Derivate e q-derivate

Amelia Carolina Sparavigna

Department of Applied Science and Technology, Politecnico di Torino, Torino, Italy

Email: amelia.sparavigna@polito.it

Torino 14/01/2022

Abstract

Il testo propone alcuni esercizi su derivate e q-derivate. La q-derivazione, che appartiene al q-calcolo, diventa quella ordinaria al limite per il parametro q tendente a 1. Le appendici sono dedicate alle derivate ordinarie.

Keywords: **q-calculus.**

Subject Areas: **Calculus for Physics.**

Introduzione

In questo testo verranno forniti esempi di derivazione ordinaria e di q-derivata. Tale derivata si riduce a quella ordinaria quando il parametro q tende a 1.

Ricordiamo che il differenziale e la derivata sono definiti come segue:

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x) \quad ; \quad D f(x)=\frac{d f(x)}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Il *q-differenziale* è definito come: $\Delta_q f(x)=f(q x)-f(x)$

La *q-derivata* è: $$D_q f(x)=\frac{d_q f(x)}{dx}=\frac{f(q x)-f(x)}{(q-1)x}$$

Nel limite: $\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx} = Df(x)$.

Richiamiamo anche alcuni concetti utili del q-calcolo.

Il *numero intero* di tipo *q*, quindi il *q-numero* è per definizione:

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} \quad ; \quad [n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1)}{q-1} = q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1$$

Per q che tende a 1, $[n]$ tende a n intero.

Possiamo generalizzare per $\alpha \in \mathbb{C}$: $[\alpha] = \frac{q^\alpha - 1}{q-1}$. Inoltre: $[\infty] = \frac{1}{1-q}$

Ed infine, il *q-fattoriale* è definito come $[k]! = [1][2]\ldots[k]$.

Per il q-calcolo si vedano i riferimenti [1-6]. Gli esercizi sulle derivate sono ispirati da quelli proposti in [7].

Esercizio 1. Calcolare la derivata di $f(x) = x^2$ e la q-derivata.

$$\Delta f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$Df(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x$$

$$\Delta_q f(x) = (qx)^2 - x^2 = (q^2-1)x^2$$

$$D_q f(x) = \frac{(qx)^2 - x^2}{(q-1)x} = \frac{q^2-1}{q-1}x = \frac{(q-1)(q+1)}{q-1}x = (q+1)x$$

Al limite per *q* che tende a 1, si ha il risultato della derivazione ordinaria.

Esercizio 2. Calcolare la derivata di $f(x)=3x^2-2x$ e la q-derivata.

$$Df(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)^2-3x^2-2(x+\Delta x)+2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2-2\Delta x}{\Delta x}=6x-2$$

$$D_q f(x)=\frac{3(qx)^2-3x^2-2qx+2x}{(q-1)x}=\frac{3(q^2-1)x^2-2(q-1)x}{(q-1)x}$$

$$=\frac{3(q-1)(q+1)x^2-2(q-1)x}{(q-1)x}=\frac{3(q+1)x^2-2x}{x}=3(q+1)x-2$$

Al limite per *q* che tende a 1, si ha il risultato della derivazione ordinaria.

"*Il binomio di Newton è bello come la Venere di Milo, peccato che pochi se ne accorgano.*"

Fernando Pessoa

Binomio di Newton

Il binomio di Newton è utile per calcoli di alcune derivate. Tale binomio esprime lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi mediante la formula:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad ; \quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ è noto come coefficiente binomiale.

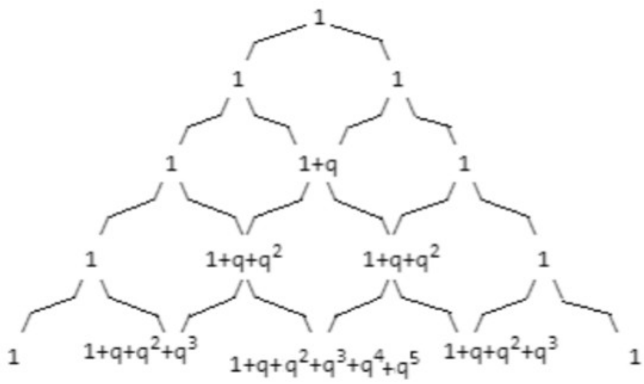
Esempi:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.$$

I coefficienti binomiali sono gli interi che si trovano nel triangolo di Tartaglia.

```
                                                        1       n=0
                                                    1       1       n=1
                                                1       2       1       n=2
                                            1       3       3       1       n=3
                                        1       4       6       4       1       n=4
                                    1       5       10      10      5       1       n=5
                                1       6       15      20      15      6       1       n=6
                            1       7       21      35      35      21      7       1       n=7
                        1       8       28      56      70      56      28      8       1       n=8
                    1       9       36      84      126     126     84      36      9       1       n=9
                1       10      45      120     210     252     210     120     45      10      1       n=10
            1       11      55      165     330     462     462     330     165     55      11      1       n=11
        1       12      66      220     495     792     924     792     495     220     66      12      1       n=12
    1       13      78      286     715     1287    1716    1716    1287    715     286     78      13      1       n=13
1       14      91      364     1001    2002    3003    3432    3003    2002    1001    364     91      14      1       n=14
k=0     k=1     k=2     k=3     k=4     k=5     k=6     k=7     k=8     k=9     k=10    k=11    k=12    k=13    k=14
```

Triangolo di Tartaglia o Triangolo ordinario Pascal



Nel q-calcolo compare il triangolo q-Pascal

Esercizio 3. Calcolare la derivata e la q-derivata di $f(x)=x^n$ dove n è un intero positivo.

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^2 - x^n}{\Delta x} = n x^{n-1}$$

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n] x^{n-1}$$

$$D_q x^n = [n] x^{n-1} \quad per \quad q \quad che \quad tende \quad a \quad 1, \; n x^{n-1}$$

Esercizio 4. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y=\frac{1}{x^2}$.

La derivata ordinaria è pari a:

$$: \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2)}{(x+\Delta x)^2 x^2 \Delta x} = -\frac{2}{x^3}$$

Quindi:

$$D y = -\frac{2}{x^3} \quad .$$

Passiamo alla q-derivata.

$$D_q y = \frac{\frac{1}{(q^2 x^2)}-\frac{1}{x^2}}{(q-1)x} = \frac{x^2-q^2 x^2}{q^2 x^4 (q-1) x} = -\frac{(q-1)(q+1)}{x^3 q^2 (q-1)} = -\frac{(q+1)}{q^2 x^3}$$

Al limite, le due derivate coincidono.

Esercizio 5. Calcolare la q-derivata di $f(u)$ rispetto ad x, dove $u(x)=\alpha x^\beta$, con α, β costanti.

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta} \cdot \frac{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(q^\beta u) - f(u)}{q^\beta u - u} \cdot \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} = D_{q^\beta} f(u) \cdot D_q u(x)$$

Esercizio 6. Verificare le seguenti proprietà:

$$D(f(x)g(x)) = f(x) D g(x) + g(x) D f(x)$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) D f(x) - f(x) D g(x)}{(g(x))^2}$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx) D_q g(x) + g(x) D_q f(x)$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x) D_q g(x) + g(qx) D_q f(x)$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) D_q f(x) - f(x) D_q g(x)}{g(x) g(qx)}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx) D_q f(x) - f(qx) D_q g(x)}{g(x) g(qx)}$$

Esercizio 7. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = x + x^2$.

$$D_q u(x) = D_q x + D_q x^2 = \frac{qx - x}{(q-1)x} + \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x}$$

$$D_q u(x) = 1 + x \frac{q^2 - 1}{q - 1} = 1 + x(q+1)$$

Esercizio 8. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = 1 + 2x + x^2$. Si ha: $D_q u(x) = 2 + x(q+1)$

Esercizio 9. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x)=\dfrac{a+b\,x}{c+d\,x}$. Verificare che al limite si ottiene la derivata ordinaria che è $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\,c-a\,d}{(c+d\,x)^2}$.

$$D_q u(x)=\left[\frac{a+b\,q\,x}{c+d\,q\,x}-\frac{a+b\,x}{c+d\,x}\right]\cdot\frac{1}{(q-1)\,x}$$

Dopo qualche passaggio:

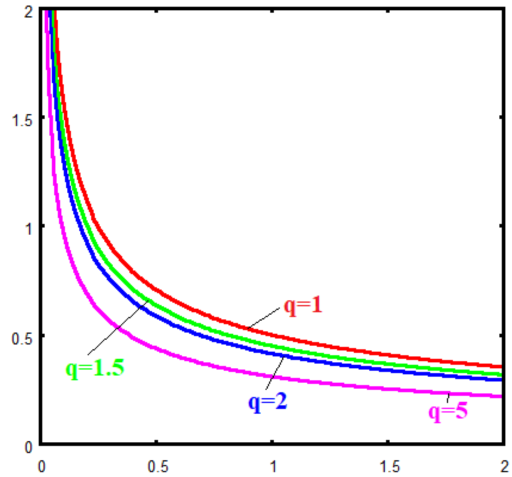
$$D_q u(x) = \left[\frac{b\,c\,x(q-1)-a\,d\,x(q-1)}{(c+d\,q\,x)(c+d\,x)}\right]\cdot\frac{1}{(q-1)\,x} = \frac{b\,c-a\,d}{(c+d\,q\,x)(c+d\,x)}$$

A limite per q che tende ad 1, ritroviamo la derivata ordinaria.

Esercizio 10. Calcolare $D_q\sqrt{x}$.

$$D_q\sqrt{x}=\frac{\sqrt{q\,x}-\sqrt{x}}{(q-1)\,x}=\frac{\sqrt{q\,x}-\sqrt{x}}{(q-1)\,x}\cdot\frac{\sqrt{q\,x}+\sqrt{x}}{\sqrt{q\,x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{q\,x}+\sqrt{x}}$$

Al limite per q che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $1/(2\sqrt{x})$.



Variazione di $D_q\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{q\,x}+\sqrt{x}}$ in funzione del parametro q .

Esercizio 11. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y=8x+\sqrt{x}$.

$$D\,y=8+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D_q y=\frac{8qx+\sqrt{qx}-8x-\sqrt{x}}{(q-1)x} = \frac{8(q-1)x}{(q-1)x} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{q}-1)}{(q-1)x}$$

$$= 8+\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{q}-1}{(\sqrt{q}-1)(\sqrt{q}+1)} = 8+\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{q}+1)}$$

Esercizio 12. Calcolare $D\,y$ e $D_q y$ di $y=\sqrt{1-x^2}$.

$$D\,y=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D_q y=\frac{\sqrt{1-q^2x^2}-\sqrt{1-x^2}}{(q-1)x} = \frac{(\sqrt{1-q^2x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-q^2x^2}+\sqrt{1-x^2})}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2x^2}+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= \frac{1-q^2x^2-1+x^2}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2x^2}+\sqrt{1-x^2})} = \frac{(1-q)(1+q)x^2}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2x^2}+\sqrt{1-x^2})}$$

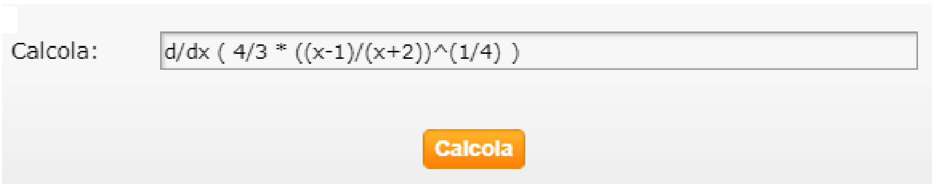
$$= -\frac{(1+q)x}{(\sqrt{1-q^2x^2}+\sqrt{1-x^2})}$$

Al limite, diventa la derivata ordinaria.

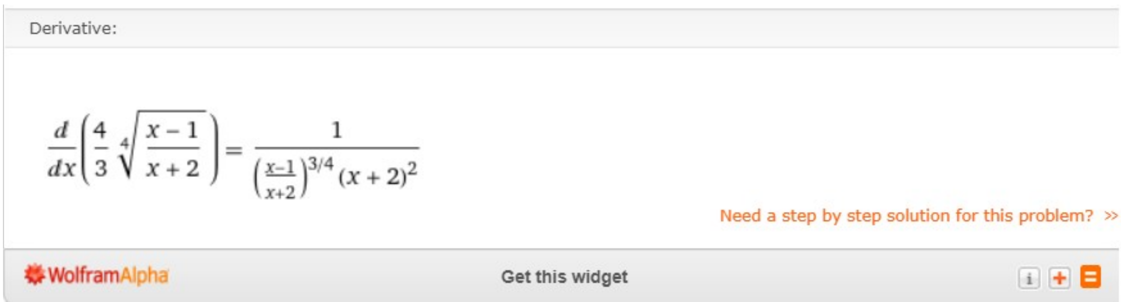
Esercizio 13. Calcolare la derivata di $y=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/4}$.

https://www.youmath.it/ym-tools-calcolatore-automatico/analisi-1/derivare-una-funzione.html

Ecco uno screenshot dal sito:



Si scrive come in Latex o simili open software.



$$D\,y=\frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3/4}(x+2)^2}=\frac{1}{\left((x-1)^3(x+2)^5\right)^{1/4}}$$

Passiamo alla q-derivata di $y=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/4}$.

$$D_q\,y=\frac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{qx-1}{qx+2}\right)^{1/4}-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/4}}{(q-1)x}=\frac{4}{3}\cdot\frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}-(x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}-(x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}}\cdot\frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}+(x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}+(x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2}-(x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}}\cdot\frac{1}{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}+(x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{(qx-1)(x+2)-(x-1)(qx+2)}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot$$

$$\frac{1}{[(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}+(x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}][(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2}+(x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}]}$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{3(q-1)x}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot$$

$$\frac{1}{[(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}+(x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}][(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2}+(x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}]}$$

Al limite per q che tende a 1:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{(x+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{1}{2[(x-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}]\cdot 2[(x-1)^{1/2}(x+2)^{1/2}]}$$

$$= \frac{1}{\left((x-1)^3(x+2)^5\right)^{1/4}}$$

Esercizio 14. Calcolare $D_q e^x$.

$$D_q e^x = \frac{e^{qx}-e^x}{(q-1)x}$$

Vediamo che al limite $q \to 1$ si ottiene il risultato ordinario.

$$\frac{e^{qx}-e^x}{(q-1)x} = e^x\frac{e^{x(q-1)}-1}{(q-1)x} = e^x\frac{x(q-1)+\frac{1}{2}x^2(q-1)^2+\dots}{(q-1)x} = e^x\left(1+\frac{1}{2}x(q-1)+\dots\right)$$

Al limite, abbiamo che il risultato della q-derivata diventa quello della derivata ordinaria. Infatti:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{qx} = 1 + \frac{qx}{1!} + \frac{q^2 x^2}{2!} + \frac{q^3 x^3}{3!} + \ldots + \frac{q^n x^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{qx} - e^x = (q-1)\,x + \frac{q^2-1}{2!}\,x^2 + \frac{q^3-1}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{q^n-1}{n!}\,x^n + \ldots$$

Per definizione: $[n] = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1)}{q-1} = q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1$

$$e^{qx} - e^x = (q-1)\,x + \frac{q^2-1}{2!}\,x^2 + \frac{q^3-1}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{q^n-1}{n!}\,x^n + \ldots$$

$$e^{qx} - e^x = (q-1)\left([1]x + \frac{[2]}{2!}\,x^2 + \frac{[3]}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{[n]}{n!}\,x^n + \ldots\right)$$

Quindi, precisamente:

$$\frac{e^{qx}-e^x}{(q-1)x} = [1] + \frac{[2]}{2!}\,x + \frac{[3]}{3!}\,x^2 + \ldots + \frac{[n]}{n!}\,x^{n-1} + \ldots$$

Al limite per q che tende a 1, $[n] \rightarrow n$, si ottiene e^x.

$$e^x = \lim_{q\rightarrow} \frac{e^{qx}-e^x}{(q-1)x} = \lim_{q\rightarrow 1}\left([1] + \frac{[2]}{2!}\,x + \frac{[3]}{3!}\,x^2 + \ldots + \frac{[n]}{n!}\,x^{n-1} + \ldots\right)$$

Come si vede, la derivata q dell'esponenziale non porta all'esponenziale.

I due q-esponenziali

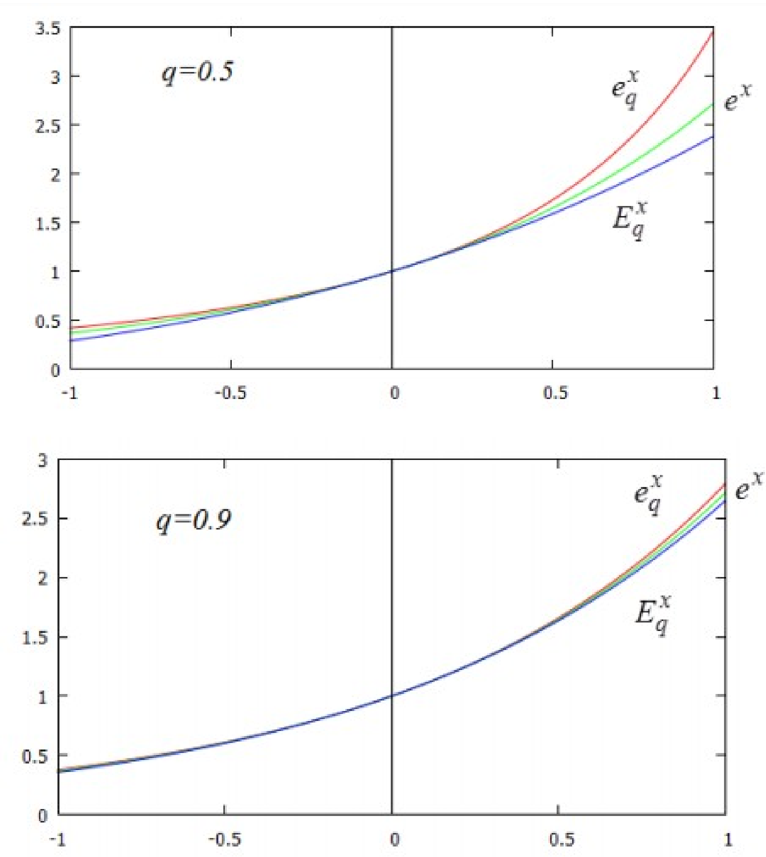
Riassumendo, la funzione esponenziale classica è data da: $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

L'analogo q dell'esponenziale è dato da:

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} \quad .$$

Possiamo usare anche un altro analogo, definito nel modo seguente.

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!}$$



Andamento di e_q^x , e^x , E_q^x per diversi valori di q.

La funzione esponenziale ordinaria rimane invariata sotto differenziazione ordinaria. Lo stesso vale per e_q^x con la q-derivata. Infatti:

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j] x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e_q^x$$

Passiamo ad E_q^x .

$$D_q E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{[j] x^{j-1}}{[j]!} =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-2)/2} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{q^j x^j}{[j]!} = E_q^{qx}$$

Quindi: $D_q e_q^x = e_q^x$, $D_q E_q^x = E_q^{qx}$.

Quanto vale $e_q^x e_q^y$? In generale $e_q^x e_q^y \neq e_q^{x+y}$. Altre proprietà sono:

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \quad ; \quad e_{1/q}^x = E_q^x \ .$$

Torniamo alle nostri calcoli, dove applichiamo la definizione di q-derivata e valutiamo il limite per q che tende a 1.

Esercizio 15. Calcolare $D_q a^x$.

$$D_q a^x = \frac{a^{qx} - a^x}{(q-1)x}$$

Al limite per *q* che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $a^x \ln a$.

Consideriamo la definizione della derivata ordinaria:

$$\frac{d\,a^x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \ .$$

Ricordiamo infatti: $a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \ldots$. Per $x = h$ si trova il lmite dato sopra.

Oppure scriviamo:

$$a^x=\left(e^{\ln a}\right)^x=e^{x\ln a} \quad ; \quad D e^{x\ln a}=e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$$

Torniamo alla q-derivata.

$$D_q a^x=\frac{a^{qx}-a^x}{(q-1)x}=a^x \frac{a^{qx-x}-1}{(q-1)x}=a^x \frac{a^{x(q-1)}-1}{(q-1)x}$$

Ricordiamo ancora una volta:

$$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2}{2!}\ln^2 a+\frac{x^3}{3!}\ln^3 a+\ldots$$

da cui

$$a^{x(q-1)}-1=x(q-1)\ln a+\frac{x^2(q-1)^2}{2!}\ln^2 a+\frac{x^3(q-1)^3}{3!}\ln^3 a+\ldots$$

Se prendiamo il limite di $x(q-1)$ che tende a zero, troviamo $a^x \ln a$.

Esercizio 16. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

La derivata ordinaria è pari a $\frac{df}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$.

$$D_q f(x)=\left[\frac{1+\sqrt{xq}}{1-\sqrt{xq}}-\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]\frac{1}{x(q-1)}=\frac{2\sqrt{x}(\sqrt{q}-1)}{(1-\sqrt{xq})(1-\sqrt{x})x(q-1)}$$

$$D_q f(x)=\frac{2}{(1-\sqrt{xq})(1-\sqrt{x})\sqrt{x}(\sqrt{q}+1)}$$

Nel limite per q che tende a 1, si trova il risultato con la derivata ordinaria.

Esercizio 17. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y=\frac{5}{x+1}$.

$$D\,y = -\frac{5}{(x+1)^2}$$

$$D_q\,y = \left(\frac{5}{qx+1} - \frac{5}{x+1}\right)\frac{1}{(q-1)x} = \frac{5x+5-5qx-5}{(qx+1)(x+1)(q-1)x}$$

$$= \quad -\frac{5}{(qx+1)(x+1)}$$

Esercizio 18. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

La derivata ordinaria è pari a $D f(x) = \frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

Calcoliamo la q-derivata.

$$D_q f(x) = \left(\frac{2}{2qx-1} - \frac{2}{2x-1}\right)\frac{1}{(q-1)x} - \left(\frac{1}{qx} - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{(q-1)x}$$

$$= \frac{2(2x-1)-2(2qx-1)}{(2qx-1)(2x-1)(q-1)x} - \frac{x-qx}{qx^2(q-1)x} = \frac{4x(1-q)}{(2qx-1)(2x-1)(q-1)x} + \frac{1}{qx^2}$$

$$= \frac{(2qx-1)(2x-1)-4qx^2}{qx^2(2qx-1)(2x-1)} = \frac{1-2x-2qx}{qx^2(2qx-1)(2x-1)}$$

Al limite per q che tende a 1 si ha la derivata ordinaria.

Esercizio 19. Calcolare derivata e q-derivata di $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

$$D\,y = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

$$D_q y = \frac{(qx)^5 - 4(qx)^3 + 2(qx) - 3 - x^5 + 4x^3 - 2x + 3}{(q-1)x}$$

$$= \frac{(q^5-1)x^5 - 4(q^3-1)x^3 + 2(q-1)x}{(q-1)x}$$

$$= \frac{(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)x^5 - 4(q-1)(q^2+q+1)x^3 + 2(q-1)x}{(q-1)x}$$

Si ricordi: $[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1)}{q-1} = q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1$, da cui:

$$D_q y = [5]x^4 - 4\cdot[3]x^3 + 2$$

Al limite per q che tende a 1: $5x^4 - 12x^2 + 2$.

Esercizio 20. Calcolare derivata e q-derivata di $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$.

La derivata ordinaria produce: $D\,y = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$.

$$D_q y = \frac{3(qx)^{2/3} - 2(qx)^{5/2} + (qx)^{-3} - 3x^{2/3} + 2x^{5/2} - x^{-3}}{(q-1)x}$$

$$= \frac{3(q^{2/3}-1)x^{2/3} - 2(q^{5/2}-1)x^{5/2} + (q^{-3}-1)x^{-3}}{(q-1)x}$$

$$= \frac{3(q^{1/3}-1)(q^{1/3}+1)x^{2/3}}{(q-1)x} - \frac{2(q^{1/2}-1)(q^{4/2}+q^{3/2}+q^{2/2}+q^{1/2}+1)x^{5/2}}{(q-1)x} + \frac{(q^{-3}-1)x^{-3}}{(q-1)x}$$

$$= \frac{3(q^{1/3}-1)(q^{1/3}+1)x^{2/3}}{(q^{1/3}-1)(q^{2/3}+q^{1/3}+1)x} - \frac{2(q^{1/2}-1)(q^{4/2}+q^{3/2}+q^{2/2}+q^{1/2}+1)x^{5/2}}{(q^{1/2}-1)(q^{1/2}+1)x}$$

$$+\quad \frac{\left(\left(\frac{1}{q}\right)^3-1\right)x^{-3}}{q\left(1-\frac{1}{q}\right)x} \;=\; \frac{3(q^{1/3}+1)x^{2/3}}{(q^{2/3}+q^{1/3}+1)x} \;-\; \frac{2(q^{4/2}+q^{3/2}+q^{2/2}+q^{1/2}+1)x^{5/2}}{(q^{1/2}+1)x}$$

$$-\;\frac{\left(\left(\frac{1}{q}\right)^2+\frac{1}{q}+1\right)x^{-3}}{q\,x}$$

Al limite per q che tende a 1: $2x^{-1/3}-5x^{3/2}-3x^{-4}$

Esercizio 21. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y=(8x-1)^4=(g(x))^4$

$$D\,y=4(g(x))^3\,D\,g(x)=32(8x-1)^3=32(8^3x^3-3\cdot 8^2x^2+3\cdot 8\,x-1)$$

$$D_q\,y=\frac{(8qx-1)^4-(8x-1)^4}{(q-1)x}$$

$$=\quad \frac{8^4q^4x^4-4\cdot 8^3q^3x^3+6\cdot 8^2q^2x^2-32\,q\,x+1-8^4x^4+4\cdot 8^3x^3-6\cdot 8^2x^2+32\,x-1}{(q-1)x}$$

$$=\quad \frac{8^4(q^4-1)x^4-4\cdot 8^3(q^3-1)x^3+6\cdot 8^2(q^2-1)x^2-32(q-1)x}{(q-1)x}$$

$$=\quad 8^4(q^3+q^2+q+1)x^3-4\cdot 8^3(q^2+q+1)x^2+6\cdot 8^2(q+1)x-32$$

Per q che tende a 1 :

$$4\cdot 8\cdot 8^3x^3-4\cdot 3\cdot 8\cdot 8^2x^2+3\cdot 4\cdot 8^2-32 \quad=\quad 32(8^3x^3-3\cdot 8^2x^2+3\cdot 8\,x-1)$$

Esercizio 22. Calcolare derivata e q-derivata di $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x-1}$.

www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x-1}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Need a step by step solution for this problem?

$$D\,y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$D_q\,y=\frac{\sqrt{q^2x^2+1}-\sqrt{qx-1}-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x-1}}{(q-1)x}$$

$$=\frac{\sqrt{q^2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{(q-1)x}-\frac{\sqrt{qx-1}-\sqrt{x-1}}{(q-1)x}$$

$$=\frac{q^2x^2+1-x^2-1}{(q-1)x(\sqrt{q^2x^2+1}+\sqrt{x^2+1})}-\frac{qx-1-x+1}{(q-1)x(\sqrt{qx-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\frac{(q+1)(q-1)x^2}{(q-1)x(\sqrt{q^2x^2+1}+\sqrt{x^2+1})}-\frac{(q-1)x}{(q-1)x(\sqrt{qx-1}+\sqrt{x-1})}$$

Al limite per q che tende a 1 si trova la derivata ordinaria.

Esercizio 23. Calcolare derivata e q-derivata di $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Si può usare: https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/ o semplicemente applicare la regola della derivata delle funzioni composte:

$$D\,y=-\frac{D(\sqrt{x^2+1})}{x^2+1}=-\frac{2\,x}{2(x^2+1)^{3/2}}$$

$$D\,y=-x(x^2+1)^{-3/2}$$

$$D_q\,y=\left(\frac{1}{\sqrt{q^2x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{(q-1)\,x}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{q^2x^2+1}}{(\sqrt{q^2x^2+1})(\sqrt{x^2+1})}\right)\frac{1}{(q-1)x}$$

$$=\left(\frac{x^2+1-q^2x^2-1}{(\sqrt{q^2x^2+1})(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{q^2x^2+1})}\right)\frac{1}{(q-1)x}$$

$$=-\left(\frac{x(1+q)}{(\sqrt{q^2x^2+1})(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{q^2x^2+1})}\right)$$

Al limite per q che tende a 1 diventa $-x(x^2+1)^{-3/2}$.

Alcune derivate dal libro di Boris Demidovic sono proposte in Appendice A, B e C.

La q-derivata simmetrica

Tale derivata è definita come:

$$D_q^{\sim}f(x)=\frac{f(qx)-f(q^{-1}x)}{(q-q^{-1})x}$$

Esercizio 24. Calcolare la q-derivata simmetrica di x^2 .

$$D_q^{\sim}x^2=\frac{q^2x^2-q^{-2}x^2}{(q-q^{-1})x}=x\,\frac{q^4-1}{q^2q^{-1}(q^2-1)}=x\,\frac{q^2+1}{q}$$

Al limite per $q \to 1$ si ha la derivata ordinaria $2x$.

Si può introdurre l'intero q-simmetrico:

$$[n]^{\sim} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

Per esempio: $[2]^{\sim} = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}}$. Quindi $D_q^{\sim} x^2 = \frac{q^2 x^2 - q^{-2} x^2}{(q - q^{-1}) x} = [2]^{\sim} x$.

La q-derivata dei binomi

I polinomi binomiali ci servono per arrivare alla q-formula di Taylor.

La formula ordinaria è:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Cerchiamo dei polinomi $P_n(x)$ da usare invece dei polinomi $P_n = (x-a)^n$.

La proprietà richiesta è che si abbia $D_q P_n(x) = P_{n-1}(x)$, come nel caso ordinario si ha $D P_n(x) = P_{n-1}(x)$.

Iniziamo con $a = 0$. Sia $P_n(x) = x^n / [n]!$.

$$D_q P_n(x) = \frac{D_q x^n}{[n]!} = \frac{[n] x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x)$$

Supponiamo ora di considerare i polinomi nel caso $a \neq 0$. Partiamo da $P_o(1) = 1$. Sia $P_1(x)$ tale che $D_q P_1(x) = 1$ e $P_1(a) = 0$. Allora $P_1(x) = x - a$.

Cerchiamo $P_2(x)$, con $D_q P_2(x) = P_1(x)$, $P_2(a) = 0$. Poniamo:

$$P_2(x)=\frac{x^2}{[2]}-a\,x-\frac{a^2}{[2]}+a^2$$

$$D_q P_2(x)=\left\{\frac{q^2x^2}{[2]}-a\,q\,x-\frac{a^2}{[2]}+a^2-\frac{x^2}{[2]}+a\,x+\frac{a^2}{[2]}-a^2\right\}\frac{1}{x(q-1)}\quad=$$

$$\left\{\frac{x^2(q^2-1)}{[2]}-a\,x(q-1)\right\}\frac{1}{x(q-1)}=\frac{x(q+1)}{[2]}-a=\frac{x(q+1)(q-1)}{(q^2-1)}-a=x-a$$

Abbiamo quindi i seguenti polinomi:

$$P_2(x)=\frac{(x-a)(x-q\,a)}{[2]!}\quad,\quad P_2(x)=\frac{(x-a)(x-q\,a)(x-q^2\,a)}{[3]!}\quad,\dots,$$

$$P_n(x)=\frac{(x-a)(x-q\,a)(x-q^2\,a)\dots(x-q^{n-1}a)}{[n]!}=(x-a)_q^n$$

Questi sono i polinomi che diventano $P_n(x)=x^n/[n]!$ quando $a=0$.

L'analogo di $(x-a)^n$ sono quindi i polinomi $(x-a)_q^n$.

Questi polinomi generalizzano il binomio e sono noti come q-binomio.

$$(x-a)_q^n=(x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a)$$

Esempio: $(x-a)_q^3=(x-a)(x-qa)(x-q^2a)$

Si ha inoltre che: $D_q(x-a)_q^n=[n](x-a)_q^{n-1}$ (*), e questo si può dimostrare per induzione e con la regola della derivazione del prodotto di funzioni.

Dalla definizione: $(x-a)_q^{k+1}=(x-a)_q^k(x-q^k a)$. Derivo con una regola vista all'inizio:

$$D_q(f(x)g(x))=f(x)D_q g(x)+g(qx)D_q f(x)$$

$$D_q(x-a)_q^{k+1}=(x-a)_q^k D_q(x-q^k a)+(qx-q^k a)D_q(x-a)_q^k =$$
$$(x-a)_q^k+q(x-q^{k-1}a)D_q(x-a)_q^k$$

Usando la regola (*):

$$(x-a)_q^k+q(x-q^{k-1}a)[k](x-a)_q^{k-1} =$$
$$(1+q[k])(x-a)_q^k=[k+1](x-a)_q^k$$

Si noti che: $1+q[k]=1+q\frac{q^k-1}{q-1}=\frac{q^{k+1}-1}{q-1}=[k+1]$.

Proprietà dei polinomi

Abbiamo quindi che $D_q P_n=P_{n-1}$. Vediamo ora alcune altre proprietà.

Consideriamo $(x-a)_q^{m+n}$ e vediamo quanto vale. In generale abbiamo che $(x-a)_q^{m+n}\neq(x-a)_q^m\ (x-a)_q^n$. Vale invece:

$$(x-a)_q^{m+n}=(x-a)(x-qa)...(x-q^{m-1}a)(x-q^m a)(x-q^{m+1}a)...(x-q^{m+n-1}a)$$

$$= (x-a)_q^m\ (x-q^m a)(x-q^{m+1}a)...(x-q^{m+n-1}a)=(x-a)_q^m\ (x-q^m a)_q^n$$

$$(x-a)_q^{m+n}=(x-a)_q^m\ (x-q^m a)_q^n$$

Esempio: $(x-a)_q^5=(x-a)_q^4\ (x-q^4 a)_q^1=(x-a)_q^3\ (x-q^3 a)_q^2$

Poniamo m come $-n$, abbiamo:

$$(x-a)_q^{-n+n}=1=(x-a)_q^{-n}\ (x-q^{-n}a)_q^n$$

Quindi:

$$(x-a)_q^{-n}=\frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \qquad (*)$$

Vediamo se questa espressione è appropriata per il calcolo. Partiamo nuovamente da $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m\ (x-q^m a)_q^n$ e cambiamo m in $-m'$. Si trova:

$$(x-a)_q^m\ (x-q^m a)_q^n = (x-a)_q^{-m'}\ (x-q^{-m'}a)_q^n=\frac{(x-q^{-m'}a)_q^n}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}}$$

Ad esempio, se $m'=3$ ed $n=3$, il risultato è 1.

Sia $m=-m'<0$ e $n=-n'<0$. Calcoliamo $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m\ (x-q^m a)_q^n$:

$$(x-a)_q^m\ (x-q^m a)_q^n = (x-a)_q^{-m'}\ (x-q^{-m'}a)_q^{-n'} =$$

$$\frac{1}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}\ (x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}} = \frac{1}{(x-a^{-n'-m'}a)_q^{n'}\ (x-q^{n'}(q^{-n'-m'}a))_q^{m'}} =$$

$$\frac{1}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'+m'}} = (x-a)_q^{-m'-n'}=(x-a)_q^{m+n}$$

La (*) è adeguata al calcolo.

Le q-derivate da ricordare

Si possono verificare le seguenti derivate importanti per i calcoli successivi.

Siano $n \in \mathbb{Z}$, $a,b,t \in \mathbb{C}$.

$$D_q (x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1} \qquad ; \qquad D_q (a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}$$

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n](x-q^n a)_q^{-n-1} \qquad ; \qquad D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}$$

$$D_q (ax+b)_q^n = a[n](ax+b)_q^{n-1} \qquad ; \qquad D_q (a+bx)_q^n = b[n](a+bqx)_q^{n-1}$$

$$D_q (1+bx)_q^t = b[t](1+bqx)_q^{t-1}$$

L'analogo per il logaritmo

Per l'analogo del logaritmo nel q-calcolo, si veda "Leonhard Euler and a q-analogue of the logarithm", di Erik Koelink, Walter Van Assche. Abstract: We study a q-logarithm which was introduced by Euler and give some of its properties. This q-logarithm did not get much attention in the recent literature. We derive basic properties, some of which were already given by Euler in a 1751-paper and 1734-letter to Daniel Bernoulli. The corresponding q-analogue of the dilogarithm is introduced. The relation to the values at 1 and 2 of a q-analogue of the zeta function is given. We briefly describe some other q-logarithms that have appeared in the recent literature. - Subjects: Classical Analysis and ODEs (math.CA); History and Overview (math.HO), Journal reference: Proc AMS 137 (2009), no. 5, 1663-1676, DOI: 10.1090/S0002-9939-08-09374-X – Available arXiv:0709.1788 [math.CA]

Appendici

L'uso di software per il calcolo

In rete si trovano diversi software on-line che offrono il calcolo della derivata. Se lo scopo dell'esercizio è quello di apprendere il calcolo e la teoria relativa, è bene prima risolvere l'esercizio, seguendo le indicazioni ad esempio di [7], e poi, proprio in caso estremo, ricorrere alla soluzione on-line. Si è usato in precedenza, in alcuni problemi, il software WolframAlpha, al link www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp . Se si usano altri software, si raccomanda ulteriore verifica con WolframAlpha, per vedere se si è scritto bene l'input della funzione con la notazione corretta.

Torniamo ora all'esercizio 23, per mostrare altri software. L'esercizio chiedeva di calcolare derivata di $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Usiamo

https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/

Ecco lo screenshot del risultato.

1 $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

2 $f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}^2}$

3 $f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$

4 $f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$

5 $f'(x) = \frac{-x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$

6 $f'(x) = -x\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$

La grafica è molto bella, come una bella scrittura a mano. Attenzione però, che questo software può avere problemi di formattazione con gli esponenti. Ne parliamo di seguito, nella discussione delle derivate logaritmiche.

Altro software on-line si trova al link https://www.derivative-calculator.net, che propone tutti i passaggi del calcolo, con le regole applicate. "Derivative Calculator - Calculate derivatives online — with steps and graphing!".

Ecco lo screenshot.

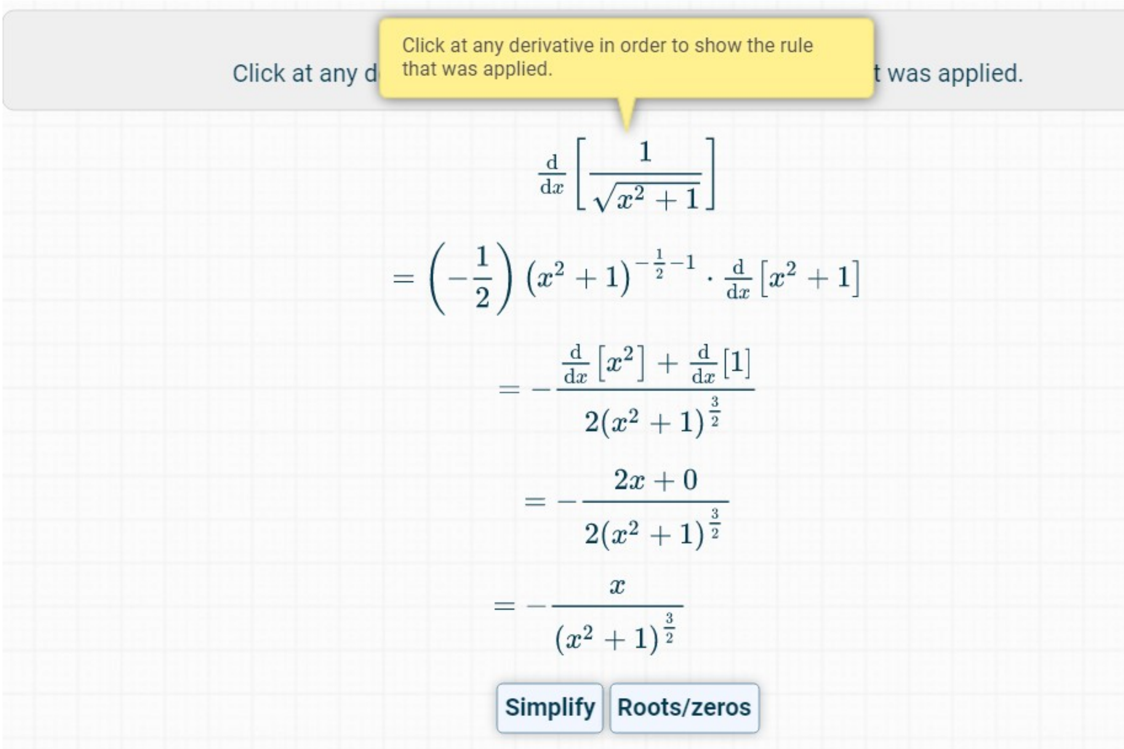
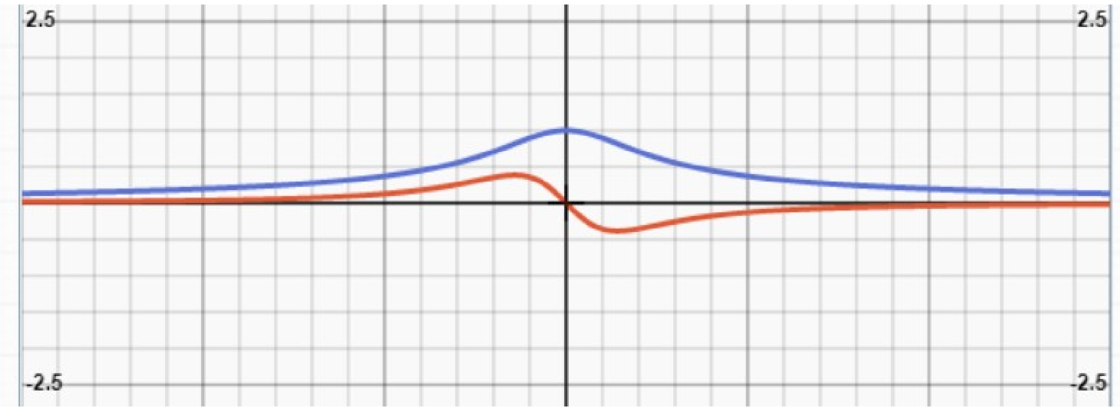


Grafico di funzione e derivata.



Rapporti incrementali

Usando la definizione, si calcolano i rapporti incrementali.

1. Si calcoli il rapporto incrementale di $y=\frac{x^2+2}{x-3}$ per $x_o=2$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{(x_o+h)^2+2}{x_o+h-3}-\frac{x_o^2+2}{x_o-3}}{h} = \frac{\frac{(2+h)^2+2}{2+h-3}-\frac{2^2+2}{2-3}}{h}$$

$$= \frac{\frac{4+4h+h^2+2}{h-1}+6}{h} = \frac{6+4h+h^2+6(h-1)}{(h-1)h} = \frac{h^2+10h}{(h-1)h} = \frac{h+10}{h-1}$$

2. Si calcoli il rapporto incrementale di $y=\frac{2}{3x+2}$ per $x_o=-1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{3(x_o+h)+2}-\frac{2}{3x_o+2}}{h} = \frac{\frac{2}{-3+3h+2}-\frac{2}{-3+2}}{h} = \frac{\frac{2}{3h-1}+2}{h}$$

$$= \frac{2+2(3h-1)}{h(3h-1)} = \frac{6}{(3h-1)}$$

3. Si calcoli il rapporto incrementale di $y=\frac{2}{\ln(1+x)}$ per $x_o=1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{\ln(1+x_o+h)}-\frac{2}{\ln(1+x_o)}}{h} = \frac{\frac{2}{\ln(2+h)}-\frac{2}{\ln(2)}}{h} = \frac{2}{h}\cdot\frac{\ln 2-\ln(2+h)}{\ln 2\cdot\ln(2+h)}$$

4. Con rapporto incrementale e limite si calcoli la derivata di $\ln(1+x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln(x+h+1)-\ln(x+1)}{h} = \frac{\ln\frac{x+h+1}{x+1}}{h} = \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x+1}\right)}{h}$$

Eseguiamo la sostituzione $t=\frac{h}{1+x}$. Per t che tende a zero, anche h tende a zero.

$$\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x+1}\right)}{h} = \frac{\ln(1+t)}{t(1+x)} = \lim_{ht\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t(1+x)} = \frac{1}{1+x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{1+x}$$

Derivate funzioni composte

In generale, $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ quindi: $y=f[\varphi(x)]$, $D\,y=D_u y\cdot D_x u$

1 - Calcolare $D\,y$ di $y=(x^2+2x+3)^5$.

$y=u^5$, $u=x^2+2x+3$

$D\,y=D_u u^5\cdot D_x(x^2+2x+3)=5u^4\cdot(2x+2)=10\cdot(x^2+2x+3)^4\cdot(x+1)$

2 - Calcolare $D\,y$ di $y=\sin^3 4x$.

$y=u^3$, $u=\sin v$, $v=4x$. Si calcola: $D\,y=D_u y\cdot D_v u\cdot D_x v$

$D\,y=3u^2\cdot\cos v\cdot 4=3\sin^2 4x\cdot\cos 4x\cdot 4=12\cdot\sin^2 4x\cdot\cos 4x$

3 - Calcolare $D\,y$ di $y=(3-2\sin x)^5$.

$y=u^5$, $u=(3-2\sin x)$. Si calcola: $D\,y=D_u y\cdot D_x u$

$D\,y=5u^4\cdot(-2\cos x)=5\cdot(3-2\sin x)^4\cdot(-2\cos x)$

4 - Calcolare $D\,y$ di $y=(1+3x-5x^2)^{30}$

$y=u^{30}$, $u=1+3x-5x^2$

$$D\,y = D_u u^{30} \cdot D_x(1+3x-5x^2) = 30u^{29} \cdot (3-10x) = 30 \cdot (1+3x-5x^2)^{29} \cdot (3-10x)$$

5 - Calcolare $D\,y$ di $y=\sqrt{1-x^2}$.

$u=(1-x^2)$, $y=\sqrt{u}$

$$D\,y = D_u \sqrt{u} \cdot D_x(1-x^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\right)^{1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

6 - Calcolare $D\,y$ di $y=\frac{3}{56\cdot(2x-1)^7}-\frac{1}{24\cdot(2x-1)^6}-\frac{1}{40\cdot(2x-1)^5}$.

$u=(2x-1)$

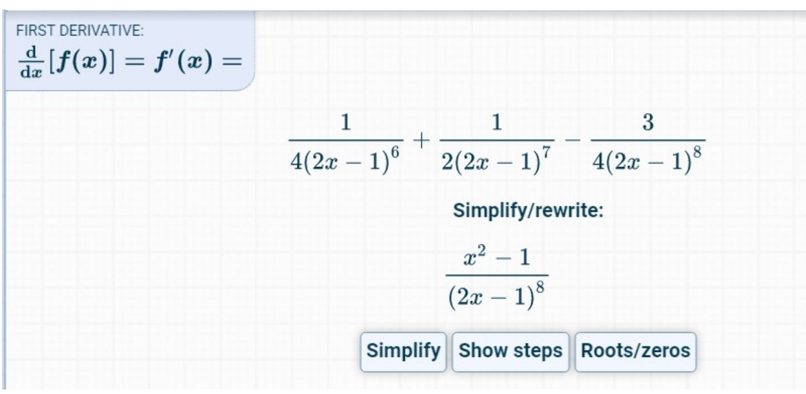
$$D\,y = \frac{3\cdot(-7)\cdot 2}{56\cdot(2x-1)^8}+\frac{6\cdot 2}{24\cdot(2x-1)^7}+\frac{5\cdot 2}{40\cdot(2x-1)^5}$$

$$= -\frac{42}{56\cdot(2x-1)^8}+\frac{1}{2\cdot(2x-1)^7}+\frac{1}{4\cdot(2x-1)^6}$$

$$= \frac{-42/56+(2x-1)/2+(2x-1)^2/4}{(2x-1)^8} = \frac{-3/4+x-1/2+x^2-x+1/4}{(2x-1)^8}$$

$$= \frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$$

Verifica con https://www.derivative-calculator.net



7 - Calcolare Dy di $y=\log_{10}\sin x$.

$y=\log_{10}u$, $u=\sin x$. Quindi: $D\,y=\frac{\log_{10}e}{u}\cdot D\,u=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\log_{10}e=\text{cotg}(x)\cdot\log_{10}e$

Ricordiamo che $D\log_e x=D\ln x=1/x$ e che $D\log_a x=1/(x\log_e a)=(\log_a e)/x$.

Infatti:

$$D(\log_a(x))=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x}{x}-\frac{h}{x}\right)}{h}=\frac{\log_a\left(1-\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{z\to 0}\frac{\log_a(1-z)}{zx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

dove è usato uno dei limiti notevoli del logaritmo, che sono i seguenti.

1. Limite notevole del logaritmo naturale

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{f(x)\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$$

2. Limite notevole della funzione logaritmica con base arbitraria

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln(a)} \quad ; \quad \lim_{f(x)\to 0}\frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)}=\frac{1}{\ln(a)}$$

con $a>0,\ a\neq 1$

Ricordiamo che se il limite $\lim_{x\to 0}f(x)$ esiste ed è positivo, allora si ha che:

$$\lim_{x\to 0}[\ln f(x)]=\ln[\lim_{x\to 0}f(x)]$$

Dimostriamo che $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1$$

Ricordiamo infine anche la definizione del numero di Nepero: $e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Derivate logaritmiche

Definizione: $y=f(x)$, $D(\ln y)=\frac{D\,y}{y}=\frac{D f(x)}{f(x)}\to D f(x)=f(x)\frac{D\,y}{y}=f(x)D\ln y$

Esempio: $y=(\sin x)^x$, $D\,y=(\sin x)^x D\ln y$. Quindi:

$$D\,y=(\sin x)^x D(x\ln\sin x)=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{cotg}(x))$$

Esempio: $y=u^v$ *dove* $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$. Quindi:

$$\ln y=\ln(u^v)=v\ln u \quad , \quad D(\ln y)=D v\cdot\ln u+v\cdot D(\ln u)$$

$$\frac{D\,y}{y}=Dv\cdot\ln u+v\cdot\frac{D u}{u} \quad \text{da cui} \quad D\,y=y\left[Dv\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D u\right] .$$

1 - Calcolare Dy se $y=(\cos x)^x$.

$$\ln y=\ln[(\cos x)^x]=x\ln\sin x \quad , \quad v=x \quad , \quad u=\cos x \quad .$$

$$D\,y=y\left[Dv\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D u\right]=(x\cos)^x[\ln\cos x-x\operatorname{tg}x]$$

Oppure direttamente: , $D\,y=(\cos x)^x D\ln y$. Da cui si ha:

$$D\,y=(\cos x)^x D(x\ln\cos x)=(\cos x)^x(\ln\cos x-x\operatorname{tg}(x))$$

2 - Calcolare Dy se $y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

$$D\,y=y\,D\ln y=y\cdot D\left[\frac{1}{2}\left(\ln x+\ln(x-1)-\ln(x-2)\right)\right]=\frac{y}{2}\cdot\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right]$$

$$D\,y=\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$$

3 - Calcolare Dy se $y=x^{\sqrt{x}}$.

$$\ln y=\ln[x^{\sqrt{x}}]=\sqrt{x}\cdot\ln x \quad , \quad v=\sqrt{x} \quad , \quad u=x \quad , \quad D\,y=y\left[D\,v\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D\,u\right]$$

$$D\,y=x^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln u+\frac{\sqrt{x}}{x}\right]=x^{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{x}\left[1+\frac{1}{2}\ln x\right]=x^{\sqrt{x}-1/2}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\ln x\right]$$

4 - Calcolare Dy se $y=x^x$.

$$\ln y=\ln[x^x]=x\cdot\ln x \quad , \quad v=x \quad , \quad u=x \quad .$$

$$D\,y=x^x\left[Dv\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D\,u\right]=x^x[\ln x+1]$$

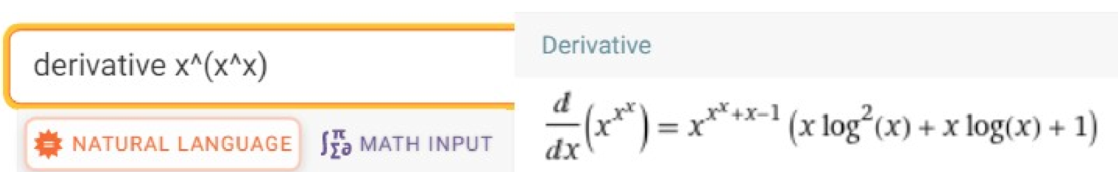
5 - Calcolare Dy se $y=x^{x^2}$. Si ha $v=x^2$, $u=x$.

$$D\,y=x^{x^2}\left[Dv\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D\,u\right]=x^{x^2}\left[2\,x\ln x+\frac{x^2}{x}\right]=x^{x^2}[2\,x\ln x+x]=x^{x^2+1}[2\ln x+1]$$

6 - Calcolare Dy se $y=x^{x^x}$. Si ha $v=x^x$, $u=x$.

$$D\,y=x^{x^x}\left[Dv\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D\,u\right]=x^{x^x}\left[x^x[\ln x+1]\cdot\ln x+\frac{x^x}{x}\right]=x^{x^x}x^x\left[\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right]$$

Da https://www.wolframalpha.com/input/



Attenzione ad interpretare bene la scrittura. x^x è ad esponente di x .

Quindi x^{x^x} non è uguale a $(x^x)^x$. Facciamo un esempio numerico:

$3^{(3^3)}=3^{27}$, invece $(3^3)^3=3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3=3^9=3^{(3^2)}$.

In generale: $2^{(3^4)}=2^{81}$, invece $(2^3)^4=2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3=2^{3\cdot 4}=2^{12}$.

La potenza è un'operazione che associa a una coppia di numeri *a* e *n*, detti rispettivamente base ed esponente, il numero dato dal prodotto di *n* fattori uguali ad *a*:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

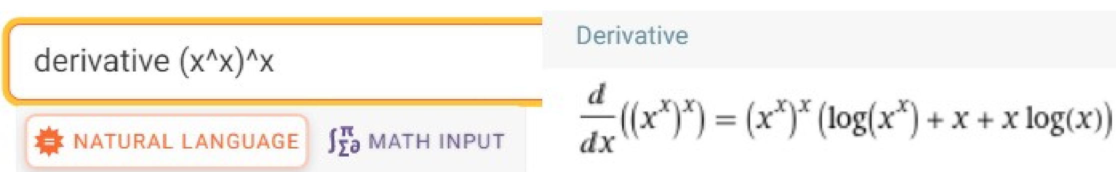
Proprietà:

1) Prodotto di potenze con la stessa base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) Quoziente di potenze con la stessa base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3) Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4) Prodotto di potenze con lo stesso esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5) Quoziente di potenze con lo stesso esponente	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

7 - Calcolare Dy se $y=(x^x)^x$. Si ha $v=x$, $u=x^x$.

$$D\,y=(x^x)^x\left[Dv \cdot \ln u+\frac{v}{u} \cdot D u\right]=(x^x)^x\left[\ln x^x+\frac{x}{x^x} x^x[\ln x+1]\right]=(x^x)^x\left[\ln x^x+x[\ln x+1]\right]$$

Da https://www.wolframalpha.com/input/



8 - Calcolare Dy se $y=x^{\sin x}$. Si ha $v=\sin x$, $u=x$.

$$D\,y=y\left[Dv\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D\,u\right]=x^{\sin x}\left[\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right]$$

9 – Al punto **4** si è calcolato Dy di $y=x^x$, nel seguente modo. Si è introdotto il logaritmo $\ln y=\ln[x^x]=x\cdot\ln x$, e le funzioni $v=x$, $u=x$, di modo che:

$$D\,y=x^x\left[Dv\cdot\ln u+\frac{v}{u}\cdot D\,u\right]=x^x[\ln x+1]$$

Il calcolo della derivata risulta praticamente immediato.
In rete si trovano metodi differenti. Si veda ad esempio
https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/5926-derivata-di-x-alla-x.html
La spiegazione fornita si basa sulla definizione: $x=e^{\ln x}$, quindi $x^x=e^{x\ln x}$.
I passaggi sono come quelli che si hanno con il calcolatore on-line:
https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/

1	$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^x)$
2	$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(e^{x\cdot\ln(x)}\right)$
3	$f'(x)=\frac{d}{dx}(x\cdot\ln(x))\cdot e^{x\cdot\ln(x)}$
4	$f'(x)=e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}(x)\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{d}{dx}(\ln(x))\right)$
5	$f'(x)=(\ln(x)+1)\cdot e^{x\cdot\ln(x)}$
6	$f'(x)=(\ln(x)+1)\cdot x^x$

10 – Calcolate in altro modo la derivata al punto **6**.
Si usi https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/ con la funzione

x^(x^x). Il software non scrive bene i passi 1, 7 ed 8. Ad esempio:

1	$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x \,\hat{}\, x)$
2	$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x)\cdot x^x}\right)$

(*)

Quindi ora si riscrivono:

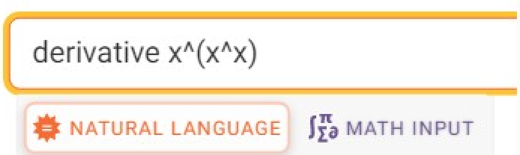
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{x^x})$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln(x)\cdot x^x}\right)$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x)\cdot x^x)\cdot e^{\ln(x)\cdot x^x}$$
$$f'(x) = e^{\ln(x)\cdot x^x}\cdot\left(\frac{d}{dx}(\ln(x))\cdot x^x + \ln(x)\cdot\frac{d}{dx}(x^x)\right)$$

$$f'(x) = e^{\ln(x)\cdot x^x}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot x^x + \ln(x)\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{x\cdot\ln(x)}\right)\right)$$
$$f'(x) = e^{\ln(x)\cdot x^x}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot x^x + \ln(x)\cdot\frac{d}{dx}(x\cdot\ln(x))\cdot e^{x\cdot\ln(x)}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = e^{\ln(x)\cdot x^x}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot x^x + \ln(x)\cdot e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left(\frac{d}{dx}(x)\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{d}{dx}(\ln(x))\right)\right)}$$

$$f'(x) = e^{\ln(x)\cdot x^x}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot x^x + \ln(x)\cdot(\ln(x)+1)\cdot e^{x\cdot\ln(x)}\right)$$
$$f'(x) = x^{x^x}\cdot\left(x^{-1}\cdot x^x + \ln(x)\cdot(\ln(x)+1)\cdot x^x\right)$$
$$f'(x) = x^{x^x}\cdot\left(x^{x-1} + \ln(x)\cdot(\ln(x)+1)\cdot x^x\right)$$

In alternativa, https://www.wolframalpha.com/input/



Derivative

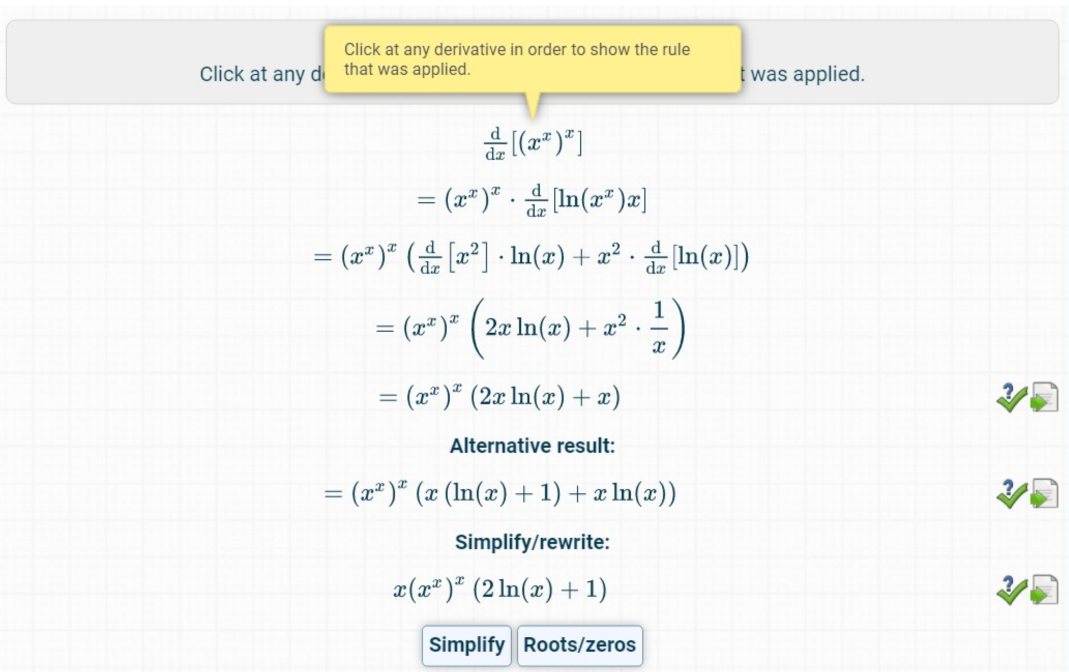
$$\frac{d}{dx}\left(x^{x^x}\right) = x^{x^x+x-1}\left(x\log^2(x) + x\log(x) + 1\right)$$

È palese che al punto 6 vi è l'approccio ottimale al calcolo, da cui:

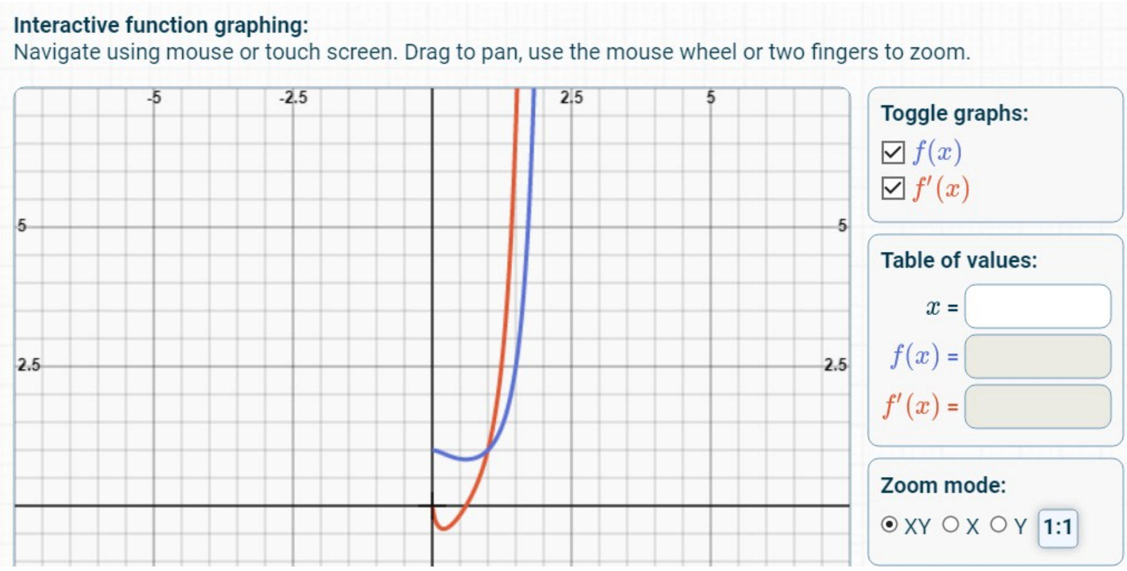
$$D x^{x^x} = x^{x^x}\left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot D u \right] = x^{x^x}\left[x^x [\ln x + 1] \cdot \ln x + \frac{x^x}{x} \right] = x^{x^x} x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$

Se si usa https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/ o altro calcolatore on-line, si verifichi sempre il risultato, ad esempio con https://www.wolframalpha.com/input/ che chiede sempre di risolvere le ambiguità di scrittura. Le ambiguità possono portare a risultati errati. Altro software on-line si trova al link https://www.derivative-calculator.net, che propone tutti i passaggi del calcolo, con le regole applicate. "Derivative Calculator - Calculate derivatives online — with steps and graphing!".

Un esempio, calcolare $D\, y = D\left((x^x)^x \right)$. Il risultato è il seguente:



Nella pagina seguente, lo screenshot del grafico della funzione e della sua derivata.



Altro esempio, il calcolo di $x^{x^x} = x^{(x^x)}$.

Click at any d

Click at any derivative in order to show the rule that was applied.

t was applied.

$$\frac{d}{dx}\left[x^{x^x}\right]$$

$$= x^{x^x} \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln(x)x^x\right]$$

$$= x^{x^x}\left(\frac{d}{dx}[x^x] \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)]\right)$$

$$= x^{x^x}\left(x^x \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)x] \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{x^x}\left(x^x\left(\frac{d}{dx}[x] \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx}[\ln(x)]\right)\ln(x) + x^{x-1}\right)$$

$$= x^{x^x}\left(x^x\left(1\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)\ln(x) + x^{x-1}\right)$$

$$= x^{x^x}\left(x^x \ln(x)\left(\ln(x)+1\right) + x^{x-1}\right)$$

Nella pagina seguente lo screenshot del grafico di funzione e derivata.

Formattazione

Si è accennato a possibili problemi di formattazione. Si usi
https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/
per calcolare $D\, y = D\left(\left(x^x\right)^x\right)$. Il risultato si vede nello screenshot seguente, da cui appare la formula (1) scritta come in (*) a pag. 35.

1 $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^x \,\hat{}\, x)$

2 $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(e^{\ln(x)\cdot x^2}\right)$

3 $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(\ln(x)\cdot x^2)\cdot e^{\ln(x)\cdot x^2}$

4 $f'(x) = e^{\ln(x)\cdot x^2}\cdot\left(\dfrac{d}{dx}(\ln(x))\cdot x^2 + \ln(x)\cdot\dfrac{d}{dx}\right.$

5 $f'(x) = e^{\ln(x)\cdot x^2}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot\ln(x)\right)$

6 $f'(x) = x^x \,\hat{}\, 2\cdot(x^2\cdot x^{-1} + 2\cdot x\cdot\ln(x))$

7 $f'(x) = x\cdot(2\cdot\ln(x)+1)\cdot x^x \,\hat{}\, 2$

Si deve leggere come $z = x \cdot (2\ln x + 1) x^{x^2} = x \cdot (2\ln x + 1)(x^x)^x$. Inoltre si noti: $(x^x)^x = x^{x^2}$.

Altre derivare logaritmiche

1 - Calcolare Dy se $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Si usi https://www.derivative-calculator.net

Ecco i primi passaggi:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\right]$$

$$= \left(\frac{1}{x}+1\right)^x \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)x\right]$$

$$= \left(\frac{1}{x}+1\right)^x \left(\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]\cdot x + \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot\frac{d}{dx}[x]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x}+1\right)^x \left(\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}+1\right]\cdot x + \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot 1\right)$$

Risultato è: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]$.

2 - Calcolare Dy se $y = (\cos x)^{\sin x}$. Si usi https://www.derivative-calculator.net

Ecco i primi passaggi

$$\frac{d}{dx}\left[\cos^{\sin(x)}(x)\right]$$

$$= \cos^{\sin(x)}(x)\cdot\frac{d}{dx}[\ln(\cos(x))\sin(x)]$$

$$= \cos^{\sin(x)}(x)\left(\frac{d}{dx}[\sin(x)]\cdot\ln(\cos(x)) + \sin(x)\cdot\frac{d}{dx}[\ln(\cos(x))]\right)$$

Risultato: $(\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln\cos x - \sin x \tan x)$

3 - Calcolare Dy se $y = (\arctan x)^x$. Si usi https://www.derivative-calculator.net

Ecco i primi passaggi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\arctan^{x}(x)\right]$$
$$= \arctan^{x}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln(\arctan(x))x\right]$$
$$= \arctan^{x}(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x] \cdot \ln(\arctan(x)) + x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln(\arctan(x))\right]\right)$$

Risultato: $(\arctan x)^{x} \cdot \left(\ln \arctan x + \frac{x}{(1+x^2)\arctan x} \right)$.

4 - Calcolare Dy se $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$. Si usi https://www.derivative-calculator.net

$$\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Note: Your input has been rewritten/simplified.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right]$$
$$= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\frac{5}{3}}\right] \cdot \sqrt[3]{x^2+1} - x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt[3]{x^2+1}\right]}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2}$$

E poi, dopo diversi passaggi, si arriva al risultato:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}\left(3x^2+5\right)}{3(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}$$

Calcoliamo adesso Dy di $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$, **in modo molto più veloce e sintetico**. Si noti che: $D \ln y = \frac{D\, y}{y}$ da cui: $D\, y = y \cdot D \ln y$.

$$\ln y = \ln\left[x\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1/3}\right] = \ln x + \frac{1}{3}\left(\ln x^2 - \ln(x^2+1)\right)$$

$$D\ln y = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{(x^2+1)}\right) = \frac{5(x^2+1)-2x^2}{3x(x^2+1)} = \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} \quad .$$

$$D\,y = x\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1/3}\cdot\left[\frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)}\right] = \frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1/3}$$

Quindi:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}\,(3x^2+5)}{3(x^2+1)^{\frac{4}{3}}}$$

Derivare esponenziali

1 - Calcolare Dy se $y = x^7\cdot e^x$. $D\,y = 7x^6\cdot e^x + x^7\cdot e^x = (7+x)\,x^6\cdot e^x$

2 - Calcolare Dy se $y = (x-1)\cdot e^x$. $D\,y = e^x + (x-1)\cdot e^x = x\,e^x$

3 - Calcolare Dy se $y = \frac{e^x}{x^2}$. $D\,y = -\frac{2}{x^3}e^x + \frac{1}{x}e^x = \frac{x-2}{x^3}e^x$

4 - Calcolare Dy se $y = \frac{x^5}{e^x}$. $D\,y = -\frac{5x^4}{e^x} - \frac{x^5\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{5x^4 - x^5}{e^x}$

5 - Calcolare Dy se $y = e^x\cdot\cos x$. $D\,y = e^x\cdot\cos x - e^x\cdot\sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

Calcoliamo la q-derivata di **1**.

$$D_q y = \frac{(qx)^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x}$$

$$\frac{(qx)^7 e^{qx} - x^7 e^{qx} + x^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x} = [7] x^6 e^{qx} + \frac{x^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x}$$

Ricordiamo che:

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = [1] + \frac{[2]}{2!} x + \frac{[3]}{3!} x^2 + \ldots + \frac{[n]}{n!} x^{n-1} + \ldots$$

Quindi: $D_q y = [7] x^6 e^{qx} + x^7 \left([1] + \frac{[2]}{2!} x + \frac{[3]}{3!} x^2 + \ldots + \frac{[n]}{n!} x^{n-1} + \ldots \right)$.

Derivate varie dal Rif.[7]

1 - Calcolare Dy se $y = \ln\ln(3-2x^3)$.

$$D\,y = \frac{1}{\ln(3-2x^3)} \cdot D\ln(3-2x^3) = \frac{6x^2}{(3-2x^3)} \cdot \frac{1}{\ln(3-2x^3)}$$

2 - Calcolare Dy se $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x})$.

$$D\,y = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

3 - Calcolare Dy se $y = (x+\sqrt{x})^{1/3}$. Uso $D\ln y = \frac{D\,y}{y}$ da cui: $D\,y = y \cdot D\ln y$.

$$D\,y = y \cdot D\ln y = y \cdot D\frac{1}{3}\ln(x+\sqrt{x}) = \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$D\,y = \frac{(x+\sqrt{x})^{1/3}}{3} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x})^{2/3}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$D\,y=\frac{1}{6}\cdot\frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)^{2/3}}$$

4 - Calcolare Dy se $y=x^5-4x^3+2x-3$. $D\,y=5x^4-12x^2+2$

5 - Calcolare Dy se $y=x^2\cdot\left(x^2\right)^{1/3}$. Semplifichiamo $y=x^{8/3}$. $D\,y=\frac{8}{3}x^{5/3}$

6 - Calcolare Dy se $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

Si usi https://www.derivative-calculator.net.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}\right]$$
$$=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin(x)+\cos(x)]\cdot(\sin(x)-\cos(x))-(\sin(x)+\cos(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin(x)-\cos(x)]}{(\sin(x)-\cos(x))^2}$$

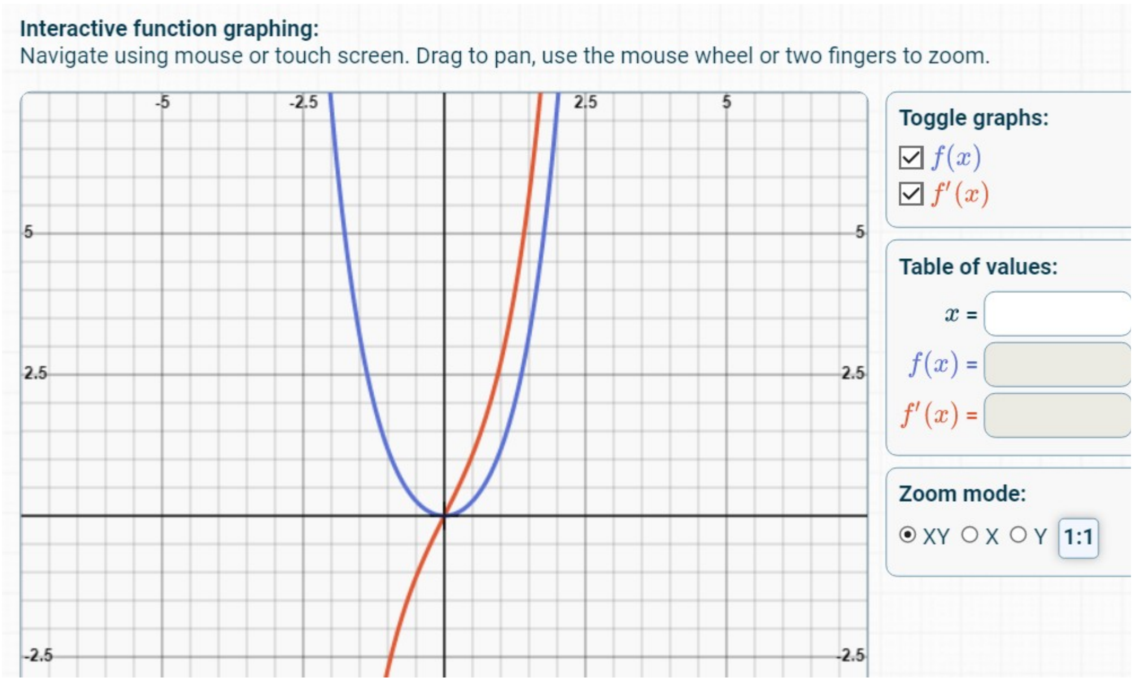
Dopo vari passaggi, si ha: $\frac{-2}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$.

7 - Calcolare Dy se $y=x\cdot\sinh x$.

Nuovamente, si usi https://www.derivative-calculator.net

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\sinh(x)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x]\cdot\sinh(x)+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sinh(x)$$
$$=1\sinh(x)+x\cosh(x)$$
$$=\sinh(x)+x\cosh(x)$$

Nella pagina seguente, i grafici.



8 - Calcolare Dy se $y=\frac{1}{15}\cos^3 x\cdot(3\cos^2-5)$.

Si calcoli la derivata della funzione semplificata:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\cos^5(x)}{5}-\frac{\cos^3(x)}{3}\right]$$

$$D\,y=-\cos^4 x\sin x+\cos^2 x\sin x=\cos^2(1-\sin^2 x)\sin x-\cos^2 x\sin x=\sin^3 x\cos^2 x$$

9 - Calcolare Dy se $y=\sin^2(x^3)$.

$$D\,y=2\sin(x^3)\cdot\cos(x^3)\cdot 3x^2=6x^2\sin(x^3)\cos(x^3)=3x^2\sin(2x^3)$$

References

[1] Jackson, F. H. (1908). On q-functions and a certain difference operator. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 46 (2): 253–281. doi:10.1017/S0080456800002751.

[2] Jackson, F. H. (1910). q-Definite Integrals. Quart. J. Math. 41, 163, 1910.

[3] Jackson, F. H. (1917). The q-Integral Analogous to Borel's Integral. Mess. Math. 47, 57-64, 1917.

[4] Kac, Victor; Cheung, Pokman (2002). Quantum calculus. Universitext. Springer-Verlag. ISBN 0-387-95341-8.

[5] Sparavigna, Amelia Carolina (2016). Graphs of q-exponentials and q-trigonometric functions. 2016. ⟨hal-01377262⟩

[6] Sparavigna, Amelia Carolina. (2021). Nozioni di q-calcolo nell'ambito del quantum calculus. Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.4982846

[7] Boris P. Demidovic (1975). Esercizi e problemi di analisi matematica. Editori Riuniti – Edizioni Mir, Mosca.