

Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica

*Original*

Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica / Sparavigna, A.C.. - ELETTRONICO. - (2020).  
[10.5281/zenodo.3611419]

*Availability:*

This version is available at: 11583/2786118 since: 2020-01-28T21:51:41Z

*Publisher:*

*Published*

DOI:10.5281/zenodo.3611419

*Terms of use:*

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

*Publisher copyright*

(Article begins on next page)

## Alcuni calcoli di analisi vettoriale in fisica teorica

Amelia Carolina Sparavigna

Politecnico di Torino

*Abstract: Si vuole discutere di alcuni calcoli di analisi vettoriale proposti nel testo Problems in Theoretical Physics, di L. G. Grechko e altri autori, edito da MIR. I calcoli sono strettamente legati all'elettromagnetismo.*

Alcune formule dell'analisi vettoriale sono molto utili in fisica. Abbiamo ad esempio le ben note:

$$\text{rot grad } f = 0 \quad (1)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0 \quad (2)$$

La (1) è evidentemente importante per i campi conservativi ( $f$  è uno scalare), la (2) per i campi solenoidali, quali il campo magnetico. Altre relazioni le troviamo in [1].

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \quad (3)$$

$$\text{div}(f \mathbf{A}) = f \text{ div } \mathbf{A} + \text{grad } f \cdot \mathbf{A} \quad (4)$$

$$\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \quad (5)$$

$$\text{rot}(f \mathbf{A}) = [\text{grad } f \times \mathbf{A}] + f \text{ rot } \mathbf{A} \quad (6)$$

$$\Delta(\varphi \psi) = \psi \Delta \varphi + \varphi \Delta \psi + 2 \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi \quad (7)$$

$\varphi, \psi$  sono scalari.

Ricordiamo anche che  $\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi$ .

La relazione (3) è quella che si incontra quando si studia come ricavare l'equazione delle onde elettromagnetiche dalle equazioni di Maxwell.

La (5) è alquanto interessante per l'utilizzo che ne possiamo fare col vettore di Poynting (si veda [2]). Tenendo presente anche queste utili relazioni (1-7), possiamo risolvere i problemi posti in [3].

Questi calcoli sono proposti nel capitolo sullo studio dell'elettromagnetismo.

Aggiungiamo ancora alcune relazioni dall'appendice del [3].

$$\text{grad}(\varphi \psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi \quad (8)$$

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A}] \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{A}] \quad (10)$$

$$\text{rot}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A} \quad (11)$$

Aggiungiamo una relazione del secondo ordine.

$$\Delta(f \mathbf{A}) = \Delta(f A_x \mathbf{i} + f A_y \mathbf{j} + f A_z \mathbf{k}) = \Delta(f A_x) \mathbf{i} + \Delta(f A_y) \mathbf{j} + \Delta(f A_z) \mathbf{k}$$

Utilizzo la (7), applicandola a  $\Delta(f A_x), \Delta(f A_y), \Delta(f A_z)$  :

$$\Delta(f \mathbf{A}) = f \Delta \mathbf{A} + \mathbf{A} \Delta f + 2(\text{grad} f \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

Altre relazioni del secondo ordine sono utili nella teoria elastica dei nematici [4].

Poi ci sono le relazioni integrali.

$$\oint \varphi \mathbf{n} dS = \iiint \text{grad} \varphi dV \quad (12)$$

$\mathbf{n}$  è il vettore unitario normale alla superficie e diretto verso l'esterno.

$$\oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint \text{div} \mathbf{A} dV \quad (13)$$

$$\oint [\mathbf{n} \times \mathbf{A}] dS = \iiint \text{rot} \mathbf{A} dV \quad (14)$$

$$\oint A_n dl = \iint \text{rot}_n \mathbf{A} dS \quad (15)$$

$$\oint \varphi dl = \iint [\mathbf{n} \times \text{grad} \varphi] dS \quad (16)$$

Iniziamo con i problemi dal [3].

1) Calcolare il gradiente di una funzione  $f(r)$ , funzione che dipende solo dal valore assoluto del

modulo del vettore posizione  $r$ . Risultato:  $\text{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Esprimiamo l'espressione del gradiente:

$$\text{grad} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{df}{dr} \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right\} = \frac{df}{dr} \left\{ \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right\}$$

$$\text{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (17)$$

Vediamo un esempio.  $\text{grad} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{1}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} = -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}$

Aggiungiamo anche un calcolo simile per la divergenza di una funzione  $\mathbf{A}(r)$ , funzione che dipende solo dal valore assoluto del modulo del vettore posizione  $r$ .

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A}(r) &= \frac{\partial A_x(r)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(r)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(r)}{\partial z} = \\ &= \frac{dA_x}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dA_y}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dA_z}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dA_x}{dr} \frac{x}{r} + \frac{dA_y}{dr} \frac{y}{r} + \frac{dA_z}{dr} \frac{z}{r} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} \quad (18) \end{aligned}$$

2) Calcolare (a)  $\text{div} \mathbf{r}$ , (b)  $\text{rot} \mathbf{r}$ , (c)  $\text{rot} f(r) \mathbf{r}$ .

Ricordiamo che  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Quindi:

$$(a) \quad \text{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{k} = 3$$

$$(b) \quad \text{rot} \mathbf{r} = \left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

(c) Per il calcolo di  $\text{rot} f(r) \mathbf{r}$  uso la (6) e poi la (17):

$$\operatorname{rot} f \mathbf{r} = [\operatorname{grad} f \times \mathbf{r}] + f \operatorname{rot} \mathbf{r} = [\operatorname{grad} f \times \mathbf{r}] = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{r} = 0$$

3) Calcolare (a)  $\operatorname{grad}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})$ , (b)  $\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3]$ , (c)  $(\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{r}$ , (d)  $\operatorname{div}(\mathbf{P} \times \mathbf{r})$ , ed infine (e)  $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{P})$  dove  $\mathbf{P}$  è un vettore costante.

$$(a) \quad \operatorname{grad}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial P_x x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial P_y y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial P_z z}{\partial z} \mathbf{k} = P_x \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + P_y \frac{\partial y}{\partial y} \mathbf{j} + P_z \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{P}$$

(b) Uso questo risultato per calcolare  $\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3]$ , insieme alla (8) e alla (17).

$$\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3] = \frac{1}{r^3} \operatorname{grad}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \operatorname{grad} \frac{1}{r^3}$$

$$\operatorname{grad}[(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/r^3] = \mathbf{P}/r^3 - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})(3\mathbf{r}/r^5)$$

$$(c) \quad (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{r} = (P_x \frac{\partial}{\partial x} + P_y \frac{\partial}{\partial y} + P_z \frac{\partial}{\partial z}) \mathbf{r} = P_x \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{i} + P_y \frac{\partial y}{\partial y} \mathbf{j} + P_z \frac{\partial z}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{P}$$

(d) Per il calcolo di  $\operatorname{div}(\mathbf{P} \times \mathbf{r})$  uso la (5) e ricordo che il vettore  $\mathbf{P}$  è costante:

$$\operatorname{div}(\mathbf{P} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0$$

(e) Infine per  $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{P})$  applico le definizioni di prodotto vettoriale e rotore. Si ottiene  $\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = -2\mathbf{P}$ .

Prima di proseguire coi problemi in [3], accenniamo alla legge di Gauss in forma locale.

Prendiamo  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r^3$  e calcoliamo  $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , usando la (4).

$$\operatorname{div}(\mathbf{r}/r^3) = \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \operatorname{grad} \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} = \frac{3}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^5} = 0$$

Infatti, come già visto:  $\text{grad} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5}$ . Quindi, il campo Coulombiano ha divergenza nulla, tranne nel punto ove è presenta la carica.

4) Calcolare (a)  $\text{grad}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r))$ , (b)  $\text{div}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$ , (c)  $\text{rot}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$ . Le funzioni  $\varphi(r), \mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r)$  dipendono solo dal valore del modulo del vettore posizione.

(a) Per calcolare  $\text{grad}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r))$  possiamo fare riferimento al risultato del problema 1, ossia

che si ha  $\text{grad} f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Si ha che:

$$\text{grad}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)) = \frac{d}{dr}(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)) \frac{\mathbf{r}}{r} = \left( \frac{d\mathbf{A}}{dr} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dr} \right) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(b) Per calcolare  $\text{div}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$  uso la (4), la (17) e la (18).

$$\text{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{div} \mathbf{A} + \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{A} = \frac{\varphi}{r} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$$

(c) Per calcolare  $\text{rot}(\varphi(r)\mathbf{A}(r))$ , parto dalla (6) e uso le definizioni:

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \text{grad} \varphi \times \mathbf{A} + \varphi \text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \mathbf{r} \times \mathbf{A} + \frac{\varphi}{r} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{A}}{dr}$$

5) Usando il teorema di Ostrogradski, calcolare gli integrali  $\mathbf{I} = \oint \mathbf{r}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS$  e  $\mathbf{I} = \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS$ , se il volume racchiuso dalla superficie è V e se il vettore  $\mathbf{A}$  è costante.

Si prenda un generico vettore  $\mathbf{p}$  costante:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{p} \cdot \oint \mathbf{r}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} A_n) dS = \iiint \text{div}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \mathbf{A}) dV$$

Usando la relazione  $\text{div}(f \mathbf{A}) = f \text{div} \mathbf{A} + \text{grad} f \cdot \mathbf{A}$ , che nel caso di vettore costante diventa:  $\text{div}(f \mathbf{A}) = \text{grad} f \cdot \mathbf{A}$ .

$$\iiint \operatorname{div}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \mathbf{A}) dV = \iiint \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dV$$

Siccome  $\operatorname{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$  :

$$\iiint \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) dV = \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} dV = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) V$$

Dato che il vettore  $\mathbf{p}$  è generico:  $\mathbf{I} = \mathbf{A} V$  .

Passiamo ora al calcolo dell'integrale  $\mathbf{I} = \oiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS$  nelle stesse condizioni del calcolo precedente.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{p} \cdot \oiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n} dS = \oiint (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) dS = \oiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} p_n) dS = \iiint \operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \mathbf{p}) dV$$

Uso la (4):

$$\iiint \operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \mathbf{p}) dV = \iiint \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) dV$$

E poi ricordo che:  $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{A}$  . Si ha per la (9) che:

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{r}] + [\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}] = \mathbf{A} \text{ .}$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \iiint \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) dV = \iiint \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} dV$$

Si ricade nel caso precedente.

6) Si dimostri che  $\iiint \mathbf{A} dV = 0$  se dentro il volume si ha che  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  e sulla superficie di contorno  $A_n = 0$  .

Come fatto nel calcolo precedente, prendiamo un generico vettore  $\mathbf{p}$  costante. Questa volta, vediamo il vettore costante come il gradiente:  $\mathbf{p} = \operatorname{grad} \varphi$  .

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \iiint \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \, dV$$

Usiamo le relazioni vettoriali precedentemente viste:  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{A} = \text{div } \varphi \mathbf{A}$  .

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \iiint \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \, dV = \iiint \text{div } \varphi \mathbf{A} \, dV = \oint \varphi A_n \, dS$$

Sulla superficie di contorno  $A_n = 0$  ed essendo  $\mathbf{p} = \text{grad } \varphi$  generico, segue  $\iiint \mathbf{A} \, dV = 0$  .

In fondo, se noi pensiamo che i campi a divergenza nulla, come nel caso discusso  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  , possono essere campi elettrici e magnetici, e che noi li rappresentiamo con linee di campo chiuse, il risultato non ci sorprende. Pensiamo al campo magnetico indotto in un condensatore o al campo elettrico indotto da un campo magnetico variabile come nei due esempi dati in [2]; il volume da considerare è un cilindro con le linee di campo parallele alla sua superficie, da cui la condizione sulla superficie di contorno  $A_n = 0$  .

7) Mostrare che la divergenza del vettore seguente è nulla:

$$\mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \text{grad} \iiint \frac{\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \quad (20)$$

Chiamiamo  $\text{div } \mathbf{A} = \rho(\mathbf{r})$  , si ha quindi che l'integrale sul volume assume una forma più familiare, quella del potenziale di una distribuzione continua di cariche (a parte l'assenza di costante dielettrica):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

Se usiamo il segno negativo:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV'$$

La funzione data sopra è la soluzione dell'equazione di Poisson:  $\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = 0$  . Abbiamo quindi immediatamente che la divergenza di (20) deve essere nulla.

## References

- [1] Smirnov V. I., Corso di Matematica Superiore, Editori Riuniti, 1978, Volume 2, Pagina 391.
- [2] Sparavigna, Amelia Carolina. (2019, December 18). La divergenza del prodotto vettoriale ed il vettore di Poynting. Zenodo. <http://doi.org/10.5281/zenodo.3583296>
- [3] Grechko, L.G., Sugakov, V.I., Tomasevich, O.F., & Fedorchenko, A.M. (1977). Problems in Theoretical Physics. Mir Publishers, Moscow.
- [4] Barbero, G., Sparavigna, A., & Strigazzi, A. (1990). The structure of the distortion free-energy density in nematics: second-order elasticity and surface terms. *Il Nuovo Cimento D*, 12(9), 1259-1272.