

Consensus Control of Multi-Agent Systems via Displacement Feedback

*Original*

Consensus Control of Multi-Agent Systems via Displacement Feedback / Capello, Elisa; Fujisaki, Yasumasa. - THE 63RD JAPAN JOINT AUTOMATIC CONTROL CONFERENCE:(2020). ( THE 63RD JAPAN JOINT AUTOMATIC CONTROL CONFERENCE) [10.11511/jacc.63.0\_793].

*Availability:*

This version is available at: 11583/2867960 since: 2021-01-27T09:18:39Z

*Publisher:*

Science Council of Japan

*Published*

DOI:10.11511/jacc.63.0\_793

*Terms of use:*

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

*Publisher copyright*

(Article begins on next page)

# 変位フィードバックによるマルチエージェント系の合意制御

エリザ カペッロ (トリノ工科大学, CNR-IEIIT) ○藤崎 泰正 (大阪大学)

## Consensus Control of Multi-Agent Systems via Displacement Feedback

E. Capello (Politecnico di Torino, CNR-IEIIT) and \*Y. Fujisaki (Osaka Univ.)

**Abstract**— A second-order multi-agent consensus is considered, where it is assumed that velocity of each agent is not available and thus a dynamic displacement feedback is employed. It is shown that there always exists such a feedback which achieves the consensus if the graph of the overall system is undirected and connected. A sufficient condition for the consensus is also given in terms of graph Laplacians.

**Key Words:** multi-agent system, consensus, second-order differential equation, displacement feedback.

### 1 はじめに

マルチエージェント系の合意制御については、各エージェントが積分系の場合には既に成熟した理論が存在するが [1, 2]、2重積分系の場合については、未だ発展途上にある。実際、各エージェントが2重積分系であれば、その速度が観測できない場合、静的な重みによる単純な変位フィードバックで合意を達成することは不可能である。そのため、従来研究 [3, 4, 5] では、各エージェントの変位のみならず速度も観測できることを前提としているが、実際の状況を考えると、速度も観測できる場合ばかりであるとは限らない。

本稿では、各エージェントが2重積分系である場合を対象に、速度が観測できない場合の合意制御則を提案する。ここでは、静的な重みではなく、動的な重みによる変位のフィードバックを考える。そして、エージェントの変位情報の交換構造を表現するグラフが無向かつ連結なら、このフィードバックが実際に合意制御則として働くことを示す。さらに、重みに含まれるパラメータの選択について、合意を達成するための十分条件を、グラフラプラシアンにより表現する。

なお本稿は、数値例を加えて著者らの研究 [6] の骨子を紹介するものである。2重積分系を一般化したエージェントの場合についても現在研究を進めている [7]。

### 2 マルチエージェント系の合意制御

本稿では、 $N$  個の2重積分系

$$\ddot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

を対象に、マルチエージェント系の合意制御を考察する。

最初に、標準的な合意制御則として、静的な重み  $p_{ij} \geq 0, q_{ij} \geq 0$  による変位と速度のフィードバック

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^N \{ p_{ij}(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t)) + q_{ij}(x_i(t) - x_j(t)) \},$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

を考えよう。ここで、 $x_i(t) \in \mathbb{R}, \dot{x}_i(t) \in \mathbb{R}, \ddot{x}_i(t) \in \mathbb{R}$  はそれぞれエージェント  $i$  の変位、速度、加速度であり、 $u_i(t) \in \mathbb{R}$  はエージェント  $i$  への入力である。

変位ベクトルを

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_N(t) \end{bmatrix}^T$$

と定義するとき、マルチエージェント系全体は

$$\ddot{x}(t) + L_v \dot{x}(t) + L_d x(t) = 0 \quad (3)$$

と記述できる。ここに、 $L_v$  と  $L_d$  はグラフラプラシアンであり、それぞれ非対角要素  $(i, j)$  は  $-p_{ij}$  と  $-q_{ij}$ 、対角要素  $(i, i)$  は  $\sum_{j=1}^N p_{ij}$  と  $\sum_{j=1}^N q_{ij}$  である。よく知られているように、 $L_v$  と  $L_d$  に対応するグラフが無向かつ連結であるとき、これらは

$$L_v = L_v^T \geq 0, \quad L_v \mathbf{1}_N = 0, \quad \text{rank } L_v = N - 1, \quad (4)$$

$$L_d = L_d^T \geq 0, \quad L_d \mathbf{1}_N = 0, \quad \text{rank } L_d = N - 1 \quad (5)$$

を満たす。ただし、 $\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N$  はすべての要素が1のベクトルである。

このとき、次の事実を得る。

**定理 1** マルチエージェント系 (3) が合意を達成する、つまりある定数  $a \in \mathbb{R}$  と  $b \in \mathbb{R}$  が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{x}(t) - a \mathbf{1}_N) = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - (at + b) \mathbf{1}_N) = 0 \quad (7)$$

となるための十分条件は、 $L_v$  と  $L_d$  が (4) と (5) を満たすことである。

この事実を確認するために、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_N^T / \sqrt{N} \\ S^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N / \sqrt{N} & S \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N/\sqrt{N} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N^T/\sqrt{N} \\ S^T \end{bmatrix} = I_N$$

を満たす行列  $S \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$  を定義しよう。この行列は  $\mathbf{1}_N/\sqrt{N}$  に対する正規直交補空間の基底に対応し、常に存在することに注意する。なお、 $I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  は単位行列である。この  $S$  を用いて変数変換とその逆変換

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N^T/\sqrt{N} \\ S^T \end{bmatrix} x(t), \quad (8)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N/\sqrt{N} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

を定義する。すると、マルチエージェント系全体 (3) は、微分方程式の組

$$\ddot{\bar{x}}(t) = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{\tilde{x}}(t) + S^T L_v S \dot{\tilde{x}}(t) + S^T L_d S \tilde{x}(t) = 0 \quad (11)$$

として表現できる。ここで無向かつ連結なグラフのラプラシアンがもつ性質 (4) と (5) より  $S^T L_v S > 0$  と  $S^T L_d S > 0$  が成り立つので、2階の微分方程式に対する安定条件 [8] を (11) に適用すれば、直ちに

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{x}}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$$

を得る。これらに (8) と (9) を合わせれば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \dot{x}(t) - \mathbf{1}_N \frac{\mathbf{1}_N^T \dot{x}(t)}{N} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \dot{x}(t) - \frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}} \dot{\tilde{x}}(t) \right) = S \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{x}}(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( x(t) - \mathbf{1}_N \frac{\mathbf{1}_N^T x(t)}{N} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( x(t) - \frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}} \tilde{x}(t) \right) = S \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$$

となり、 $\dot{x}(t)$  と  $x(t)$  はそれぞれ合意を達成する。いま (10) より  $\dot{\bar{x}}(t)$  は定値であり、 $\dot{\bar{x}}(t) = \dot{\bar{x}}(0)$  なので、これらの合意値は、ある定数  $a$  と  $b$  を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{1}_N^T \dot{x}(t)}{N} &= \frac{\dot{\bar{x}}(t)}{\sqrt{N}} = \frac{\dot{\bar{x}}(0)}{\sqrt{N}} = \frac{\mathbf{1}_N^T \dot{x}(0)}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \dot{x}_j(0) = a, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathbf{1}_N^T x(t)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t) = at + b$$

と表現でき、定理 1 が得られることが確認できる。

以上の議論は各エージェントの速度  $\dot{x}_i(t)$  が利用できることを前提としている。ただ、実際状況によっては、この仮定が満たされるとは限らない。速度  $\dot{x}_i(t)$  が観測できなければ、静的な重み  $q_{ij}$  による制御則は

$$u_i(t) = - \sum_{j=1}^N q_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

となり、合意を達成できない。実際、この制御則のもとでマルチエージェント系全体は

$$\ddot{x}(t) + L_d x(t) = 0$$

となり、すべての閉ループ極は虚軸上に存在するので、合意を達成しない。

本稿の目的は、動的な重みを導入することにより、速度を全く用いないような、変位のみフィードバックによるマルチエージェント系の合意制御則を与えることである。この目的のために、2階と1階の連立微分方程式を対象とする安定論 [9] に着目する。ここで注意すべきは、各エージェントが2重積分系の場合、入力  $u_i(t)$  から変位  $x_i(t)$  までの伝達関数は  $1/s^2$  となり、受動的ではないことである。よく知られているように、受動性はマルチエージェント系の合意制御において中心的な役割を果たしてきた [10]。しかし、速度  $\dot{x}_i(t)$  を観測できない場合、受動性は利用できない。本稿で新たな方法を採用する理由はここにある。

### 3 合意制御のための変位フィードバック

本稿では、係数  $p_{ij} \geq 0$  と  $q_{ij} \geq 0$  を用いる動的な重みによる変位フィードバック

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= -\gamma z_i(t) - \gamma \sum_{j=1}^N (\gamma p_{ij} - q_{ij}) (x_i(t) - x_j(t)), \\ u_i(t) &= -z_i(t) - \gamma \sum_{j=1}^N p_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), \quad (12) \\ & \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

を考える。ここに、 $z_i(t) \in \mathbb{R}$  は動的な重みの状態であり、 $\gamma > 0$  は後に定めるパラメータである。

この変位フィードバックを周波数領域で表現すると

$$u_i(s) = - \sum_{j=1}^N w_{ij}(s) (x_i(s) - x_j(s)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

となり、動的な重みの伝達関数は

$$w_{ij}(s) = \gamma p_{ij} - \frac{\gamma(\gamma p_{ij} - q_{ij})}{s + \gamma} = \frac{p_{ij}s + q_{ij}}{(1/\gamma)s + 1}$$

となる。つまり、 $\gamma$  を大きくすれば  $w_{ij}(s)$  は  $p_{ij}s + q_{ij}$  に近づく。このことは、動的な重みによる変位フィードバック (12) もまた静的な重みによる変位と速度のフィードバック (2) に近づくことを意味する。したがって、適切に  $\gamma$  を選ぶことにより動的な変位フィードバックが合意を達成することが予想できる。以下、合意を達成するための  $\gamma$  の条件について議論する。

動的な重みの状態ベクトルを

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) & \cdots & z_N(t) \end{bmatrix}^T$$

と定義するとき、マルチエージェント系全体は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \gamma L_v x(t) + z(t) &= 0, \\ \frac{1}{\gamma} \dot{z}(t) + (\gamma L_v - L_d)x(t) + z(t) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

と記述できる。ここに、 $L_v$  と  $L_d$  はグラフラプリアンであり、(3) に対するものと同様に定義する。したがって、 $L_v$  と  $L_d$  に対応するグラフが無向かつ連結であるとき、これらは (4) と (5) を満たす。

ここで、本稿の主結果を得る。

**定理 2** マルチエージェント系 (13) が合意を達成する、つまりある定数  $a \in \mathbb{R}$  と  $b \in \mathbb{R}$  が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{x}(t) - a \mathbf{1}_N) = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - (at + b) \mathbf{1}_N) = 0, \quad (15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \quad (16)$$

となるための十分条件は、 $L_v$  と  $L_d$  が (4) と (5) を満たし、 $\gamma$  が

$$S^T(\gamma L_v - L_d)S > 0 \quad (17)$$

を満たすことである。

この証明は以下の通りである。最初に、変数変換

$$z(t) = \left( \gamma L_v - L_d + \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T}{N} \right) \hat{z}(t) \quad (18)$$

を導入する。なお、これが正則行列による変換であることは、(17) より  $\gamma L_v - L_d + \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T / N > 0$  であることより確認できる。変換後の全体系は

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \gamma L_v x(t) + \left( \gamma L_v - L_d + \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T}{N} \right) \hat{z}(t) &= 0, \\ \frac{1}{\gamma} \left( \gamma L_v - L_d + \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T}{N} \right) \dot{\hat{z}}(t) + (\gamma L_v - L_d)x(t) \\ + \left( \gamma L_v - L_d + \frac{\mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T}{N} \right) \hat{z}(t) &= 0 \end{aligned}$$

と表現できる。さらに、 $\hat{z}(t)$  に対する変数変換

$$\begin{bmatrix} \bar{z}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N^T / \sqrt{N} \\ S^T \end{bmatrix} \hat{z}(t), \quad (19)$$

$$\hat{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N / \sqrt{N} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

と先に用いた  $x(t)$  に対する変数変換 (8) と (9) を適用すれば、マルチエージェント系全体の表現として

$$\ddot{\bar{x}}(t) + \bar{z}(t) = 0, \quad (21)$$

$$\ddot{\tilde{x}}(t) + S^T \gamma L_v S \tilde{x}(t) + S^T(\gamma L_v - L_d)S \tilde{z}(t) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{z}}(t) + \tilde{z}(t) = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} S^T(\gamma L_v - L_d)S \dot{\tilde{z}}(t) + S^T(\gamma L_v - L_d)S \tilde{x}(t) \\ + S^T(\gamma L_v - L_d)S \tilde{z}(t) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。このとき、条件 (17) のもとでは、(22) と (24) の係数行列が

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} S^T(\gamma L_v - L_d)S > 0, \\ \begin{bmatrix} \gamma S^T L_v S & S^T(\gamma L_v - L_d)S \\ S^T(\gamma L_v - L_d)S & S^T(\gamma L_v - L_d)S \end{bmatrix} > 0, \\ \text{rank } S^T(\gamma L_v - L_d)S = N - 1 \end{aligned}$$

を満たすことに注意する。つまり、(22) と (24) により記述される動的システムは、2 階と 1 階の連立微分方程式に対する安定条件 [9] を満たしているので、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{x}}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}(t) = 0 \quad (25)$$

である。一方、 $\gamma > 0$  より、(23) は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t) = 0$$

を意味し、これと (18) と (20) を合わせることで、(16) を得る。さらに  $\dot{x}(t)$  と  $x(t)$  については、(25) に (8) と (9) を合わせることで、先の節と同様に、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \dot{x}(t) - \mathbf{1}_N \frac{\mathbf{1}_N^T \dot{x}(t)}{N} \right) = S \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{x}}(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( x(t) - \mathbf{1}_N \frac{\mathbf{1}_N^T x(t)}{N} \right) = S \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$$

である。このとき、合意値は

$$\frac{\mathbf{1}_N^T \dot{x}(t)}{N} = \frac{\dot{\bar{x}}(t)}{\sqrt{N}}, \quad \frac{\mathbf{1}_N^T x(t)}{N} = \frac{\bar{x}(t)}{\sqrt{N}}$$

と表現でき、(21) より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\bar{x}}(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}(t) = 0$$

なので、ある定数  $a$  と  $b$  に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\bar{x}}(t) - a) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{x}(t) - (at + b)) = 0$$

が成り立つ。以上により定理 2 の証明が完成した。

## 4 数値例

数値例として、 $N = 5$  であり、5 つのエージェントが一列に連なって隣接するエージェント間でのみ変位情報が交換できる場合を考える。つまり、 $p_{ij}, q_{ij}$  を

$$p_{12} = p_{21} = q_{12} = q_{21} = 1, \quad p_{23} = p_{32} = q_{23} = q_{32} = 1,$$

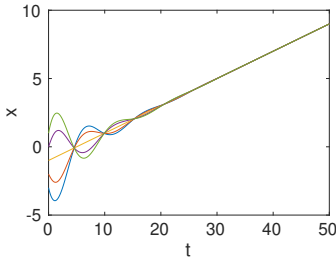


Fig. 1:  $x(t)$  of (3)

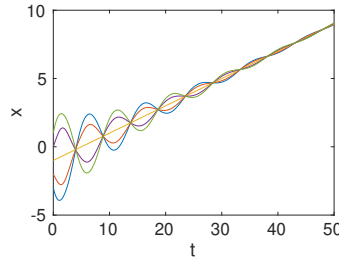


Fig. 2:  $x(t)$  of (13) with  $\gamma = 1.8$

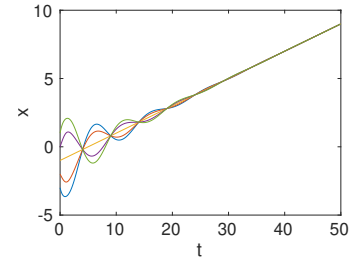


Fig. 3:  $x(t)$  of (13) with  $\gamma = 3.6$

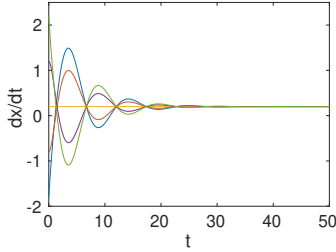


Fig. 4:  $\dot{x}(t)$  of (3)

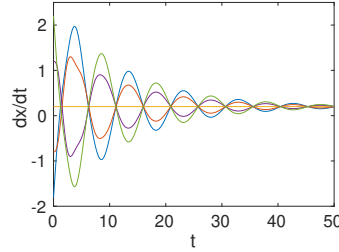


Fig. 5:  $\dot{x}(t)$  of (13) with  $\gamma = 1.8$

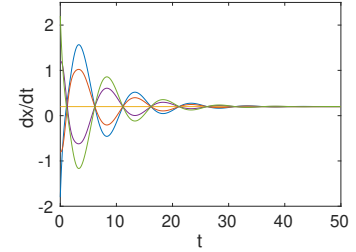


Fig. 6:  $\dot{x}(t)$  of (13) with  $\gamma = 3.6$

$$p_{34} = p_{43} = q_{34} = q_{43} = 1, p_{45} = p_{54} = q_{45} = q_{54} = 1$$

とおく。上記以外の要素はすべて 0 である。初期値が

$$\begin{aligned} x(0) &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \\ \dot{x}(0) &= \begin{bmatrix} -1.8 & -0.8 & 0.2 & 1.2 & 2.2 \end{bmatrix}^T, \\ z(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

であるときのマルチエージェント系全体の振る舞いを Figs. 1–6 に示す。なお、変位のフィードバック (12) では、 $\gamma = 1.8$  と  $\gamma = 3.6$  を選んだ。どちらの場合も定理 2 の条件を満たしており、Figs. 2–3, 5–6 でも実際に合意している。また、 $\gamma$  を大きく選ぶと、変位と速度のフィードバック (2) の場合の振る舞いに近づいている。

## 5 おわりに

本稿では、各エージェントが 2 重積分系のマルチエージェント系を対象に、たとえ速度が観測できなくても、動的な重みによる変位のフィードバックにより合意が達成できることを示した。ここでは、合意が達成できるための十分条件を、エージェントの変位情報の交換構造を表現するグラフを用いて表現した。このグラフが無向かつ連結であれば、合意を達成するような変位フィードバックが常に存在すること、それを実現する重みのパラメータが満たすべき条件がグラフラプラシアンにより表現できることを明らかにした。

謝辞：本研究の一部は、JST CREST JPMJCR15K2 と COOPS, International Bilateral Joint CNR Laboratories の支援を受けた。記して謝意を表す。

## 参考文献

- [1] F. Fagnani and P. Frasca: *Introduction to Averaging Dynamics over Networks*, Springer (2018)
- [2] F. Bullo: *Lectures on Network Systems*, Kindle Direct Publishing (2018)
- [3] W. Ren: On Consensus Algorithms for Double-Integrator Dynamics; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, No. 6, pp. 1503–1509 (2008)
- [4] W. Yu, G. Chen, and M. Cao: Some Necessary and Sufficient Conditions for Second-Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems; *Automatica*, Vol. 46, No. 6, pp. 1089–1095 (2010)
- [5] J. Mei, W. Ren, and J. Chen: Distributed Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems With Heterogeneous Unknown Inertias and Control Gains Under a Directed Graph; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 61, No. 8, pp. 2019–2034 (2016)
- [6] E. Capello and Y. Fujisaki: Second-Order Multi-Agent Consensus via Dynamic Displacement Interaction; *Proceedings of SICE International Symposium on Control Systems 2020 (Part of the 7th SICE Multi-symposium on Control Systems)*, 2E1-5 (2020)
- [7] E. Capello and Y. Fujisaki: Robust Consensus of Second-Order Heterogeneous Multi-Agent Systems via Dynamic Interaction; *Proceedings of the 59th IEEE Conference on Decision and Control*, to appear (2020)
- [8] E. E. Zajac: The Kelvin-Tait-Chetaev Theorem and Extensions; *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 11, No. 2, pp. 46–49 (1964)
- [9] Y. Fujisaki, M. Ikeda, and K. Miki: Robust Stabilization of Large Space Structures via Displacement Feedback; *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 12, pp. 1993–1996 (2001)
- [10] T. Hatanaka, N. Chopra, M. Fujita, and M. W. Spong: *Passivity-Based Control and Estimation in Networked Robotics*, Springer (2015)