Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica

Zenodo - 17 January 2020 - DOI 10.5281/zenodo.3611419

Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica

Amelia Carolina Sparavigna

Politecnico di Torino

Abstract: Si vuole discutere di alcuni calcoli di analisi vettoriale proposti nel testo Problems in Theoretical Physics, di L. G. Grechko e altri autori, edito da MIR. I calcoli sono strettamente legati all'elettromagnetismo.

Alcune formule dell'analisi vettoriale sono molto utili in fisica. Abbiamo ad esempio le ben note:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0 \qquad (2)$$

La (1) è evidentemente importante per i campi conservativi (f è uno scalare), la (2) per i campi solenoidali, quali il campo magnetico. Altre relazioni le troviamo in [1].

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}(f \boldsymbol{A}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{A} \qquad (4)$$

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \qquad (5)$$

$$\operatorname{rot}(f \boldsymbol{A}) = [\operatorname{grad} f \times \boldsymbol{A}] + f \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \qquad (6)$$

$$\Delta(\varphi \psi) = \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi + 2 \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi \qquad (7)$$

φ, ψ sono scalari.

Ricordiamo anche che $\Delta \varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad} \varphi$.

La relazione (3) è quella che si incontra quando si studia come ricavare l'equazione delle onde elettromagnetiche dalle equazioni di Maxwell.

La (5) è alquanto interessante per l'utilizzo che ne possiamo fare col vettore di Poynting (si veda [2]). Tenendo presente anche queste utili relazioni (1-7), possiamo risolvere i problemi posti in [3]. Questi calcoli sono proposti nel capitolo sullo studio dell'elettromagnetismo.

Aggiungiamo ancora alcune relazioni dall'appendice del [3].

$$\text{grad}(\varphi\psi)=\varphi\,\text{grad}\,\psi+\psi\,\text{grad}\,\varphi \quad (8)$$
$$\text{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+[\boldsymbol{A}\times\text{rot}\,\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{B}\times\text{rot}\,\boldsymbol{A}] \quad (9)$$
$$\frac{1}{2}\text{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}+[\boldsymbol{A}\times\text{rot}\,\boldsymbol{A}] \quad (10)$$
$$\text{rot}[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\,\text{div}\,\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\,\text{div}\,\boldsymbol{A} \quad (11)$$

Aggiungiamo una relazione del secondo ordine.

$$\Delta(f\,\boldsymbol{A})=\Delta(f\,A_x\boldsymbol{i}+f\,A_y\boldsymbol{j}+f\,A_z\boldsymbol{k})=\Delta(f\,A_x)\boldsymbol{i}+\Delta(f\,A_y)\,\boldsymbol{j}+\Delta(f\,A_z)\boldsymbol{k}$$

Utilizzo la (7), applicandola a $\Delta(f\,A_x),\Delta(f\,A_y),\Delta(f\,A_z)$:

$$\Delta(f\,\boldsymbol{A})=f\,\Delta\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\,\Delta f+2(\text{grad}\,f\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}$$

Altre relazioni del secondo ordine sono utili nella teoria elastica dei nematici [4].
Poi ci sono le relazioni integrali.

$$\oiint \varphi\,\boldsymbol{n}\,dS=\iiint \text{grad}\,\varphi\;dV \quad (12)$$

$\boldsymbol{n}$ è il vettore unitario normale alla superficie e diretto verso l’esterno.

$$\oiint(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\,dS=\iiint \text{div}\,\boldsymbol{A}\;dV \quad (13)$$
$$\oiint[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}]\,dS=\iiint \text{rot}\,\boldsymbol{A}\;dV \quad (14)$$
$$\oint A_n\,dl=\iint \text{rot}_n\boldsymbol{A}\;dS \quad (15)$$
$$\oint \varphi\,dl=\iint[\boldsymbol{n}\times\text{grad}\,\varphi]\;dS \quad (16)$$

Iniziamo con i problemi dal [3].

1) Calcolare il gradiente di una funzione $f(r)$, funzione che dipende solo dal valore assoluto del

modulo del vettore posizione $\boldsymbol{r}$. Risultato: $\operatorname{grad} f(r)=\frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

Esprimiamo l'espressione del gradiente:

$$\operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{df}{dr}\{\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{k}\} = \frac{df}{dr}\{\frac{x}{r}\mathbf{i}+\frac{y}{r}\mathbf{j}+\frac{z}{r}\mathbf{k}\}$$

$$\operatorname{grad} f(r)=\frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad (17)$$

Vediamo un esempio. $\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}=-3\frac{1}{r^4}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-3\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}$

Aggiungiamo anche un calcolo simile per la divergenza di una funzione $\boldsymbol{A}(r)$, funzione che dipende solo dal valore assoluto del modulo del vettore posizione $\boldsymbol{r}$.

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(r)=\frac{\partial A_x(r)}{\partial x}+\frac{\partial A_y(r)}{\partial y}+\frac{\partial A_z(r)}{\partial z} =$$

$$\frac{dA_x}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{dA_y}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{dA_z}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dA_x}{dr}\frac{x}{r}+\frac{dA_y}{dr}\frac{y}{r}+\frac{dA_z}{dr}\frac{z}{r}=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dr} \quad (18)$$

2) Calcolare (a) $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$, (b) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$, (c) $\operatorname{rot} f(r)\boldsymbol{r}$.

Ricordiamo che $\boldsymbol{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Quindi:

(a) $$\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial z}\mathbf{k}=3$$

(b) $$\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z})\mathbf{i}+(-\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial z})\mathbf{j}+(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y})\mathbf{k}=0$$

(c) Per il calcolo di $\operatorname{rot} f(r)\boldsymbol{r}$ uso la (6) e poi la (17):

$$\mathrm{rot}\, f\,\boldsymbol{r} = [\mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{r}] + f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} = [\mathrm{grad}\, f \times \boldsymbol{r}] = \frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \times \boldsymbol{r} = 0$$

3) Calcolare (a) $\mathrm{grad}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})$, (b) $\mathrm{grad}[(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})/r^3]$, (c) $(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$, (d) $\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{r})$, ed infine (e) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})$ dove $\boldsymbol{P}$ è un vettore costante.

(a) $$\mathrm{grad}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{\partial P_x x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial P_y y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial P_z z}{\partial z}\mathbf{k} = P_x\frac{\partial x}{\partial x}\mathbf{i} + P_y\frac{\partial y}{\partial y}\mathbf{j} + P_z\frac{\partial z}{\partial z}\mathbf{k} = \boldsymbol{P}$$

(b) Uso questo risultato per calcolare $\mathrm{grad}[(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})/r^3]$, insieme alla (8) e alla (17).

$$\mathrm{grad}[(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})/r^3] = \frac{1}{r^3}\mathrm{grad}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})\,\mathrm{grad}\frac{1}{r^3}$$

$$\mathrm{grad}[(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})/r^3] = \boldsymbol{P}/r^3 - (\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})(3\boldsymbol{r}/r^5)$$

(c) $$(\boldsymbol{P}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = \left(P_x\frac{\partial}{\partial x} + P_y\frac{\partial}{\partial y} + P_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{r} = P_x\frac{\partial x}{\partial x}\mathbf{i} + P_y\frac{\partial y}{\partial y}\mathbf{j} + P_z\frac{\partial z}{\partial z}\mathbf{k} = \boldsymbol{P}$$

(d) Per il calcolo di $\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{r})$ uso la (5) e ricordo che il vettore $\boldsymbol{P}$ è costante:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} = 0$$

(e) Infine per $\mathrm{rot}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})$ applico le definizioni di prodotto vettoriale e rotore. Si ottiene $\mathrm{rot}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}) = -2\boldsymbol{P}$.

Prima di proseguire coi problemi in [3], accenniamo alla legge di Gauss in forma locale.
Prendiamo $\boldsymbol{A}(r) = \boldsymbol{r}/r^3$ e calcoliamo $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(r)$, usando la (4).

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{r}/r^3) = \frac{1}{r^3}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{r} + \mathrm{grad}\frac{1}{r^3}\cdot\boldsymbol{r} = \frac{3}{r^3} - 3\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5} = 0$$

Infatti, come già visto: $\text{grad}\frac{1}{r^3}=-3\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}$. Quindi, il campo Coulombiano ha divergenza nulla, tranne nel punto ove è presenta la carica.

4) Calcolare (a) $\text{grad}(\boldsymbol{A}(r)\cdot\boldsymbol{B}(r))$, (b) $\text{div}(\varphi(r)\boldsymbol{A}(r))$, (c) $\text{rot}(\varphi(r)\boldsymbol{A}(r))$. Le funzioni $\varphi(r), \boldsymbol{A}(r), \boldsymbol{B}(r)$ dipendono solo dal valore del modulo del vettore posizione.

(a) Per calcolare $\text{grad}(\boldsymbol{A}(r)\cdot\boldsymbol{B}(r))$ possiamo fare riferimento al risultato del problema 1, ossia che si ha $\text{grad} f(r)=\frac{df}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Si ha che:

$$\text{grad}(\boldsymbol{A}(r)\cdot\boldsymbol{B}(r))=\frac{d}{dr}(\boldsymbol{A}(r)\cdot\boldsymbol{B}(r))\frac{\boldsymbol{r}}{r}=(\frac{d\boldsymbol{A}}{dr}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dr})\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

(b) Per calcolare $\text{div}(\varphi(r)\boldsymbol{A}(r))$ uso la (4) , la (17) e la (18).

$$\text{div}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\,\text{div}\,\boldsymbol{A}+\text{grad}\,\varphi\cdot\boldsymbol{A} \quad = \quad \frac{\varphi}{r}\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dr} \quad + \quad \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}$$

(c) Per calcolare $\text{rot}(\varphi(r)\boldsymbol{A}(r))$, parto dalla (6) e uso le definizioni:

$$\text{rot}(\varphi\boldsymbol{A})=\text{grad}\,\varphi\times\boldsymbol{A}+\varphi\,\text{rot}\,\boldsymbol{A} \quad = \quad \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A} \quad + \quad \frac{\varphi}{r}\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{A}}{dr}$$

5) Usando il teorema di Ostrogradski, calcolare gli integrali $\boldsymbol{I}=\oiint\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})dS$ e $\boldsymbol{I}=\oiint(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\,dS$, se il volume racchiuso dalla superficie è V e se il vettore $\boldsymbol{A}$ è costante.

Si prenda un generico vettore $\boldsymbol{p}$ costante:

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}\cdot\oiint\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})dS=\oiint(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})dS \quad = \quad \oiint(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}A_n)dS=\iiint\text{div}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{A})dV$$

Uso la relazione $\text{div}(f\boldsymbol{A})=f\,\text{div}\,\boldsymbol{A}+\text{grad}\,f\cdot\boldsymbol{A}$, che nel caso di vettore costante diventa: $\text{div}(f\boldsymbol{A})=\text{grad}\,f\cdot\boldsymbol{A}$.

$$\iiint \operatorname{div}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{A})dV = \iiint \boldsymbol{A}\cdot \operatorname{grad}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})dV$$

Siccome $\operatorname{grad}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}$:

$$\iiint \boldsymbol{A}\cdot \operatorname{grad}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})dV = \iiint \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}\; dV = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p})\; V$$

Dato che il vettore $\boldsymbol{p}$ è generico: $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}\,V$.

Passiamo ora al calcolo dell'integrale $\boldsymbol{I} = \oiint (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\,dS$ nelle stesse condizioni del calcolo precedente.

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}\cdot\oiint (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}\,dS = \oiint (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})dS \;=\; \oiint (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\,p_n)dS = \iiint \operatorname{div}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p})dV$$

Uso la (4):

$$\iiint \operatorname{div}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p})dV = \iiint \boldsymbol{p}\cdot \operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})dV$$

E poi ricordo che: $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}$. Si ha per la (9) che:

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + [\boldsymbol{A}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{r}] + [\boldsymbol{r}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{A} \quad .$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{I} \;=\; \iiint \boldsymbol{p}\cdot \operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})dV = \iiint \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}\; dV$$

Si ricade nel caso precedente.

6) Si dimostri che $\iiint \boldsymbol{A}\; dV = 0$ se dentro il volume si ha che $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$ e sulla superficie di contorno $A_n = 0$.

Come fatto nel calcolo precedente, prendiamo un generico vettore $\boldsymbol{p}$ costante. Questa volta, vediamo il vettore costante come il gradiente: $\boldsymbol{p} = \operatorname{grad}\varphi$.

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{I} = \iiint \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} \; dV$$

Usiamo le relazione vettoriali precedentemente viste: $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \varphi \boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{I} = \iiint \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} \; dV = \iiint \operatorname{div} \varphi \boldsymbol{A} \; dV = \oint\!\!\oint \varphi A_n dS$$

Sulla superficie di contorno $A_n = 0$ ed essendo $\boldsymbol{p} = \operatorname{grad} \varphi$ generico, segue $\iiint \boldsymbol{A} \, dV = 0$.

In fondo, se noi pensiamo che i campi a divergenza nulla, come nel caso discusso $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, possono essere campi elettrici e magnetici, e che noi li rappresentiamo con linee di campo chiuse, il risultato non ci sorprende. Pensiamo al campo magnetico indotto in un condensatore o al campo elettrico indotto da un campo magnetico variabile come nei due esempi dati in [2]; il volume da considerare è un cilindro con le linee di campo parallele alla sua superficie, da cui la condizione sulla superficie di contorno $A_n = 0$.

7) Mostrare che la divergenza del vettore seguente è nulla:

$$\boldsymbol{A} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, dV' \quad (20)$$

Chiamiamo $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \rho(\boldsymbol{r})$, si ha quindi che l'integrale sul volume assume una forma più familiare, quella del potenziale di una distribuzione continua di cariche (a parte l'assenza di costante dielettrica):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, dV'$$

Se usiamo il segno negativo:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, dV'$$

La funzione data sopra è la soluzione dell'equazione di Poisson: $\Delta \varphi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$. Abbiamo quindi immediatamente che la divergenza di (20) deve essere nulla.

References

[1] Smirnov V. I., Corso di Matematica Superiore, Editori Riuniti, 1978, Volume 2, Pagina 391.

[2] Sparavigna, Amelia Carolina. (2019, December 18). La divergenza del prodotto vettoriale ed il vettore di Poynting. Zenodo. http://doi.org/10.5281/zenodo.3583296

[3] Grechko, L.G., Sugakov, V.I., Tomasevich, O.F., & Fedorchenko, A.M. (1977). Problems in Theoretical Physics. Mir Publishers, Moscow.

[4] Barbero, G., Sparavigna, A., & Strigazzi, A. (1990). The structure of the distortion free-energy density in nematics: second-order elasticity and surface terms. Il Nuovo Cimento D, 12(9), 1259-1272.