T_p S$ a p in sé stesso. Se \mathbf{v} è un vettore tangente a S in p , allora $S_p(\mathbf{v})$ è un altro vettore tangente a S in p , definito come la derivata direzionale di \mathbf{n} nella direzione di \mathbf{v} : \varnothing

$$S_p(\mathbf{v}) = -D_{\mathbf{v}}\mathbf{n}$$

dove $D_{\mathbf{v}}$ è la derivata direzionale lungo \mathbf{v} . Il segno meno è una convenzione che rende S_p positivo per superfici localmente convesse.

Proprietà dell'operatore.

- **Autovalori e Curvature Principali:** Gli autovalori di S_p sono chiamati curvature principali, denotate con k_1 e k_2 . Essi rappresentano le curvature massime e minime della superficie in p lungo direzioni ortogonali.
- **Autovettori e Direzioni Principali:** Gli autovettori di S_p sono chiamati direzioni principali. Essi indicano le direzioni lungo le quali la curvatura della superficie è massima e minima. Le direzioni principali sono sempre ortogonali tra loro.
- **Curvatura Gaussiana e Curvatura Media:** La curvatura gaussiana K è il determinante di S_p , ovvero il prodotto delle curvature principali: $K = k_1 k_2$. La curvatura media H è la traccia di S_p divisa per 2, ovvero la media delle curvature principali: $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$. \varnothing
- **Forma Quadratica:** L'operatore di Weingarten è strettamente legato alla seconda forma fondamentale della superficie. Infatti, la seconda forma fondamentale è una forma quadratica definita come $II(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle S_p(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare.
- **Matrice di Weingarten:** In una base coordinata $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$ della superficie, la matrice di S_p è data da $S = g^{-1}B$, dove g è la matrice della prima forma fondamentale e B è la matrice della seconda forma fondamentale.

Applicazioni: L'operatore di Weingarten è essenziale per lo studio della curvatura delle superfici. Esso permette di classificare i punti di una superficie in base al segno delle curvature principali (ellittici, iperbolici, parabolici, planari, ombelicali). È utilizzato in grafica computerizzata per la generazione di superfici lisce e realistiche. In fisica, appare nello studio delle membrane e delle superfici minime. In relatività generale, è usato nello studio delle ipersuperfici spaziotemporali. In sintesi, l'operatore di Weingarten fornisce una descrizione completa della curvatura locale di una superficie, ed è uno strumento cruciale in geometria differenziale e in molte altre aree della scienza e dell'ingegneria.

L'operatore di Laplace-Beltrami

Dopo questo studio relativo alle superfici, si è chiesto a Gemini di passare ad un argomento di fisica. Ovvero, si è chiesto di discutere l'equazione di Schrödinger di una particella su una superficie, fornendo una nota introduttiva.

La meccanica quantistica descrive il comportamento delle particelle a livello atomico e subatomico attraverso una funzione d'onda Ψ che evolve nel tempo secondo l'equazione di Schrödinger. Quando una particella è vincolata a muoversi su una superficie, la sua libertà di movimento è ridotta rispetto al caso tridimensionale. Questa costrizione geometrica ha profonde implicazioni sulla forma dell'equazione di Schrödinger e sulle proprietà quantistiche della particella.

Consideriamo una particella di massa m costretta a rimanere su una superficie bidimensionale S immersa nello spazio tridimensionale. Per descrivere il suo stato quantistico, utilizziamo una funzione d'onda ψ definita sulle coordinate della superficie. L'operatore hamiltoniano H che governa l'evoluzione temporale di questa funzione d'onda contiene l'energia cinetica della particella sulla superficie e qualsiasi potenziale esterno a cui essa sia soggetta.

L'energia cinetica di una particella libera in uno spazio euclideo è legata all'operatore di Laplace ∇^2 . Tuttavia, quando la particella è vincolata a una superficie curva, questo operatore deve essere generalizzato per tenere conto della geometria non euclidea della superficie. Questa generalizzazione è l'operatore di Laplace-Beltrami, ∇_S^2 , che agisce sulle funzioni definite sulla superficie. La forma esplicita dell'operatore di Laplace-Beltrami dipende dalla metrica indotta sulla superficie dalla sua immersione nello spazio tridimensionale.

Si suggerisce ora la lettura dell'articolo: Da Silva, L. C., Bastos, C. C., & Ribeiro, F. G. (2017). Quantum mechanics of a constrained particle and the problem of prescribed geometry-induced potential. *Annals of Physics*, 379, 13-33.

In sintesi, lo studio dell'equazione di Schrödinger per una particella vincolata a una superficie generica richiede l'utilizzo dell'operatore di Laplace-Beltrami per descrivere l'energia cinetica sulla superficie curva, tenendo conto della metrica indotta e delle condizioni al contorno specifiche della superficie. Gemini accenna poi ai potenziali esterni. Attenzione, sottolineiamo che dall'articolo di Da Silva et al., si ricava l'esistenza di un potenziale indotto dalla curvatura della superficie.

“Besides their fundamental role in geometric considerations, the Gaussian and Mean curvatures appear in the quantum geometry-induced potential resulting from a confining procedure on a surface [4,5]”:

$$V_{gip} = -\frac{\hbar^2}{2m}(H^2 - K).$$

In questo potenziale c'è il quadrato della curvatura media H e la curvatura gaussiana K . E quindi vi è, oltre all'operatore di Laplace-Beltrami, anche da considerare questo potenziale indotto. Nel caso della sfera, il potenziale indotto si azzera.

I riferimenti [4] e [5] sono: Jensen, H., & Koppe, H. (1971). Quantum mechanics with constraints. *Annals of Physics*, 63(2), 586-591; da Costa, R. (1981). Quantum mechanics of a constrained particle. *Physical Review A*, 23(4), 1982.

https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~jnatar/nonarxivpapers/Costa_1981.pdf

La discussione nell'articolo al link dato sopra, ci porta ad introdurre la funzione d'onda alla superficie.

“Since we are hoping for the existence of a surface wave function, depending only on the variables q_1 and q_2 , we are naturally led to the introduction of a new wave function χ from which, in the event of a separation $\chi(q_1, q_2, q_3) = \chi_t(q_1, q_2) \chi_n(q_3)$ we will be able to define the surface density probability: $|\chi_t(q_1, q_2)|^2 \int |\chi_n(q_3)|^2 dq_3$.” (da Costa).

Con:

$$X = \chi_t(q_1, q_2, t) \times \chi_n(q_3, t)$$

Si arriva alle due seguenti equazioni:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial q_3^2} + V_\lambda(q_3) \chi_n = i\hbar \frac{\partial \chi_n}{\partial t}, \quad (13)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \chi_t}{\partial q_j} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(\alpha_{ij})^2 - \det(\alpha_{ij}) \right) \chi_t = i\hbar \frac{\partial \chi_t}{\partial t}. \quad (14)$$

(da Costa)

“Expression (13) is just the one-dimensional Schrödinger - equation for a particle bounded by the transverse potential $V_\lambda(q_3)$, and can be ignored in all future calculations. Expression (14), however, is much more interesting, due to the presence of the surface potential” (da Costa):

$$V_S(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}(\alpha_{ij})^2 - \det(\alpha_{ij}) \right\}$$

Questa espressione fornisce una forma per il potenziale efficace che una particella quantistica confinata a muoversi su una superficie curva sperimenta a causa della curvatura stessa della superficie. Questo potenziale non è dovuto a forze esterne, ma emerge direttamente dalla geometria dello spazio in cui la particella è vincolata.

La matrice α_{ij} è legata alla seconda forma fondamentale o all'operatore di Weingarten della superficie, e codifica informazioni sulla superficie media e gaussiana.

Questo potenziale di superficie gioca un ruolo importante nello studio del comportamento quantistico di particelle in sistemi a bassa dimensionalità con geometria non banale, come nanotubi, grafene o film sottili curvi.

Da Costa ci fornisce anche l'espressione:

$$V_S(q_1, q_2) = -\frac{\hbar^2}{2m} (M^2 - K) = -\frac{\hbar^2}{8m} (k_1 - k_2)^2$$

dove “ k_1 and k_2 are the principal curvatures of the surface S , and

$$M = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2g}(g_{11}h_{22} + g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12}) \quad (\text{mean curvature}),$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{g} \det(h_{ij}) \quad (\text{Gaussian curvature}).$$

(da Costa)

Vediamo anche la discussione relativa al potenziale indotto dalla curvatura che propone da Costa. “The dependence of V_s on q is especially remarkable due to the presence of the mean curvature M , since it cannot be obtained from the g_{ij} 's and their derivatives alone (contrary to what happens with K). This result has an important consequence: $V_s(q_1, q_2)$ will not be the same for two isometric surfaces (for which correspondent points can be found with the same g_{ij} 's). This is in striking contrast with the results of classical mechanics where the Lagrangian of the free surface motion,

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(q_1, q_2) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

depends only on the metric properties of the surface. Strange as it may appear at first sight, this is not an unexpected result, since, independent of how small the range of value assumed for q_3 , the wave function always moves" in a three-dimensional portion of the space, so that the particle is "aware" of the external properties of the limit surface S ". (da Costa)

Si segnala anche Reuter, M., Wolter, F. E., Shenton, M., & Niethammer, M. (2009). Laplace–Beltrami eigenvalues and topological features of eigenfunctions for statistical shape analysis. *Computer-Aided Design*, 41(10), 739-755.

Dopo questa digressione sulla meccanica quantistica, vediamo di analizzare l'operatore di Laplace-Beltrami in casi specifici.

L'operatore di Laplace-Beltrami applicato alla funzione f è dato come:

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \quad \text{come in}$$

<http://siba-ese.unisalento.it/index.php/quadrat/article/download/26993/22252>

Superficie cilindrica

Per la superficie cilindrica conosciamo g_{ij} e g^{ij} , da inserire in

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j} \right)$$

L'Operatore di Laplace-Beltrami sulla Superficie del Cilindro: Per una superficie parametrizzata da θ e z , l'operatore di Laplace-Beltrami è:

Per una superficie parametrizzata da (θ, z) , l'operatore di Laplace-Beltrami è:

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{g} g^{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{g} g^{\theta z} \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{g} g^{z\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{g} g^{zz} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]$$

Il determinante della metrica è $g = \det \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R^2$, quindi $\sqrt{g} = R$.

La matrice inversa della metrica g^{ij} è:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{z\theta} & g^{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $g^{\theta\theta} = 1/g_{\theta\theta} = 1/R^2$, $g^{\theta z} = g^{z\theta} = 0$, e $g^{zz} = 1/g_{zz} = 1$.

Sostituendo questi valori nell'espressione per ∇_S^2 :

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(R \cdot \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + R \cdot 0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(R \cdot 0 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + R \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]$$

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(R \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]$$

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Come si può vedere, l'operatore di Laplace-Beltrami sulla superficie del cilindro è la somma dei Laplaciani nelle direzioni angolare θ (scalato dal raggio R) e longitudinale z .

Si chiede a Gemini di trovare autovettori ed autovalori del Laplace-Beltrami cilindrico (cilindro di raggio R).

$$\nabla_S^2 \psi(\theta, z) = \lambda \psi(\theta, z)$$

dove λ è l'autovalore e $\psi(\theta, z)$ è l'autofunzione. Sostituendo l'espressione per ∇_S^2 :

$$\left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\theta, z) = \lambda \psi(\theta, z)$$

Ora, applichiamo le condizioni al contorno tipiche per un cilindro:

- **Periodicità in θ :** $\psi(\theta + 2\pi, z) = \psi(\theta, z)$. Questo implica che la dipendenza da θ sarà della forma $e^{in\theta}$, dove $n \in \mathbb{Z}$.

- Dipendenza da z : Consideriamo due casi comuni:
 - Cilindro infinito: La dipendenza da z può essere una onda piana $e^{ik_z z}$, dove k_z è un numero reale.
 - Cilindro finito di lunghezza L con condizioni periodiche in z : La dipendenza da z sarà della forma $e^{imz(2\pi/L)}$, dove $m \in \mathbb{Z}$.

Caso 1: Cilindro Infinito - Le autofunzioni normalizzate sono:

$$\psi_{n,k_z}(\theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} e^{in\theta} e^{ik_z z}$$

(dove L è una lunghezza di normalizzazione che alla fine tenderà all'infinito).

Agendo con l'operatore di Laplace-Beltrami su queste autofunzioni:

$$\begin{aligned} \nabla_S^2 \psi_{n,k_z}(\theta, z) &= \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi L}} e^{in\theta} e^{ik_z z} \right) \\ \nabla_S^2 \psi_{n,k_z}(\theta, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \left(\frac{1}{R^2} (in)^2 e^{in\theta} e^{ik_z z} + (ik_z)^2 e^{in\theta} e^{ik_z z} \right) \\ \nabla_S^2 \psi_{n,k_z}(\theta, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \left(-\frac{n^2}{R^2} - k_z^2 \right) e^{in\theta} e^{ik_z z} \\ \nabla_S^2 \psi_{n,k_z}(\theta, z) &= - \left(\frac{n^2}{R^2} + k_z^2 \right) \psi_{n,k_z}(\theta, z) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi:

$$\lambda_{n,k_z} = - \left(\frac{n^2}{R^2} + k_z^2 \right)$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ e $k_z \in \mathbb{R}$.

Caso 2: Cilindro Finito di Lunghezza L con Condizioni Periodiche in z

Le autofunzioni normalizzate sono:

$$\psi_{n,m}(\theta, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L}} e^{in\theta} e^{imz(2\pi/L)}$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Agendo con l'operatore di Laplace-Beltrami su queste autofunzioni:

$$\begin{aligned}\nabla_S^2 \psi_{n,m}(\theta, z) &= \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{L}} e^{in\theta} e^{imz(2\pi/L)} \right) \\ \nabla_S^2 \psi_{n,m}(\theta, z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L}} \left(\frac{1}{R^2} (in)^2 e^{in\theta} e^{imz(2\pi/L)} + \left(i \frac{2\pi m}{L} \right)^2 e^{in\theta} e^{imz(2\pi/L)} \right) \\ \nabla_S^2 \psi_{n,m}(\theta, z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L}} \left(-\frac{n^2}{R^2} - \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} \right) e^{in\theta} e^{imz(2\pi/L)}\end{aligned}$$

Attenzione: 'in' è 'i' unità immaginaria che moltiplica 'n'

$$\nabla_S^2 \psi_{n,m}(\theta, z) = - \left(\frac{n^2}{R^2} + \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} \right) \psi_{n,m}(\theta, z)$$

Gli autovalori sono quindi:

$$\lambda_{n,m} = - \left(\frac{n^2}{R^2} + \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} \right)$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}$.

Passiamo alla sfera.

3. L'Operatore di Laplace-Beltrami sulla Superficie della Sfera:

Per una superficie parametrizzata da (θ, ϕ) , l'operatore di Laplace-Beltrami è:

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{g} g^{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{g} g^{\theta\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{g} g^{\phi\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{g} g^{\phi\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right]$$

Il determinante della metrica è $g = \det \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = R^4 \sin^2 \theta$, quindi $\sqrt{g} = R^2 \sin \theta$.

La matrice inversa della metrica g^{ij} è:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi} \\ g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/(R^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

dove $g^{\theta\theta} = 1/g_{\theta\theta} = 1/R^2$, $g^{\theta\phi} = g^{\phi\theta} = 0$, e $g^{\phi\phi} = 1/g_{\phi\phi} = 1/(R^2 \sin^2 \theta)$.

Sostituendo questi valori nell'espressione per ∇_S^2 :

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right]$$

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

4. Autofunzioni e Autovalori:

Le autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera sono le armoniche sferiche $Y_{lm}(\theta, \phi)$, dove $l \geq 0$ è un intero e m è un intero tale che $-l \leq m \leq l$.

L'equazione agli autovalori è:

$$\nabla_S^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \lambda_l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Gli autovalori sono dati da:

$$\lambda_l = -\frac{l(l+1)}{R^2}$$

Si veda <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/beltrami-operator>

Nel caso della sfera, il quadrato della curvatura media è uguale alla curvatura di Gauss, e quindi non vi è da considerare il potenziale indotto.

Vediamo un problema di fisica, da <https://virgilio.mib.infn.it/~zaffaron/esercizisvolti.pdf>

<https://web.archive.org/web/20250516110123/https://virgilio.mib.infn.it/~zaffaron/esercizisvolti.pdf>

Autore: Alberto Zaffaroni.

Esercizio 2. (16Dic94) – Una particella di massa m è libera di muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R . Si ricordi la relazione fra energia e momento angolare. a) Determinare energie, degenerazione e autofunzioni degli stati stazionari; b) Sapendo che la particella si trova in uno stato stazionario con autofunzione $\psi(\vartheta, \varphi) = A \sin \vartheta \sin \varphi$ (A costante di normalizzazione, ϑ, φ coordinate polari), determinarne l'energia e dire quale è la probabilità di ottenere il valore $L_z = \hbar$ in una misura della componente lungo z del momento angolare.

Soluzione 2 (16Dic94). – Riferimento: §17, §25.

Poiché il raggio è fissato, la hamiltoniana diventa $H = L^2/2I$ ($I = mR^2$). Gli stati stazionari sono le armoniche sferiche Y_l^m e gli autovalori

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1), \quad d_l = 2l+1 \text{ degenerazione.}$$

È immediato verificare che la funzione d'onda (normalizzata) è data da

$$\psi(\vartheta, \varphi) = A \sin \vartheta \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 + Y_1^{-1})$$

e dunque $l = 1$. Per l'energia (valore medio di H) si ha

$$E = \frac{1}{2}(E_1 + E_1) = \frac{\hbar^2}{I},$$

mentre la probabilità di ottenere $L_z = \hbar$ è uguale a $1/2$.

Laplace-Beltrami e l'operatore momento angolare in meccanica quantistica

Consideriamo una particella libera di muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R . L'Hamiltoniana di questo sistema quantistico è data dall'operatore energia cinetica, che in questo caso è proporzionale all'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \Delta_{LB}^{S^2}$$

dove \hbar è la costante di Planck ridotta e m è la massa della particella. Il fattore $\frac{1}{R^2}$ compare perché l'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera ha dimensioni di (lunghezza)⁻².

Ora, ricordiamo l'espressione dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera in coordinate sferiche (θ, ϕ) :

$$\Delta_{LB}^{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

L'operatore momento angolare in meccanica quantistica è un vettore $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$. In coordinate sferiche, le sue componenti e l'operatore modulo quadro $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ hanno espressioni ben note:

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y = \hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

Confrontando l'espressione di \hat{L}^2 con quella di $\Delta_{LB}^{S^2}$, notiamo una relazione diretta:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{LB}^{S^2}$$

Pertanto, possiamo riscrivere l'Hamiltoniana per la particella sulla sfera in termini dell'operatore momento angolare al quadrato:

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2mR^2}$$

Questo risultato è molto importante perché implica che gli autostati dell'Hamiltoniana (gli stati ad energia definita della particella sulla sfera) sono anche gli autostati dell'operatore momento angolare al quadrato \hat{L}^2 . Gli autovalori di \hat{L}^2 sono dati da $\hbar^2 l(l+1)$, dove $l = 0, 1, 2, \dots$ è il numero quantico del momento angolare.

Quindi, le energie permesse per la particella sulla sfera sono quantizzate e date da:

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2}$$

Questi livelli energetici sono degeneri, con una degenerazione di $2l+1$ dovuta ai possibili valori del numero quantico magnetico $m_l = -l, -l+1, \dots, l$, che sono gli autovalori dell'operatore \hat{L}_z .

Nel contesto dell'esercizio che abbiamo prima proposto, la parte (a) ci chiede di determinare le energie, la degenerazione e le autofunzioni per una particella libera sulla superficie di una sfera. La parte (b) ci dà uno stato specifico e ci chiede di analizzarlo in questo contesto degenerare.

Analisi della funzione d'onda data:

La funzione d'onda data è $\psi(\theta, \varphi) = A \sin \theta \sin \varphi$. La soluzione afferma che questa funzione (normalizzata) è data da:

$$\psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 + Y_1^{-1})$$

E dunque $l=1$.

Cerchiamo di capire perché $\sin \theta \sin \varphi$ è legata a $l = 1$ e alle armoniche sferiche Y_1^1 e Y_1^{-1} :

Le armoniche sferiche per $l = 1$ sono:

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

Consideriamo la combinazione $\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^1 + Y_1^{-1})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^1 + Y_1^{-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (\cos \varphi - i \sin \varphi) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (-\cos \varphi - i \sin \varphi + \cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta (-2i \sin \varphi) \\ &= -i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

Questa espressione è proporzionale a $\sin \theta \sin \varphi$. La costante di normalizzazione A nell'esercizio includerebbe il fattore $-i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}$. Quindi, la soluzione afferma correttamente che la funzione d'onda data corrisponde a uno stato con $l = 1$, che è una sovrapposizione di stati con $m = 1$ e $m = -1$.

Energia (valore medio di H):

Poiché la funzione d'onda è una sovrapposizione di stati con $l = 1$, l'energia dello stato è E_1 :

$$E = E_1 = \frac{\hbar^2}{2I} 1(1+1) = \frac{\hbar^2}{I}$$

La soluzione riporta $E = \frac{1}{2}(E_1 + E_1) = \frac{\hbar^2}{I}$. Questo è corretto perché entrambi gli stati nella sovrapposizione hanno la stessa energia E_1 (sono degeneri rispetto a m). Il valore medio dell'energia per uno stato stazionario è l'energia di quello stato.

Probabilità di ottenere $L_z = \hbar$:

L'operatore L_z ha autovalore $m\hbar$ per l'armonica sferica Y_l^m . Nella nostra funzione d'onda $\psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^1 + Y_1^{-1})$, abbiamo due componenti:

- Y_1^1 con autovalore di L_z pari a $1\hbar = \hbar$.
- Y_1^{-1} con autovalore di L_z pari a $-1\hbar = -\hbar$.

La probabilità di ottenere un certo autovalore nella misura di un osservabile è data dal modulo quadro del coefficiente della corrispondente autofunzione nella decomposizione dello stato.

La probabilità di ottenere $L_z = \hbar$ (corrispondente a $m = 1$) è:

$$P(L_z = \hbar) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

La probabilità di ottenere $L_z = -\hbar$ (corrispondente a $m = -1$) è:

$$P(L_z = -\hbar) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

La probabilità di ottenere altri valori di L_z (come 0, corrispondente a Y_1^0 , che non è presente nella nostra decomposizione) è zero.

SFEROIDE PROLATO

Sia l'ellisse nel piano xz data da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, con $c > a$ (asse lungo lungo z). Ruotando questa ellisse attorno all'asse z , otteniamo lo sferoide prolato. Possiamo parametrizzarlo usando coordinate simili alle sferiche:

$$x = a \sin \theta \cos \phi$$

$$y = a \sin \theta \sin \phi$$

$$z = c \cos \theta$$

dove $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$.

Metrica sullo Sferoide Prolato:

Calcoliamo le derivate parziali di $\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, c \cos \theta)$:

$$\mathbf{r}_\theta = (a \cos \theta \cos \phi, a \cos \theta \sin \phi, -c \sin \theta)$$

$$\mathbf{r}_\phi = (-a \sin \theta \sin \phi, a \sin \theta \cos \phi, 0)$$

I coefficienti della prima forma fondamentale (tensore metrico g_{ij}) sono:

$$g_{\theta\theta} = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta = a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + c^2 \sin^2 \theta = a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{\theta\phi} = \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi = -a^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi + a^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi \cos \phi + 0 = 0$$

$$g_{\phi\phi} = \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi = a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 0 = a^2 \sin^2 \theta$$

Quindi, il tensore metrico è diagonale:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Il determinante della metrica è $|g| = a^2 \sin^2 \theta (a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta)$.

Pre ragioni di confronto si scrive la parametrizzazione come: $x=a \sin v \cos u$, $y=a \sin v \sin u$, $z=c \cos v$.

La curvatura Gaussiana che calcola Gemini è:

$$K = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v)^2}$$

La curvatura dell'ellissoide la troviamo in <https://mathworld.wolfram.com/Ellipsoid.html>

La formula della curvatura gaussiana per l'ellissoide generale:

$$K_{ellissoide} = \frac{a^2 b^2 c^2}{[a^2 b^2 \cos^2 v + c^2 (b^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u) \sin^2 v]^2}$$

Dimostrazione della coincidenza per $a = b$ (sferoide):

Imponiamo la condizione $a = b$ nella formula per l'ellissoide:

$$K_{sferoide} = \frac{a^2 a^2 c^2}{[a^2 a^2 \cos^2 v + c^2 (a^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u) \sin^2 v]^2}$$

$$K_{sferoide} = \frac{a^4 c^2}{[a^4 \cos^2 v + c^2 a^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) \sin^2 v]^2}$$

Utilizzando l'identità $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$:

$$K_{sferoide} = \frac{a^4 c^2}{[a^4 \cos^2 v + a^2 c^2 (1) \sin^2 v]^2}$$

$$K_{sferoide} = \frac{a^4 c^2}{[a^4 \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 v]^2}$$

Ora, dividiamo sia il numeratore che il denominatore per a^4 :

$$K_{sferoide} = \frac{a^4 c^2 / a^4}{[a^4 \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 v] / a^2 \cdot [a^4 \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 v] / a^2}$$

$$K_{sferoide} = \frac{c^2}{[a^2 \cos^2 v + c^2 \sin^2 v]^2}$$

E quindi con *mathworld* abbiamo incrociato i risultati, che coincidono.

Il Toro: Una Superficie con Topologia Non Banale

Un toro è una superficie con la topologia di un "ciambella" o di una "camera d'aria". La sua caratteristica topologica distintiva è la presenza di due cicli fondamentali che non possono essere contratti a un punto:

1. **Il ciclo poloidale:** Il cerchio che fa il "giro corto" attorno al tubo del toro (corrispondente alla coordinata θ nella nostra parametrizzazione).
2. **Il ciclo toroidale (o azimutale):** Il cerchio che fa il "giro lungo" attraverso il buco del toro (corrispondente alla coordinata ϕ).

Questa topologia ha profonde implicazioni per il comportamento delle particelle quantistiche, come gli elettroni, confinate a muoversi sulla sua superficie.

la discussione sull'operatore di Laplace-Beltrami, le autofunzioni e gli autovalori per una particella libera confinata sulla superficie di un toro, utilizzando i parametri θ (poloidale) e ϕ (azimutale).

1. La Superficie del Toro e le Coordinate:

Un toro con raggio maggiore R e raggio minore r è parametrizzato dagli angoli $\theta \in [0, 2\pi)$ (poloidale) e $\phi \in [0, 2\pi)$ (azimutale). La metrica sulla superficie è:

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + (R + r \cos \theta)^2 d\phi^2$$

2. L'Operatore di Laplace-Beltrami sulla Superficie del Toro:

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{r(R + r \cos \theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R + r \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r}{R + r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right]$$

Gemini propone una base ortogonale per risolvere la Laplace-Beltrami.

Una base ortonormale completa di funzioni periodiche sulla superficie del toro è data da:

$$\psi_{n_\theta, n_\phi}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2}} e^{in_\theta \theta} e^{in_\phi \phi}$$

dove $n_\theta, n_\phi \in \mathbb{Z}$.

(**)

4. Azione dell'Operatore di Laplace-Beltrami e "Autovalori Locali":

Applicando ∇_S^2 a queste funzioni, otteniamo:

$$\nabla_S^2 \psi_{n_\theta, n_\phi}(\theta, \phi) = - \left(\frac{n_\theta^2}{r^2} + \frac{n_\phi^2}{(R + r \cos \theta)^2} - \frac{n_\phi^2 r \sin \theta}{(R + r \cos \theta)^3} \right) \psi_{n_\theta, n_\phi}(\theta, \phi)$$

Ma adesso ci troviamo con una equazione dove non c'è un autovalore ma una funzione dell'angolo theta. Per cui si discute con Gemini e si chiede a Gemini di specificare bene il problema.

Le Autofunzioni (Armoniche Toroidali) e i Loro Autovalori Costanti:

Le vere autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla superficie del toro con autovalori costanti sono le **armoniche toroidali sulla superficie del toro**. Queste sono legate alle funzioni di Legendre associate di grado frazionario e ordine intero:

Ricordiamoci che l'equazione della superficie del toro è:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ (R + r \cos \theta) \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

L'operatore di Laplace-Beltrami è:

$$\nabla_S^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{g} g^{\theta\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{g} g^{\phi\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

dove $g = \det(g_{ij}) = r^2 (R + r \cos \theta)^2$ è il determinante del tensore metrico, e $g^{\theta\theta}$ e $g^{\phi\phi}$ sono gli elementi diagonali della matrice inversa del tensore metrico g^{ij} . Poiché la metrica è diagonale, $g^{\theta\theta} = 1/g_{\theta\theta} = 1/r^2$ e $g^{\phi\phi} = 1/g_{\phi\phi} = 1/(R + r \cos \theta)^2$.

Sostituendo questi valori nell'espressione per ∇_S^2 :

$$\begin{aligned}\nabla_S^2 &= \frac{1}{r(R+r\cos\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(r(R+r\cos\theta) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r(R+r\cos\theta)} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(r(R+r\cos\theta) \frac{1}{(R+r\cos\theta)^2} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ \nabla_S^2 &= \frac{1}{r(R+r\cos\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{R+r\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r(R+r\cos\theta)} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{r}{R+r\cos\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ \nabla_S^2 &= \frac{1}{r^2(R+r\cos\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left((R+r\cos\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{(R+r\cos\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

Si chiede a Gemini di trovare autofunzioni ed autovalori dell'operatore.

Le Autofunzioni (Armoniche Toroidali) e i Loro Autovalori Costanti:

Le autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla superficie del toro con autovalori costanti sono le **armoniche toroidali sulla superficie del toro**. Queste sono legate alle funzioni di Legendre associate di grado frazionario e ordine intero:

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) \propto P_{n-1/2}^{|m|}(\cosh \eta_0) e^{in\theta} e^{im\phi}$$

dove $\cosh \eta_0 = R/r$. Qui, n corrisponde a n_θ e m a n_ϕ .

L'equazione agli autovalori è:

$$\nabla_S^2 Y_{n,m}(\theta, \phi) = \lambda_{n,m} Y_{n,m}(\theta, \phi)$$

Gli autovalori $\lambda_{n,m}$ sono costanti sulla superficie e dipendono da n , m e dalla geometria del toro (R/r). Una forma semplificata per illustrare la dipendenza è:

$$\lambda_{n,m} \propto - \left(n^2 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 m^2 \right)$$

- L'operatore di Laplace-Beltrami sulla superficie del toro con coordinate (θ, ϕ) ha la forma specifica indicata.
- Le semplici esponenziali complesse

$$e^{in_\theta\theta} e^{in_\phi\phi}$$

formano una base periodica ma non sono autofunzioni con autovalori costanti.

- Le vere autofunzioni con autovalori costanti sono le armoniche toroidali sulla superficie del toro, legate alle funzioni di Legendre associate e espresse in termini di θ e ϕ .

- Gli autovalori dell'operatore di Laplace-Beltrami (e quindi dell'energia di una particella libera) sono quantizzati e dipendono dai numeri interi n (n_θ) e m (n_ϕ), nonché dal rapporto dei raggi del toro R/r .

L'Elicoide

L'elicoide è una superficie rigata generata dal movimento di una retta che si muove nello spazio con un moto elicoidale uniforme. Questo moto è composto da una rotazione uniforme attorno a un asse fisso e da una traslazione uniforme parallela allo stesso asse.

Una parametrizzazione comune dell'elicoide è data da:

$$\mathbf{x}(u,v) = (v \cos(u), v \sin(u), au)$$

dove $u \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}$, e a è una costante non nulla che determina il "passo" dell'elica che genera la superficie.

Metrica:

Per trovare la metrica, dobbiamo calcolare i coefficienti della prima forma fondamentale: $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$, e $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$.

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-v \sin(u), v \cos(u), a) \\ \mathbf{x}_v &= (\cos(u), \sin(u), 0) \end{aligned}$$

Ora calcoliamo i prodotti scalari:

$$\begin{aligned} E &= \langle (-v \sin(u), v \cos(u), a), (-v \sin(u), v \cos(u), a) \rangle = v^2 \sin^2(u) + v^2 \cos^2(u) + a^2 = v^2 + a^2 \\ F &= \langle (-v \sin(u), v \cos(u), a), (\cos(u), \sin(u), 0) \rangle = -v \sin(u) \cos(u) + v \cos(u) \sin(u) + 0 = 0 \\ G &= \langle (\cos(u), \sin(u), 0), (\cos(u), \sin(u), 0) \rangle = \cos^2(u) + \sin^2(u) + 0 = 1 \end{aligned}$$

Quindi, la metrica dell'elicoide è data da:

$$ds^2 = (v^2 + a^2) du^2 + 0 du dv + 1 dv^2 = (v^2 + a^2) du^2 + dv^2$$

Curvatura Gaussiana: Per trovare la curvatura gaussiana K , utilizziamo la formula:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

dove $L = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_{uu} \rangle$, $M = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_{uv} \rangle$, e $N = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_{vv} \rangle$ sono i coefficienti della seconda forma fondamentale, e \mathbf{n} è il vettore normale unitario alla superficie.

Calcoliamo le seconde derivate parziali:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-v \cos(u), -v \sin(u), 0) \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\sin(u), \cos(u), 0) \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Ora dobbiamo trovare il vettore normale unitario \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

Il prodotto vettoriale $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ è:

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -v \sin(u) & v \cos(u) & a \\ \cos(u) & \sin(u) & 0 \end{vmatrix} = (-a \sin(u), a \cos(u), -v \sin^2(u) - v \cos^2(u))$$

La norma di questo vettore è:

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{(-a \sin(u))^2 + (a \cos(u))^2 + (-v)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2(u) + a^2 \cos^2(u) + v^2} = \sqrt{a^2 + v^2}$$

Quindi, il vettore normale unitario è:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}}(-a \sin(u), a \cos(u), -v)$$

Ora possiamo calcolare i coefficienti della seconda forma fondamentale:

$$\begin{aligned}L &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}} \langle (-a \sin(u), a \cos(u), -v), (-v \cos(u), -v \sin(u), 0) \rangle \\ M &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}} \langle (-a \sin(u), a \cos(u), -v), (-\sin(u), \cos(u), 0) \rangle \\ N &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 + v^2}} \langle (-a \sin(u), a \cos(u), -v), (0, 0, 0) \rangle = 0\end{aligned}$$

Infine, calcoliamo la curvatura gaussiana:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(0)(0) - \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}\right)^2}{(v^2 + a^2)(1) - (0)^2} = \frac{-\frac{a^2}{a^2 + v^2}}{a^2 + v^2} = -\frac{a^2}{(a^2 + v^2)^2}$$

La curvatura gaussiana dell'elicoide è quindi $K = -\frac{a^2}{(a^2 + v^2)^2}$. Notiamo che la curvatura gaussiana dell'elicoide è sempre non positiva, e in particolare è negativa ovunque ($a \neq 0$).

Questo indica che l'elicoide è una superficie con una geometria a forma di sella in ogni suo punto.

L'operatore di Laplace-Beltrami Δ_{LB} su una superficie parametrizzata (u, v) con metrica g_{ij} è dato da:

$$\Delta_{LB}f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j} \right)$$

dove f è una funzione scalare sulla superficie, $|g|$ è il determinante della matrice metrica $g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, e g^{ij} sono gli elementi della matrice inversa di g . Qui, $u^1 = u$ e $u^2 = v$.

Nel nostro caso, la matrice metrica è:

$$g = \begin{pmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della metrica è $|g| = EG - F^2 = (v^2 + a^2)(1) - (0)^2 = v^2 + a^2$.

La matrice inversa della metrica $g^{-1} = g^{ij}$ è:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2+a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo applicare la formula per l'operatore di Laplace-Beltrami a una funzione $f(u,v)$ definita sull'elicoide:

$$\Delta_{LB}f = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{v^2+a^2} g^{11} \frac{\partial f}{\partial u} + \sqrt{v^2+a^2} g^{12} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{v^2+a^2} g^{21} \frac{\partial f}{\partial u} + \sqrt{v^2+a^2} g^{22} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right]$$

Sostituendo i valori di g^{ij} :

$$\Delta_{LB}f = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{v^2+a^2} \frac{1}{v^2+a^2} \frac{\partial f}{\partial u} + 0 \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(0 + \sqrt{v^2+a^2} (1) \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right]$$

$$\Delta_{LB}f = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{v^2+a^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right]$$

Eseguendo le derivate:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{v^2+a^2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{av}{\sqrt{v^2+a^2}} \frac{\partial f}{\partial v} + \sqrt{v^2+a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Mettendo tutto insieme:

$$\Delta_{LB}f = \frac{1}{\sqrt{v^2 + a^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{v^2 + a^2}} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{av}{\sqrt{v^2 + a^2}} \frac{\partial f}{\partial v} + \sqrt{v^2 + a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right)$$

Finalmente, l'operatore di Laplace-Beltrami sull'elicoide è:

$$\Delta_{LB}f = \frac{1}{v^2 + a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{av}{v^2 + a^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Questo operatore è fondamentale per studiare fenomeni di diffusione, onde e potenziali sulla superficie dell'elicoide.

Trovare gli autovalori e le autofunzioni del Laplace-Beltrami su una superficie generica come l'elicoide è un problema analitico piuttosto complesso e spesso non ammette soluzioni elementari. Le soluzioni dipendono dalle condizioni al bordo se la superficie è limitata.

Prima di studiare la Laplace-Beltrami, vediamo l'**operatore di Weingarten (o tensore di curvatura)** S . Questo operatore è una trasformazione lineare sullo spazio tangente ad ogni punto della superficie. I suoi autovalori sono le **curvature principali** k_1 e k_2 , e i suoi autovettori sono le **direzioni principali**, che sono ortogonali tra loro.

Per l'elicoide, possiamo trovare l'operatore di Weingarten utilizzando la prima e la seconda forma fondamentale. Ricordiamo che i coefficienti della seconda forma fondamentale erano

$L = 0$, $M = \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}$, e $N = 0$. La matrice della prima forma fondamentale era $g = \begin{pmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e la sua inversa $g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2+a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice dell'operatore di Weingarten S nella base coordinata $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$ è data da:

$$S = g^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2+a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2+a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{(a^2+v^2)^{3/2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori λ (che sono le curvature principali k) si trovano risolvendo l'equazione caratteristica $\det(S - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{a}{(a^2+v^2)^{3/2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{a^2}{(a^2+v^2)^2} = 0$$

Quindi, gli autovalori (curvature principali) sono:

$$k_1 = \frac{a}{a^2 + v^2}, \quad k_2 = -\frac{a}{a^2 + v^2}$$

Notiamo che la curvatura gaussiana $K = k_1 k_2 = -\frac{a^2}{(a^2 + v^2)^2}$, che concorda con il nostro risultato precedente. La curvatura media è $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$, il che conferma che l'elicoide è una superficie minima.

Gli autovettori corrispondenti a k_1 e k_2 sono le direzioni principali. Possiamo trovarli risolvendo $(S - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

Concentriamoci sugli autovalori e le autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sull'elicoide:

$$\Delta_{LB} f = \frac{1}{v^2 + a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{av}{v^2 + a^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{v^2 + a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{av}{v^2 + a^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \lambda f$$

Trovare le soluzioni generali di questa equazione differenziale alle derivate parziali non è semplice e, in generale, non ammette soluzioni elementari valide su tutto il dominio $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Le soluzioni dipenderebbero fortemente da eventuali condizioni al bordo se considerassimo una porzione limitata dell'elicoide.

Tuttavia, possiamo cercare soluzioni separate variabili della forma $f(u, v) = U(u)V(v)$.

Sostituendo questa forma nell'equazione agli autovalori:

$$\frac{1}{v^2 + a^2} U''(u)V(v) + \frac{av}{v^2 + a^2} U(u)V'(v) + U(u)V''(v) = \lambda U(u)V(v)$$

Dividendo per $U(u)V(v)$:

$$\frac{U''(u)}{(v^2 + a^2)U(u)} + \frac{avV'(v)}{(v^2 + a^2)V(v)} + \frac{V''(v)}{V(v)} = \lambda$$

Sostituendo $\frac{U''(u)}{U(u)} = -\mu$ nell'equazione separata, otteniamo un'equazione differenziale ordinaria per $V(v)$:

$$-\frac{\mu}{v^2 + a^2} + \frac{avV'(v)}{(v^2 + a^2)V(v)} + \frac{V''(v)}{V(v)} = \lambda$$

$$(v^2 + a^2)V''(v) + avV'(v) - (\mu + \lambda(v^2 + a^2))V(v) = 0$$

Gli autovalori λ saranno determinati dalle condizioni che le soluzioni $V(v)$ devono soddisfare (ad esempio, essere limitate o soddisfare specifiche condizioni al bordo se consideriamo un dominio limitato).

Potenziale indotto

Approfondiamo ulteriormente il potenziale geometrico indotto dalla curvatura, nella forma presentata da da Costa (1981):

$$V_{gip} = -\frac{\hbar^2}{2m}(H^2 - K)$$

Questa espressione differisce dalla forma più generale, $-\hbar^2 \xi R/2m$, basata sulla curvatura scalare R . La forma di da Costa emerge in un contesto specifico, legato alla quantizzazione a strato sottile (thin-layer quantization), sviluppata da Jensen e Koppe (1972) e da Costa (1981).

Quantizzazione a Strato Sottile: Questo approccio considera il moto di una particella confinata in uno strato sottile adiacente a una superficie curva. Nel limite in cui lo spessore dello strato tende a zero, la particella è effettivamente vincolata a muoversi sulla superficie. La quantizzazione del sistema in questo limite porta a un'Hamiltoniana che include un potenziale aggiuntivo, il potenziale geometrico indotto, che dipende dalla geometria della superficie.

Interpretazione del Potenziale indotto:

La forma $V_{gip} = -\frac{\hbar^2}{2m}(H^2 - K)$ esprime questo potenziale in termini della curvatura media (H) e della curvatura gaussiana (K) della superficie. Come abbiamo visto, può essere riscritto in termini delle curvatures principali (k_1 e k_2):

$$V_{gip} = -\frac{\hbar^2}{8m}(k_1 - k_2)^2$$

Questo mostra che il potenziale è proporzionale al quadrato della differenza tra le curvatures principali.

Caratteristiche e Conseguenze:

Dipendenza dalla Curvatura Media: La presenza della curvatura media H è notevole. A differenza della curvatura gaussiana K , H non può essere ottenuta solo dalla prima forma fondamentale della superficie (dai coefficienti g_{ij} e dalle loro derivate). Ciò significa che il potenziale geometrico indotto non è lo stesso per superfici isometriche (superfici che hanno la stessa prima forma fondamentale).

Superfici Minimali: Una superficie minimale generica ha $H=0$ ma K può essere non nullo, il potenziale non è necessariamente zero, a meno che non si verifichi la condizione speciale $k_1 = -k_2$.

Superfici Ombelicali: Il potenziale si annulla per superfici ombelicali ($k_1 = k_2$). La sfera è ombelicale per cui il potenziale indotto secondo la proposta di da Costa va a zero.

Effetti Quantistici: Questo potenziale è di origine puramente quantistica e svanisce nel limite classico ($\hbar \rightarrow 0$).

Applicazioni: Questo potenziale geometrico gioca un ruolo importante nello studio del comportamento quantistico di particelle confinate a sistemi a bassa dimensionalità con geometria non banale, come: Nanostrutture curve, Filamenti molecolari, Onde guidate curve.

L'espressione per il potenziale di curvatura

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \xi R \quad (\text{con } R \text{ curvatura scalare})$$

emerge dalla quantizzazione di DeWitt. Si ha \hbar che è la costante di Planck ridotta, m la massa della particella, ξ un parametro adimensionale di accoppiamento, ed R che è la curvatura scalare della superficie. Questo termine aggiuntivo all'Hamiltoniana quantistica di una particella confinata a una superficie curva sorge come conseguenza della geometria non euclidea dello spazio in cui il moto avviene. Rappresenta un potenziale efficace che la particella "sente" a causa della curvatura, anche in assenza di forze esterne.

Origine nella Quantizzazione di DeWitt:

Nella formulazione della meccanica quantistica su spazi curvi, l'operatore Hamiltoniano è spesso costruito analogamente all'Hamiltoniana classica, sostituendo le variabili classiche con operatori quantistici. Tuttavia, l'ordinamento di questi operatori non è univoco in coordinate curvilinee, e inoltre, la generalizzazione dell'operatore energia cinetica (che è $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$ nel caso piatto) a spazi curvi porta all'operatore di Laplace-Beltrami (Δ_{LB}).

DeWitt e altri hanno mostrato che l'Hamiltoniana quantistica più generale e geometricamente significativa può includere un termine proporzionale alla curvatura scalare R :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta_{LB} + \xi R) + V_{ext}(q)$$

dove $V_{ext}(q)$ è un potenziale esterno. Il termine $-\frac{\hbar^2}{2m} \xi R$ è quindi interpretato come il potenziale indotto dalla curvatura.

Il Parametro di Accoppiamento ξ : Il valore del parametro ξ non è universalmente determinato e dipende dallo schema di quantizzazione o da particolari requisiti teorici. Due valori sono particolarmente rilevanti:

Accoppiamento minimale: $\xi=0$. In questo caso, il potenziale di curvatura è nullo, e l'Hamiltoniana contiene solo l'operatore di Laplace-Beltrami come termine cinetico. Questa scelta è spesso considerata la più semplice e diretta generalizzazione.

Accoppiamento conforme: $\xi = (n-2)/(4(n-1))$, dove n è la dimensione dello spazio. Per una superficie bidimensionale ($n=2$), questo dà $\xi=0$. Tuttavia, la terminologia "accoppiamento conforme" è spesso usata con $\xi=1/6$ in contesti bidimensionali, specialmente in teoria dei campi in spazi curvi, per garantire l'invarianza conforme dell'equazione di campo scalare.

Curvatura Scalare \mathbf{R} : La curvatura scalare \mathbf{R} è un invariante di Ricci che descrive la curvatura intrinseca della varietà riemanniana (in questo caso, la superficie). Per una superficie bidimensionale, la curvatura scalare è strettamente legata alla curvatura gaussiana K : $\mathbf{R}=2K$. Quindi, il potenziale di curvatura può anche essere scritto come:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\xi(2K) = -\frac{\hbar^2}{m}\xi K$$

Applicazione alla Sfera:

Nel caso di una sfera di raggio R , la curvatura gaussiana è $K=1/R^2$ e la curvatura scalare è $\mathbf{R}=2/R^2$. Il potenziale di curvatura per una particella sulla sfera è quindi:

$$V_S = -\frac{\hbar^2}{2m}\xi \frac{2}{R^2} = -\frac{\hbar^2\xi}{mR^2}$$

Questo è un potenziale costante negativo (se $\xi>0$) che abbassa l'energia degli stati quantistici sulla sfera.

Confronto con il Potenziale di da Costa:

È importante notare che la forma $-\frac{\hbar^2}{2m}\xi R$ è diversa dal potenziale $V_{gip} = -\frac{\hbar^2}{2m}(H^2 - K)$ derivato nel contesto della quantizzazione a strato sottile. I due approcci portano a potenziali geometrici con dipendenze diverse dalla geometria della superficie.

La quantizzazione di DeWitt è un approccio più generale e intrinseco, mentre la quantizzazione a strato sottile considera un limite fisico specifico. Di conseguenza, i potenziali geometrici che emergono riflettono queste diverse prospettive.

Il potenziale con la curvatura scalare rappresenta un potenziale efficace che una particella quantistica sente a causa della curvatura dello spazio in cui si muove, secondo la quantizzazione di DeWitt (1957). La sua forma dipende dal parametro di accoppiamento ξ e dalla curvatura scalare R della superficie.

In Anjos, E. V., Pavão, A. C., Da Silva, L. C., & Bastos, C. C. (2024). Quantum mechanics of particles constrained to spiral curves with application to polyene chains, possiamo trovar detto che: "Thanks to tremendous advances in experimental techniques, synthesizing lower dimensional materials became a reality. Such materials often display formidable properties that offer countless opportunities. With such advances comes the challenge of finding the wave equation that effectively describes quantum particles moving on 1D and 2D materials. To find the effective wave equation for a particle confined to move on

a lower-dimensional region, it is necessary to account for the uncertainty relations since any confinement involves the full knowledge of the degrees of freedom associated with the motion along the direction orthogonal to the constraining region. In the 1950s, De Witt attempted to describe quantum confinement in a curved space through a quantization procedure, which resulted in an ordering ambiguity. A formalism that does not suffer from this ambiguity has been proposed independently by Jensen and Koppe in the 1970s and by Da Costa in the 1980s: their formalism shows that the effective constrained dynamics is subjected to a scalar geometry-induced potential. Jensen and Koppe analyzed a case where confinement occurs between two parallel surfaces. They obtained that the Schrödinger equation depends on a geometry-induced potential that incorporates the geometry of the confinement region. On the other hand, Da Costa arrived at the same result by employing an explicit strong confining potential to restrict the particle's motion to the desired lower-dimensional region; for the confinement of a quantum particle to a curve, he obtained a Hamiltonian whose geometry-induced potential depends on the curve's curvature function." (Anjos et al.).

L'ambiguità d'ordine nella quantizzazione di DeWitt si manifesta nella non univocità del modo in cui l'Hamiltoniana classica in coordinate curvilinee (che coinvolge prodotti della metrica e dei momenti) viene promossa a un operatore quantistico, portando alla possibile presenza di termini di curvatura con coefficienti indeterminati. Gli approcci basati sul confinamento geometrico offrono una via alternativa per derivare l'Hamiltoniana efficace su spazi curvi, aggirando in parte questo problema.

Applicazioni del potenziale indotto

Da Santos et al., 2016, Geometric effects in the electronic transport of deformed nanotubes. "The problem of a free quantum particle moving in a curved surface was solved in a very realistic setting by R. C. T. da Costa in a seminal paper published in 1981. The da Costa approach has been applied to a wide range of two-dimensional systems, like rolled up nanotubes, thin magnetic shells or spin transport on curved systems. In particular, the approach has been much used to study carbon-based systems like nanotubes and other curved forms of graphene. The experimental verification of the geometric effects predicted by da Costa in a real physical system was done ... by measuring the high resolution ultraviolet photoemission spectra of a C60 peanut-shaped polymer."

Il grafene corrugato è stato studiato da Atanasov, V., & Saxena, A. (2011).

Le equazioni di Schrödinger con potenziale indotto

Cilindro:

Abbiamo calcolato che il potenziale geometrico indotto di da Silva per un cilindro è $V_{gip}^{cilindro} = -\frac{\hbar^2}{8mR^2}$. Includendo questo potenziale nell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{LB}^{cilindro} \Psi(z, \phi) + V_{gip}^{cilindro} \Psi(z, \phi) = E \Psi(z, \phi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \Psi(z, \phi) - \frac{\hbar^2}{8mR^2} \Psi(z, \phi) = E \Psi(z, \phi)$$

La presenza del potenziale aggiunge un termine costante all'energia del sistema.

Toro:

Le curvatures principali del toro sono:

$$k_1 = \frac{\cos \phi}{r} \quad k_2 = \frac{\cos \phi}{R + r \cos \phi}$$

Il potenziale indotto è:

$$V_{gip}^{toro}(\phi) = -\frac{\hbar^2 \cos^2 \phi (R^2 + 4Rr \cos \phi + 4r^2 \cos^2 \phi - 4Rr - 4r^2 \cos \phi)}{8mr^2 (R + r \cos \phi)^2}$$

Elicoide:

Questa è una superficie minima, che ha curvature:

$$k_1 = \frac{c}{c^2 + u^2} \quad k_2 = -\frac{c}{c^2 + u^2}$$

H è uguale a zero. Ed infatti l'elicoide è una superficie minimale, quindi la sua curvatura media è zero. Ma la curvatura gaussiana è diversa da zero. Ed il potenziale indotto è diverso da zero.

$$V_{gip}^{elicoide}(u) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{c^2}{(c^2 + u^2)^2}$$

Notiamo che il potenziale dipende dalla coordinata u , riflettendo la variazione della curvatura gaussiana lungo l'elicoide. Il fatto che la curvatura media sia zero non implica che il potenziale indotto sia nullo, a causa della curvatura gaussiana non zero.

Vediamo ora un'altra superficie, la catenoide, prima di continuare la discussione con potenziale adiabatico e geometrico.

CATENOIDE

Una catenoide può essere ottenuta ruotando una catenaria attorno al suo asse di simmetria. Una parametrizzazione comune in coordinate (u, v) è:

$$\mathbf{r}(u, v) = (c \cosh(u/c) \cos(v), c \cosh(u/c) \sin(v), u)$$

dove c è una costante che determina la forma del catenoide, $-\infty < u < \infty$ e $0 \leq v < 2\pi$.

Tensore Metrico sul Catenoide:

Calcoliamo le derivate parziali di $\mathbf{r}(u, v)$:

$$\mathbf{r}_u = (\sinh(u/c) \cos(v), \sinh(u/c) \sin(v), 1)$$

$$\mathbf{r}_v = (-c \cosh(u/c) \sin(v), c \cosh(u/c) \cos(v), 0)$$

Ora calcoliamo i coefficienti della prima forma fondamentale (il tensore metrico g_{ij}):

$$g_{11} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \sinh^2(u/c) \cos^2(v) + \sinh^2(u/c) \sin^2(v) + 1 = \sinh^2(u/c) + 1 = \cosh^2(u/c)$$

$$g_{12} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = -c \sinh(u/c) \cosh(u/c) \cos(v) \sin(v) + c \sinh(u/c) \cosh(u/c) \sin(v) \cos(v) + 0 = 0$$

$$g_{22} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = c^2 \cosh^2(u/c) \sin^2(v) + c^2 \cosh^2(u/c) \cos^2(v) + 0 = c^2 \cosh^2(u/c)$$

Quindi, il tensore metrico è:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \cosh^2(u/c) & 0 \\ 0 & c^2 \cosh^2(u/c) \end{pmatrix}$$

Il determinante della metrica è $|g| = \cosh^2(u/c) \cdot c^2 \cosh^2(u/c) = c^2 \cosh^4(u/c)$.

L'inversa della metrica è:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2(u/c)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2 \cosh^2(u/c)} \end{pmatrix}$$

Curvature del Catenoide:

- **Curvatura Media (H):** Il catenoide è una **superficie minimale**, il che implica che la sua curvatura media è zero ovunque sulla superficie:

$$H = 0$$

- **Curvatura Gaussiana (K):** La curvatura gaussiana del catenoide è data da:

$$K = -\frac{1}{c^2 \cosh^4(u/c)}$$

Gemini può fornire tutti i passaggi per il calcolo. Si confronti con:

<https://mathworld.wolfram.com/Catenoid.html>

Notiamo che la curvatura gaussiana è sempre negativa (tranne nel limite in cui $c \rightarrow \infty$, che degenera in un piano, dove $K=0$). Questo indica che la superficie del catenoide è localmente a forma di sella. La

magnitudine della curvatura gaussiana dipende dalla coordinata u e dal parametro c . È massima in corrispondenza di $u=0$ (la "gola" del catenoide) e tende a zero per $|u| \rightarrow \infty$.

In sintesi: La metrica del catenoide è diagonale e dipende dalla coordinata u e dal parametro c . La curvatura media è zero, rendendolo una superficie minimale. La curvatura gaussiana è negativa e variabile sulla superficie, indicando la sua forma a sella. Queste proprietà geometriche sono cruciali per determinare l'operatore di Laplace-Beltrami e il potenziale geometrico indotto per una particella confinata a muoversi sulla superficie del catenoide, come abbiamo visto nell'equazione di Schrödinger. La curvatura non costante implica che il potenziale indotto varia sulla superficie, influenzando il comportamento quantistico della particella.

Operatore di Laplace-Beltrami sul Catenoide:

L'operatore di Laplace-Beltrami è:

$$\Delta_{LB}^{catenoide} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q^j} \right)$$

Con $\sqrt{|g|} = c \cosh^2(u/c)$, $q^1 = u$, $q^2 = v$, $g^{11} = \frac{1}{\cosh^2(u/c)}$, $g^{22} = \frac{1}{c^2 \cosh^2(u/c)}$, e $g^{12} = g^{21} = 0$, otteniamo:

$$\Delta_{LB}^{catenoide} = \frac{1}{c \cosh^2(u/c)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(c \cosh^2(u/c) \cdot \frac{1}{\cosh^2(u/c)} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(c \cosh^2(u/c) \cdot \frac{1}{c^2 \cosh^2(u/c)} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]$$

Semplifichiamo l'interno delle derivate:

- Per il termine con la derivata rispetto a u :

$$c \cosh^2(u/c) \cdot \frac{1}{\cosh^2(u/c)} \frac{\partial}{\partial u} = c \frac{\partial}{\partial u}$$

- Per il termine con la derivata rispetto a v :

$$c \cosh^2(u/c) \cdot \frac{1}{c^2 \cosh^2(u/c)} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v}$$

Ora applichiamo le derivate esterne:

$$\Delta_{LB}^{catenoide} = \frac{1}{c \cosh^2(u/c)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(c \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]$$

$$\Delta_{LB}^{catenoide} = \frac{1}{c \cosh^2(u/c)} \left[c \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right]$$

$$\Delta_{LB}^{catenoide} = \frac{1}{\cosh^2(u/c)} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{c^2 \cosh^2(u/c)} \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Quindi:

$$\Delta_{LB}^{catenoide} = \frac{1}{\cosh^2(u/c)} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{c^2 \cosh^2(u/c)} \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Anche nel caso della catenoide il potenziale di da Silva non è una costante. Il fatto che non sia costante ha delle conseguenze. Lo si discute nel seguito.

“The reason is that, physically speaking, localizing a quantum particle to a thin domain leads to large kinetic energies in the constrained directions, i.e. in the directions normal to the curve for a conventional waveguide, and that variations of the cross section lead to exchange of this kinetic energy between normal and tangent directions. However, the common approaches require that the Laplacian acts only on functions that have much smaller derivatives in the tangent directions than in the normal directions.” (Haag et al., 2015).

Potenziale adiabatico e potenziale geometrico

In Da Silva et al., 2017, troviamo una nota in relazione al “geometry-induced potential (GIP)”. “For more rigorous studies, see e.g. [7], [8], [9]; for studies allowing the confinement to vary along the constraint region, see e.g. [10], [11], in which case analogies with the Born–Oppenheimer approximation are an important tool [12].” Si vedano per cortesia i riferimenti dati in Da Silva et al., 2017. Tra quelli forniti consideriamo: Wachsmuth, J., & Teufel, S. (2010). Constrained quantum systems as an adiabatic problem, che è disponibile su <https://arxiv.org/pdf/1005.1849>

Si fornisce a Gemini il link: “il documento di *Spigler* (arXiv:1005.1849) ...” Occhio che Gemini, ogni tanto, confonde i nomi. Il documento è di Wachsmuth e Teufel.

Nel formalismo della quantizzazione vincolata, in particolare nell'approccio di da Costa basato su un potenziale di confinamento forte, si considera una particella inizialmente libera in uno spazio tridimensionale che viene forzata a muoversi su una superficie bidimensionale tramite un potenziale esterno molto intenso e localizzato attorno alla superficie. Il Potenziale di Confinamento Forte: Questo potenziale di confinamento è tale che ha un minimo molto stretto sulla superficie desiderata e cresce rapidamente allontanandosi da essa. L'idea è che, nel limite in cui questo potenziale diventa infinitamente forte, la particella è costretta a rimanere sulla superficie.

Separazione delle Scale di Energia e Moto: Quando il potenziale di confinamento è molto forte, si creano due scale di energia molto diverse: *Energia di confinamento*: Associata al moto nella direzione normale alla superficie (la direzione in cui il potenziale di confinamento è attivo). A causa della forte intensità del potenziale, le eccitazioni in questa direzione richiedono molta energia. I gradi di libertà associati a questo moto normale sono "congelati" o "adiabatically eliminated" per i moti a bassa energia. *Energia del moto sulla superficie*: Associata al moto nelle direzioni tangenziali alla superficie. A energie sufficientemente basse, la particella non ha energia sufficiente per eccitare i gradi di libertà normali e si muove essenzialmente sulla superficie.

Si aggiunge che nel documento arXiv di Wachsmuth e Teufel si propone l'analogia con l'approssimazione di Born-Oppenheimer. Dopo aver illustrato tale approssimazione Wachsmuth e

Teufel dicono: "A physically different but mathematically similar situation where such a dimensional reduction is possible are constrained mechanical systems. In these systems strong forces effectively constrain the system to remain in the vicinity of a submanifold C of the configuration space A . For classical Hamiltonian systems on a Riemannian manifold there is a straightforward mathematical reduction procedure" (Wachsmuth e Teufel).

Wachsmuth e Teufel "show that the leading order contribution to the effective Hamiltonian is the adiabatic potential given by an eigenvalue of the confining potential well-known in the context of adiabatic quantum wave guides". "In the context of adiabatic quantum waveguides, one considers the situation where the strong forces restricting the particle to the wave guide change their form along the direction of propagation" (Wachsmuth e Teufel). "... for the quantum mechanical case Marcus [7] and later on Jensen and Koppe [8] and da Costa [9] pointed out that the limiting quantum Hamiltonian contains a potential term, the geometric potential, that depends on the embedding of the submanifold C into the ambient space A . But these statements (like the more refined results by Froese-Herbst [1], Maraner [2] and Mitchell [3]) require that the constraining potential is the same at each point on the constraint manifold. The reason behind this assumption is that in the limit of strong confinement the adiabatic potential is much larger than the geometric potential. For the geometric potential to be of leading order one must thus assume that the tangential kinetic energy is of the same small order. Then one ends up in the situation where the energy in the transversal modes is much larger than the typical tangential energies and where, by assumption, any transfer of energy between transversal and tangential modes is suppressed. In conclusion, the effective Hamiltonian obtained in this way describes the constrained system only for very small energies and under very restrictive assumptions on the confining potential." (Wachsmuth e Teufel).

Nel contesto specifico del potenziale geometrico, questo accade se la forma e l'intensità del potenziale di confinamento sono uniformi in ogni punto della superficie. In tal caso, il potenziale adiabatico si traduce semplicemente in uno spostamento costante dell'energia totale della particella e non influenza la dinamica relativa sulla superficie. Il potenziale geometrico indotto, proporzionale a $(H^2 - K)$, emerge come una correzione all'Hamiltoniana efficace per il moto sulla superficie. Affinché questo potenziale geometrico sia significativo è necessario che l'energia cinetica associata al moto tangenziale sia dello stesso ordine (piccolo) dell'energia associata al potenziale geometrico.

Wachsmuth e Teufel sottolineano che, se il potenziale di confinamento non è costante sulla superficie, allora il potenziale adiabatico risultante per il moto sulla superficie non sarà costante. In questo scenario: Il potenziale adiabatico, che riflette la risposta del sistema al confinamento variabile, può diventare il termine dominante. Il potenziale geometrico indotto, derivato sotto l'assunzione di un confinamento uniforme (e quindi un potenziale adiabatico costante), potrebbe essere trascurabile rispetto alle variazioni del potenziale adiabatico dovute al confinamento non uniforme.

Il potenziale adiabatico, nel contesto del lavoro di Wachsmuth e Teufel, non è tanto un potenziale aggiuntivo che si somma all'Hamiltoniana efficace sulla sottovarietà, quanto piuttosto la base da cui emerge l'Hamiltoniana efficace stessa. La procedura adiabatica permette di separare i gradi di libertà veloci (il moto di confinamento) dai gradi di libertà lenti (il moto sulla sottovarietà). L'Hamiltoniana efficace per i gradi di libertà lenti include l'energia cinetica sul vincolo e i termini geometrici che derivano dalla "risposta" del sistema al vincolo stesso (e alla sua geometria).

Nel contesto dell'approssimazione di Born-Oppenheimer e della riduzione adiabatica per sistemi vincolati: 1) La funzione d'onda nella direzione normale si adatta "istantaneamente" alla posizione della particella sulla superficie (coordinata tangenziale). Per ogni punto sulla superficie, la particella ha una distribuzione di probabilità ben definita nella direzione normale, determinata dal potenziale di confinamento. 2) Nel noto tangenziale la particella si muove lungo la superficie "sentendo" un potenziale

efficace che include sia l'energia cinetica associata al moto sulla superficie curva (tramite l'operatore di Laplace-Beltrami) sia il potenziale geometrico indotto, che emerge proprio perché lo stato quantistico del moto normale deve adattarsi adiabaticamente alla geometria variabile della superficie mentre la particella si muove tangenzialmente.

Riferimenti

Anjos, E. V., Pavão, A. C., da Silva, L. C., & Bastos, C. C. (2024). Quantum mechanics of particles constrained to spiral curves with application to polyene chains. *Journal of Molecular Modeling*, 30(7), 237.

Atanasov, V., & Saxena, A. (2011). Electronic properties of corrugated graphene: the Heisenberg principle and wormhole geometry in the solid state. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23(17), 175301.

Da Costa, R. (1981). Quantum mechanics of a constrained particle. *Physical Review A*, 23(4), 1982.

Da Silva, L. C., Bastos, C. C., & Ribeiro, F. G. (2017). Quantum mechanics of a constrained particle and the problem of prescribed geometry-induced potential. *Annals of Physics*, 379, 13-33.

DeWitt, B. S. (1957). Dynamical theory in curved spaces. I. A review of the classical and quantum action principles. *Reviews of modern physics*, 29(3), 377.

Dray, T. (2014). *Differential forms and the geometry of general relativity*. CRC Press.

Haag, S., Lampart, J., & Teufel, S. (2015, November). Generalised quantum waveguides. In *Annales Henri Poincaré* (Vol. 16, pp. 2535-2568). Springer Basel.

Jensen, H., & Koppe, H. (1971). Quantum mechanics with constraints. *Annals of Physics*, 63(2), 586-591

Marcus, R. A. (1966). On the analytical mechanics of chemical reactions. *Quantum mechanics of linear collisions*. *The Journal of Chemical Physics*, 45(12), 4493-4499.

Reuter, M., Wolter, F. E., Shenton, M., & Niethammer, M. (2009). Laplace–Beltrami eigenvalues and topological features of eigenfunctions for statistical shape analysis. *Computer-Aided Design*, 41(10), 739-755.

Santos, F., Fumeron, S., Berche, B., & Moraes, F. (2016). Geometric effects in the electronic transport of deformed nanotubes. *Nanotechnology*, 27(13), 135302.

Sparavigna, A. C. (2021). *Metrica e Curvature di Gauss e Riemann*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4724602>

Wachsmuth, J., & Teufel, S. (2010). Constrained quantum systems as an adiabatic problem. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 82(2), 022112.