

Derivate e q-derivate

Original

Derivate e q-derivate / Sparavigna, A. C.. - ELETTRONICO. - (2022). [10.5281/zenodo.5851112]

Availability:

This version is available at: 11583/2950172 since: 2022-01-15T14:11:55Z

Publisher:

Published

DOI:10.5281/zenodo.5851112

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

Derivate e q-derivate

Amelia Carolina Sparavigna

Department of Applied Science and Technology, Politecnico di Torino, Torino, Italy

Email: amelia.sparavigna@polito.it

Torino 14/01/2022

Abstract

Il testo propone alcuni esercizi su derivate e q-derivate. La q-derivazione, che appartiene al q-calcolo, diventa quella ordinaria al limite per il parametro q tendente a 1. Le appendici sono dedicate alle derivate ordinarie.

Keywords: q-calculus.

Subject Areas: Calculus for Physics.

Introduzione

In questo testo verranno forniti esempi di derivazione ordinaria e di q-derivata. Tale derivata si riduce a quella ordinaria quando il parametro q tende a 1.

Ricordiamo che il differenziale e la derivata sono definiti come segue:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad ; \quad Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Il *q-differenziale* è definito come: $\Delta_q f(x) = f(qx) - f(x)$

La *q-derivata* è:

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{dx} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

Nel limite: $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx} = Df(x)$.

Richiamiamo anche alcuni concetti utili del q-calcolo.

Il *numero intero* di tipo q , quindi il q -numero è per definizione:

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} ; \quad [n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{(q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1)}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1$$

Per q che tende a 1, $[n]$ tende a n intero.

Possiamo generalizzare per $\alpha \in \mathbb{C}$: $[\alpha] = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}$. Inoltre: $[\infty] = \frac{1}{1 - q}$

Ed infine, il q -fattoriale è definito come $[k]! = [1][2] \dots [k]$.

Per il q-calcolo si vedano i riferimenti [1-6]. Gli esercizi sulle derivate sono ispirati da quelli proposti in [7].

Esercizio 1. Calcolare la derivata di $f(x) = x^2$ e la q-derivata.

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x$$

$$\Delta_q f(x) = (qx)^2 - x^2 = (q^2 - 1)x^2$$

$$D_q f(x) = \frac{(qx)^2 - x^2}{(q-1)x} = \frac{q^2 - 1}{q - 1} x = \frac{(q-1)(q+1)}{q-1} x = (q+1)x$$

Al limite per q che tende a 1, si ha il risultato della derivazione ordinaria.

Esercizio 2. Calcolare la derivata di $f(x) = 3x^2 - 2x$ e la q-derivata.

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 - 3x^2 - 2(x+\Delta x) + 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 6x - 2$$

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= \frac{3(qx)^2 - 3x^2 - 2qx + 2x}{(q-1)x} = \frac{3(q^2-1)x^2 - 2(q-1)x}{(q-1)x} \\ &= \frac{3(q-1)(q+1)x^2 - 2(q-1)x}{(q-1)x} = \frac{3(q+1)x^2 - 2x}{x} = 3(q+1)x - 2 \end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1, si ha il risultato della derivazione ordinaria.

“Il binomio di Newton è bello come la Venere di Milo, peccato che pochi se ne accorgano.”

Fernando Pessoa

Binomio di Newton

Il binomio di Newton è utile per calcoli di alcune derivate. Tale binomio esprime lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi mediante la formula:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k ; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ è noto come coefficiente binomiale.

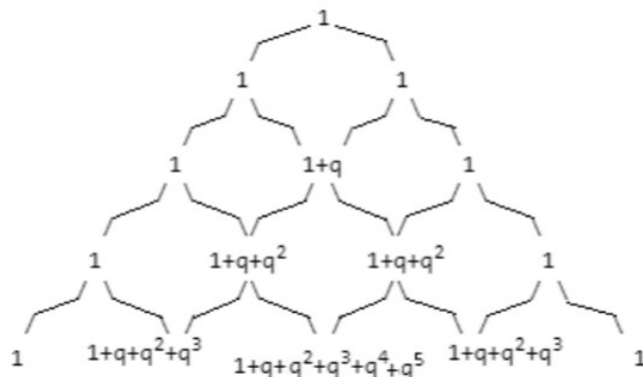
Esempi:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4. \end{aligned}$$

I coefficienti binomiali sono gli interi che si trovano nel triangolo di Tartaglia.

							1										n=0					
							1	1									n=1					
							1	2	1								n=2					
							1	3	3	1							n=3					
							1	4	6	4	1						n=4					
							1	5	10	10	5	1					n=5					
							1	6	15	20	15	6	1				n=6					
							1	7	21	35	35	21	7	1			n=7					
							1	8	28	56	70	56	28	8	1		n=8					
							1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	n=9					
							1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	n=10				
							1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	n=11			
							1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	n=12		
							1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	n=13	
							1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	n=14
							k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13	k=14	

Triangolo di Tartaglia o Triangolo ordinario Pascal



Nel q-calcolo compare il triangolo q-Pascal

Esercizio 3. Calcolare la derivata e la q-derivata di $f(x) = x^n$ dove n è un intero positivo.

$$Df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots + (\Delta x)^2 - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n] x^{n-1}$$

$$D_q x^n = [n] x^{n-1} \text{ per } q \text{ che tende a } 1, n x^{n-1}$$

Esercizio 4. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = \frac{1}{x^2}$.

La derivata ordinaria è pari a:

$$: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2)}{(x+\Delta x)^2 x^2 \Delta x} = -\frac{2}{x^3}$$

Quindi:

$$D y = -\frac{2}{x^3}.$$

Passiamo alla q-derivata.

$$D_q y = \frac{\frac{1}{(q^2 x^2)} - \frac{1}{x^2}}{(q-1)x} = \frac{x^2 - q^2 x^2}{q^2 x^4 (q-1)x} = -\frac{(q-1)(q+1)}{x^3 q^2 (q-1)} = -\frac{(q+1)}{q^2 x^3}$$

Al limite, le due derivate coincidono.

Esercizio 5. Calcolare la q-derivata di $f(u)$ rispetto ad x , dove $u(x) = \alpha x^\beta$, con α, β costanti.

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta} \cdot \frac{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}{(q-1)x}$$

$$D_q f(u(x)) = \frac{f(q^\beta u) - f(u)}{q^\beta u - u} \cdot \frac{u(qx) - u(x)}{(q-1)x} = D_{q^\beta} f(u) \cdot D_q u(x)$$

Esercizio 6. Verificare le seguenti proprietà:

$$D(f(x)g(x)) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{(g(x))^2}$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x)$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x)$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}$$

Esercizio 7. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = x + x^2$.

$$D_q u(x) = D_q x + D_q x^2 = \frac{qx - x}{(q-1)x} + \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x}$$

$$D_q u(x) = 1 + x \frac{q^2 - 1}{q-1} = 1 + x(q+1)$$

Esercizio 8. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = 1 + 2x + x^2$. Si ha: $D_q u(x) = 2 + x(q+1)$

Esercizio 9. Calcolare $D_q u(x)$ con $u(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$. Verificare che al limite si ottiene la derivata ordinaria che è $\frac{dy}{dx} = \frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$.

$$D_q u(x) = \left[\frac{a+bqx}{c+dqx} - \frac{a+bx}{c+dx} \right] \cdot \frac{1}{(q-1)x}$$

Dopo qualche passaggio:

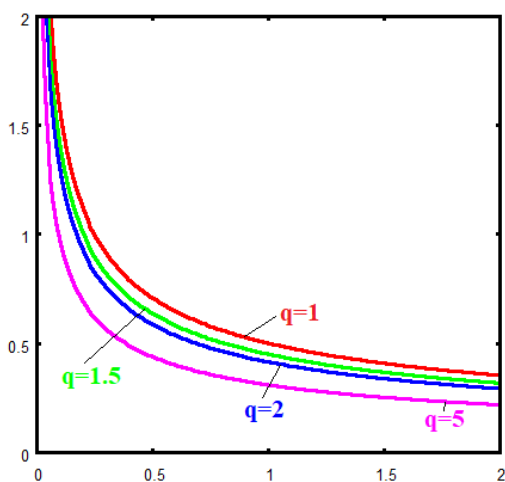
$$D_q u(x) = \left[\frac{bcx(q-1) - adx(q-1)}{(c+dqx)(c+dx)} \right] \cdot \frac{1}{(q-1)x} = \frac{bc-ad}{(c+dqx)(c+dx)}$$

A limite per q che tende ad 1, ritroviamo la derivata ordinaria.

Esercizio 10. Calcolare $D_q \sqrt{x}$.

$$D_q \sqrt{x} = \frac{\sqrt{qx} - \sqrt{x}}{(q-1)x} = \frac{\sqrt{qx} - \sqrt{x}}{(q-1)x} \cdot \frac{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}$$

Al limite per q che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $1/(2\sqrt{x})$.



Variatione di $D_q \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{qx} + \sqrt{x}}$ in funzione del parametro q .

Esercizio 11. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = 8x + \sqrt{x}$.

$$Dy = 8 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} D_q y &= \frac{8qx + \sqrt{qx} - 8x - \sqrt{x}}{(q-1)x} = \frac{8(q-1)x}{(q-1)x} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{q}-1)}{(q-1)x} \\ &= 8 + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{q}-1}{(\sqrt{q}-1)(\sqrt{q}+1)} = 8 + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{q}+1)} \end{aligned}$$

Esercizio 12. Calcolare Dy e $D_q y$ di $y = \sqrt{1-x^2}$.

$$Dy = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

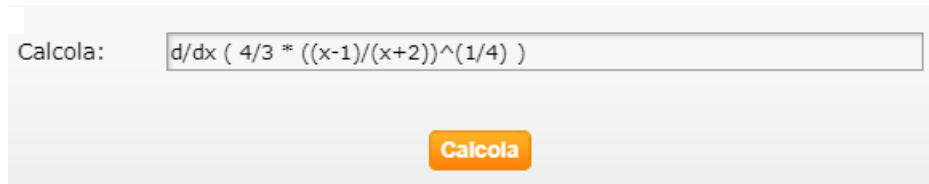
$$\begin{aligned} D_q y &= \frac{\sqrt{1-q^2 x^2} - \sqrt{1-x^2}}{(q-1)x} = \frac{(\sqrt{1-q^2 x^2} - \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-q^2 x^2} + \sqrt{1-x^2})}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2 x^2} + \sqrt{1-x^2})} \\ &= \frac{1-q^2 x^2 - 1 + x^2}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2 x^2} + \sqrt{1-x^2})} = \frac{(1-q)(1+q)x^2}{(q-1)x(\sqrt{1-q^2 x^2} + \sqrt{1-x^2})} \\ &= -\frac{(1+q)x}{(\sqrt{1-q^2 x^2} + \sqrt{1-x^2})} \end{aligned}$$

Al limite, diventa la derivata ordinaria.

Esercizio 13. Calcolare la derivata di $y = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{1/4}$.

<https://www.youmath.it/ym-tools-calcolatore-automatico/analisi-1/derivare-una-funzione.html>

Ecco uno screenshot dal sito:




Si scrive come in Latex o simili open software.

Derivative:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} \right) = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3/4} (x+2)^2}$$

[Need a step by step solution for this problem? >>](#)

WolframAlpha [Get this widget](#)   

$$Dy = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{3/4} (x+2)^2} = \frac{1}{((x-1)^3(x+2)^5)^{1/4}}$$

Passiamo alla q-derivata di $y = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/4}$.

$$D_q y = \frac{\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{qx-1}{qx+2}\right)^{1/4} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/4}}{(q-1)x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} - (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} - (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2} - (x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{1}{(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{(qx-1)(x+2) - (x-1)(qx+2)}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{1}{[(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}][(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2} + (x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}]} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{3(q-1)x}{(q-1)x(qx+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{1}{[(qx-1)^{1/4}(x+2)^{1/4} + (x-1)^{1/4}(qx+2)^{1/4}][(qx-1)^{1/2}(x+2)^{1/2} + (x-1)^{1/2}(qx+2)^{1/2}]}
\end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{(x+2)^{1/4}(x+2)^{1/4}} \cdot \frac{1}{2[(x-1)^{1/4}(x+2)^{1/4}] \cdot 2[(x-1)^{1/2}(x+2)^{1/2}]} \\
&= \frac{1}{((x-1)^3(x+2)^5)^{1/4}}
\end{aligned}$$

Esercizio 14. Calcolare $D_q e^x$.

$$D_q e^x = \frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x}$$

Vediamo che al limite $q \rightarrow 1$ si ottiene il risultato ordinario.

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = e^x \frac{e^{x(q-1)} - 1}{(q-1)x} = e^x \frac{x(q-1) + \frac{1}{2}x^2(q-1)^2 + \dots}{(q-1)x} = e^x \left(1 + \frac{1}{2}x(q-1) + \dots \right)$$

Al limite, abbiamo che il risultato della q-derivata diventa quello della derivata ordinaria.

Infatti:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{qx} = 1 + \frac{qx}{1!} + \frac{q^2 x^2}{2!} + \frac{q^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{q^n x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{qx} - e^x = (q-1)x + \frac{q^2-1}{2!}x^2 + \frac{q^3-1}{3!}x^3 + \dots + \frac{q^n-1}{n!}x^n + \dots$$

Per definizione: $[n] = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+\dots+1)}{q-1} = q^{n-1}+q^{n-2}+\dots+1$

$$e^{qx} - e^x = (q-1)x + \frac{q^2-1}{2!}x^2 + \frac{q^3-1}{3!}x^3 + \dots + \frac{q^n-1}{n!}x^n + \dots$$

$$e^{qx} - e^x = (q-1) \left([1]x + \frac{[2]}{2!}x^2 + \frac{[3]}{3!}x^3 + \dots + \frac{[n]}{n!}x^n + \dots \right)$$

Quindi, precisamente:

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = [1] + \frac{[2]}{2!}x + \frac{[3]}{3!}x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!}x^{n-1} + \dots$$

Al limite per q che tende a 1, $[n] \rightarrow n$, si ottiene e^x .

$$e^x = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = \lim_{q \rightarrow 1} \left([1] + \frac{[2]}{2!}x + \frac{[3]}{3!}x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!}x^{n-1} + \dots \right)$$

Come si vede, la derivata q dell'esponenziale non porta all'esponenziale.

I due q-esponenziali

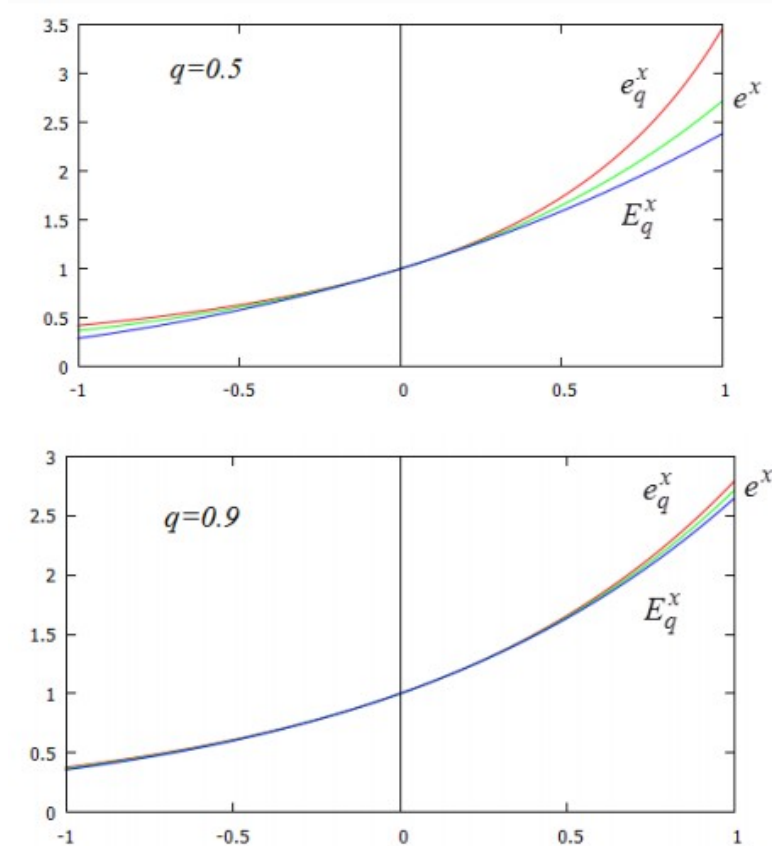
Riassumendo, la funzione esponenziale classica è data da: $e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.

L'analogo q dell'esponenziale è dato da:

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}$$

Possiamo usare anche un altro analogo, definito nel modo seguente.

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!}$$



Andamento di e_q^x , e^x , E_q^x per diversi valori di q .

La funzione esponenziale ordinaria rimane invariata sotto differenziazione ordinaria. Lo stesso vale per e_q^x con la q-derivata. Infatti:

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e_q^x$$

Passiamo ad E_q^x .

$$D_q E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!} =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-2)/2} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{q^j x^j}{[j]!} = E_q^{qx}$$

Quindi: $D_q e_q^x = e_q^x$, $D_q E_q^x = E_q^{qx}$.

Quanto vale $e_q^x e_q^y$? In generale $e_q^x e_q^y \neq e_q^{x+y}$. Altre proprietà sono:

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \quad ; \quad e_{1/q}^x = E_q^x.$$

Torniamo alle nostri calcoli, dove applichiamo la definizione di q-derivata e valutiamo il limite per q che tende a 1.

Esercizio 15. Calcolare $D_q a^x$.

$$D_q a^x = \frac{a^{qx} - a^x}{(q-1)x}$$

Al limite per q che tende a 1, si ha la derivata ordinaria $a^x \ln a$.

Consideriamo la definizione della derivata ordinaria:

$$\frac{d a^x}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

Ricordiamo infatti: $a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$. Per $x=h$ si trova il limite dato sopra.

Oppure scriviamo:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \quad ; \quad D e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

Torniamo alla q-derivata.

$$D_q a^x = \frac{a^{qx} - a^x}{(q-1)x} = a^x \frac{a^{qx-x} - 1}{(q-1)x} = a^x \frac{a^{x(q-1)} - 1}{(q-1)x}$$

Ricordiamo ancora una volta:

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

da cui

$$a^{x(q-1)} - 1 = x(q-1) \ln a + \frac{x^2(q-1)^2}{2!} \ln^2 a + \frac{x^3(q-1)^3}{3!} \ln^3 a + \dots$$

Se prendiamo il limite di $x(q-1)$ che tende a zero, troviamo $a^x \ln a$.

Esercizio 16. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

La derivata ordinaria è pari a $\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$.

$$D_q f(x) = \left[\frac{1 + \sqrt{xq}}{1 - \sqrt{xq}} - \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right] \frac{1}{x(q-1)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{q}-1)}{(1 - \sqrt{xq})(1 - \sqrt{x})x(q-1)}$$

$$D_q f(x) = \frac{2}{(1 - \sqrt{xq})(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}(\sqrt{q}+1)}$$

Nel limite per q che tende a 1, si trova il risultato con la derivata ordinaria.

Esercizio 17. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = \frac{5}{x+1}$.

$$Dy = -\frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} D_q y &= \left(\frac{5}{qx+1} - \frac{5}{x+1} \right) \frac{1}{(q-1)x} = \frac{5x+5-5qx-5}{(qx+1)(x+1)(q-1)x} \\ &= -\frac{5}{(qx+1)(x+1)} \end{aligned}$$

Esercizio 18. Calcolare $D_q f(x)$, con $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$.

La derivata ordinaria è pari a $Df(x) = \frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

Calcoliamo la q-derivata.

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= \left(\frac{2}{2qx-1} - \frac{2}{2x-1} \right) \frac{1}{(q-1)x} - \left(\frac{1}{qx} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= \frac{2(2x-1) - 2(2qx-1)}{(2qx-1)(2x-1)(q-1)x} - \frac{x - qx}{qx^2(q-1)x} = \frac{4x(1-q)}{(2qx-1)(2x-1)(q-1)x} + \frac{1}{qx^2} \\ &= \frac{(2qx-1)(2x-1) - 4qx^2}{qx^2(2qx-1)(2x-1)} = \frac{1-2x-2qx}{qx^2(2qx-1)(2x-1)} \end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1 si ha la derivata ordinaria.

Esercizio 19. Calcolare derivata e q-derivata di $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

$$Dy = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

$$\begin{aligned}
D_q y &= \frac{(qx)^5 - 4(qx)^3 + 2(qx) - 3 - x^5 + 4x^3 - 2x + 3}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^5-1)x^5 - 4(q^3-1)x^3 + 2(q-1)x}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)x^5 - 4(q-1)(q^2+q+1)x^3 + 2(q-1)x}{(q-1)x}
\end{aligned}$$

Si ricordi: $[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1)}{q-1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1$, da cui:

$$D_q y = [5]x^4 - 4 \cdot [3]x^3 + 2$$

Al limite per q che tende a 1: $5x^4 - 12x^3 + 2$.

Esercizio 20. Calcolare derivata e q-derivata di $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$.

La derivata ordinaria produce: $Dy = 2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$.

$$\begin{aligned}
D_q y &= \frac{3(qx)^{2/3} - 2(qx)^{5/2} + (qx)^{-3} - 3x^{2/3} + 2x^{5/2} - x^{-3}}{(q-1)x} \\
&= \frac{3(q^{2/3}-1)x^{2/3} - 2(q^{5/2}-1)x^{5/2} + (q^{-3}-1)x^{-3}}{(q-1)x} \\
&= \frac{3(q^{1/3}-1)(q^{1/3}+1)x^{2/3}}{(q-1)x} - \frac{2(q^{1/2}-1)(q^{4/2}+q^{3/2}+q^{2/2}+q^{1/2}+1)x^{5/2}}{(q-1)x} + \frac{(q^{-3}-1)x^{-3}}{(q-1)x} \\
&= \frac{3(q^{1/3}-1)(q^{1/3}+1)x^{2/3}}{(q^{1/3}-1)(q^{2/3}+q^{1/3}+1)x} - \frac{2(q^{1/2}-1)(q^{4/2}+q^{3/2}+q^{2/2}+q^{1/2}+1)x^{5/2}}{(q^{1/2}-1)(q^{1/2}+1)x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \frac{\left(\left(\frac{1}{q}\right)^3 - 1\right)x^{-3}}{q\left(1 - \frac{1}{q}\right)x} &= \frac{3(q^{1/3} + 1)x^{2/3}}{(q^{2/3} + q^{1/3} + 1)x} - \frac{2(q^{4/2} + q^{3/2} + q^{2/2} + q^{1/2} + 1)x^{5/2}}{(q^{1/2} + 1)x} \\
&\quad - \frac{\left(\left(\frac{1}{q}\right)^2 + \frac{1}{q} + 1\right)x^{-3}}{qx}
\end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1: $2x^{-1/3} - 5x^{3/2} - 3x^{-4}$

Esercizio 21. Calcolare la derivata e la q-derivata di $y = (8x - 1)^4 = (g(x))^4$

$$Dy = 4(g(x))^3 Dg(x) = 32(8x - 1)^3 = 32(8^3 x^3 - 3 \cdot 8^2 x^2 + 3 \cdot 8x - 1)$$

$$D_q y = \frac{(8qx - 1)^4 - (8x - 1)^4}{(q - 1)x}$$

$$= \frac{8^4 q^4 x^4 - 4 \cdot 8^3 q^3 x^3 + 6 \cdot 8^2 q^2 x^2 - 32qx + 1 - 8^4 x^4 + 4 \cdot 8^3 x^3 - 6 \cdot 8^2 x^2 + 32x - 1}{(q - 1)x}$$

$$= \frac{8^4(q^4 - 1)x^4 - 4 \cdot 8^3(q^3 - 1)x^3 + 6 \cdot 8^2(q^2 - 1)x^2 - 32(q - 1)x}{(q - 1)x}$$

$$= 8^4(q^3 + q^2 + q + 1)x^3 - 4 \cdot 8^3(q^2 + q + 1)x^2 + 6 \cdot 8^2(q + 1)x - 32$$

Per q che tende a 1 :

$$4 \cdot 8 \cdot 8^3 x^3 - 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8^2 x^2 + 3 \cdot 4 \cdot 8^2 - 32 = 32(8^3 x^3 - 3 \cdot 8^2 x^2 + 3 \cdot 8x - 1)$$

Esercizio 22. Calcolare derivata e q-derivata di $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x - 1}$.

www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp

Calcola la derivata della funzione

INVIA

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x-1}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Need a step by step solution for this problem?

$$Dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$D_q y = \frac{\sqrt{q^2 x^2 + 1} - \sqrt{q x - 1} - \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x - 1}}{(q-1)x}$$

$$= \frac{\sqrt{q^2 x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{(q-1)x} - \frac{\sqrt{q x - 1} - \sqrt{x - 1}}{(q-1)x}$$

$$= \frac{q^2 x^2 + 1 - x^2 - 1}{(q-1)x(\sqrt{q^2 x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})} - \frac{q x - 1 - x + 1}{(q-1)x(\sqrt{q x - 1} + \sqrt{x - 1})}$$

$$= \frac{(q+1)(q-1)x^2}{(q-1)x(\sqrt{q^2 x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1})} - \frac{(q-1)x}{(q-1)x(\sqrt{q x - 1} + \sqrt{x - 1})}$$

Al limite per q che tende a 1 si trova la derivata ordinaria.

Esercizio 23. Calcolare derivata e q-derivata di $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Si può usare: <https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/> o semplicemente applicare la regola della derivata delle funzioni composte:

$$Dy = -\frac{D(\sqrt{x^2+1})}{x^2+1} = -\frac{2x}{2(x^2+1)^{3/2}}$$

$$Dy = -x(x^2+1)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned} D_q y &= \left(\frac{1}{\sqrt{q^2 x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{q^2 x^2 + 1}}{(\sqrt{q^2 x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= \left(\frac{x^2+1 - q^2 x^2 - 1}{(\sqrt{q^2 x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{q^2 x^2 + 1})} \right) \frac{1}{(q-1)x} \\ &= - \left(\frac{x(1+q)}{(\sqrt{q^2 x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{q^2 x^2 + 1})} \right) \end{aligned}$$

Al limite per q che tende a 1 diventa $-x(x^2+1)^{-3/2}$.

Alcune derivate dal libro di Boris Demidovic sono proposte in Appendice A, B e C.

La q-derivata simmetrica

Tale derivata è definita come:

$$D_q^{\sim} f(x) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}x)}{(q - q^{-1})x}$$

Esercizio 24. Calcolare la q-derivata simmetrica di x^2 .

$$D_q^{\sim} x^2 = \frac{q^2 x^2 - q^{-2} x^2}{(q - q^{-1})x} = x \frac{q^4 - 1}{q^2 q^{-1} (q^2 - 1)} = x \frac{q^2 + 1}{q}$$

Al limite per $q \rightarrow 1$ si ha la derivata ordinaria $2x$.

Si può introdurre l'intero q-simmetrico:

$$[n]^\sim = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

Per esempio: $[2]^\sim = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}}$. Quindi $D_q^\sim x^2 = \frac{q^2 x^2 - q^{-2} x^2}{(q - q^{-1})x} = [2]^\sim x$.

La q-derivata dei binomi

I polinomi binomiali ci servono per arrivare alla q-formula di Taylor.

La formula ordinaria è:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Cerchiamo dei polinomi $P_n(x)$ da usare invece dei polinomi $P_n = (x-a)^n$.

La proprietà richiesta è che si abbia $D_q P_n(x) = P_{n-1}(x)$, come nel caso ordinario si ha $D P_n(x) = P_{n-1}(x)$.

Iniziamo con $a=0$. Sia $P_n(x) = x^n / [n]!$.

$$D_q P_n(x) = \frac{D_q x^n}{[n]!} = \frac{[n]x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x)$$

Supponiamo ora di considerare i polinomi nel caso $a \neq 0$. Partiamo da $P_0(1) = 1$. Sia

$P_1(x)$ tale che $D_q P_1(x) = 1$ e $P_1(a) = 0$. Allora $P_1(x) = x - a$.

Cerchiamo $P_2(x)$, con $D_q P_2(x) = P_1(x)$, $P_2(a) = 0$. Poniamo:

$$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2$$

$$D_q P_2(x) = \left\{ \frac{q^2 x^2}{[2]} - aqx - \frac{a^2}{[2]} + a^2 - \frac{x^2}{[2]} + ax + \frac{a^2}{[2]} - a^2 \right\} \frac{1}{x(q-1)} =$$

$$\left\{ \frac{x^2(q^2-1)}{[2]} - ax(q-1) \right\} \frac{1}{x(q-1)} = \frac{x(q+1)}{[2]} - a = \frac{x(q+1)(q-1)}{(q^2-1)} - a = x - a$$

Abbiamo quindi i seguenti polinomi:

$$P_2(x) = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]!}, \quad P_2(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[3]!}, \quad \dots,$$

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)\dots(x-q^{n-1}a)}{[n]!} = (x-a)_q^n$$

Questi sono i polinomi che diventano $P_n(x) = x^n/[n]!$ quando $a=0$.

L'analogo di $(x-a)^n$ sono quindi i polinomi $(x-a)_q^n$.

Questi polinomi generalizzano il binomio e sono noti come q-binomio.

$$(x-a)_q^n = (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a)$$

Esempio: $(x-a)_q^3 = (x-a)(x-qa)(x-q^2a)$

Si ha inoltre che: $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$ (*), e questo si può dimostrare per induzione e con la regola della derivazione del prodotto di funzioni.

Dalla definizione: $(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k (x-q^k a)$. Derivo con una regola vista all'inizio:

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x)$$

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q^k D_q(x-q^k a) + (qx-q^k a) D_q(x-a)_q^k = \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1} a) D_q(x-a)_q^k \end{aligned}$$

Usando la regola (*):

$$\begin{aligned} (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1} a)[k](x-a)_q^{k-1} &= \\ (1+q[k])(x-a)_q^k &= [k+1](x-a)_q^k \end{aligned}$$

Si noti che: $1+q[k] = 1+q \frac{q^k-1}{q-1} = \frac{q^{k+1}-1}{q-1} = [k+1]$.

Proprietà dei polinomi

Abbiamo quindi che $D_q P_n = P_{n-1}$. Vediamo ora alcune altre proprietà.

Consideriamo $(x-a)_q^{m+n}$ e vediamo quanto vale. In generale abbiamo che $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$. Vale invece:

$$\begin{aligned} (x-a)_q^{m+n} &= (x-a)(x-qa) \dots (x-q^{m-1}a)(x-q^m a)(x-q^{m+1}a) \dots (x-q^{m+n-1}a) \\ &= (x-a)_q^m (x-q^m a)(x-q^{m+1}a) \dots (x-q^{m+n-1}a) = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \\ &= (x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \end{aligned}$$

Esempio: $(x-a)_q^5 = (x-a)_q^4 (x-q^4 a)_q^1 = (x-a)_q^3 (x-q^3 a)_q^2$

Poniamo m come $-n$, abbiamo:

$$(x-a)_q^{-n+n} = 1 = (x-a)_q^{-n} (x-q^{-n}a)_q^n$$

Quindi:

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \quad (*)$$

Vediamo se questa espressione è appropriata per il calcolo. Partiamo nuovamente da $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$ e cambiamo m in $-m'$. Si trova:

$$(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n = (x-a)_q^{-m'} (x-q^{-m'} a)_q^n = \frac{(x-q^{-m'} a)_q^n}{(x-q^{-m'} a)_q^{m'}}$$

Ad esempio, se $m'=3$ ed $n=3$, il risultato è 1.

Sia $m=-m'<0$ e $n=-n'<0$. Calcoliamo $(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$:

$$\begin{aligned} (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-m'} (x-q^{-m'} a)_q^{-n'} = \\ &= \frac{1}{(x-q^{-m'} a)_q^{m'} (x-q^{-n'-m'} a)_q^{n'}} = \frac{1}{(x-a^{-n'-m'} a)_q^{n'} (x-q^{n'}(q^{-n'-m'} a))_q^{m'}} = \\ &= \frac{1}{(x-q^{-n'-m'} a)_q^{n'+m'}} = (x-a)_q^{-m'-n'} = (x-a)_q^{m+n} \end{aligned}$$

La (*) è adeguata al calcolo.

Le q-derivate da ricordare

Si possono verificare le seguenti derivate importanti per i calcoli successivi.

Siano $n \in \mathbb{Z}$, $a, b, t \in \mathbb{C}$.

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1} \quad ; \quad D_q(a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}$$

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n](x-q^n a)_q^{-n-1} \quad ; \quad D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}$$

$$D_q(ax+b)_q^n = a[n](ax+b)_q^{n-1} \quad ; \quad D_q(a+bx)_q^n = b[n](a+bqx)_q^{n-1}$$

$$D_q(1+bx)_q^t = b[t](1+bqx)_q^{t-1}$$

L'analogo per il logaritmo

Per l'analogo del logaritmo nel q-calcolo, si veda “Leonhard Euler and a q-analogue of the logarithm”, di Erik Koelink, Walter Van Assche. Abstract: We study a q-logarithm which was introduced by Euler and give some of its properties. This q-logarithm did not get much attention in the recent literature. We derive basic properties, some of which were already given by Euler in a 1751-paper and 1734-letter to Daniel Bernoulli. The corresponding q-analogue of the dilogarithm is introduced. The relation to the values at 1 and 2 of a q-analogue of the zeta function is given. We briefly describe some other q-logarithms that have appeared in the recent literature. - Subjects: Classical Analysis and ODEs (math.CA); History and Overview (math.HO), Journal reference: Proc AMS 137 (2009), no. 5, 1663-1676, DOI: 10.1090/S0002-9939-08-09374-X – Available arXiv:0709.1788 [math.CA]

Appendici

L'uso di software per il calcolo

In rete si trovano diversi software on-line che offrono il calcolo della derivata. Se lo scopo dell'esercizio è quello di apprendere il calcolo e la teoria relativa, è bene prima risolvere l'esercizio, seguendo le indicazioni ad esempio di [7], e poi, proprio in caso estremo, ricorrere alla soluzione on-line. Si è usato in precedenza, in alcuni problemi, il software WolframAlpha, al link www.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp. Se si usano altri software, si raccomanda ulteriore verifica con WolframAlpha, per vedere se si è scritto bene l'input della funzione con la notazione corretta.

Torniamo ora all'esercizio 23, per mostrare altri software. L'esercizio chiedeva di calcolare derivata di $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Usiamo

<https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/>

Ecco lo screenshot del risultato.

The screenshot shows the following steps:

- 1 $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$
- 2 $f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}^2}$
- 3 $f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(x^2+1) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$
- 4 $f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(x^2) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$
- 5 $f'(x) = \frac{-x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2}$
- 6 $f'(x) = -x \cdot (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

La grafica è molto bella, come una bella scrittura a mano. Attenzione però, che questo software può avere problemi di formattazione con gli esponenti. Ne parliamo di seguito, nella discussione delle derivate logaritmiche.

Altro software on-line si trova al link <https://www.derivative-calculator.net>, che propone tutti i passaggi del calcolo, con le regole applicate. “Derivative Calculator - Calculate derivatives online — with steps and graphing!”.

Ecco lo screenshot.

Click at any derivative in order to show the rule that was applied.

Click at any derivative in order to show the rule that was applied.

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx} [x^2 + 1]$$

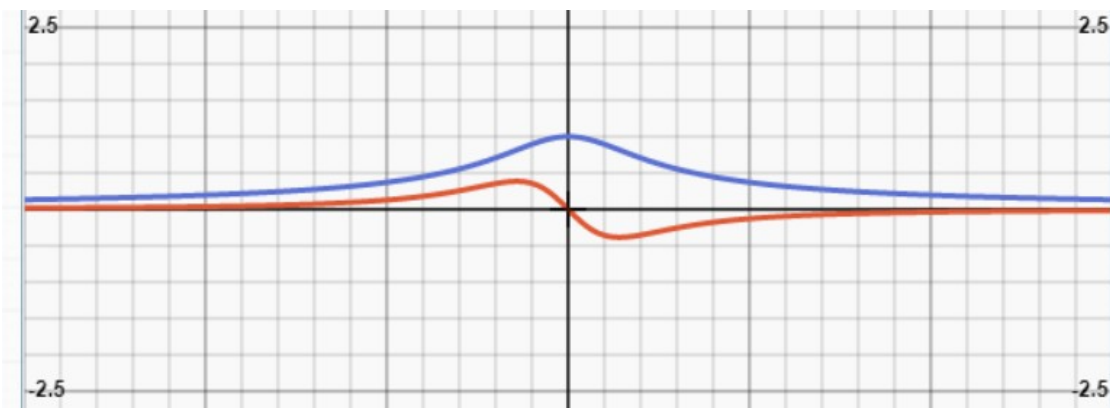
$$= -\frac{\frac{d}{dx} [x^2] + \frac{d}{dx} [1]}{2(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{2x + 0}{2(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Simplify Roots/zeros

Grafico di funzione e derivata.



Rapporti incrementali

Usando la definizione, si calcolano i rapporti incrementali.

1. Si calcoli il rapporto incrementale di $y = \frac{x^2+2}{x-3}$ per $x_0=2$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{(x_0+h)^2+2}{x_0+h-3} - \frac{x_0^2+2}{x_0-3}}{h} = \frac{\frac{(2+h)^2+2}{2+h-3} - \frac{2^2+2}{2-3}}{h} \\ &= \frac{\frac{4+4h+h^2+2}{h-1} + 6}{h} = \frac{6+4h+h^2+6(h-1)}{(h-1)h} = \frac{h^2+10h}{(h-1)h} = \frac{h+10}{h-1} \end{aligned}$$

2. Si calcoli il rapporto incrementale di $y = \frac{2}{3x+2}$ per $x_0=-1$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{2}{3(x_0+h)+2} - \frac{2}{3x_0+2}}{h} = \frac{\frac{2}{-3+3h+2} - \frac{2}{-3+2}}{h} = \frac{\frac{2}{3h-1} + 2}{h} \\ &= \frac{2+2(3h-1)}{h(3h-1)} = \frac{6}{(3h-1)} \end{aligned}$$

3. Si calcoli il rapporto incrementale di $y = \frac{2}{\ln(1+x)}$ per $x_0=1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{\ln(1+x_0+h)} - \frac{2}{\ln(1+x_0)}}{h} = \frac{\frac{2}{\ln(2+h)} - \frac{2}{\ln(2)}}{h} = \frac{2 \cdot \ln 2 - \ln(2+h)}{h \cdot \ln 2 \cdot \ln(2+h)}$$

4. Con rapporto incrementale e limite si calcoli la derivata di $\ln(1+x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x+h+1) - \ln(x+1)}{h} = \frac{\ln \frac{x+h+1}{x+1}}{h} = \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x+1}\right)}{h}$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \frac{h}{1+x}$. Per t che tende a zero, anche h tende a zero.

$$\frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x+1}\right)}{h} = \frac{\ln(1+t)}{t(1+x)} = \lim_{ht \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t(1+x)} = \frac{1}{1+x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{1+x}$$

Derivate funzioni composte

In generale, $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ quindi: $y=f[\varphi(x)]$, $Dy=D_u y \cdot D_x u$

1 - Calcolare Dy di $y=(x^2+2x+3)^5$.

$$y=u^5, \quad u=x^2+2x+3$$

$$Dy=D_u u^5 \cdot D_x(x^2+2x+3)=5u^4 \cdot (2x+2)=10 \cdot (x^2+2x+3)^4 \cdot (x+1)$$

2 - Calcolare Dy di $y=\sin^3 4x$.

$$y=u^3, \quad u=\sin v, \quad v=4x. \text{ Si calcola: } Dy=D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v$$

$$Dy=3u^2 \cdot \cos v \cdot 4=3 \sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4=12 \cdot \sin^2 4x \cdot \cos 4x$$

3 - Calcolare Dy di $y=(3-2 \sin x)^5$.

$$y=u^5, \quad u=(3-2 \sin x). \text{ Si calcola: } Dy=D_u y \cdot D_x u$$

$$Dy=5u^4 \cdot (-2 \cos x)=5 \cdot (3-2 \sin x)^4 \cdot (-2 \cos x)$$

4 - Calcolare Dy di $y=(1+3x-5x^2)^{30}$

$$y=u^{30}, \quad u=1+3x-5x^2$$

$$Dy = D_u u^{30} \cdot D_x (1 + 3x - 5x^2) = 30u^{29} \cdot (3 - 10x) = 30 \cdot (1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (3 - 10x)$$

5 - Calcolare Dy di $y = \sqrt{1-x^2}$.

$$u = (1-x^2), \quad y = \sqrt{u}$$

$$Dy = D_u \sqrt{u} \cdot D_x (1-x^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} \right)^{1/2} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

6 - Calcolare Dy di $y = \frac{3}{56 \cdot (2x-1)^7} - \frac{1}{24 \cdot (2x-1)^6} - \frac{1}{40 \cdot (2x-1)^5}$.

$$u = (2x-1)$$

$$Dy = \frac{3 \cdot (-7) \cdot 2}{56 \cdot (2x-1)^8} + \frac{6 \cdot 2}{24 \cdot (2x-1)^7} + \frac{5 \cdot 2}{40 \cdot (2x-1)^5}$$

$$= -\frac{42}{56 \cdot (2x-1)^8} + \frac{1}{2 \cdot (2x-1)^7} + \frac{1}{4 \cdot (2x-1)^6}$$

$$= \frac{-42/56 + (2x-1)/2 + (2x-1)^2/4}{(2x-1)^8} = \frac{-3/4 + x - 1/2 + x^2 - x + 1/4}{(2x-1)^8}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{(2x-1)^8}$$

Verifica con <https://www.derivative-calculator.net>

FIRST DERIVATIVE:
 $\frac{d}{dx} [f(x)] = f'(x) =$

$$\frac{1}{4(2x-1)^6} + \frac{1}{2(2x-1)^7} - \frac{3}{4(2x-1)^8}$$

Simplify/rewrite:

$$\frac{x^2 - 1}{(2x-1)^8}$$

Simplify Show steps Roots/zeros

7 - Calcolare Dy di $y = \log_{10} \sin x$.

$$y = \log_{10} u, \quad u = \sin x. \quad \text{Quindi: } Dy = \frac{\log_{10} e}{u} \cdot Du = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \log_{10} e = \cotg(x) \cdot \log_{10} e$$

Ricordiamo che $D \log_e x = D \ln x = 1/x$ e che $D \log_a x = 1/(x \log_e a) = (\log_a e)/x$.

Infatti:

$$\begin{aligned} D(\log_a(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+z)}{z} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$

dove è usato uno dei limiti notevoli del logaritmo, che sono i seguenti.

1. Limite notevole del logaritmo naturale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

2. Limite notevole della funzione logaritmica con base arbitraria

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)} \quad ; \quad \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

con $a > 0, a \neq 1$

Ricordiamo che se il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ esiste ed è positivo, allora si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln f(x)] = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} f(x)]$$

Dimostriamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1$$

Ricordiamo infine anche la definizione del numero di Nepero: $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Derivate logaritmiche

Definizione: $y = f(x)$, $D(\ln y) = \frac{Dy}{y} = \frac{Df(x)}{f(x)} \rightarrow Df(x) = f(x) \frac{Dy}{y} = f(x) D \ln y$

Esempio: $y = (\sin x)^x$, $Dy = (\sin x)^x D \ln y$. Quindi:

$$Dy = (\sin x)^x D(x \ln \sin x) = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \cotg(x))$$

Esempio: $y = u^v$ dove $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Quindi:

$$\ln y = \ln(u^v) = v \ln u \quad , \quad D(\ln y) = Dv \cdot \ln u + v \cdot D(\ln u)$$

$$\frac{Dy}{y} = Dv \cdot \ln u + v \cdot \frac{Du}{u} \quad \text{da cui} \quad Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] .$$

1 - Calcolare Dy se $y = (\cos x)^x$.

$$\ln y = \ln[(\cos x)^x] = x \ln \cos x \quad , \quad v = x \quad , \quad u = \cos x .$$

$$Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = (x \cos)^x [\ln \cos x - x \tg x]$$

Oppure direttamente: , $Dy = (\cos x)^x D \ln y$. Da cui si ha:

$$Dy = (\cos x)^x D(x \ln \cos x) = (\cos x)^x (\ln \cos x - x \tg(x))$$

2 - Calcolare Dy se $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

$$Dy = y D \ln y = y \cdot D \left[\frac{1}{2} (\ln x + \ln(x-1) - \ln(x-2)) \right] = \frac{y}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right]$$

$$Dy = \frac{x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x}(x-1)(x-2)^3}$$

3 - Calcolare Dy se $y = x^{\sqrt{x}}$.

$$\ln y = \ln[x^{\sqrt{x}}] = \sqrt{x} \cdot \ln x, \quad v = \sqrt{x}, \quad u = x, \quad Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right]$$

$$Dy = x^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln u + \frac{\sqrt{x}}{x} \right] = x^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{x} \left[1 + \frac{1}{2} \ln x \right] = x^{\sqrt{x}-1/2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \ln x \right]$$

4 - Calcolare Dy se $y = x^x$.

$$\ln y = \ln[x^x] = x \cdot \ln x, \quad v = x, \quad u = x.$$

$$Dy = x^x \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^x [\ln x + 1]$$

5 - Calcolare Dy se $y = x^{x^2}$. Si ha $v = x^2$, $u = x$.

$$Dy = x^{x^2} \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{x^2} \left[2x \ln x + \frac{x^2}{x} \right] = x^{x^2} [2x \ln x + x] = x^{x^2+1} [2 \ln x + 1]$$

6 - Calcolare Dy se $y = x^{x^x}$. Si ha $v = x^x$, $u = x$.

$$Dy = x^{x^x} \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{x^x} \left[x^x [\ln x + 1] \cdot \ln x + \frac{x^x}{x} \right] = x^{x^x} x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$

Da <https://www.wolframalpha.com/input/>

derivative $x^x(x^x)$

Derivative

 NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT

$$\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x+x-1} (x \log^2(x) + x \log(x) + 1)$$

Attenzione ad interpretare bene la scrittura. x^x è ad esponente di x .

Quindi x^{x^x} non è uguale a $(x^x)^x$. Facciamo un esempio numerico:

$$3^{(3^3)} = 3^{27}, \text{ invece } (3^3)^3 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = 3^9 = 3^{(3^2)}.$$

In generale: $2^{(3^4)} = 2^{81}$, invece $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

La potenza è un'operazione che associa a una coppia di numeri a e n , detti rispettivamente base ed esponente, il numero dato dal prodotto di n fattori uguali ad a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

Proprietà:

- 1) Prodotto di potenze con la stessa base
- 2) Quoziente di potenze con la stessa base
- 3) Potenza di potenza
- 4) Prodotto di potenze con lo stesso esponente
- 5) Quoziente di potenze con lo stesso esponente

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

7 - Calcolare Dy se $y = (x^x)^x$. Si ha $v = x$, $u = x^x$.

$$Dy = (x^x)^x \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = (x^x)^x \left[\ln x^x + \frac{x}{x^x} x^x [\ln x + 1] \right] = (x^x)^x [\ln x^x + x [\ln x + 1]]$$

Da <https://www.wolframalpha.com/input/>

derivative $(x^x)^x$

Derivative

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

$$\frac{d}{dx} ((x^x)^x) = (x^x)^x (\log(x^x) + x + x \log(x))$$

8 - Calcolare Dy se $y = x^{\sin x}$. Si ha $v = \sin x$, $u = x$.

$$Dy = y \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

9 – Al punto **4** si è calcolato Dy di $y = x^x$, nel seguente modo. Si è introdotto il logaritmo $\ln y = \ln [x^x] = x \cdot \ln x$, e le funzioni $v = x$, $u = x$, di modo che:

$$Dy = x^x \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^x [\ln x + 1]$$

Il calcolo della derivata risulta praticamente immediato.

In rete si trovano metodi differenti. Si veda ad esempio

<https://www.youmath.it/domande-a-risposte/view/5926-derivata-di-x-alla-x.html>

La spiegazione fornita si basa sulla definizione: $x = e^{\ln x}$, quindi $x^x = e^{x \ln x}$.

I passaggi sono come quelli che si hanno con il calcolatore on-line:

<https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/>

$$1 \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x)$$

$$2 \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(x)})$$

$$3 \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) \cdot e^{x \cdot \ln(x)}$$

$$4 \quad f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx}(x) \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) \right)$$

$$5 \quad f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot e^{x \cdot \ln(x)}$$

$$6 \quad f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x$$

10 – Calcolate in altro modo la derivata al punto **6**.

Si usi <https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/> con la funzione

$x^{(x^x)}$. Il software non scrive bene i passi 1, 7 ed 8. Ad esempio:

$$\begin{array}{l} 1 \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x \cdot x) \\ 2 \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{\ln(x) \cdot x^x}) \end{array} \quad (*)$$

Quindi ora si riscrivono:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^{x^x}) \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{\ln(x) \cdot x^x}) \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(\ln(x) \cdot x^x) \cdot e^{\ln(x) \cdot x^x} \\ f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{d}{dx}(\ln(x)) \cdot x^x + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(x^x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(x)}) \right) \\ f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} \right) \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx}(x) \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\ln(x) \cdot x^x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^x + \ln(x) \cdot (\ln(x) + 1) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} \right) \\ f'(x) &= x^{x^x} \cdot (x^{-1} \cdot x^x + \ln(x) \cdot (\ln(x) + 1) \cdot x^x) \\ f'(x) &= x^{x^x} \cdot (x^{x-1} + \ln(x) \cdot (\ln(x) + 1) \cdot x^x) \end{aligned}$$

In alternativa, <https://www.wolframalpha.com/input/>

derivative $x^{(x^x)}$

☀ NATURAL LANGUAGE
 Σ MATH INPUT

Derivative

$$\frac{d}{dx}(x^{x^x}) = x^{x^x+x-1} (x \log^2(x) + x \log(x) + 1)$$

È palese che al punto 6 vi è l'approccio ottimale al calcolo, da cui:

$$D x^{x^x} = x^{x^x} \left[Dv \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot Du \right] = x^{x^x} \left[x^x [\ln x + 1] \cdot \ln x + \frac{x^x}{x} \right] = x^{x^x} x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$

Se si usa <https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/> o altro calcolatore on-line, si verifichi sempre il risultato, ad esempio con <https://www.wolframalpha.com/input/> che chiede sempre di risolvere le ambiguità di scrittura. Le ambiguità possono portare a risultati errati. Altro software on-line si trova al link <https://www.derivative-calculator.net>, che propone tutti i passaggi del calcolo, con le regole applicate. “Derivative Calculator - Calculate derivatives online — with steps and graphing!”.

Un esempio, calcolare $D y = D((x^x)^x)$. Il risultato è il seguente:

Click at any derivative in order to show the rule that was applied.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [(x^x)^x] \\ &= (x^x)^x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x^x)x] \\ &= (x^x)^x \left(\frac{d}{dx} [x^2] \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)] \right) \\ &= (x^x)^x \left(2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= (x^x)^x (2x \ln(x) + x) \end{aligned}$$

Alternative result:

$$= (x^x)^x (x (\ln(x) + 1) + x \ln(x))$$

Simplify/rewrite:

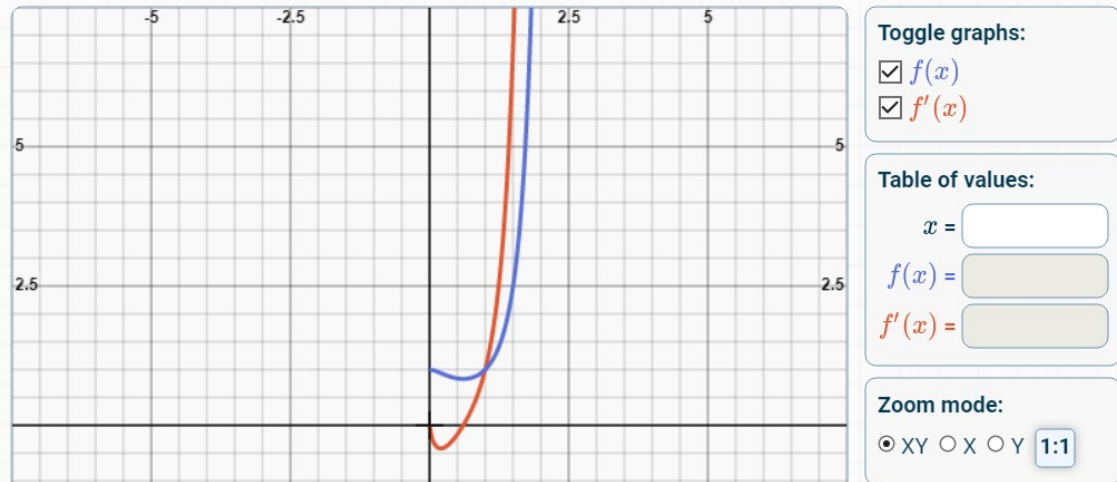
$$x(x^x)^x (2 \ln(x) + 1)$$

Simplify Roots/zeros

Nella pagina seguente, lo screenshot del grafico della funzione e della sua derivata.

Interactive function graphing:

Navigate using mouse or touch screen. Drag to pan, use the mouse wheel or two fingers to zoom.

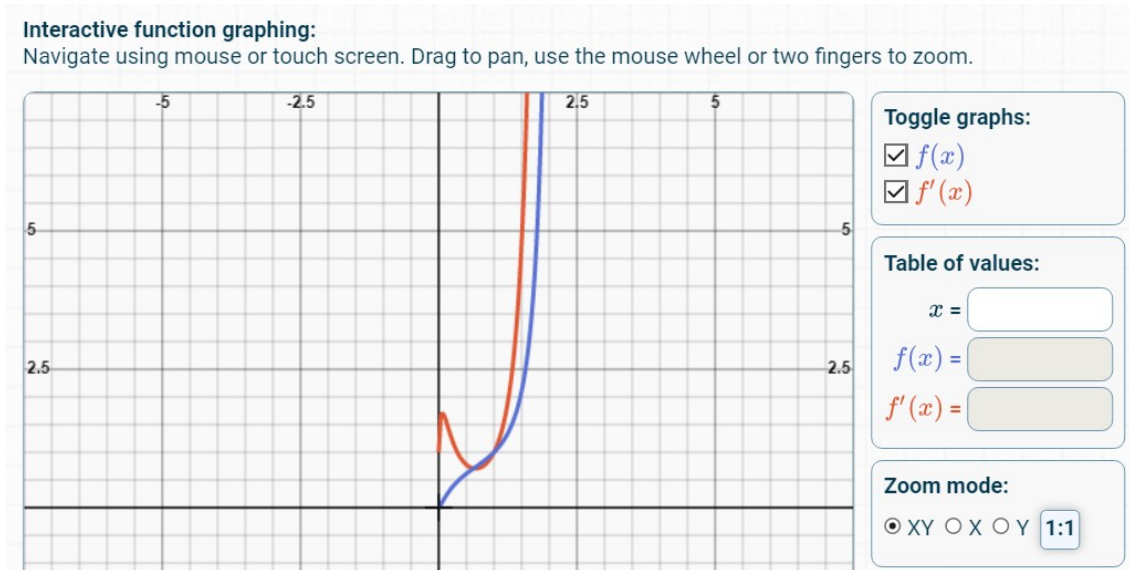


Altro esempio, il calcolo di $x^{x^x} = x^{(x^x)}$.

Click at any derivative in order to show the rule that was applied.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [x^{x^x}] \\ &= x^{x^x} \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)x^x] \\ &= x^{x^x} \left(\frac{d}{dx} [x^x] \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)] \right) \\ &= x^{x^x} \left(x^x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)x] \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^{x^x} \left(x^x \left(\frac{d}{dx} [x] \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(x)] \right) \ln(x) + x^{x-1} \right) \\ &= x^{x^x} \left(x^x \left(1 \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \ln(x) + x^{x-1} \right) \\ &= x^{x^x} \left(x^x \ln(x) (\ln(x) + 1) + x^{x-1} \right) \end{aligned}$$

Nella pagina seguente lo screenshot del grafico di funzione e derivata.



Formattazione

Si è accennato a possibili problemi di formattazione. Si usi

<https://calcolatricegratis.it/calcolatore-derivate-calcolo-derivate-online/>

per calcolare $D y = D((x^x)^x)$. Il risultato si vede nello screenshot seguente, da cui appare la formula (1) scritta come in (*) a pag. 35.

$$1 \quad f'(x) = \frac{d}{dx} (x^x \cdot x)$$

$$2 \quad f'(x) = \frac{d}{dx} (e^{\ln(x) \cdot x^2})$$

$$3 \quad f'(x) = \frac{d}{dx} (\ln(x) \cdot x^2) \cdot e^{\ln(x) \cdot x^2}$$

$$4 \quad f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x^2} \cdot \left(\frac{d}{dx} (\ln(x)) \cdot x^2 + \ln(x) \cdot \frac{d}{dx} \right)$$

$$5 \quad f'(x) = e^{\ln(x) \cdot x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot \ln(x) \right)$$

$$6 \quad f'(x) = x^x \cdot 2 \cdot (x^2 \cdot x^{-1} + 2 \cdot x \cdot \ln(x))$$

$$7 \quad f'(x) = x \cdot (2 \cdot \ln(x) + 1) \cdot x^x \cdot 2$$

Si deve leggere come $z = x \cdot (2 \ln x + 1) x^{x^2} = x \cdot (2 \ln x + 1) (x^x)^x$. Inoltre si noti: $(x^x)^x = x^{x^2}$.

Altre derivate logaritmiche

1 - Calcolare Dy se $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

Ecco i primi passaggi:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \right] \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \cdot \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) x \right] \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \left(\frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right] \cdot x + \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \cdot \frac{d}{dx} [x] \right) \\ &= \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} + 1 \right] \cdot x + \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

Risultato è: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right]$.

2 - Calcolare Dy se $y = (\cos x)^{\sin x}$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

Ecco i primi passaggi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [\cos^{\sin(x)}(x)] \\ &= \cos^{\sin(x)}(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\cos(x)) \sin(x)] \\ &= \cos^{\sin(x)}(x) \left(\frac{d}{dx} [\sin(x)] \cdot \ln(\cos(x)) + \sin(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\cos(x))] \right) \end{aligned}$$

Risultato: $(\cos x)^{\sin x} (\cos x \ln \cos x - \sin x \tan x)$

3 - Calcolare Dy se $y = (\arctan x)^x$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

Ecco i primi passaggi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [\arctan^x(x)] \\ &= \arctan^x(x) \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\arctan(x))x] \\ &= \arctan^x(x) \left(\frac{d}{dx} [x] \cdot \ln(\arctan(x)) + x \cdot \frac{d}{dx} [\ln(\arctan(x))] \right) \end{aligned}$$

Risultato: $(\arctan x)^x \cdot \left(\ln \arctan x + \frac{x}{(1+x^2)\arctan x} \right)$.

4 - Calcolare Dy se $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$. Si usi <https://www.derivative-calculator.net>

$$\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Note: Your input has been rewritten/simplified.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \right] \\ &= \frac{\frac{d}{dx} \left[x^{\frac{5}{3}} \right] \cdot \sqrt[3]{x^2+1} - x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{d}{dx} \left[\sqrt[3]{x^2+1} \right]}{\left(\sqrt[3]{x^2+1} \right)^2} \end{aligned}$$

E poi, dopo diversi passaggi, si arriva al risultato:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 5)}{3(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}}$$

Calcoliamo adesso Dy di $y = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$, **in modo molto più veloce e sintetico**. Si

noti che: $D \ln y = \frac{Dy}{y}$ da cui: $Dy = y \cdot D \ln y$.

$$\ln y = \ln \left[x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3} \right] = \ln x + \frac{1}{3} (\ln x^2 - \ln(x^2+1))$$

$$D \ln y = \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \right) = \frac{5(x^2+1) - 2x^2}{3x(x^2+1)} = \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)}$$

$$Dy = x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3} \cdot \left[\frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} \right] = \frac{3x^2+5}{3(x^2+1)} \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{1/3}$$

Quindi:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} (3x^2 + 5)}{3(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}}$$

Derivare esponenziali

1 - Calcolare Dy se $y = x^7 \cdot e^x$. $Dy = 7x^6 \cdot e^x + x^7 \cdot e^x = (7+x)x^6 \cdot e^x$

2 - Calcolare Dy se $y = (x-1) \cdot e^x$. $Dy = e^x + (x-1) \cdot e^x = x e^x$

3 - Calcolare Dy se $y = \frac{e^x}{x^2}$. $Dy = -\frac{2}{x^3} e^x + \frac{1}{x} e^x = \frac{x-2}{x^3} e^x$

4 - Calcolare Dy se $y = \frac{x^5}{e^x}$. $Dy = -\frac{5x^4}{e^x} - \frac{x^5 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{5x^4 - x^5}{e^x}$

5 - Calcolare Dy se $y = e^x \cdot \cos x$. $Dy = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$

Calcoliamo la q-derivata di **1**.

$$D_q y = \frac{(qx)^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x}$$

$$\frac{(qx)^7 e^{qx} - x^7 e^{qx} + x^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x} = [7]x^6 e^{qx} + \frac{x^7 e^{qx} - x^7 e^x}{(q-1)x}$$

Ricordiamo che:

$$\frac{e^{qx} - e^x}{(q-1)x} = [1] + \frac{[2]}{2!}x + \frac{[3]}{3!}x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!}x^{n-1} + \dots$$

$$\text{Quindi: } D_q y = [7]x^6 e^{qx} + x^7 \left([1] + \frac{[2]}{2!}x + \frac{[3]}{3!}x^2 + \dots + \frac{[n]}{n!}x^{n-1} + \dots \right) .$$

Derivate varie dal Rif.[7]

1 - Calcolare Dy se $y = \ln \ln(3 - 2x^3)$.

$$Dy = \frac{1}{\ln(3-2x^3)} \cdot D \ln(3-2x^3) = \frac{6x^2}{(3-2x^3)} \cdot \frac{1}{\ln(3-2x^3)}$$

2 - Calcolare Dy se $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x})$.

$$Dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) + 1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

3 - Calcolare Dy se $y = (x+\sqrt{x})^{1/3}$. Uso $D \ln y = \frac{Dy}{y}$ da cui: $Dy = y \cdot D \ln y$.

$$Dy = y \cdot D \ln y = y \cdot D \frac{1}{3} \ln(x+\sqrt{x}) = \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$Dy = \frac{(x+\sqrt{x})^{1/3}}{3} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+\sqrt{x})^{2/3}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$Dy = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^{2/3}}$$

4 - Calcolare Dy se $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$. $Dy = 5x^4 - 12x^2 + 2$

5 - Calcolare Dy se $y = x^2 \cdot (x^2)^{1/3}$. Semplifichiamo $y = x^{8/3}$. $Dy = \frac{8}{3} x^{5/3}$

6 - Calcolare Dy se $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

Si usi <https://www.derivative-calculator.net>.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)} \right] \\ = & \frac{\frac{d}{dx} [\sin(x) + \cos(x)] \cdot (\sin(x) - \cos(x)) - (\sin(x) + \cos(x)) \cdot \frac{d}{dx} [\sin(x) - \cos(x)]}{(\sin(x) - \cos(x))^2} \end{aligned}$$

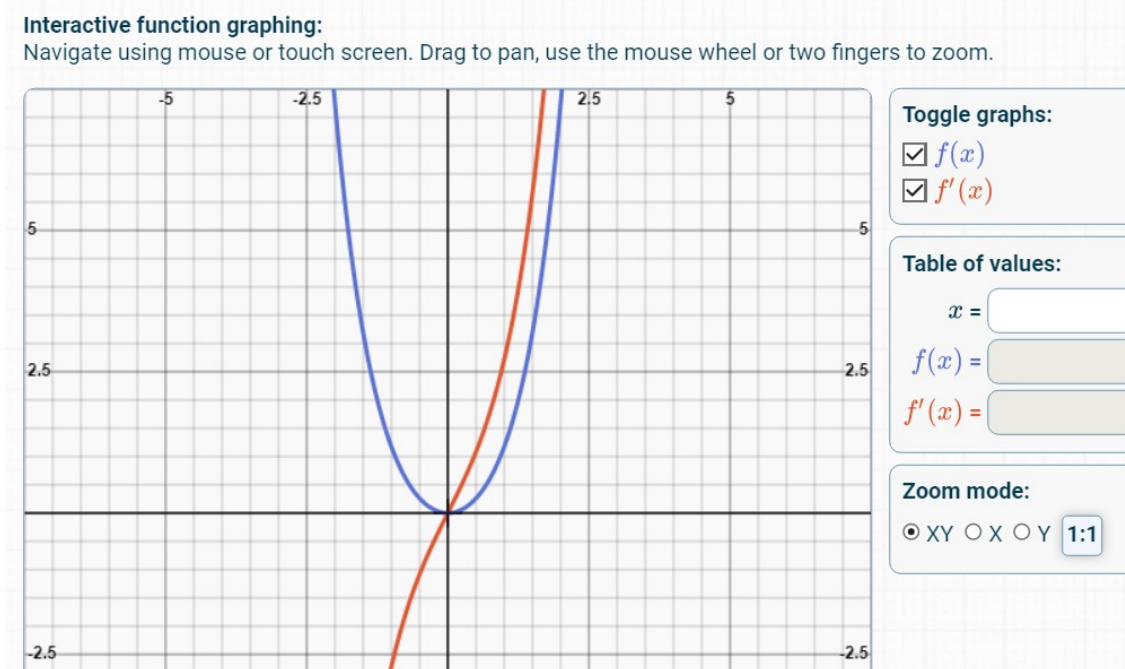
Dopo vari passaggi, si ha: $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

7 - Calcolare Dy se $y = x \cdot \sinh x$.

Nuovamente, si usi <https://www.derivative-calculator.net>

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [x \sinh(x)] \\ = & \frac{d}{dx} [x] \cdot \sinh(x) + x \cdot \frac{d}{dx} [\sinh(x)] \\ & = 1 \sinh(x) + x \cosh(x) \\ & = \sinh(x) + x \cosh(x) \end{aligned}$$

Nella pagina seguente, i grafici.



8 - Calcolare Dy se $y = \frac{1}{15} \cos^3 x \cdot (3 \cos^2 - 5)$.

Si calcoli la derivata della funzione semplificata:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} \right]$$

$$Dy = -\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x = \cos^2 (1 - \sin^2 x) \sin x - \cos^2 x \sin x = \sin^3 x \cos^2 x$$

9 - Calcolare Dy se $y = \sin^2(x^3)$.

$$Dy = 2 \sin(x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 6x^2 \sin(x^3) \cos(x^3) = 3x^2 \sin(2x^3)$$

References

- [1] Jackson, F. H. (1908). On q-functions and a certain difference operator. Transactions of the Royal Society of Edinburgh. 46 (2): 253–281. doi:10.1017/S0080456800002751.
- [2] Jackson, F. H. (1910). q-Definite Integrals. Quart. J. Math. 41, 163, 1910.
- [3] Jackson, F. H. (1917). The q-Integral Analogous to Borel's Integral. Mess. Math. 47, 57-64, 1917.
- [4] Kac, Victor; Cheung, Pokman (2002). Quantum calculus. Universitext. Springer-Verlag. ISBN 0-387-95341-8.
- [5] Sparavigna, Amelia Carolina (2016). Graphs of q-exponentials and q-trigonometric functions. 2016. <hal-01377262>
- [6] Sparavigna, Amelia Carolina. (2021). Nozioni di q-calcolo nell'ambito del quantum calculus. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4982846>
- [7] Boris P. Demidovic (1975). Esercizi e problemi di analisi matematica. Editori Riuniti – Edizioni Mir, Mosca.