POLITECNICO DI TORINO
Repository ISTITUZIONALE

I sistemi multi-agente e gli algoritmi di consenso

Original
I sistemi multi-agente e gli algoritmi di consenso / Como, G., Fagnani, F., Zampieri, S.. - In: LA MATEMATICA NELLA SOCIETÀ E NELLA CULTURA. - ISSN 1972-7356. - 5:1(2012), pp. 1-29.

Availability:
This version is available at: 11583/2647792 since: 2016-09-09T17:16:20Z

Publisher:
Unione Matematica Italiana

Published
DOI:

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

25 November 2026

I sistemi multi-agente e gli algoritmi di consenso*

Giacomo Como † Fabio Fagnani ‡ Sandro Zampieri§

17 aprile 2012

Sommario

Recentemente, i sistemi multi-agente sono diventati oggetto di studio in molte differenti discipline, quali la biologia, l'ingegneria, la fisica, l'economia e le scienze sociali, facendo emergere un campo di ricerca interdisciplinare vasto ed in costante espansione, la scienza delle reti. L'analisi dei modelli matematici che descrivono tali sistemi ha raggiunto risultati significativi, ma rimane per lo più un campo di ricerca molto aperto, nel quale è facile prevedere importanti sviluppi nei prossimi anni. Tale analisi è motivata in particolare dalla necessità di sviluppare strumenti per il controllo ed il progetto di tali sistemi. In questo articolo ci occupiamo degli algoritmi di consenso, un importante esempio di progettazione di sistemi multi-agente che ha tratto spunto dalla dinamica di sistemi di cooperazione esistenti nelle scienze naturali e sociali.

1 I sistemi multiagente

Molti sistemi naturali e artificiali sono modellabili come un numero, in genere molto elevato, di unità omogenee o eterogenee, che interagiscono tra di loro. In genere l'interazione avviene su basi locali, cioè interagiscono tra loro solo le unità che sono geograficamente attigue, anche se in alcuni

*L'attività di ricerca di Sandro Zampieri è stata in parte finanziata dal Settimo Programma Quadro della Comunità Europea attraverso il progetto n. FP7-ICT-223866-FeedNetBack.

†Department of Automatic Control, Lund University, Box 118, SE-221 00, Lund, Sweden, giacomo.como@control.lth.se

‡Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino, fabio.fagnani@polito.it

§Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Padova, Via Gradenigo 6/b, 35131 Padova, zampi@dei.unipd.it

casi la topologia delle interazioni può emergere come conseguenza di regole diverse non strettamente legate alla distanza tra unità. Queste unità, ciascuna dal comportamento generalmente piuttosto semplice, quando sono parti di questi sistemi interconnessi possono dare luogo a comportamenti globali piuttosto complessi. Nel settore dell'ingegneria, sistemi con queste caratteristiche sono detti sistemi multi-agente. Negli ultimi quindici anni circa, lo studio di tali sistemi ha fatto emergere un campo di ricerca interdisciplinare vasto ed in costante espansione, la *scienza delle reti*. [33]

Tra gli esempi più significativi di sistemi multi-agente possiamo elencare:

- sistemi fisici di tipo termodinamico;
- sistemi sociali, economici, o finanziari;
- sistemi ecologici;
- sistemi biochimici e genetici.

Nell'ambito delle scienze sociali, tali sistemi multi-agente sono utilizzati, ad esempio, nella modellizzazione della dinamica delle opinioni e dell'apprendimento sociale [21, 23, 1], così come dell'evoluzione dei tratti culturali e del linguaggio [4, 34]. Nel più ristretto ambito tecnologico possiamo elencare invece:

- sistemi di trasporto; [27, 44]
- sistemi di distribuzione di energia elettrica, dell'acqua o del gas; [30, 36, 11]
- sistemi di telecomunicazione e Internet. [13]

Il successo di questo paradigma di funzionamento è dovuto a varie ragioni. In effetti, sistemi così strutturati sono generalmente caratterizzati da una estrema robustezza rispetto a cambiamenti esterni, pur potendo presentare in certi regimi di funzionamento transizioni critiche tra diverse fasi stabili. Inoltre, questi sistemi sono caratterizzati da un elevato grado di adattabilità e autonomia nel senso che sia le leggi di funzionamento locale delle unità, sia la rete che descrive l'interazione tra le unità sono spesso generate in modo spontaneo come reazione alle condizioni esterne e a improvvisi cambiamenti delle stesse, come ad esempio rotture o eventi improvvisi di grande impatto.

Questa classe di sistemi è stata tradizionalmente oggetto di studio da parte delle fisica statistica che ha fornito potenti strumenti di analisi della loro dinamica [42, 38, 12]. Tuttavia, a tutt'oggi una completa comprensione

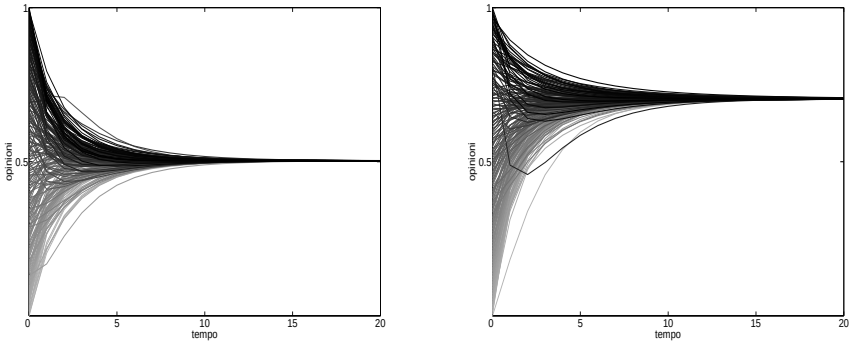
delle proprietà di tali sistemi è ancora lontana, soprattutto per quanto riguarda lo sviluppo di strumenti per il loro progetto. Per questo motivo sono ancora molti gli sforzi della comunità scientifica allo scopo di capire meglio la dinamica dei sistemi multi-agente. In effetti, molte importanti infrastrutture potrebbero trarre un enorme vantaggio da metodi di progetto basati su questo paradigma.

Le caratteristiche specifiche dei sistemi multi-agente sono qui elencate.

- Questi sistemi sono composti da un numero spesso molto elevato di unità omogenee o eterogenee distribuite su una vasta area geografica.
- Ciascuna unità è spesso dotata di risorse limitate in termini di energia, di capacità di calcolo e di comunicazione.
- A causa del loro basso costo, spesso queste unità sono molto fragili e quindi molto esposte a malfunzionamenti. D'altra parte il loro numero è spesso ridondante rendendo così possibile il mantenimento di un accettabile livello di funzionamento del sistema complessivo.
- Questi sistemi devono poter operare in ambienti piuttosto dinamici e impredicibili.
- A causa della loro complessità, questi sistemi devono poter funzionare senza o con un limitato ausilio di un coordinamento centralizzato. Inoltre la singola unità è tipicamente in possesso di una conoscenza molto limitata del sistema globale nel quale essa opera.

2 Gli algoritmi di consenso

Gli algoritmi di consenso [41, 6, 9, 31, 35] costituiscono un esempio di progettazione di sistemi multi-agente che ha tratto spunto dalla dinamica di sistemi di cooperazione esistenti nelle scienze naturali e sociali. L'idea alla base è molto semplice. Si suppone che esistano un numero di unità indipendenti e che ciascuna di queste sia a conoscenza di un'informazione, rappresentata da un numero reale. Possiamo immaginare che le unità siano individui e che l'informazione sia l'opinione che l'individuo ha su un certo fatto. Il problema consiste nell'analizzare come queste opinioni si modifichino nel tempo per effetto dello scambio di informazioni tra gli individui fino alla possibile convergenza ad un'unica opinione che aggreghi in sé tutte le opinioni iniziali. Nelle scienze sociali, varie evidenze empiriche [21, 43] hanno mostrato come tale opinione aggregata possa fornire un'ottima stima di quantità ignote ed



(a) (b)

Figura 1: Dinamiche di opinioni in popolazioni di 200 agenti ciascuna. In entrambi i casi il sistema converge da una condizione iniziale di opinioni campionate indipendentemente ed uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$ ad un consenso unanime. In (a), tale consenso è sulla media delle opinioni iniziali, mentre in (b) il consenso è su un'opinione pi prossima al limite superiore dell'intervallo iniziale.

indotto una vasta letteratura, anche divulgativa, sul suggestivo fenomeno della cosiddetta *saggezza delle folle* [40].

La teoria della dinamica delle opinioni studia proprio sotto quali condizioni questa convergenza ad un'unica opinione (consenso) avviene e come questa dipende dalle opinioni iniziali. Un modo estremamente semplificato di modellare matematicamente un tale fenomeno è attraverso l'introduzione di N numeri reali $y_1, \ldots, y_N$, che rappresentano le opinioni iniziali, e dall'iterazione

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} P_{i,j} x_j(t)$$

dove indichiamo con $x_i(t)$ l'opinione dell'individuo i all'istante t che è inizializzata ponendo $x_i(0) = y_i$. In altre parole, all'istante t, l'individuo i viene a conoscenza dell'opinione degli altri individui (in realtà solo degli individui j tali per cui $P_{i,j} \neq 0$) e da queste ricava una nuova opinione che è una combinazione lineare di tutte le opinioni che conosce, ciascuna pesata con un peso in generale diverso. Anche se nella formula precedente non è esplicitamente indicato, come vedremo in seguito, in generale i pesi possono

dipendere anche dal tempo e dalle opinioni stesse. Ad esempio l'individuo è talvolta poco influenzato da opinioni troppo diverse dalla propria.

È ragionevole assumere che $P_{i,j} \geq 0$ per ogni coppia di individui $i \neq j$, cioè che le opinioni di altri non respingano l'opinione di un individuo verso posizioni più estreme, ma piuttosto tendano ad attrarla o al più a lasciarla indifferente. Nelle scienze sociali questa principio va sotto il nome di influenza sociale [25], e da un punto di vista matematico costituisce un'ipotesi fondamentale per l'analisi di tali sistemi: ad esempio, nei modelli lineari deterministici ci si riferisce a tale proprietà come alla positività del sistema, nei modelli stocastici di sistemi di particelle interagenti si parla di attrattività della dinamica. Inoltre, nel caso che in cui l'individuo riceva tutte opinioni identiche alla sua, è naturale aspettarsi che questo non cambierà opinione. Ciò impone nel modello che $\sum_{j=1}^{N} P_{i,j} = 1$ per ogni indice i.

L'iterazione precedente descrive il cosiddetto algoritmo di consenso. Una maniera più compatta per indicare questa iterazione è attraverso la definizione dei vettori colonna N-dimensionali $x(t)$ e y, aventi rispettivamente $x_i(t)$ e y_i come componente in posizione i e la definizione della matrice P avente il numero $P_{i,j}$ in posizione i, j. In questo modo possiamo scrivere l'iterazione nel modo seguente

$$x(t+1) = Px(t) \tag{1}$$
$$x(0) = y \tag{2}$$

La condizione precedente sui pesi $P_{i,j}$ si traduce nella condizione $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ è il vettore colonna con elementi tutti uguali a 1. Nel caso molto semplificato e poco realistico in cui la matrice P non dipenda dall'istante temporale t né dalle opinioni, l'iterazione precedente può essere descritta come un sistema dinamico lineare e quindi le opinioni al tempo t saranno date da

$$x(t) = P^t y.$$

Si noti che, poiché $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, allora necessariamente la matrice P avrà un autovalore unitario. Se questo ha molteplicità algebrica unitaria e se tutti gli altri autovalori sono di modulo minore di uno, allora P^t convergerà a una matrice di rango unitario. Più precisamente

$$P^t \longrightarrow \mathbf{1}v^T$$

dove v è l'autovettore sinistro di P relativo all'autovalore unitario tale che $v^T\mathbf{1} = 1$. Ciò implica che

$$x(t) \longrightarrow \alpha\mathbf{1}$$

dove $\alpha = v^T y = \sum_{i=1}^{N} v_i x_i(0) = \sum_{i=1}^{N} v_i y_i$. In altre parole, le opinioni convergeranno allo stesso valore che sarà funzione lineare delle opinioni iniziali $x_i(0) = y_i$. Si noti inoltre che, se la matrice P è tale che $\mathbf{1}^T P = \mathbf{1}$, cioè se $\mathbf{1}$ è anche autovettore sinistro oltre che destro di P, allora si ha che $v = N^{-1}\mathbf{1}$ e quindi $\alpha = N^{-1}\mathbf{1}^T y$. In tal caso l'opinione comune finale coincide con la media aritmetica delle opinioni iniziali.

La condizione che gli elementi della matrice P siano tutti non negativi e che la somma su ciascuna riga sia pari a 1 (in questo caso, la matrice P è detta *stocastica*) semplifica molto la verifica di convergenza al consenso, grazie alla teoria di Perron-Frobenius [22]. Supponiamo di associare ad una matrice P il grafo $\mathcal{G}_P$ con insieme dei vertici $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$ e insieme degli archi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ tale che una coppia (i, j) appartiene ad $\mathcal{E}$ se e solo se $P_{ji} > 0$. Si può allora dimostrare che se $\mathcal{G}_P$ è fortemente connesso (da ogni nodo si può raggiungere qualunque altro nodo tramite un cammino sul grafo) e se $P_{i,i} > 0$ per qualche agente $i \in \mathcal{V}$, allora l'autovalore 1 è semplice e tutti gli altri autovalori sono di modulo minore di uno. Di conseguenza, in tal caso, l'algoritmo (1) converge al consenso, per ogni scelta delle condizioni iniziali.

L'algoritmo di consenso può essere utilizzato come componente essenziale per la soluzione di numerosi problemi di calcolo distribuito multi-agente [46]. Supponiamo, ad esempio, che esistano N unità o agenti, ciascuno in possesso di un valore scalare, e che gli agenti necessitino di calcolare la media aritmetica dei loro valori. Supponiamo inoltre che ciascun agente possa ricevere informazioni solo da alcuni agenti. La topologia che descrive chi comunica con chi è rappresentabile da un grafo diretto $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ dove $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$ è l'insieme dei vertici del grafo, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ coincide con l'insieme degli archi. Il fatto che una coppia (j, i) sia un arco, cioè appartenga ad $\mathcal{E}$, sta a significare che l'agente i può ricevere informazioni dall'agente j. Se una matrice P soddisfa le condizioni precedenti e in più è tale che $P_{i,j} \neq 0$ solo se $(j, i) \in \mathcal{E}$, allora l'iterazione (1) può essere vista come la descrizione di ciò che l'agente i deve compiere al tempo t in modo che asintoticamente tutti gli agenti siano in possesso della media dei valori y_i.

Il calcolo della media è la base per la soluzione di molti problemi ingegneristici specialmente nel settore che riguarda la programmazione di reti di sensori. Consideriamo ad esempio il seguente problema di stima distribuita nel quale si assume che esistano N sensori distribuiti su un'area e che ciascuno di questi possa misurare una grandezza x che però risulta corrotta da un errore di misura. Quindi ciascun sensore i dispone del numero $y_i = x + e_i$ dove gli errori di misura e_i possono essere ragionevolmente modellati come

variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite. In questo caso le migliore stima di x ottenibile a partire dalle misure è data dalla media aritmetica degli y_i.

Un'altra classe di esempi di applicazione riguarda il controllo di gruppi di veicoli autonomi cooperanti [19, 24]. Si supponga ad esempio di avere un gruppo di veicoli che si debbano incontrare in un punto dello spazio. Tale punto può essere convenientemente calcolato attraverso l'utilizzo dell'algoritmo sopra descritto. L'algoritmo di consenso può infine essere utilizzato anche nel caso in cui il gruppo di veicoli debba stimare la sorgente ad esempio di calore a partire da misure di temperatura. In questo caso, infatti, mentre il singolo veicolo, avendo a disposizione misure relative in un punto dello spazio, non è in grado di stimare da solo la distribuzione spaziale delle temperature, il gruppo di veicoli invece è in grado di ottenere tale stima dall'insieme delle misure. Si può in effetti ottenere tale stima attraverso l'algoritmo di consenso.

3 Reti di interazione fissa

In questa sezione approfondiamo l'analisi del comportamento asintotico degli algoritmi di consenso con matrice stocastica di evoluzione P fissa. Come discusso precedentemente, condizione sufficiente per la convergenza del corrispondente algoritmo di consenso $x(t+1) = Px(t)$, è che il grafo associato $\mathcal{G}_P$ sia fortemente connesso e che $P_{i,i} > 0$ per qualche $i \in \mathcal{V}$. La velocità di convergenza è un parametro fondamentale in questo tipo di problemi in quanto l'algoritmo sarà comunque arrestato dopo un certo periodo di tempo T ed è cruciale sapere quanto differiranno le opinioni dei vari agenti in quell'istante. È chiaro che la velocità di convergenza è strettamente collegata al secondo autovalore più grande, in modulo, della matrice P. Vediamo questo in qualche dettaglio nel caso particolare in cui la matrice P sia simmetrica. Siano $1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_N$ gli autovalori di P contati con la loro molteplicità e siano v^j gli autovettori normalizzati corrispondenti. Si noti che $v^1 = N^{-1/2}\mathbf{1}$. Definiamo

$$\mu_2 = \max\{|\lambda_j| \,:\, j = 2, \ldots, N\}\,.$$

Si può scrivere

$$P = N^{-1}\mathbf{1}^T\mathbf{1} + \sum_{j=2}^{N} \lambda_j v^j v^{jT}\,.$$

In questo caso si ha che

$$x(t) = P^t x(0) \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} N^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T x(0)\,.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} ||x(t) - N^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T x(0)||^2 &= ||\sum_{j=2}^{N} \lambda_j^t v^j v^{jT} x(0)||^2 \\ &= \sum_{j=2}^{N} |\lambda_j|^{2t} ||v^j v^{jT} x(0)||^2 \\ &\leq \mu_2^t ||x(0)||^2\,. \end{aligned}$$

La convergenza al consenso è così dettata dal decadimento esponenziale μ_2^t: quanto più μ_2 è piccolo, tanto più veloce sarà la convergenza.

Il problema di stabilire la velocità di convergenza è stato trasformato in un problema di algebra lineare: calcolare il secondo autovalore in modulo della matrice P. Il calcolo analitico esplicito del secondo autovalore è possibile solo in pochi casi; in generale il problema centrale è cercare di stimare accuratamente questo valore. Nel seguito studieremo una classe di matrici P, le cosiddette matrici circolanti, per le quali il calcolo analitico risulta possibile.

Per motivi di semplicità notazionale, è conveniente pensare le righe e le colonne di queste matrici indicizzate da 0 a $N-1$, anziché come solitamente da 1 a N. Supponiamo che P abbia la seguente proprietà: $P_{i,j} = P_{i+h,j+h}$ per ogni i, j, h interpretando la somma tra indici come somma modulo N. Tali matrici si dicono *circolanti*: se $\pi = [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \cdots\ \pi_{N-2}\ \pi_{N-1}]$ è il vettore riga che rappresenta la prima riga di P (pensata con indice di riga 0), si ha che le altre righe di P si ottengono operando successive traslazioni circolari sul vettore π: $P_{i,j} = \pi_{j-i}$. La matrice P risultante ha la seguente forma

$$P = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_{N-2} & \pi_{N-1} \\ \pi_{N-1} & \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_{N-3} & \pi_{N-2} \\ \pi_{N-2} & \pi_{N-1} & \pi_0 & \cdots & \pi_{N-4} & \pi_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \cdots & \pi_0 & \pi_1 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_{N-1} & \pi_0 \end{bmatrix}.$$

Si noti che per ogni i e j, si ha che

$$\sum_h P_{h,j} = \sum_h \pi_{j-h} = \sum_h \pi_{h-i} = \sum_h P_{i,h}\,.$$

Si ha quindi che se $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$ allora $P^T\mathbf{1} = \mathbf{1}$ e quindi, in questo caso, se si converge al consenso, si converge automaticamente alla media delle condizioni iniziali.

La struttura spettrale delle matrici circolanti è piuttosto semplice. In effetti, se definiamo il vettore colonna v^j per $j = 0, 1, \ldots, N-1$ nel modo seguente

$$v_h^j = N^{-1/2} e^{2\pi \mathbf{i} \frac{jh}{N}}, \qquad h = 0, 1, \ldots, N-1,$$

otteniamo che

$$(Pv^j)_h = \sum_k \pi_{h-k} N^{-1/2} e^{2\pi \mathbf{i} \frac{jk}{N}} = \left(\sum_k \pi_k e^{-2\pi \mathbf{i} \frac{jk}{N}} \right) v_h^j .$$

Questo dimostra che i v^j sono autovettori di P e che gli autovalori corrispondenti sono

$$\lambda_j = \sum_k \pi_k e^{-2\pi \mathbf{i} \frac{jk}{N}} .$$

Si noti che, se imponiamo che $\sum_k \pi_k = 1$, allora $\lambda_0 = 1$ e quindi $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Esempio 1 *Come caso particolare di matrice circolante stocastica prendiamo P tale che $P_{k,k} = 1 - a$, $P_{k,k-1} = P_{k,k+1} = a/2$ per ogni $k = 1, \ldots, N$ dove $a \in [0, 1]$ e dove le operazioni algebriche sugli indici sono da interpretarsi modulo N. Il grafo corrispondente a tale matrice è il ciclo costituito da N nodi (vedi figura 2). In tal caso gli autovalori sono dati da:*

$$\lambda_j = 1 - a + \frac{a}{2} \left(e^{2\pi \mathbf{i} \frac{j}{N}} + e^{-2\pi \mathbf{i} \frac{j}{N}} \right) = 1 - a \left[1 - \cos \frac{2\pi j}{N} \right] .$$

Nel caso in cui N è un numero pari, è immediato verificare che

$$\mu_2 = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_{N/2}|\} .$$

Fissato un qualunque valore di a, è facile vedere che, se N è scelto abbastanza grande, si ha che $\mu_2 = \lambda_1 = 1 - a[1 - \cos \frac{2\pi}{N}]$. Per $N \to +\infty$ si ottiene così la stima asintotica $\mu_2 = 1 - a4\pi^2/N^2 + o(1/N^2)$. Si noti che pur essendo il secondo autovalore strettamente più piccolo di 1 per ogni N e assicurando così convergenza esponenziale al consenso, al crescere di N il secondo autovalore si avvicina a 1, deteriorando così la velocità di convergenza. In effetti se definiamo $T(\epsilon) := \min\{t \,|\, \mu_2^t \leq \epsilon\}$, si ottiene facilmente che come funzione di N e per ogni $\epsilon > 0$ fissato, $T(\epsilon)$ è dell'ordine di N^2. In altri termini, serve iterare l'algoritmo per un numero di passi che cresce come N^2, per assicurarsi che la distanza dal consenso sia ridotta di un fattore prefissato ϵ.

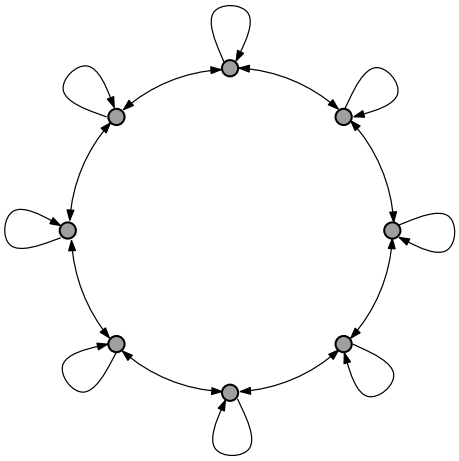


Figura 2: Il grafo circolante dell'Esempio 1

Vogliamo ora considerare un modello di interazione più complesso di quello studiato nell'esempio sopra che corrisponda ad un grafo con una struttura bidimensionale.

Esempio 2 *Costruiamo una matrice P i cui elementi sono indicizzati in $\mathcal{V} = \{0, \dots, M-1\}^2$ ponendo*

$$P_{(h_1,h_2)(k_1,k_2)} = \begin{cases} 1-a & \text{se } (h_1,h_2) = (k_1,k_2) \\ a/4 & \text{se } h_1 = k_1 \text{ e } h_2 = k_2 \pm 1 \text{ o se } h_2 = k_2 \text{ e } h_1 = k_1 \pm 1\,. \end{cases}$$

Il grafo corrispondente corrisponde ad una griglia bidimensionale $M \times M$ chiusa in modo 'toroidale', in altri termini il prodotto del ciclo per se stesso (vedi Figura 3). Con calcoli simili a quelli illustrati nell'esempio precedente si può dimostrare che gli autovalori di P sono

$$\lambda_{(h_1,h_2)} = 1 - \frac{a}{2}\left[2 - \cos\frac{2\pi h_1}{M} - \cos\frac{2\pi h_2}{M}\right], \qquad h_1, h_2 \in \{0, \dots, M-1\}\,.$$

Per valori di M abbastanza grandi il il secondo più grande autovalore è dato da $\mu_2 = \lambda_{(1,0)} = 1 - \frac{a}{2}[1 - \cos\frac{2\pi}{M}]$. Per $M \to +\infty$ si ottiene così la stima asintotica $\mu_2 = 1 - a2\pi^2/M^2 + o(1/M^2)$. In apparenza abbiamo ottenuto lo stesso risultato che nel caso circolante. Si noti tuttavia che mentre prima il numero dei nodi era esattamente $N = M$ ora è $N = M^2$! Il fatto di avere ottenuto la stessa formula asintotica in M significa che il comportamento rispetto al numero dei nodi del grafo è invece cambiato. In termini di tempi

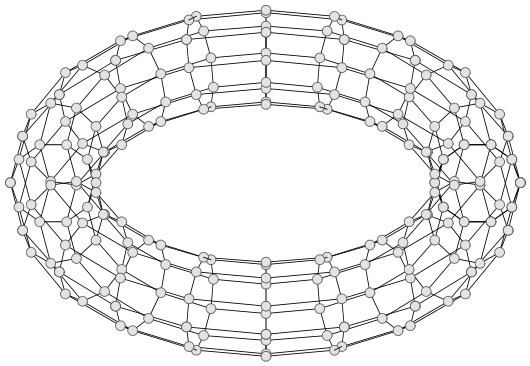


Figura 3: Il grafo toroidale dell'Esempio 2

di convergenza si ottiene che $T(\epsilon) \asymp N$*, cioè il tempo di convergenza stavolta cresce linearmente, e non più proporzionalmente al quadrato del numero di nodi.*

Questi esempi mostrano come l'architettura della rete di comunicazione abbia ripercussioni importanti sull'algoritmo. Se è vero che la connessione è sufficiente per la convergenza al consenso, la velocità di questa convergenza risulta dipendere sensibilmente dalla forma del grafo [9]. Considerando ad esempio griglie toroidali di dimensione $d \geq 3$ con N nodi, otterremmo che $T(\epsilon) \asymp N^{2/d}$ al crescere di N: più aumentiamo la dimensione più abbassiamo il tempo di convergenza. Naturalmente alzare la dimensione d, significa aumentare le connessioni: nella griglia d-dimensionale ogni nodo ha grado $2d$, cioè deve comunicare con $2d$ altri nodi. Per questa classe di grafi, per diminuire il tempo di convergenza, sembra essere necessario aumentare il grado di ogni nodo. È naturale quindi chiedersi se ci sia un rapporto tra tempo di convergenza e numero di connessioni e se sia possibile ridurre il tempo di convergenza mantenendo però fisso il numero delle connessioni. La risposta a quest'ultima domanda è sorprendentemente positiva: esistono grafi detti *espansori* che, pur mantenendo limitati i gradi dei vari nodi, conducono a velocità di convergenza addirittura che non decrescono in N [3]. Questi grafi tuttavia non sono utilizzabili in tutti i contesti applicativi. Ad esempio i grafi che naturalmente appaiono nell'ambito della rete dei sensori si comportano in maniera simile ai grafi dei due esempi precedenti.

4 Reti di interazione variabile

In molti contesti applicativi, supporre di avere un grafo di comunicazione fisso è un'ipotesi troppo restrittiva. Ad esempio nell'ambito delle reti di sensori, può accadere che ad un certo istante certi nodi siano disattivati o che condizioni ambientali impediscano loro di comunicare. Risulta quindi importante avere risultati simili a quelli visti nel capitolo precedente che coinvolgano però grafi tempo-varianti.

Un risultato in tal senso è il seguente [41, 31]. Supponiamo di avere una successione di matrici $P(t)$ di dimensioni $N \times N$. Associamo ad esse, come fatto prima, i corrispondenti grafi diretti $\mathcal{G}_{P(t)}$ con insieme dei vertici $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$ e insieme degli archi $\mathcal{E}(t) \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ tale che una coppia (i, j) appartiene ad $\mathcal{E}(t)$ se e solo se $P_{ji}(t) > 0$.

Fissato un intero positivo T, possiamo considerare la sequenza di grafi diretti $\mathcal{G}_k$ con insieme dei vertici $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$ e insieme degli archi

$$\mathcal{E}_k := \mathcal{E}(kT) \cup \mathcal{E}(kT + 1) \cup \ldots \cup \mathcal{E}((k + 1)T - 1)\,.$$

In altri termini, $\mathcal{E}_k$ rappresenta l'insieme degli archi (i, j) tali che $P_{ji}(t) > 0$ per almeno un instante t appartenente all'intervallo discreto $\{kT, kT + 1, \ldots, (k + 1)T - 1)\}$. Se esiste un T tale per cui tutti i grafi $\mathcal{G}_k$ hanno una radice, cioè hanno un nodo a partire dal quale è possibile raggiungere tutti i nodi attraverso un cammino sul grafo, allora si può dimostrare che l'algoritmo

$$x(t + 1) = P(t)x(t)$$

converge al consenso, per ogni scelta delle condizioni iniziali.

Gli algoritmi di consenso visti finora richiedono una perfetta sincronizzazione della rete; in effetti il tempo di aggiornamento delle stime deve essere lo stesso per tutti gli agenti. Questa è chiaramente un'ipotesi troppo forte nelle applicazioni anche perché il problema della sincronizzazione degli orologi è un problema almeno difficile quanto il problema che risolvono gli algoritmi di consenso. È quindi necessario pensare a delle versioni asincrone degli algoritmi visti sinora. Il più celebre tra questi è senza dubbio il cosiddetto algoritmo *gossip* [6, 18] dove ogni agente è dotato di un orologio di tipo poissoniano. Quest'ultimo è un orologio che ticchetta in momenti casuali con gli intervalli tra due ticchettìi consecutivi modellati da variabili aleatorie esponenziali mutualmente indipendenti. Quando l'orologio dell'agente v ticchetta, esso si attiva e contatta uno dei suoi vicini a caso, diciamo w. A questo punto gli agenti v e w si scambiano i loro dati al tempo t in

cui l'orologio ha ticchettato, $x_v(t)$ e $x_w(t)$, e mediano ottenendo come nuovo valore comune $(x_v(t) + x_w(t))/2$. Questo nuovo valore comune verrà mantenuto dai due agenti fino alla prossima interazione *gossip* nella quale verranno eventualmente coinvolti. Questo modello è considerato con un certo interesse anche nella letteratura sulla dinamica delle opinioni: il meccanismo di interazione *gossip* è in effetti considerato una buona approssimazione del modo in cui avvengono i contatti tra le persone di una comunità.

Il modo più semplice per studiare questo algoritmo è di pensarlo a tempo discreto dove gli istanti discreti indicizzati da interi non negativi rappresentano gli istanti in cui l'orologio di un qualche agente ticchetta. Si può quindi immaginare che ad ogni tempo $t \in \mathbb{N}$, un agente v scelto a caso uniformemente si attivi, contatti un vicino w e che, alla fine dell'interazione, si abbia

$$x_v(t+1) = x_w(t+1) = \frac{x_v(t) + x_w(t)}{2}\,, \tag{3}$$

mentre tutti gli altri agenti mantengono inalterato il loro valore. Si noti come, in questa nuova modellizzazione, si sia assunto implicitamente che due orologi non possano ticchettare allo stesso istante: questo fatto non sarebbe escluso a priori nel modello originale ma è facile rendersi conto che esso ha probabilità di accadere nulla e quindi escluderlo non è un gran danno. La prima cosa che ci possiamo chiedere su questo algoritmo è se esso converga e, in caso positivo, quale ne sia il limite. Data la natura probabilistica dell'algoritmo, ci aspettiamo delle risposte di tipo probabilistico. Chiaramente è possibile che l'algoritmo non converga affatto o che converga a qualcosa che non è un consenso: per quest'ultimo fenomeno è sufficiente pensare alla successione di eventi dove sempre la stessa coppia (v, w) viene scelta. Tuttavia è lecito pensare che fenomeni di questo tipo abbiano probabilità nulla di accadere. In effetti questo è il risultato che si ottiene: con probabilità uno l'algortimo *gossip* sopra descritto converge e la configurazione delle opinioni finali è data dal consenso alla media delle opinioni iniziali, cioè $x_v(\infty) = N^{-1}\mathbf{1}^T x(0)$ per ogni v. Nel seguito vorremmo dare un accenno alla dimostrazione di questo fatto in quanto si può ottenere in maniera essenzialmente elementare utilizzando tecniche *à la* Lyapunov. L'idea centrale consiste nel considerare la funzione $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ data da

$$L(x) = \sum_{i,k} (x_i - x_k)^2\,, \tag{4}$$

e di studiare come essa varia in ciascun istante di *gossip*. Si vuole, cioè, confrontare $L(x(t+1))$ con $L(x(t))$. Supponiamo che la coppia attivata al

tempo t sia (v, w). Utilizzando l'equazione di aggiornamento (3), si ottiene che

$$(x_v(t+1) - x_w(t+1))^2 = 0 \leq (x_v(t) - x_w(t))^2 . \tag{5}$$

Inoltre, per ogni altro nodo l distinto da v e w, l'equazione (1) e la disuguaglianza $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ implicano che

$$\begin{aligned}(x_v(t+1) - x_l(t+1))^2 + (x_w(t+1) - x_l(t+1))^2 & \\ = \frac{1}{2}(x_v(t) + x_w(t) - 2x_l(t))^2 & \\ \leq (x_v(t) - x_l(t))^2 + (x_w(t) - x_l(t))^2 .&\end{aligned} \tag{6}$$

Infine, si noti che se j e k sono due nodi entrambi distinti da v e w, entrambi non modificano il loro stato e dunque

$$(x_j(t+1) - x_k(t+1))^2 = (x_j(t) - x_k(t))^2 \tag{7}$$

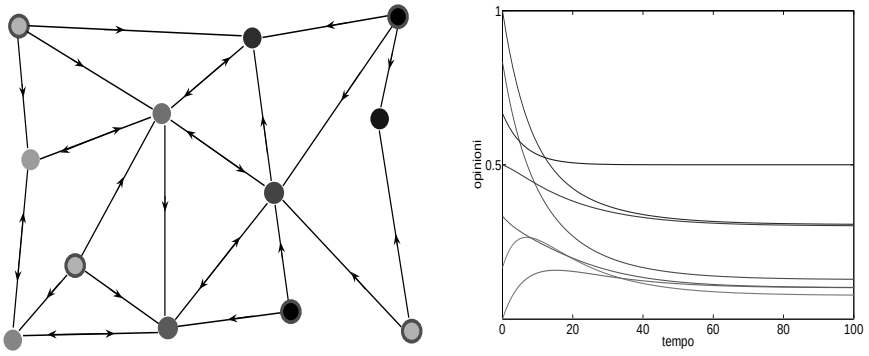
Dalle stime (5), (6), e (7) segue subito che $L(x(t+1)) \leq L(x(t))$. In realtà si può dire qualcosa di un po' più preciso sul tasso di questa monotonia. Indichiamo con $d_{\max}$ il valore massimo dei gradi del grafo. Allora, con probabilità almeno $p = 1/(Nd_{\max}) > 0$, ad ogni istante t si selezionerà la coppia di vertici v, w corrispondente ad un arco per il quale è massima $(x_v(t) - x_w(t))^2$ tra tutti i possibili archi del grafo. Utilizzando la diseguaglianza triangolare si ottiene subito la stima $L(x(t)) \leq \delta^2 N^2 (x_v(t) - x_w(t))^2$ dove δ è il diametro del grafo. Dalle considerazioni precedenti segue quindi che in tal caso

$$L(x(t+1)) \leq L(x(t)) - (x_v(t) - x_w(t))^2 \leq \left(1 - \frac{1}{\delta^2 N^2}\right) L(x(t)) \tag{8}$$

Poichè le scelte delle interazioni ai vari istanti sono tra loro indipendenti, ne segue che con probabilità 1 infinite volte verrà scelta la coppia v, w che massimizza $|x_v(t) - x_w(t)|$. Da (8) segue che $L(x(t))$ converge a 0 con probabilità uno.

5 Modelli non omogenei

I modelli fin qui discussi sono caratterizzati da una sostanziale omogeneità nel comportamento degli agenti. In particolare, l'ipotesi di forte connessione implica che, benché eventualmente occupante posizioni diverse del grafo, ciascun agente interagisca in maniera non banale con qualche altro agente suo vicino, e venga influenzato dall'opinione di quest'ultimo. Tuttavia, un caso molto interessante da studiare è quello in cui sia presente un certo numero



(a) (b)

Figura 4: Dinamica di opinioni in una popolazione con 7 agenti regolari e 5 agenti testardi. In (a) il grafo di comunicazione, con gli agenti testardi rappresentati da nodi cerchiati, e tutti i nodi colorati su una scala di grigio corrispondente alla propria opinione limite. In (b) le traiettorie delle opinioni.

di agenti 'testardi', le cui opinioni non vengono mai influenzate da quelle di alcun altro agente, ma ciononostante influenzano quelle di altri agenti [26, 2]. Nel contesto delle reti sociali, tali agenti testardi possono essere pensati come modelli di *opinion leader*, partiti politici, mezzi pubblicitari, etc.

Supponiamo ad esempio che la popolazione sia formata da m agenti regolari, indicizzati dagli interi $i = 1, \ldots, m$, con $1 \leq m < n$, e $n - m$ agenti testardi, indicizzati dagli interi $s = m + 1, \ldots, n$. Si assuma che le opinioni di tutti gli agenti seguano la dinamica lineare (1), dove la matrice stocastica P ha la peculiarità che $P_{ss} = 1$ e $P_{sj} = 0$ per ogni $s > m$ ed ogni $j \neq s$. Tali ipotesi implicano, in particolare, che

$$x_s(t) = y_s\,, \qquad s = m + 1, \ldots, n\,,$$

per ogni $t \geq 0$, cioè l'opinione di ogni agente testardo resta costante nel tempo. Chiaramente, il grafo diretto $\mathcal{G}_P = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ associato alla matrice P non è fortemente connesso, dal momento che, partendo da un qualsiasi nodo corrispondente ad un agente regolare, non è possibile raggiungere alcun nodo corrispondente ad un agente testardo. Si assuma, altresì, che, per ogni agente regolare $i = 1, \ldots, m$, esista un percorso nel grafo diretto $\mathcal{G}_P$ che parta da un nodo $s = m + 1, \ldots, n$ corrispondente ad un qualche agente

testardo e termini nel nodo i. Questo implica che l'opinione di ogni agente regolare sia influenzata, direttamente o indirettamente, da quella di almeno un agente testardo.

Risulta conveniente considerare separatamente un vettore tempo-variante $z(t)$, di dimensione m, le cui componenti $z_i(t) = x_i(t)$ siano le opinioni degli agenti regolari $i = 1, \ldots, m$, ed un vettore costante nel tempo u, di dimensione $n - m$, le cui componenti $u_i = y_{m+i}$, per $i = 1, \ldots, n - m$, coincidano con le opinioni degli agenti testardi. Introduciamo anche una matrice quadrata A di dimensioni $m \times m$, corrispondente al blocco in alto a sinistra della matrice P, cioè di componenti $A_{i,j} = P_{i,j}$ per $i, j = 1, \ldots, m$, e una matrice rettangolare B di dimensioni $m \times (n - m)$ corrispondente al blocco in alto a destra della matrice P, cioè di componenti $B_{i,j} = P_{i,j+m}$ per $i = 1, \ldots, m$, e $j = 1, \ldots, n - m$. Possiamo allora riscrivere la dinamica delle opinioni degli agenti regolari nella forma

$$z(t + 1) = Az(t) + Bu\,, \qquad \forall t \geq 0\,,$$

da cui segue che

$$z(t) = A^t z(0) + \sum_{0 \leq k < t} A^k B u\,, \qquad \forall t \geq 0\,. \tag{9}$$

Si osservi ora che la matrice A è substocastica, cioè ha componenti non negative e somma su ciascuna riga minore o uguale a 1. Inoltre, l'ipotesi che ogni agente regolare i sia influenzato, direttamente o indirettamente, da un agente testardo s, implica che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, e per ogni sottoinsieme $\mathcal{J} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, si abbia $\sum_{j \in \mathcal{J}} A_{i,j} < 1$. Tale proprietà e il teorema di Perron e Frobenius implicano allora che il raggio spettrale (cioè il massimo modulo degli autovalori) di A, soddisfi $0 \leq \rho(A) < 1$. Da questo seguono immediatamente la convergenza di A^t a zero al crescere di t, l'invertibilità della matrice $I - A$ e la convergenza della serie geometrica

$$\lim_{t \to +\infty} \sum_{0 \leq k < t} A^k = (I - A)^{-1}\,.$$

Passando al limite nell'identità (9) si ottiene allora che

$$z(\infty) := \lim_{t \to +\infty} z(t) = \lim_{t \to +\infty} A^t z(0) + \lim_{t \to +\infty} \sum_{0 \leq k < t} A^k B u = (I - A)^{-1} B u\,.$$

Si rammenti ora che $z_i(t) = x_i(t)$, e che A e B sono i due blocchi in alto a sinistra e a destra, rispettivamente, della matrice P. Possiamo quindi

riassumere il risultato sopra dicendo che il vettore $x(t)$ delle opinioni di tutti gli agenti (regolari e testardi) converge ad un vettore limite $x(\infty)$ che soddisfa il sistema lineare

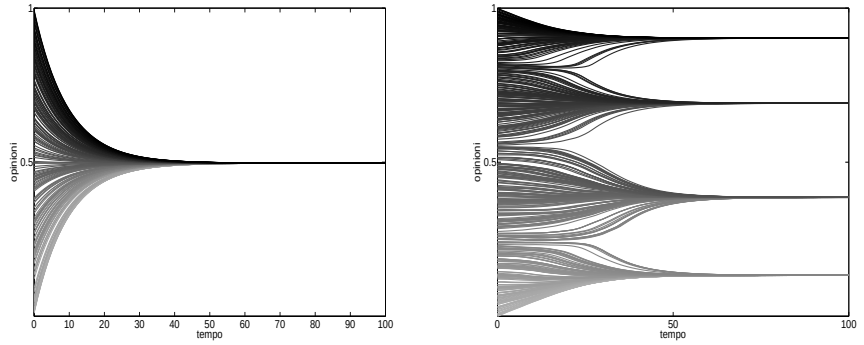
$$\begin{cases} x_i(\infty) - \sum_j P_{i,j} x_j(\infty) = 0 & \forall\, 1 \le i \le m \\ x_s(\infty) = y_s & \forall\, m < s \le n\,. \end{cases}$$

La prima equazione dice che l'opinione asintotica di ogni agente regolare è la media, secondo i pesi dati dalla matrice P, delle opinioni asintotiche dei suoi vicini, mentre la seconda dice la cosa ovvia che l'opinione asintotica degli agenti testardi è esattamente quella iniziale. Si può quindi pensare al sistema sopra come un'equazione di Laplace (ed in effetti $I - P$ è proprio detto Laplaciano della catena di Markov P) con condizioni al contorno: $x(\infty)$ è un vettore armonico sull'insieme degli agenti regolari con condizioni al bordo corrispondenti ai valori fissati delle opinioni degli agenti testardi. È semplice dimostrare che, sotto l'ipotesi che ogni agente regolare sia influenzato da almeno un agente testardo, esiste uno ed un solo vettore che soddisfi il sistema sopra. Si osservi in particolare come $x(\infty)$ non dipenda dai valori iniziali y_i delle opinioni degli agenti regolari, ma soltanto dalla matrice P, e dal vettore u delle opinioni degli agenti testardi. Inoltre, tale dipendenza in P ed u è chiaramente continua.

È possibile dare una caratterizzazione del vettore $x(\infty)$ in termini di una catena di Markov a tempo discreto con matrice delle probabilità di transizione coincidente con P. Si consideri una particella in moto casuale sull'insieme dei nodi $\mathcal{V}$, la cui posizione al tempo t è denotata $V(t)$, e tale che la probabilità che la particella all'istante $t+1$ sia in $V(t+1) = j$, dato che all'istante t si trova nel nodo $V(t) = i$, è uguale a $P_{i,j}$. Per ogni agente $i = 1, \ldots, n$, ed ogni testardo $s = m+1, \ldots, n$, sia γ_s^i la probabilità che una particella che parta da i visiti s prima di qualsiasi altro nodo corrispondente ad un agente testardo. Dato che $\gamma_s^s = 1$ e $\gamma_j^s = 0$ per ogni coppia di agenti testardi distinti $j \neq s \in \{m+1, \ldots, n\}$, non è difficile verificare che

$$x_i(\infty) = \sum_{m < s \le n} \gamma_s^i u_s\,, \qquad \forall i = 1, \ldots, n\,.$$

Tale rappresentazione del vettore di opinioni limite in termini probabilistici può essere utilizzata per dimostrare proprietà qualitative in reti con un grande numero di nodi; si veda ad esempio [2].



(a) (b)

Figura 5: Dinamica delle opinioni in un modello a fiducia limitata. In entrambi i grafici, le opinioni iniziali sono campionate indipendentemente e uniformemente nell'intervallo $[0, 1]$. In (a), la soglia di fiducia è $\Delta = 1$, la lunghezza dell'intervallo delle opinioni, e come discusso nel testo, si osserva convergenza ad un consenso unanime intorno al valor medio 0.5. In (b), la soglia di convergenza è $\Delta = 0.1$, e si osserva un fenomeno di frazionamento della popolazione in 4 fazioni, internamente al consenso intorno ad opinioni la cui distanza reciproca è strettamente maggiore della soglia di fiducia.

6 Modelli a fiducia limitata

Nei modelli presentati finora, si è ipotizzato che il meccanismo di interazione locale e conseguente aggiornamento dell'opinione sia lineare e dipenda solo dall'identità degli agenti ed eventualmente da qualche fattore esogeno (ad esempio, variabilità stocastica della rete d'interazione). Come esposto nelle sezioni precedenti, sotto ipotesi minimali di connessione della rete, ed in assenza di particolari eterogeneità quali la presenza di agenti testardi, tali meccanismi di interazione fanno sì che il sistema converga asintoticamente ad una condizione di consenso unanime.

Esistono tuttavia numerosi esempi, sia nelle scienze sociali e naturali, sia nei modelli ingegneristici, in cui questa ipotesi risulta troppo restrittiva. Talvolta tali modelli di interazione locale risultano di difficile giustificazione da un punto di vista microscopico. Si pensi, ad esempio, al caso in cui il valore $x_i(t)$ rappresenti la posizione fisica dell'agente i in moto in un dato ambiente: in questo caso, risulta piuttosto irrealistico immaginare che il grado di interazione di due agenti sia indipendente dalla loro posizione reciproca in tale ambiente. D'altro canto, è il fatto stesso che, sotto ipotesi minimali di connessione della rete di interazione, tali meccanismi inducano il sistema a convergere ad un consenso unanime a sollevare forti dubbi sulla loro significatività come modelli di molti dei fenomeni osservabili a livello macroscopico nella realtà. Ad esempio, l'esperienza quotidiana e la storia suggeriscono come la convergenza verso il consenso unanime sia una rara eccezione, mentre fenomeni tipicamente osservabili nella vita politica e sociale mostrino piuttosto il persistere di forti disaccordi nelle opinioni degli individui. Infine, un altro forte limite dei modelli illustrati nelle sezioni precedenti, è dato dalla loro natura di sistemi dinamici lineari, che come tali non sono in grado di spiegare come significative differenze nel comportamento macroscopico emergente possano insorgere pur partendo da condizioni iniziali molto vicine. Di qui la necessità di modelli di interazione tra agenti, tipicamente non lineari, che siano sia più realistici da un punto di vista microscopico, sia capaci di predire una gamma di comportamenti macroscopici emergenti più ricca del solo consenso unanime, e con possibili discontinuità rispetto alle condizioni iniziali [4, 17, 28, 15].

Una famiglia di tali modelli è fornita dai meccanismi di interazione in cui si assume che il peso dato da ciascun agente all'opinione dei suoi vicini nella rete non dipenda solo dall'identità dell'agente e dei vicini stessi, ma

anche dalle loro opinioni correnti, cioè che

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j \neq i} P_{i,j}(x_i(t), x_j(t))(x_j(t) - x_i(t)) \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,. \quad (10)$$

Chiaramente, i modelli lineari della Sezione 2, possono essere visti come un caso particolare di (10), in cui $P_{i,j}(x_i, x_j)$ è costante per ogni coppia di agenti.

Ogni qual volta $P_{i,j}(x_i, x_j)$ non sono tutti costanti, il sistema dinamico (10) diventa non lineare. In generale, l'ipotesi tipica è che il peso dato da un agente all'opinione di un suo vicino decresca al crescere della distanza tra le loro opinioni, cioè che

$$P_{i,j}(x_i, x_j) = f_{i,j}(|x_j - x_i|) \,,$$

dove si ipotizza che le funzioni $f_{i,j}(z)$ siano tutte a valori non negativi, decrescenti (non necessariamente strettamente) nella variabile z, e tali che $\sum_{j \neq i} f_{i,j}(0) < 1$.

Nel caso delle reti sociali questo tipo di meccanismo è stato introdotto per modellare fenomeni di *omofilia*, cioè la tendenza di ciascun individuo i ad interagire in misura ed efficacia maggiori con quegli altri individui che siano già più simili a lui (cioè quei j per i quali la distanza reciproca delle opinioni attuali, $z = |x_j(t) - x_i(t)|$, sia piccola), ed in misura minore con individui meno simili a lui (cioè quei j per i quali $z = |x_j(t) - x_i(t)|$ sia grande).[1] Il valore $\eta_{i,j}$ tale che $f_{i,j}(z) > 0$ per ogni $z < \eta_{i,j}$, e $f_{i,j}(z) = 0$ per ogni $z \geq \eta_{i,j}$ è detto *soglia di fiducia* dell'agente i in j. Il caso in cui j non sia un vicino diretto di i nella rete di interazione corrisponde ad avere $\eta_{i,j} = 0$, cioè nessuna influenza di j su i. Quando invece i e j sono vicini diretti nella rete, allora necessariamente la soglia di fiducia $\eta_{i,j}$ è strettamente positiva. Nel caso in cui tale soglia di fiducia sia infinita per ogni agente j vicino di i, il comportamento asintotico è molto simile al caso lineare, con convergenza ad un consenso unanime. Sono invece i modelli *a fiducia limitata*, cioè quelli in cui tutte le soglie di fiducia $\eta_{i,j}$ sono finite, ad esibire una fenomenologia di comportamenti macroscopici emergenti molto più ricca. Per questi modelli la rete di interazione varia nel tempo in maniera endogena, attraverso una dinamica accoppiata a quella delle opinioni stesse.

[1] È opportuno notare come esistano altre modellizzazioni di meccanismi di omofilia nelle scienze sociali. Una diversa definizione di omofilia, ormai largamente accettata dalla comunità scientifica, si basa basa sul concetto di 'similarità di tipi' presente *a priori* nella struttura della rete [16]. Invece, il meccanismo di omofilia presentato in queste pagine modella una nozione di similarità à posteriori che si rifà alla definizione di Axelrod [4].

Il modello a fiducia limitata più semplice è probabilmente quello in cui, per ogni coppia di agenti $i \neq j$,

$$P_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \theta & \text{se} \quad |x_i - x_j| < \Delta \\ 0 & \text{se} \quad |x_i - x_j| \geq \Delta \,, \end{cases}$$

dove $\Delta > 0$ è una soglia di fiducia, e $\theta \in [0, 1/n]$ una costante, entrambi omogenei nella popolazione. In questo modello, ogni agente aggiorna la propria opinione considerando solo tutti gli altri agenti le cui opinioni correnti si trovino a distanza dalla propria opinione minore della soglia di fiducia Δ. Al solito, si fissa $P_{i,i} = 1 - \sum_{j \neq i} P_{i,j}$.

Si osservi che, nel caso in cui le opinioni iniziali siano tutte all'interno di un medesimo intervallo di ampiezza minore o uguale alla soglia Δ, allora rimarranno in tale intervallo per sempre. Ne segue che $P_{i,j}(x_i(t), x_j(t)) = \theta$ per ogni coppia di agenti $i \neq j$, e per ogni istante t, cosicché il modello si riduce ad un dinamica lineare sul grafo completo, e dunque converge ad un consenso unanime alla media aritmetica delle condizioni iniziali, con velocità di convergenza esponenziale in θt.

Al variare delle condizioni iniziali, tuttavia, si possono osservare diversi comportamenti. Si consideri, ad esempio, il caso in cui le condizioni iniziali di una fazione degli agenti giacciano nell'intervallo $(-3\Delta/2, -\Delta/2)$, e quelle del resto della popolazione giacciano nell'intervallo $(\Delta/2, 3\Delta/2)$. Dal momento che non sono possibili interazioni tra agenti a distanza maggiore o uguale alla soglia di fiducia Δ, e che l'opinione di un agente muove sempre verso una combinazione convessa delle opinioni da essa distanti meno di Δ, non è difficile vedere che gli agenti continueranno ad interagire solo all'interno delle due fazioni iniziali. Una semplice applicazione del ragionamento precedente ad entrambi i due sottosistemi, dimostra che ciascuna delle due fazioni raggiungerà asintoticamente un consenso intorno alla media aritmetica delle proprie condizioni iniziali. In questo caso dunque, il sistema convergerà sì, ma non verso un consenso unanime, quanto piuttosto verso una condizione di polarizzazione della popolazione intorno a due valori (le medie aritmetiche delle opinioni delle due fazioni) chiaramente separati tra loro da una distanza maggiore della soglia di fiducia Δ.

Mentre tale esito appare piuttosto scontato per le condizioni iniziali descritte sopra, è meno banale, ma –come si vedrà presto– possibile, dimostrare un risultato generale. Ciò che accade infatti è che, per ogni condizione iniziale, tali sistemi convergono asintoticamente ad una condizione di frammentazione della popolazione in un numero di fazioni ciascuna delle quali internamente al consenso intorno ad un'opinione comune. Le opinioni asin-

totiche di ciascuna di tali fazioni emergenti saranno a distanza reciproca non inferiore a Δ.

L'affermazione precedente si può dimostrare con il ragionamento seguente, che è un'applicazione di un principio generale noto sotto il nome di Krasovskii-LaSalle. Fissiamo un istante di tempo $t \geq 0$, e, per ogni coppia di agenti i, j, scriviamo per brevità $P_{i,j}$ per $P_{i,j}(x_i, x_j)$. Per prima cosa, si osservi che la simmetria $P_{i,j} = P_{ji}$ implica che

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} P_{i,j}(x_j - x_i)^2 &= -\sum_{i,j} P_{i,j} x_j (x_i - x_j) - \sum_{i,j} P_{i,j} x_i (x_j - x_i) \\ &= -2 \sum_{i,j} P_{i,j} x_i (x_j - x_i) \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Dalla disuguaglianza $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, valida per ogni coppia di numeri reali a e b, e dalle proprietà $P_{i,j}^2 = \theta P_{i,j} \leq n^{-1} P_{i,j}$ per ogni $i \neq j$, segue che

$$\Big(\sum\nolimits_j P_{i,j}(x_j - x_i) \Big)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sum\nolimits_j P_{i,j}(x_j - x_i)^2 \,. \tag{12}$$

Possiamo ora studiare l'evoluzione della somma dei quadrati delle opinioni, che denotiamo con

$$\xi_t^2 := \sum_i x_i^2(t) \,.$$

Usando l'identità (11) e la disuguaglianza (12), si ha che

$$\begin{aligned} \xi_{t+1}^2 &= \sum_i x_i^2(t+1) \\ &= \sum_i \Big(x_i(t) + \textstyle\sum_j P_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)) \Big)^2 \\ &= \sum_i x_i^2(t) + \sum_i \left(\Big(\textstyle\sum_j P_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)) \Big)^2 + 2 \textstyle\sum_j P_{i,j} x_i (x_j - x_i) \right) \\ &\leq \xi_t^2 + \big(1 - \tfrac{1}{n}\big) \sum_{i,j} P_{i,j}(x_j(t) - x_i(t))^2 - \sum_{i,j} P_{i,j}(x_j(t) - x_i(t))^2 \,, \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere come

$$\xi_{t+1}^2 - \xi_t^2 \leq -\frac{1}{n} \chi_t \,, \qquad \chi_t := \sum_{i,j} P_{i,j}(x_j(t) - x_i(t))^2 \tag{13}$$

Poiché chiaramente $\chi_t \geq 0$, l'identità qui sopra implica che $\xi_{t+1}^2 \leq \xi_t^2$, così che la successione (ξ_t^2) risulta monotona decrescente e dunque necessariamente convergente. Ne segue che $\xi_{t+1}^2 - \xi_t^2$ converge a zero al crescere di t,

e quindi (13) implica ancora che χ_t converga a 0 al crescere di t. Ora, si osservi che

$$\chi_t = \theta \sum_{\substack{i,j: \\ |x_i(t)-x_j(t)|\leq\Delta}} (x_j(t) - x_i(t))^2 ,$$

da cui segue, in particolare che, per ogni coppia di agenti i, j, o la distanza $|x_i(t) - x_j(t)|$ tende a zero, oppure il limite inferiore di tale distanza è maggiore o uguale a Δ. Possiamo allora dire che i e j appartengono alla stessa fazione se il limite della loro distanza è zero. Quanto discusso sopra dimostra che il sistema si fraziona asintoticamente in un numero di fazioni le cui opinioni sono separate da una distanza di almeno Δ tra loro, come anticipato.

Si osservi come il risultato precedente permetta di dare una stima dall'alto, l'ampiezza dell'intervallo in cui giacciono le opinion iniziali diviso Δ, del numero di fazioni in cui la società si dividerà asintoticamente. Ottenere risultati rigorosi più precisi che permettano di mettere in relazione il numero di fazioni asintotiche con le condizioni iniziali resta un problema tuttora aperto di notevole rilevanza.

7 Estensioni e problemi aperti

In questa ultima sezione daremo una sintetica descrizione delle possibili generalizzazioni degli algoritmi descritti in questo articolo e dei problemi matematici ancora non risolti che queste generalizzazioni pongono alla comunità scientifica.

Una caratteristica comune degli algoritmi fin qui descritti è data dal fatto che questi danno tutti luogo a sistemi dinamici del primo ordine, cioè di sistemi per i quali ad ogni agente i è associato uno stato $x_i(t)$ scalare cioè appartenente a $\mathbb{R}$. Una naturale generalizzazione consiste nel permettere invece che $x_i(t)$ sia un vettore in $\mathbb{R}^n$. In realtà questa estensione è motivata da importanti applicazioni in cui il consenso tra agenti descritti da dinamiche di ordine superiore gioca un ruolo importante. Tra queste ricordiamo la sincronizzazione distribuita di orologi [10], gli algoritmi di consenso accelerati [32, 8], gli algoritmi di consenso alla media con grafi asimmetrici [20], gli algoritmi di ottimizzazione distribuita del secondo ordine [7]. Per dare un idea più concreta su questo tipo di generalizzazione, daremo ora qualche dettaglio del problema della sincronizzazione distribuita di orologi.

Supponiamo di avere un certo numero di orologi. Un semplice modello matematico dell'orologio i è dato dalla seguente equazione differenziale del

doppio integratore

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i1}(t) &= x_{i2}(t)\,,\\ \dot{x}_{i2}(t) &= 0\,,\\ y_i(t) &= x_{i1}(t)\,,\end{aligned}$$

in cui $y_i(t) = x_{i1}(t)$ è il tempo stimato dall'orologio e $x_{i2}(t) = x_{i2}(0)$ è la velocità dell'orologio. In certi istanti $T_1, T_2, T_3, \ldots$ alcuni orologi possono scambiarsi la loro stima del tempo per cercare di convergere a stime del tempo congruenti. Una semplice metodologia consiste nella seguente operazione eseguita da ciascun orologio i negli istanti $T_h, h = 1, 2, 3, \ldots$ a partire dai tempi $y_j(T_h)$ stimati dagli altri orologi con cui comunica

$$\begin{aligned}x_{i1}(T_h^+) &= x_{i1}(T_h) + \alpha \sum_j K_{i,j}(h)(y_j(T_h) - y_i(T_h))\,,\\ x_{i2}(T_h^+) &= x_{i2}(T_h) + \beta \sum_j K_{i,j}(h)(y_j(T_h) - y_i(T_h))\,,\end{aligned}$$

dove i coefficienti α, β sono fissi e comuni a tutti gli orologi, mentre i coefficienti $K_{i,j}(h)$ dipendono sia dagli orologi coinvolti nella comunicazione che dal particolare istante T_h (questo è dovuto in particolare al fatto che in ciascun istante T_h la topologia di comunicazione, che influenzerà $K_{i,j}(h)$, sarà generalmente diversa). Questo tipo di strategia di sincronizzazione si dimostra funzionare sperimentalmente sotto ipotesi molto blande su $\alpha, \beta, K_{i,j}(h)$ anche se non esistono dimostrazioni matematiche a conferma di questo. Più in generale sono tuttora assente strumenti matematici in grado di dare risposte efficaci e sufficientemente generali sul raggiungimento del consenso per sistemi dinamici del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= Ax_i(t)\,,\\ y_i(t) &= Cx_i(t)\,,\end{aligned}$$

dove $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $y_i(t) \in \mathbb{R}^p$ e A, C sono le matrici che determinano la dinamica naturale dei sistemi, con una azione di consenso che avviene in istanti $T_1, T_2, T_3, \ldots$ del tipo

$$x_i(T_h^+) = x_i(T_h) + F \textstyle\sum_j K_{i,j}(h)(y_j(T_h) - y_i(T_h))\,,$$

dove F è una opportuna matrice. Il consenso per questo tipo generale di sistemi (soprattutto nel caso di sistemi con dinamica non lineare) è intensamente studiato nella comunità scientifica dei fisici matematici, che chiama questo problema col nome di sincronizzazione di sistemi [39]. Tuttavia sono abbastanza limitati i risultati matematici proposti nell'ambito del consenso o

sincronizzazione di questi sistemi, dato che nella comunità dei fisici matematici ci si limita spesso nello studio di questi sistemi a intensive analisi tramite simulazioni al calcolatore. Fa eccezione il cosiddetto modello di Kuramoto [38], per il quale esistono invece numerosi importanti risultati matematici nel caso di topologia di comunicazione invariante nel tempo. Alcuni primi risultati rigorosi sul consenso di sistemi nonlineari o a dimensione elevata sono riportati nelle recenti pubblicazioni [5, 37, 45].

Vogliamo concludere affermando che, nonostante l'ampio interesse per il problema del consenso che esiste in diverse comunità scientifiche, una comprensione completa dal punto di vista matematico di questo tipo di problemi è ancora da raggiungere. Questo è soprattutto vero quando si ha a che fare con topologie di comunicazione che variano nel tempo e nel caso in cui i sistemi siano di ordine superiore e ancora di più se sono descritti da dinamiche non lineari. Per questo motivo pensiamo che questo argomento potrà essere molto stimolante nel futuro per la comunità dei ricercatori che operano nelle discipline matematiche.

Riferimenti bibliografici

[1] D. Acemoglu, A. Ozdaglar, "Opinion dynamics and learning in social networks", *Dynamic Games and Applications*, vol. 1(1), pp. 3–49, 2011.

[2] D. Acemoglu, G. Como, F. Fagnani, A. Ozdaglar, "Opinion fluctuations and disagreement in social networks", *Mathematics of Operation Research*, sottomesso, 2011.

[3] N. Alon and Y. Roichman, "Random Cayley graphs and expanders", *Random Structures & Algorithms*, vol. 5(2), pp. 271–284, 1994.

[4] R. Axelrod, "The dissemination of culture", *J. of Conflict Resolution*, vol. 42(2), pp. 203–226, 1997.

[5] H. Bai, M. Arkac, and J. Wen, *Cooperative control design: a systematic, passivity-based approach*, Communications in Control and Engineering, Springer, New York, 2011.

[6] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, D. Shah, "Randomized gossip algorithms", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52(6), pp. 2508–2530, 2006.

[7] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, J. Eckstein, "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of

multipliers", *Foundations and Trends in Machine Learning*, vol. 3(1), pp. 1124, 2011.

[8] M. Cao, D. A. Spielman, E. M. Yeh, "Accelerated gossip algorithms for distributed computation", in Proceedings of the 44th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computation, Monticello, IL, USA, Sep. 2006.

[9] R. Carli, F. Fagnani, A. Speranzon, S. Zampieri, "Communication constraints in the average consensus problem", *Automatica*, vol. 44(3), pp. 671–684, 2008.

[10] R. Carli, S. Zampieri, "Networked clock synchronization based on second order linear consensus algorithms", IEEE Conference on Decision and Control, 2010.

[11] "Robustness of transEuropean gas networks", Physical Review E, vol. 80, 016106, 2009.

[12] C. Castellano, S. Fortunato, V. Loreto, "Statistical physics of social dynamics", *Review of Modern Physics*, vol. 81, pp. 591–646, 2009.

[13] M. Chiang, S. H. Low, A. R. Calderbank, and J. C. Doyle,"Layering as optimization decomposition: A mathematical theory of network architectures," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95(1), pp. 255–312, 2007.

[14] J. Cortés, S. Martinez, F. Bullo, "Robust rendezvous for mobile autonomous agents via proximity graphs in arbitrary dimensions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51(8), pp. 1289–1298, 2006.

[15] F. Cucker, S. Smale, "Emergent behavior in flocks" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52(5), pp. 852–862, 2007.

[16] S. Currarini, M. O. Jackson, P. Paolo, "An economic model of friendship: homophily, minorities, and segregation", *Econometrica*, vol. 77(4), pp. 1003–1045, 2009.

[17] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, G. Weisbuch, "Mixing beliefs among interacting agents", *Advances in Complex Systems*, vol. 3, pp. 87–98, 2000.

[18] F. Fagnani, S. Zampieri, "Randomized consensus algorithms over large scale networks", *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 26, pp. 634–649, 2008.

[19] J. A. Fax, R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations", *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 49(9), pp. 1465–1476, 2004.

[20] M. Franceschelli, A. Giua, C. Seatzu, "Consensus on the average on arbitrary strongly connected digraphs based on broadcast gossip algorithms",1st IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems, Venice, Italy, Sett. 2009.

[21] F. Galton, "Vox populi", *Nature*, vol. 75, pp. 450–451, 1907.

[22] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Chelsea Publishers, New York, 1959.

[23] B. Golub, M. O. Jackson, "Naïve learning in social networks and the wisdom of crowds", *American Economic Journal: Microeconomics*, vol. 2(1), pp. 112–149, 2010.

[24] A. Jadbabaie, J. Lin, A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48(6), pp. 988–1001, 2003.

[25] M. O. Jackson, *Social and economic networks*, Princeton University Press, 2008.

[26] M. Ji, G. Ferrari-Trecate, M. Egerstedt, A. Buffa, "Containment control in mobile networks" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53(8), pp. 1972–1975, 2008.

[27] K. J. Kansky, *Structure of transportation networks: relationships between network geometry and regional characteristics*, University of Chicago, 1963.

[28] U. Krause, "A discrete nonlinear and non-autonomous model of consensus formation", *Communications in Difference Equations*, pp. 227–236, S. Elaydi, G. Ladas, J. Popenda, and J. Rakowski editors, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.

[29] J. Lorenz, "Continuous opinion dynamics under bounded confidence: A survey", *International Journal of Modern Physics C*, vol. 18(12), pp. 1819–1838, 2007.

[30] D. J. C. MacKay, *Sustainable energy: without the hot air*, UIT Cambridge LTD, 2009.

[31] L. Moreau, "Stability of multiagent systems with time-dependent communication links", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, pp. 169–182, 2005.

[32] S. Muthukrishnan, B. Ghosh, M.H. Schultz, "First- and second-order diffusive methods for rapid, coarse, distributed load balancing", *Theory of Computing Systems*, vol. 31, pp. 331–354, 1998.

[33] M. E. J. Newman, *Networks: an introduction*, Oxford University Press, 2010.

[34] P. Niyogi, *The Computational nature of language, learning, and evolution*, MIT Press, 2006.

[35] R. Olfati-Saber, J.A. Fax, R.M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems", *Proceedings of the IEEE*, vol. 95(1), pp. 215–233, 2007.

[36] I. Rodríguez-Iturbe and A. Rinaldo, *Fractal river basins: chance and self-organization*, Cambridge University Press, 1997.

[37] L. Scardovi and R. Sepulchre, "Synchronization in networks of identical linear systems", *Automatica*, vol. 45, pp. 2557–2562, 2009.

[38] S. H. Strogatz, "From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 143(1–4), pp. 1–20, 2000.

[39] S. H. Strogatz, *Sync: The emerging science of spontaneous order*, Hyperion, 2003.

[40] J. Surowiecki, *The wisdom of crowds: why the many are smarter than the few and how collective wisdom shapes business, economies, societies and nations*, Little, Brown, 2004. Traduzione italiana: *La saggezza della folla*, Fusi Orari, 2007.

[41] J. Tsitsiklis, *Problems in decentralized decision making and computation*, Ph.D. thesis, Department of EECS, MIT, 1984.

[42] T. Vicsek, A. Czirk, E. Ben-Jacob, O. Shochet, "Novel type of phase transition in a system of self-driven particles", *Physical Review Letters*, vol. 75, pp. 1226–1229, 1995.

[43] J. Wolfers, E. Zitzewitz, "Prediction markets", *Journal of Economic Perspectives*, vol. 18(2), pp. 107–126, 2004.

[44] J. G. Wardrop, "Some theoretical aspects of road traffic research", ICE Proceedings: Engineering Divisions, vol. 1, pp. 45–53, 1952.

[45] P. Wieland, R. Sepulchre, and F. Allgöver, "An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization", *Automatica*, vol. 47, pp. 2557–2562, 2011.

[46] L. Xiao, S. Boyd, S. Lall, "A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus", *International Conference on Information Processing in Sensor Networks*, pp. 63–70, 2005.